

Lógica Combinatória - Mapas the Karnaugh

Introdução

A implementação duma função Booleana requiere a utilização de *gates*. Quanto menos *gates* forem necessárias para implementar essa função menor é a complexidade e o custo.

Existem essencialmente duas maneiras de simplificar uma função Booleana. Uma é algébrica, através dos teoremas da álgebra de Boole a outra é gráfica conhecida por Mapa de Karnaugh¹ (K-mapa). Este método é simples e funciona bastante bem para um número de variáveis inferior ou igual a 4, sendo no entanto possível a sua utilização até 6 variáveis. Para funções mais complexas existem algoritmos de minimização do tipo Quine-McCluskey.

1. Aspecto gráfico do K-mapa

Nos mapas seguintes, assume-se sempre 'A' como sendo o bit mais significativo do *minterm*. As marcas com o fundo colorido são opcionais, mas aparecem em alguns diagramas da literatura.

Os *minterms* são colocados em células segundo a sequência do código de Gray, por forma a garantir que só diferem no valor duma variável, viabilizando assim a simplificação por Adjacência.

Também é possível construir K-mapas com base em *maxterms* mas não serão aqui abordados.

a) Duas variáveis (k-2)

		A	
		0	1
B	0	$\bar{A}\bar{B}$	$A\bar{B}$
	1	$\bar{A}B$	AB

b) Três variáveis (k-3)

		A			
		00	01	11	10
C	0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}B\bar{C}$	$AB\bar{C}$	$A\bar{B}\bar{C}$
	1	$\bar{A}B C$	$\bar{A}B C$	$AB C$	$A\bar{B} C$

¹ Maurice Karnaugh - (1924 -) Físico e matemático americano, ainda vivo com 92 anos, que inventou os mapas com o seu nome, enquanto trabalhava nos Bell Labs (1952-66).

c) Quatro variáveis (k-4)

AB \ CD		A			
		00	01	11	10
D	00	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$A\bar{B}C\bar{D}$
	01	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$	$\bar{A}BC\bar{D}$	$A\bar{B}C\bar{D}$	$AB\bar{C}\bar{D}$
	11	$\bar{A}\bar{B}CD$	$\bar{A}BCD$	$AB\bar{C}D$	$ABC\bar{D}$
	10	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}BC\bar{D}$	$AB\bar{C}\bar{D}$	$ABC\bar{D}$

2. Minterm adjacentes

A cada célula do mapa está associada a um *minterm*. Por exemplo, no mapa de 4 variáveis (k-4) à célula 13 está associado ao minterm $A.B.\bar{C}.D$. Dois *minterms* dizem-se adjacentes quando diferem no valor duma só variável. Ainda no k-4, as células da primeira linha (0,1,3 e 2) são adjacentes às da última linha (8,9,11 e 10) e analogamente as células na primeira coluna (0,4,12 e 8) são adjacentes das células na última coluna (2,6,14 e 10). Ou seja, no K-mapa os extremos tocam-se (*wrap around*).

3. Construção do K-mapa

Dada uma Tabela de verdade, construímos o respectivo mapa da forma ilustrada na figura abaixo.

A	B	C	Y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

(a)

(b)

Y \ AB		00	01	11	10
		0	1	0	0
C	0	1	0	0	0
	1	1	0	0	0

(c)

Y \ AB		00	01	11	10
		0	1	0	0
C	0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$
	1	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$	$AB\bar{C}$	ABC

Figura 1 - Construção do K-mapa de 3 variáveis

Existe uma correspondência directa entre os 1's e os 0's (*minterms*) da Tabela de verdade com os 1's e os 0's inseridos nas células do mapa.

4. Vantagens do K-mapa na simplificação de funções Booleanas

Por inspeção visual, podemos simplificar o valor de 'Y' agrupando os *minterms* adjacentes, dando como resultado $Y = A \cdot B$, o que é visualizado através do círculo (ou elipse) a azul envolvendo os *minterms* em causa (note-se que a variável 'C' foi eliminada):

		AB			
		00	01	11	10
Y	C				
	0	1	0	0	0
	1	1	0	0	0

Figura 2 - Exemplo de simplificação

A idéia base consiste em envolver com círculos (*loops*) todas as zonas rectangulares que contêm 1's, usando o menor número de círculos. O resultado da simplificação é obtido somando os *minterms* depois de simplificados a que correspondem os círculos. Quanto mais elementos forem envolvidos pelo círculo mais simples resulta o *minterm*. No entanto, existem algumas regras a respeitar.

5. Regras para 'fazer' círculos no K-mapa

1. Usar o menor número de círculos que garantem que todos os 1's ficam incluídos.
2. Cada círculo deve envolver as células (na direção vertical e/ou na horizontal) em número de potências de 2 (i.e., 1, 2 ou 4). O círculo pode envolver células localizadas nos extremos do K-mapa (*wrap around*).
3. Um círculo não pode conter 0's mas pode conter X's (*don't cares*).
4. Um 1 pode ser envolvido por um círculo múltiplas vezes.

6. Outro exemplo com 3-variáveis

A expressão não minimizada é: $Y = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C}$

		AB			
		00	01	11	10
Y	C				
	0	1	0	1	1
	1	1	0	0	1

Figura 3 - K-mapa de 3 variáveis

Os quatro 1's nos cantos podem ser envolvidos por um único círculo. Todavia ainda resta um 1 para cobrir $A \cdot B \cdot \overline{C}$. Podemos associar este 1 isolado com o termo á sua direita, resultando: $Y = A \cdot \overline{C} + \overline{B}$

		AB			
		00	01	11	10
Y	C				
	0	1	0	1	1
	1	1	0	0	1

$Y = A\overline{C} + \overline{B}$

Figura 4 - K-mapa de 3 variáveis: *minterms* simplificados

Note-se que uma associação de dois *minterms* elimina uma só variável (e.g., $A \cdot \overline{C}$) e que a associação de 4 *minterms* elimina duas variáveis (e.g., \overline{B}).

7. Exemplo com 4-variáveis e *don't cares* (X')

Um círculo pode incluir X's (*don't cares*) se isso contribuir para reduzir o número de círculos final. No entanto, os X's não precisam de ser incluídos.

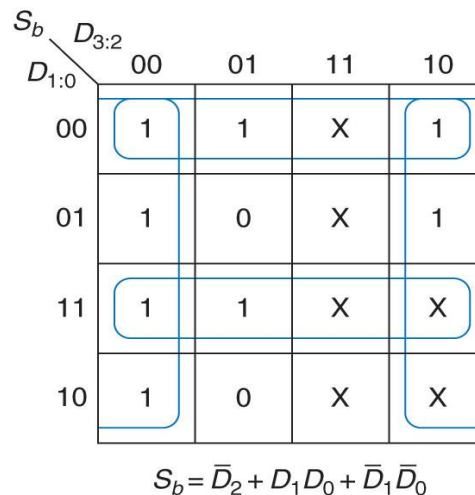


Figura 5 - Exemplo 3: K-mapa de 4 variáveis: *minterms* simplificados

8. Conclusão

Apresentámos um breve descrição sobre a técnica de simplificação gráfica de funções Booleanas conhecida por mapas de Karnaugh. Este assunto é tratado numa forma mais detalhada em quase todos os livros sobre sistemas digitais. Pretendeu-se aqui motivar o aluno para o estudo desta interessante técnica de simplificação que se reveste de grande interesse pedagógico nos primeiros passos com a álgebra de Boole.