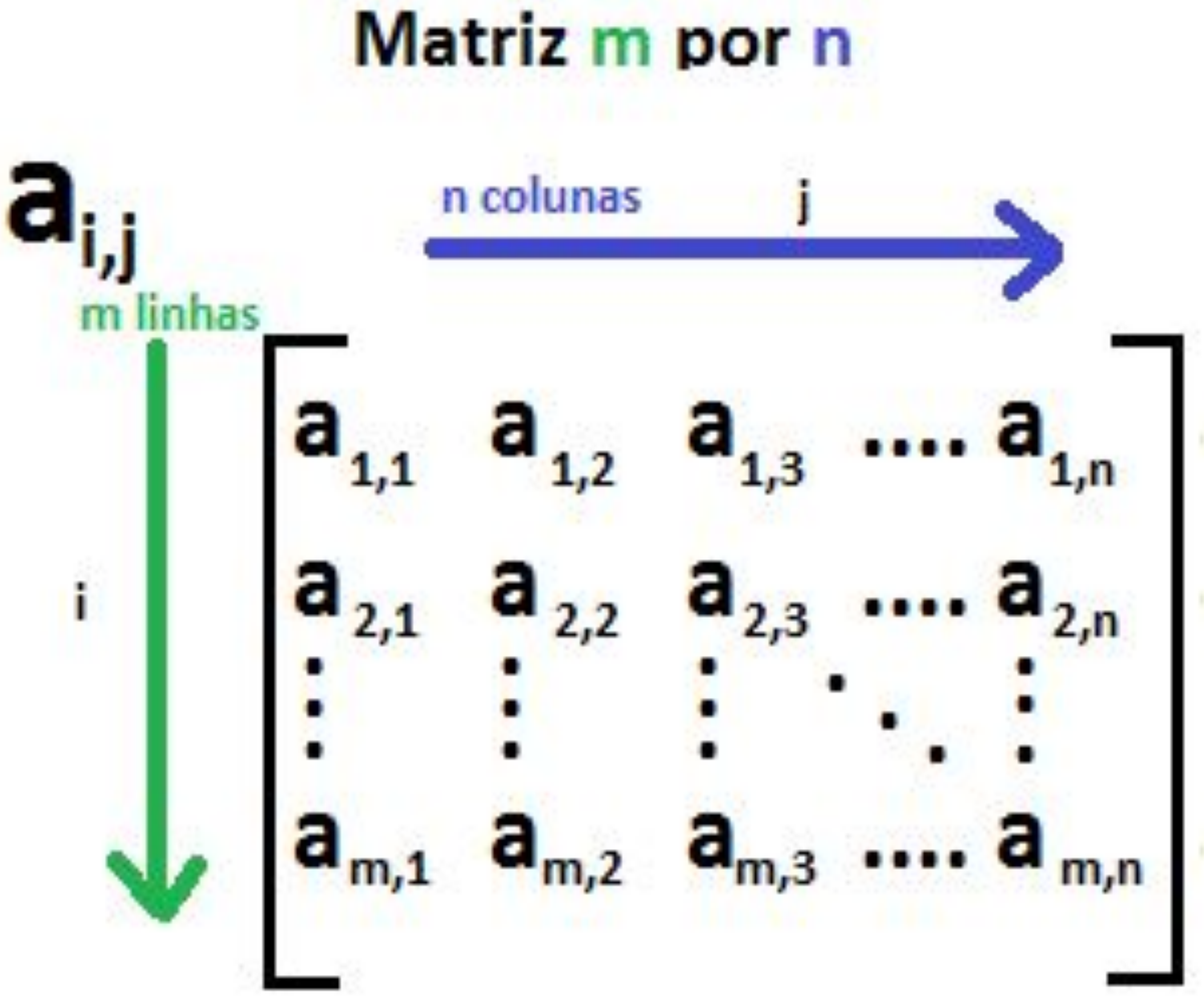
Matrizes

Revisão dos conteúdos

Noções de Matrizes

- Quadros formados por linhas e colunas
- Matriz 2x2 -» 2 linhas e 2 colunas -» *m* x *n*
- Um elemento a_{ij} se encontra na linha *i* e na coluna *j*.



Ficha 1 - Introdução

Matrizes Especiais

1) **Matriz Linha:** Toda matriz que possui uma única linha, do tipo 1 x *m*
2) **Matriz Coluna:** Toda matriz que possui uma única coluna, do tipo *n* x 1
3) **Matriz Nula:** Toda matriz que tem todos seus elementos iguais a zero
4) **Matriz Quadrada:** Toda matriz que possui o mesmo número de linhas e colunas (*m* = *n*)
   - Diagonal Principal: É o conjunto de elementos que têm os índices iguais: a_{11}, a_{22}, a_{33}, ... , a_{nn}
   - Diagonal Secundária: É o conjunto de elementos que têm os índices iguais a: $a_{i,n-i+1}$
5) **Matriz Diagonal:** Toda matriz quadrada em que os elementos que não estão na diagonal principal são iguais a zero.
6) **Matriz Identidade/Unidade:** Toda matriz em que os elementos da diagonal principal são iguais a 1. Representada pelo I
7) **Matriz Transposta:** Feita a partir de uma matriz *m* x *n*, gerando uma *n* x *m*
8) **Matriz Simétrica:** Toda matriz quadrada em que são iguais os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal
9) **Matriz Oposta:** Todos os termos da matriz -A são opostos aos de A

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix}$$

D é uma matriz coluna 4 x 1

$$\mathbf{B} = [\,2\ 4\ 6\,]$$

B é uma matriz linha 1 x 3

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

F é uma matriz nula 2 x 2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

A é uma matriz quadrada 2 x 2 ou A é quadrada de ordem 2

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 0{,}5 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } -\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -0{,}5 & -5 \end{bmatrix}$$

A transposta de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ é $\mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

Ficha 2 - Operações Iniciais

Igualdade de Matrizes

- Duas matrizes de mesma ordem são iguais quando todos os elementos de índices iguais têm o mesmo valor.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Igualdade de Matrizes

Adição de Matrizes

- Adição: A soma de duas matrizes A e B ambas do tipo *m* x *n* é uma matriz C do mesmo tipo, em que todo elemento $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- Propriedades:

1) Associativa: A + (B + C) = (A + B) + C
2) Comutativa: A + B = B + A
3) Elemento Neutro: Existe a matriz 0, tal que A + 0 = 0 + A = A
4) Elemento Simétrico: Para toda matriz A, existe a matriz -A, tal que A + (-A) = 0

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+1 & 2+2 \\ 3+3 & 4+4 \\ 5+5 & 6+6 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Subtração de Matrizes

- A diferença entre duas matrizes, A e B, de mesma dimensão, é a soma da matriz A com a oposta de B, isto é, A - B = A + (-B)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-2 & 2-1 \\ 3-8 & 4-4 \\ 5-5 & 6-10 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

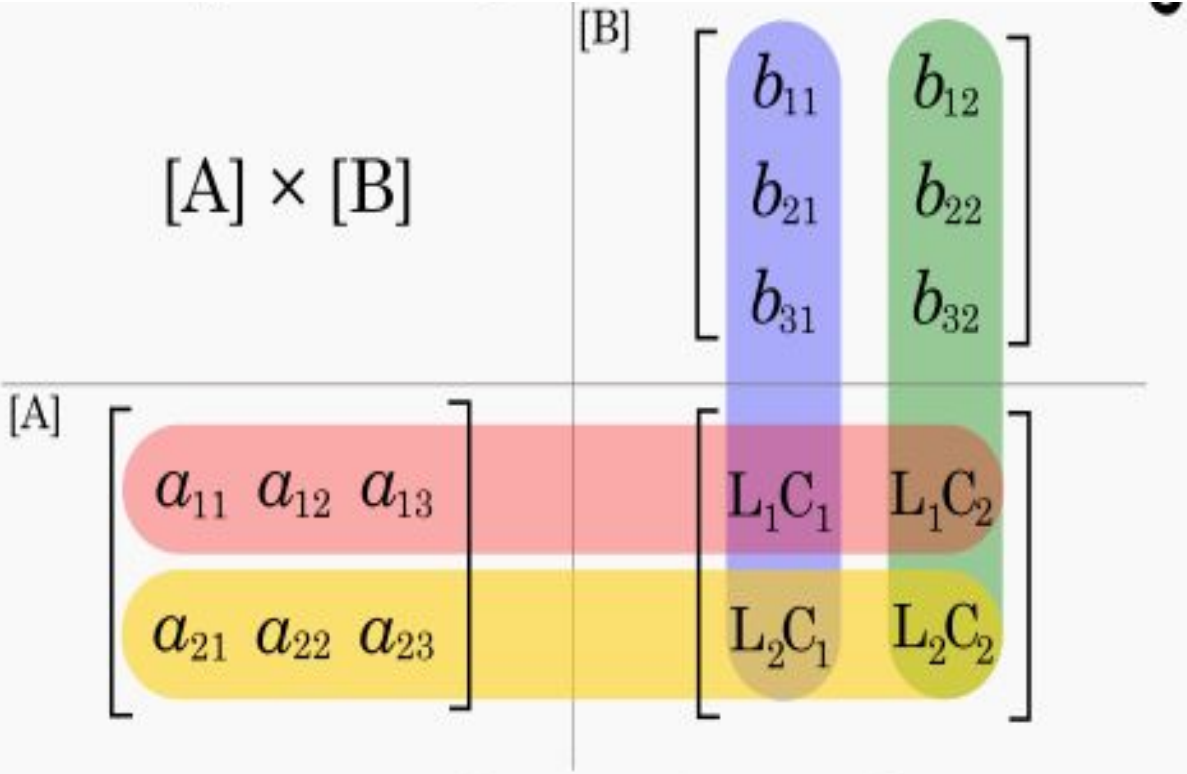
Multiplicação de uma matriz por um número real

- O produto de uma matriz por um número *k* é igual a multiplicar todos os elementos de A por esse número *k*.

$$3 \cdot \overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}} = \overset{B}{\begin{bmatrix} 1.3 & 2.3 \\ 3.3 & 4.3 \end{bmatrix}} \Rightarrow 3 \cdot \overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}} = \overset{B}{\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}}$$

Ficha 3 - Multiplicação de Matrizes

Multiplicação de Matrizes



$$L_1C_1 = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$$

Multiplicação de Matrizes

Propriedades

1) $AB \neq BA$ (em geral)
2) $(AB)xC = Ax(BC) = ABC$
3) $Ax(B + C) = AB + BC$
4) $AI = IA = A$
5) $(AB)^t = B^t \times A^t$

Ficha 4 - Matriz Inversa

Matriz Inversa

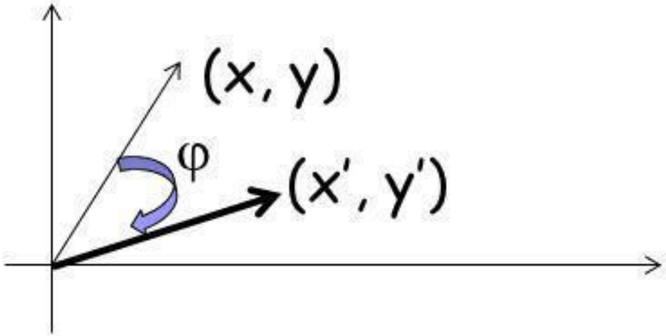
- A matriz inversa de uma matriz quadrada A é outra matriz quadrada A^{-1}, tal que $A \times A^{-1} = I$, em que I é a matriz identidade.

B é inversa de **B =** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é **B**$^{-1}$ $= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{B} \,.\, \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I_3}$$

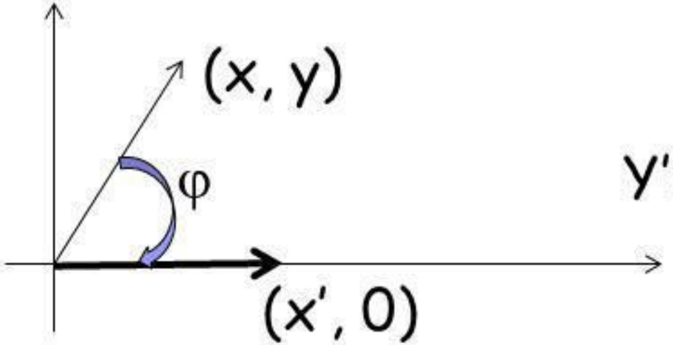
$$\mathbf{B}^{-1} \,.\, \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I_3}$$

Matriz de Rotação



$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xcos(\varphi) + ysen(\varphi) \\ -xsen(\varphi) + ycos(\varphi)\end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} cos(\varphi) & sen(\varphi) \\ -sen(\varphi) & cos(\varphi)\end{bmatrix}}_{\text{Matriz de rotação}} \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$



$$Y' = -xsen(\varphi) + ycos(\varphi) = 0$$