Geometria 2ºAno

Toda a matéria

Geometria Espacial

Ficha 1 - Geometria de Posição

Conceitos Primitivos e Postulados

Conceitos:

- Ponto, Reta e Plano

Postulados da determinação:

- Dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles. É a menor distância entre 2 pontos.
- Três pontos não alinhados determinam um único plano que passa por eles.

Postulado da inclusão:

- Se uma reta tem 2 pontos distintos pertencentes a um plano, então ela está contida nesse plano

Posições relativas entre retas e pontos colineares

- Retas coplanares: 2+ retas que estão contidas no mesmo plano.
- Retas paralelas: são coplanares e não têm ponto comum.
- Retas reversas: não são coplanares.
- Retas concorrentes: possuem um único ponto comum.
- Pontos colineares: pontos que pertencem à mesma reta.

Posições relativas entre reta e plano

- Reta contida: Todos os pontos da reta pertencem ao plano.
- Reta paralela: Não têm nenhum ponto em comum
- Reta secante (concorrente): Têm um único ponto comum

Postulados e Teoremas

Postulado 4: 3 pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles.

Teoremas da determinação do plano:

- T.1: Uma reta em um ponto determinam um único plano -» em uma reta há, pelo menos, dois pontos distintos, que combinados a outro ponto avulso, se tornam os 3 pontos não colineares do postulado acima.
- T.2: Duas retas concorrentes determinam um plano que as contém.
- T.3: Duas retas paralelas distintas determinam um plano que as contém.

Postulados e Teoremas

Postulado 5: Se dois planos distintos têm um ponto em comum, então eles têm pelo menos dois pontos distintos em comum, logo existe uma reta que passa por esses pontos.

T.4: Se dois planos distintos têm um ponto em comum, então a intersecção de ambos será uma reta.

Geometria Plana (Postulado das Paralelas): Dados um ponto e uma reta, tal que o ponto não pertença à reta, existe uma única (outra) reta que passa pelo ponto e é paralela à reta. Aplicando-a no espaço gera-se o:

T.5: Dados um plano e um ponto, sendo que o ponto não pertence ao plano, existe pelo menos uma reta que passa pelo ponto e é paralela ao plano.

T.6: Dados um plano e um ponto, sendo que o ponto não pertence ao plano, existe um único plano que passa pelo ponto e é paralelo ao plano.

Propriedades das retas reversas

Relembrando: Retas reversas são aquelas que não são coplanares

T.7: Se um plano contém uma reta *x* reversa a uma reta *y*, então o plano é paralelo à reta *y*.

Retas ortogonais

Duas retas são ortogonais quando são reversas e os ângulos formados entre elas são retos.

OBS: Para calcular a distância entre duas retas ou entre uma reta e um ponto, traça-se uma perpendicular.

Posições relativas entre dois planos

1. Paralelos: Dois planos são paralelos se não têm ponto em comum ou têm todos seus pontos em comum (coincidentes -» intersecção de dois planos é igual a ambos).
2. Secantes: Dois planos são secantes ou concorrentes se têm uma única reta em comum.

Teoremas

T.8: Se os planos *x* e *y* são paralelos e existe uma reta secante a *x*, então a mesma é secante a *y*.

T.9: Se dois planos distintos são paralelos, então toda reta contida em um é paralela ao outro.

T.10: Se duas retas são ortogonais, então toda reta paralela e concorrente a uma delas é também perpendicular à mesma.

Retas perpendicular ao plano

T.11: Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então a reta é perpendicular ao plano.

T.12: Se uma reta forma ângulo reto com duas retas concorrentes de um plano, então essa reta é perpendicular ao plano e forma 90º com todas as outras retas contidas nesse plano.

T.13: Teorema das 3 perpendiculares: Se uma reta *x* é perpendicular a um plano em um ponto A, *y* é uma reta contida no plano e não passa por A, e *z* é uma reta que passa por A e é perpendicular a *y* num ponto B, então toda reta u que passa por B e concorre com *x* é perpendicular a *y*.

Planos perpendiculares

Um plano x é perpendicular a um plano y se x contém uma reta perpendicular a y.

Projeção Ortogonal

A) Projeção ortogonal de um ponto sobre um plano: projeção do ponto P seria o ponto P’, que pertence ao plano. Se P pertencesse a esse mesmo plano, P e P’ seriam coincidentes.

B) Projeção ortogonal de um segmento sobre um plano

- 1º) A reta que contém esse segmento é paralela ao plano: Projeção ortogonal do segmento PQ é igual ao segmento P’Q’, que nesse caso são iguais.
- 2º) A reta que contém o segmento é secante ao plano: A projeção pode ser tanto um segmento P’Q’ menor que o original PQ, quanto um único ponto, se PQ for perpendicular ao plano.

C) Projeção ortogonal de uma reta sobre um plano

- 1º) Se a reta r não é perpendicular ao ponto, sua projeção será r’.
- 2º) Se a reta for perpendicular, sua projeção é um único ponto

Projeção de um sólido sobre um plano

1) A projeção de um paralelepípedo seria a sombra da face direcionada ao plano
2) De mesmo modo, a de uma esfera seria um círculo correspondente à porção da mesma que encara o plano.
3) Um cilindro pode ter projeção retangular e circular, dependendo do lado que está sendo projetado no plano.

Ficha 2 - Distâncias e Ângulos

Postulados

1) A distância entre dois pontos A e B é o segmento de reta AB.
2) A distância entre o ponto P e a reta r é a medida do segmento P'P, onde P' é a projeção de P em r.
3) A distância entre duas retas paralelas r e s é a distância de um ponto qualquer de uma delas até a outra. Se r e s são concorrentes, a distância é nula.
4) Distância de um ponto a um plano: É a medida do segmento P'P, onde P' é a projeção ortogonal de P no plano.
5) Distância entre uma reta e um plano paralelos: É a distância entre um ponto qualquer da reta até o plano. Se a reta for secante ou estiver contida no plano, a distância será nula.
6) Distância entre dois planos paralelos: É a distância de um ponto qualquer de um deles ao outro.
7) Distância entre duas retas reversas: É a distância entre um ponto qualquer de uma delas e o plano que contém a outra e é paralelo à primeira.

Ângulo entre reta e plano

Determinação: Para determinar o ângulo entre uma reta e um plano procede-se da seguinte forma:

1) Faça a projeção ortogonal da reta sobre o plano
2) Utilize o triângulo formado para determinar os ângulos pela reta e sua projeção, que são os mesmos formados pela reta e pelo plano.

Ângulos entre dois planos

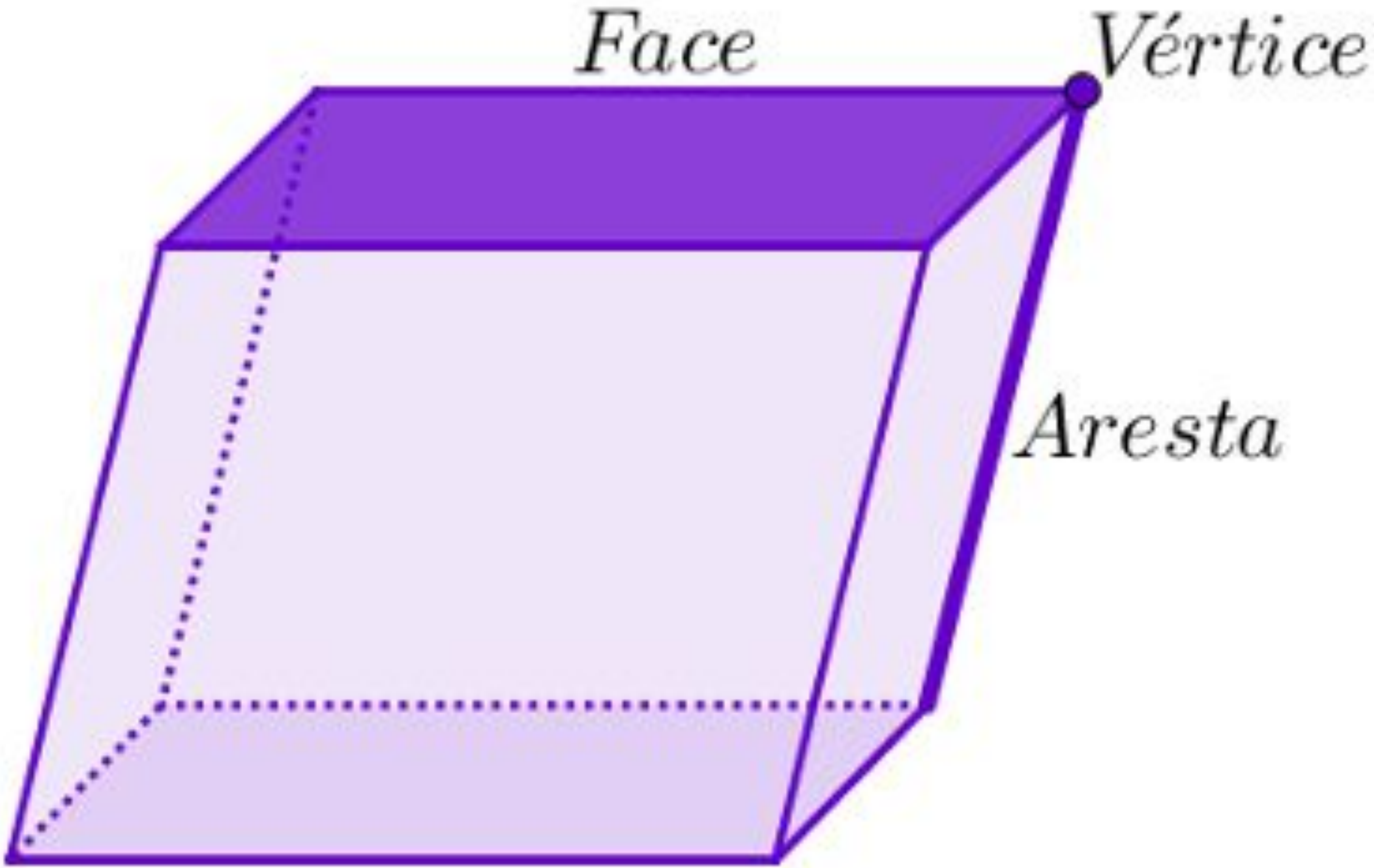
1) Considerando os planos secantes x e y e a reta r (interseção dos 2), marca-se um ponto P pertencente a um dos planos.
2) Traçamos a reta s passando por P e perpendicular à reta r.
3) Projetamos s ortogonalmente sobre o plano x e obtemos a reta s'. O ângulo formado entre as retas s e s' é PÔP'. que é o ângulo formado entre os planos x e y.

Ficha 3 - Poliedros

Poliedro

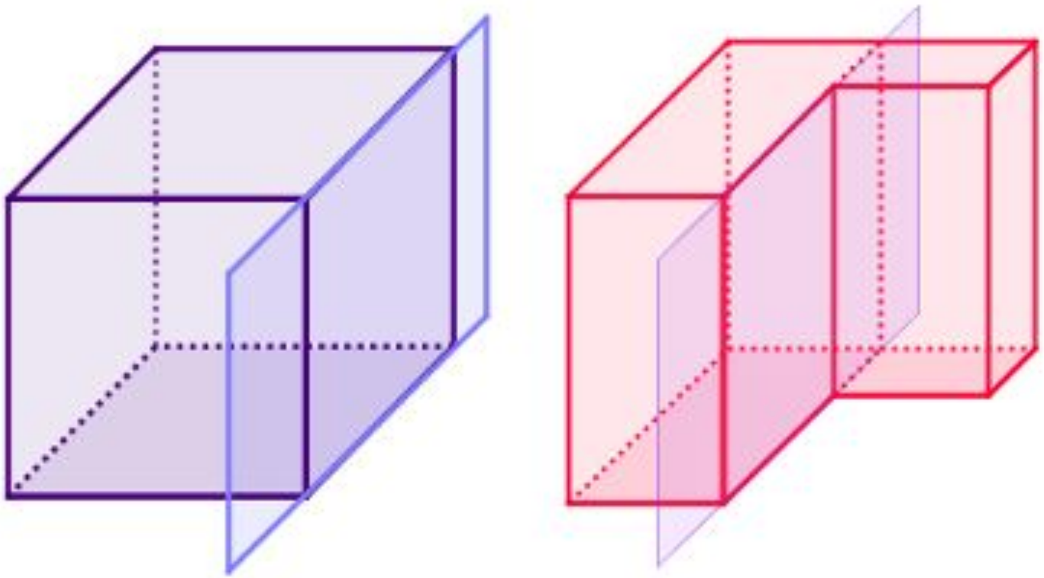
Poliedro é uma figura limitada por um conjunto de polígonos planos tais que cada lado pertença a dois polígonos e que cada par de polígonos que tenham um lado comum não sejam coplanares.

- A superfície de um poliedro é determinada por regiões poligonais planas que são suas faces.
- Os lados dos polígonos são as arestas.
- Os vértices dos polígonos são, também, do poliedro.


Face
Vértice
Aresta

Poliedros convexos e não convexos

- **<u>Convexos</u>**: Qualquer plano α que contenha uma das faces deixa as demais no mesmo semi espaço -» esses poliedros são chamados de *poliedros convexos*.
- **<u>Não convexos</u>**: Existe pelo menos um plano α que contém uma face e deixa todas as demais em dois semi espaços opostos -» são chamados de *poliedros não convexos*.



Superfície poliédrica convexa aberta

Definição: É a superfície formada pela reunião de um número finito de polígonos planos e convexos, tais que:

a) dois polígonos não estão num mesmo plano;
b) cada lado de um polígono é comum a dois e apenas dois polígonos;
c) havendo lados de polígonos que estão em um só polígono, estes devem formar uma única poligonal fechada, plana ou não, chamada ***contorno***;
d) o plano de cada polígono deixa todos os outros em um mesmo semi espaço

As superfícies poliédricas limitadas convexas que têm contorno são chamadas abertas. As que não têm são fechadas.

$$\boxed{V + F = A + 1}$$

Superfície poliédrica convexa fechada

Na superfície poliédrica aberta vale a relação V+F-A=1. Colocando-se uma face, tornando a superfície poliédrica fechada, não se alteram os valores de V(vértices) e A (arestas), mas o número de faces (F) aumenta uma unidade. Assim encontramos: V+F-A=2.

Ao colocarmos a última de seis superfícies para formar um poliedro, só altera-se o número de faces, e o V e A permanecem os mesmos. Essa ideia nos conduz ao teorema descoberto por Leonard Paul Euler. A ***Relação de Euler*** é a seguinte:

$$\boxed{V + F = A + 2}$$

Poliedros que satisfazem tal relação são chamados poliedros eulerianos. Euler foi o primeiro a observar que, para a maioria dos poliedros, a relação é válida. Todos os poliedros convexos a satisfazem.

Teorema de Euler

“Todo poliedro convexo é euleriano embora nem todo poliedro euleriano seja convexo”. Não euleriano -» $V + F \neq A + 2$.

Outras relações:

$\boxed{3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \ldots + nF_n = 2A}$ $\boxed{3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \ldots + nV_n = 2A}$

1. Ou seja, multiplicar por 3 o número de faces com três lados, por 4 o número de faces com 4 lados e assim por diante.
2. Mesmo processo, porém ao invés de faces, vértices.

Soma dos ângulos internos das faces de um poliedro convexo

Considere um poliedro convexo com um número de faces igual a F, sendo a primeira com n_1 lados, a segunda com n_2 lados e assim por diante, até a última com n_F lados. Podemos calcular a soma S dos ângulos internos de todas as faces desse poliedro da seguinte forma:

$$\boxed{S = 360^\circ \times (V - 2)}$$

$$\boxed{S = 2\pi \times (V - 2)}$$

$$\boxed{S = 360^\circ \times (A - F)}$$

Número de diagonais de um poliedro

Diagonal de um poliedro é todo segmento que une dois vértices **não** situados na mesma face desse poliedro. Não confundir com diagonal do polígono, pois os pontos estão na mesma face do poliedro e apenas em arestas diferentes, de um mesmo polígono. Se contarmos todos os segmentos que partem do vértice encontramos V x (V - 1)/2, onde “V - 1” é o número de segmentos que partem de cada vértice, “V” é o número de vértices e é dividido por 2 pois o mesmo segmento é contado duas vezes. Desse total, é necessário retirar todas as arestas (A) e, também, todas as diagonais dos polígonos das bases e das faces. O número de diagonais de um polígono se dá pela fórmula: d= n x (n-3)/2, onde n é o número de lados e d o de diagonais. Finalmente, é possível determinar o número de diagonais do poliedro:

$$\boxed{D = V\,(V - 1)/2 - A - \Sigma d_f}$$

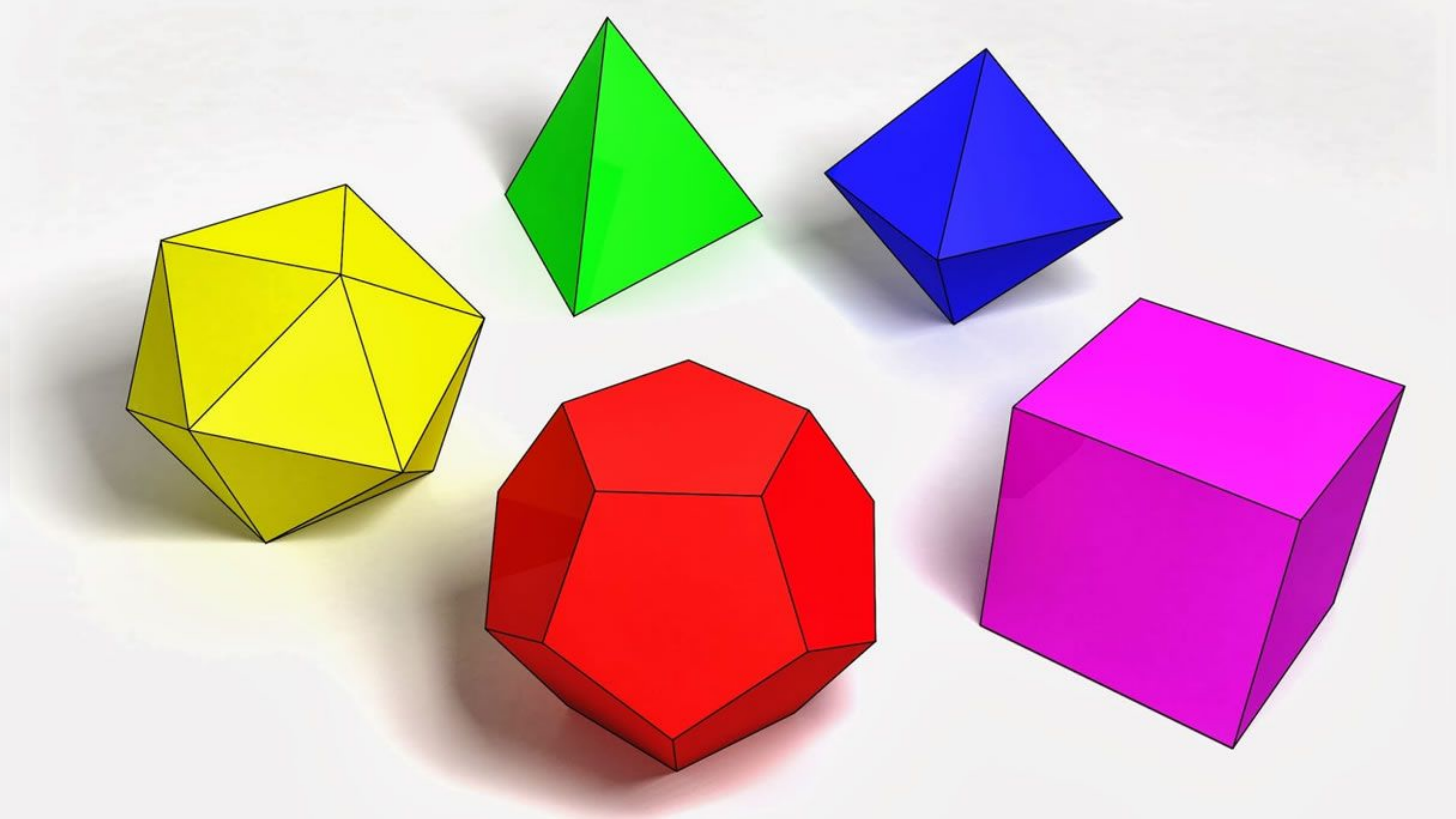
Poliedros de Platão

Poliedros de Platão

O filósofo grego Platão, em um de seus estudos da Geometria interessou-se por certa classe de poliedros, mais tarde denominados *Poliedros de Platão*.

Definição: Um poliedro é chamado de Platão se, e somente se, satisfaz as três condições seguintes:

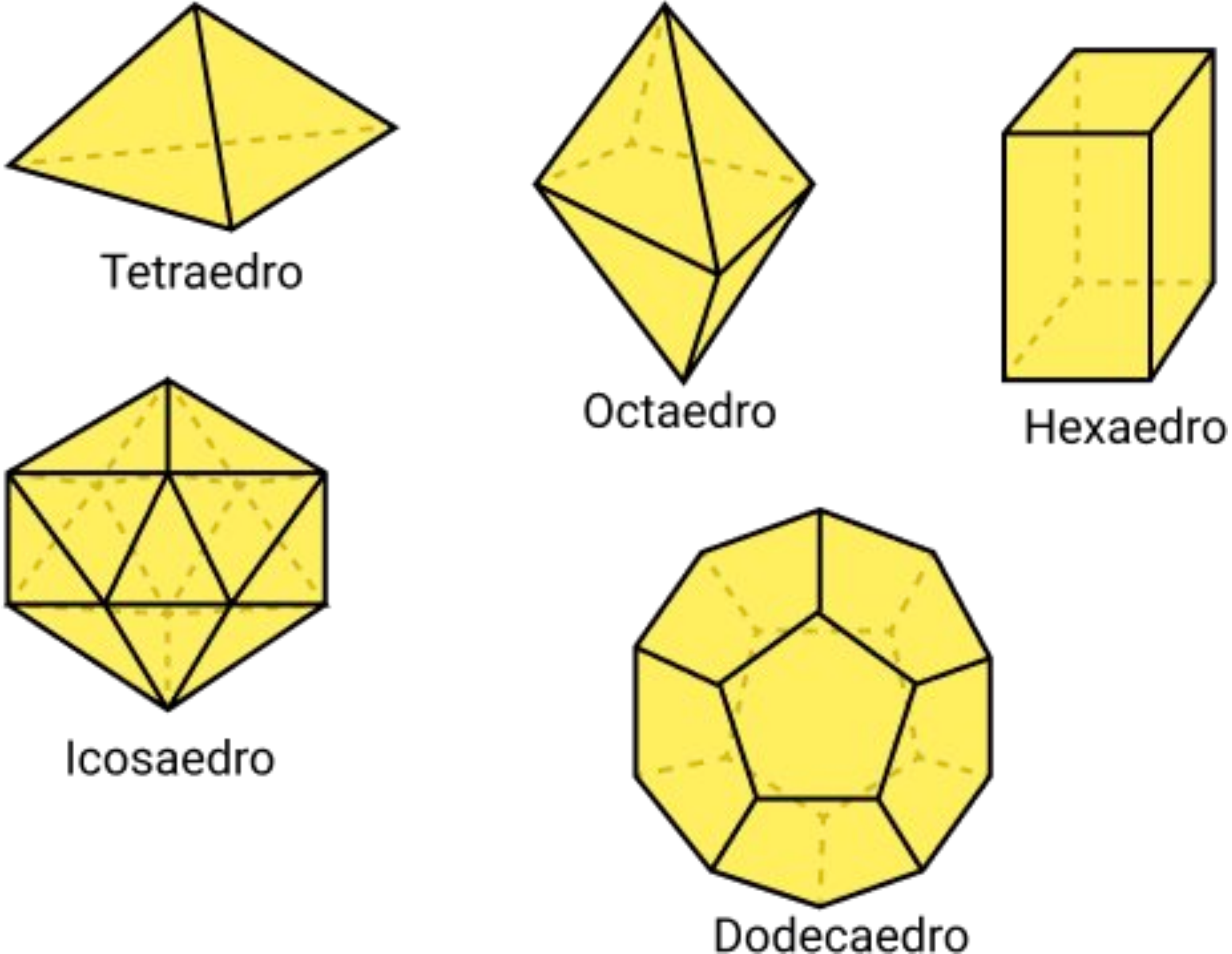
- todas as faces são polígonos e têm o mesmo número (n) de lados;
- em todos os vértices concorrem o mesmo número (m) de arestas;
- é convexo e verifica a ***Relação de Euler*** (V + F = A + 2).



Poliedros de Platão

Propriedade: Existem cinco classes de *Poliedros de Platão*:

- Tetraedro: 4 faces triangulares; em cada vértice concorrem 3 arestas.
- Hexaedro: 6 faces quadrangulares; em cada vértice concorrem 3 arestas.
- Octaedro: 8 faces triangulares; em cada vértice concorrem 4 arestas.
- Dodecaedro: 12 faces pentagonais; em cada vértice concorrem 3 arestas.
- Icosaedro: 20 faces triangulares; em cada vértice concorrem 5 arestas


Tetraedro
Octaedro
Hexaedro
Icosaedro
Dodecaedro

Poliedro Convexo Regular

Entre os *Poliedros de Platão* encontram-se os **poliedros regulares**, isto é, os que têm como faces polígonos regulares congruentes entre si e em todos os vértices do poliedro concorrem o mesmo número de arestas.

Propriedade: Existem cinco tipos de poliedros regulares.

- Tetraedro, Hexaedro, Octaedro, Dodecaedro e Icosaedro

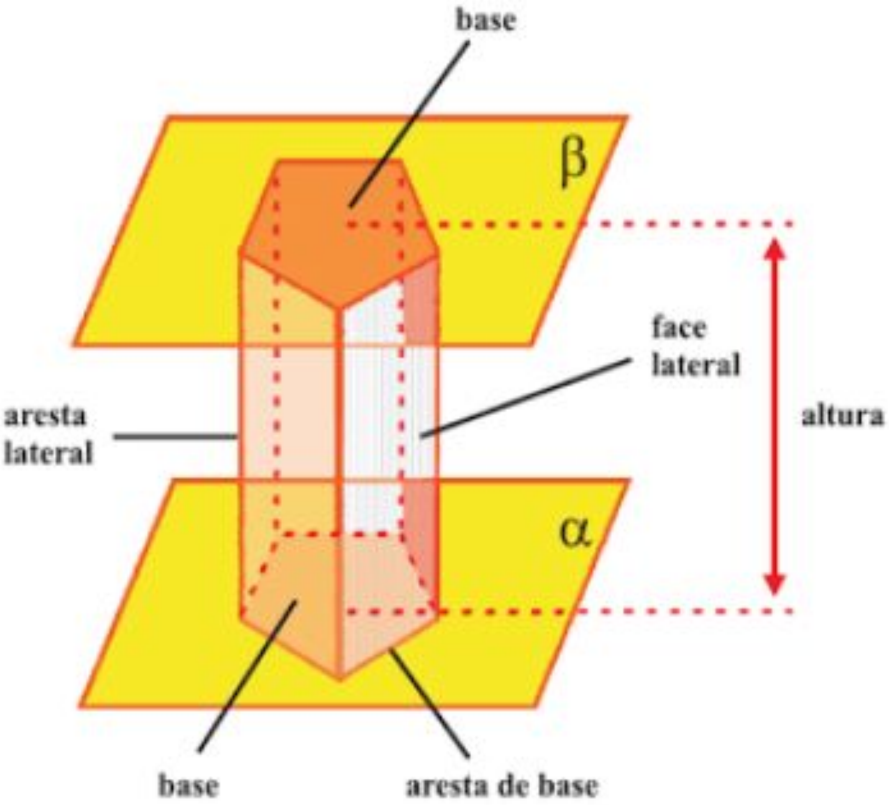
Observação: Todo poliedro regular é de Platão, mas nem todo Poliedro de Platão é regular.

Ficha 4 - Prismas

Prismas

- Consideramos dois planos ***A*** e ***B***, distintos e paralelos entre si, um polígono convexo ***P***, contido em ***A***, e uma reta ***r*** que intercepta ***A*** e ***B*** em dois pontos distintos.
- Por todos os pontos de ***P***, traçam-se linhas paralelas a ***r***. Os pontos de intersecção dessas retas com ***A*** e ***B*** determinam segmentos congruentes. A reunião desses segmentos é um sólido chamado **prisma**.

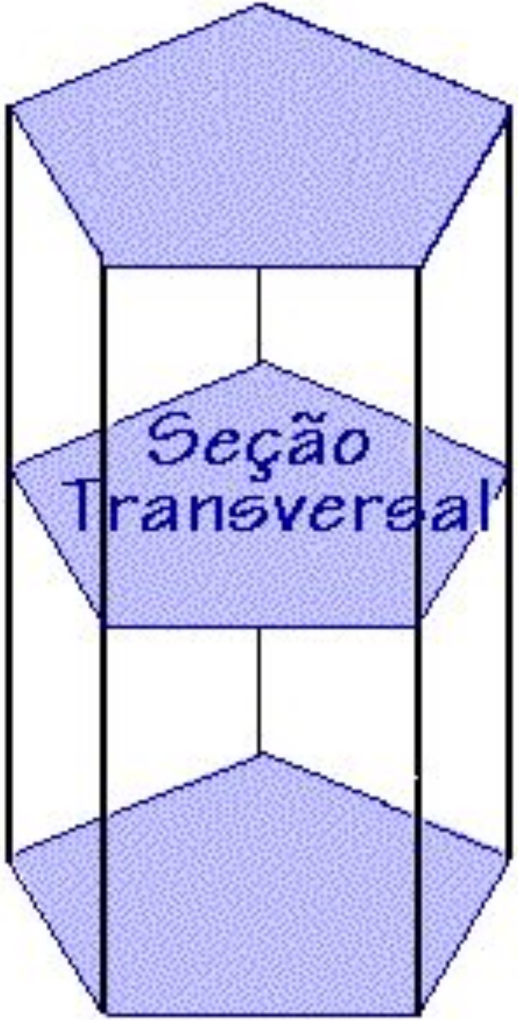
Elementos do Prisma



- Área lateral do prisma: Soma das áreas de todas as faces laterais.
- Área total do prisma: área lateral + as áreas das bases.

Secções de um Prisma

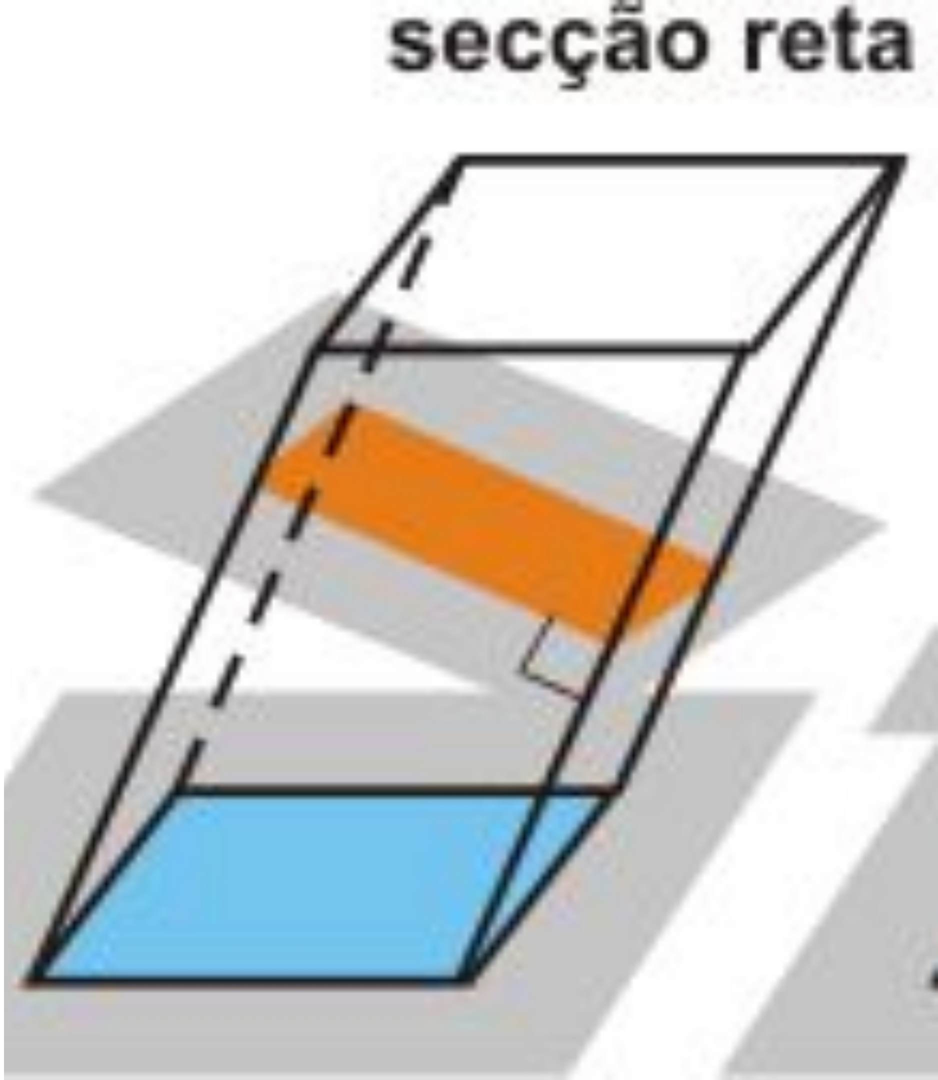
- A intersecção de um plano com um sólido é a superfície que chamamos de secção do sólido pelo plano dado.
- **Secção Transversal**: é determinada por um plano paralelo às bases do prisma que intercepta as arestas laterais. Observe que toda secção transversal do prisma tem área igual à base do prisma.



Secções de um Prisma

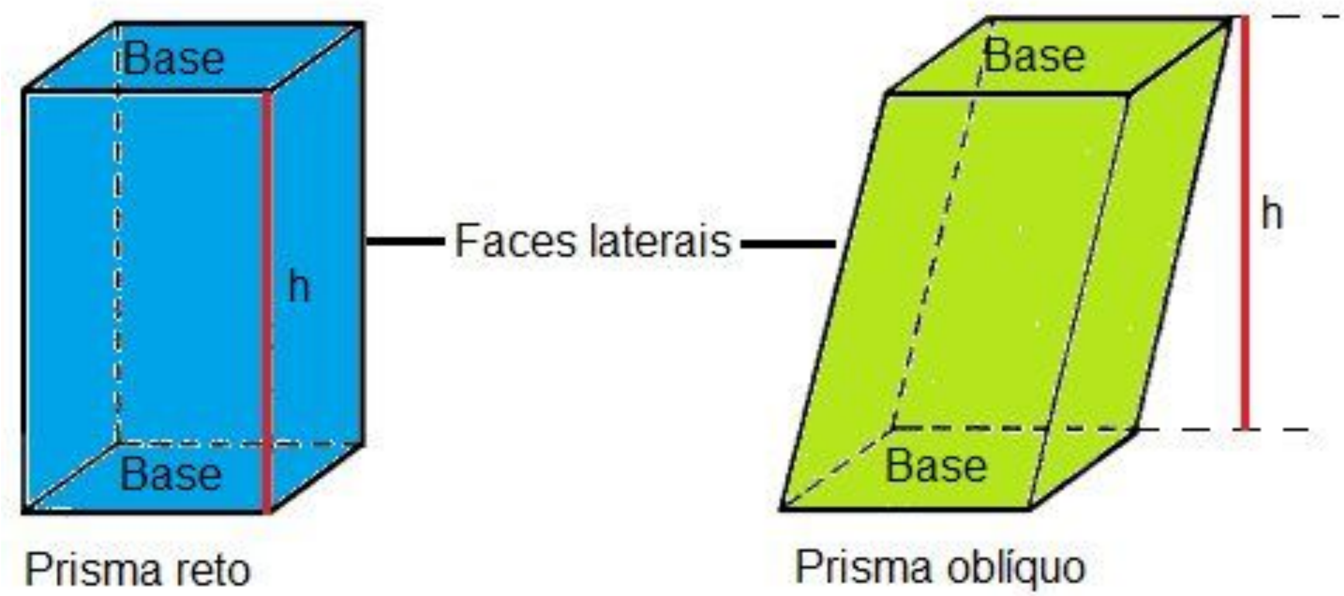
- **Secção Reta**: é determinada por um plano perpendicular às arestas laterais e que corta todas elas. As secções retas são equivalentes entre si.

- **Secção Transversal e Reta**: Em particular, em um prisma reto (arestas laterais perpendiculares à base) a secção transversal é uma secção reta também.



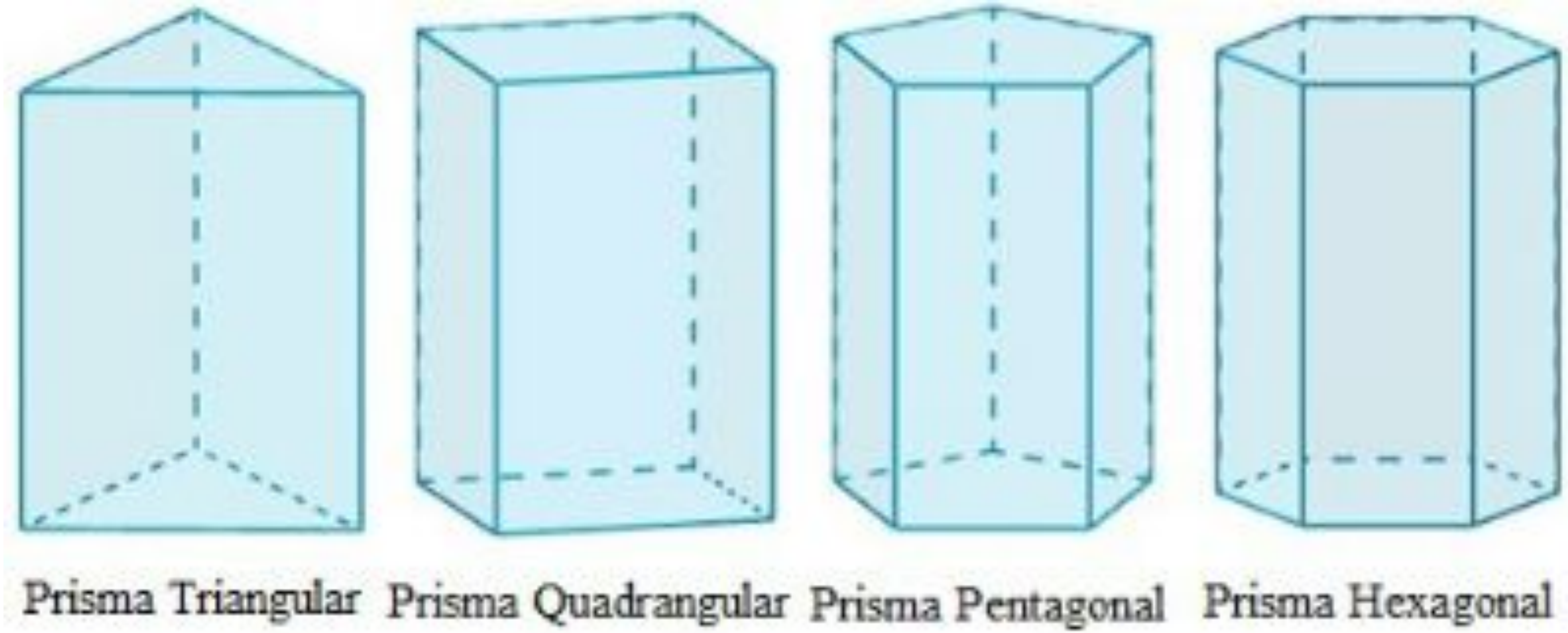
Classificação dos Prismas

- **Prisma Reto**: As arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases.
- **Prisma Oblíquo**: Os prismas que não são retos, são chamados oblíquos.



Classificação dos Prismas

- Um prisma é classificado de acordo como o número de arestas de sua base.
- EX: triangular, quadrangular, pentagonal, hexagonal, etc.

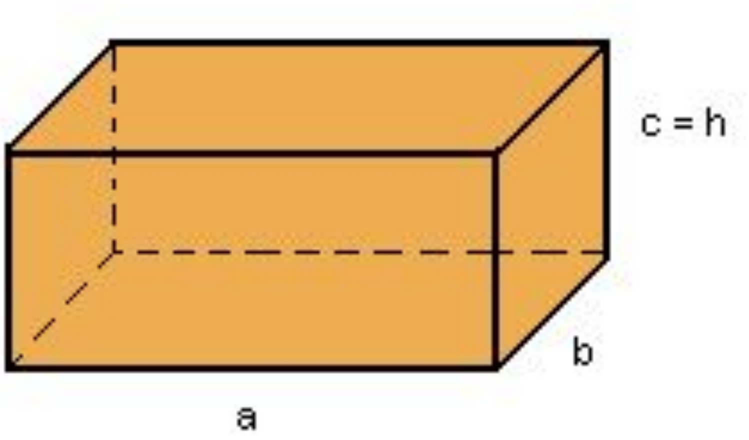


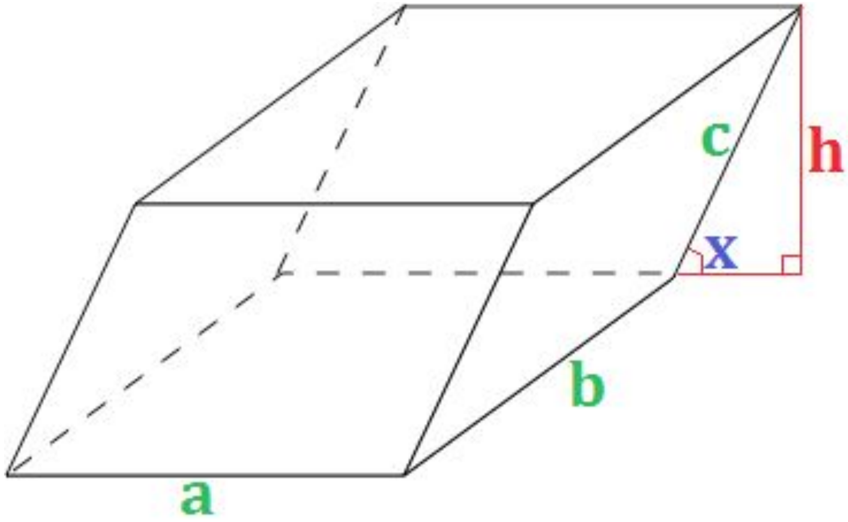
Classificação dos Prismas

- **Prisma regular**: Um prisma é regular se, e somente se, é reto e suas bases são polígonos regulares.

Paralelepípedos

- Paralelepípedo é todo prisma cujas bases são paralelogramos. Em particular, um prisma reto cujas bases são retângulos é denominado paralelepípedo retângulo (ou paralelepípedo reto-retângulo).
- Paralelepípedo Retângulo ou Oblíquo



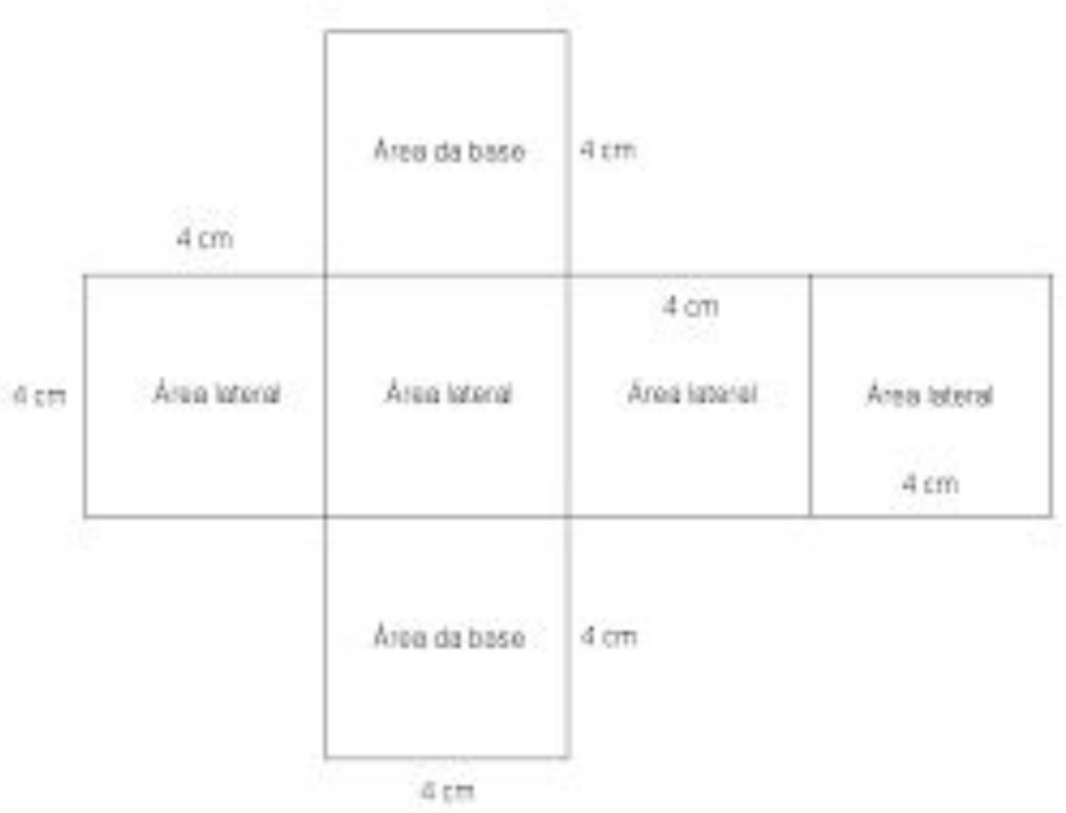


Cálculo da diagonal e área do paralelepípedo reto-retângulo

A diagonal da base é: $d^2=a^2+b^2$

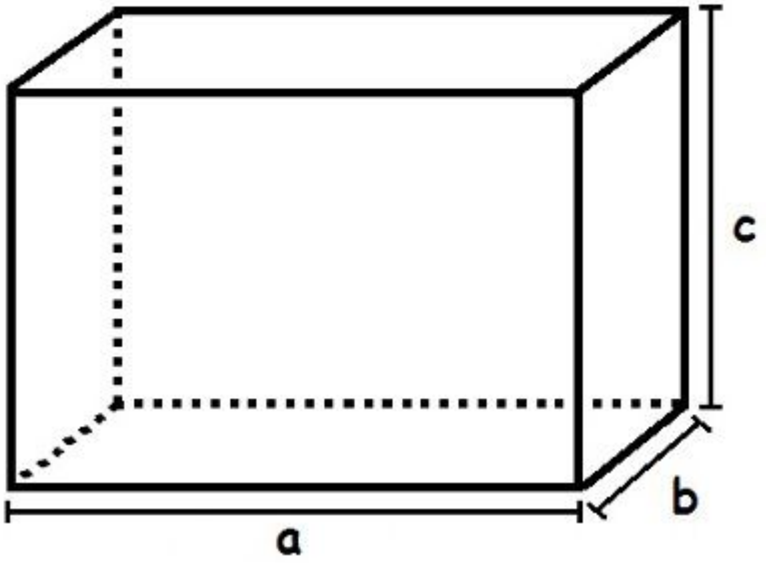
$D^2=d^2+c^2$ -» $D^2=a^2+b^2+c^2$

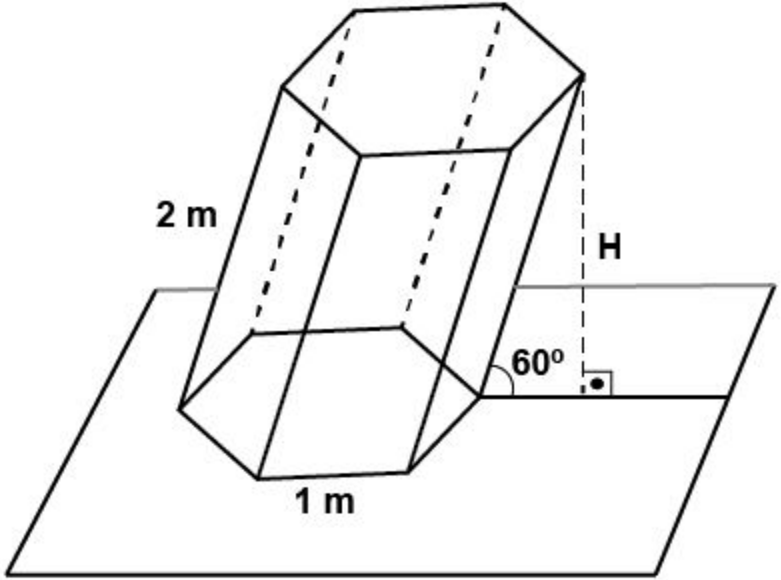
Planificação da Área:



Volume do paralelepípedo reto-retângulo e do prisma

- Volume do paralelepípedo = a x b x c
- Volume do prisma: $V = A_b \cdot h$ -» A_b é a área da base. h é a altura. a é a aresta lateral.





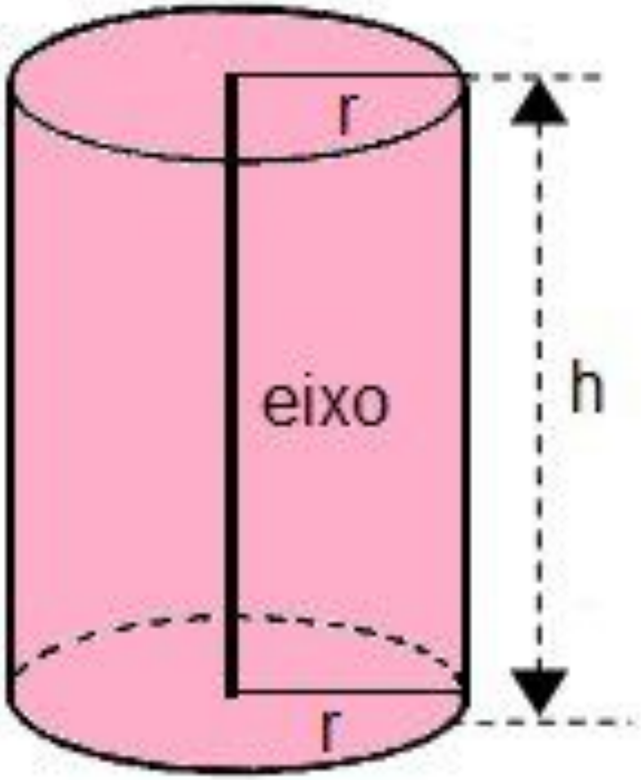
Ficha 5 - Cilindros

Cilindros

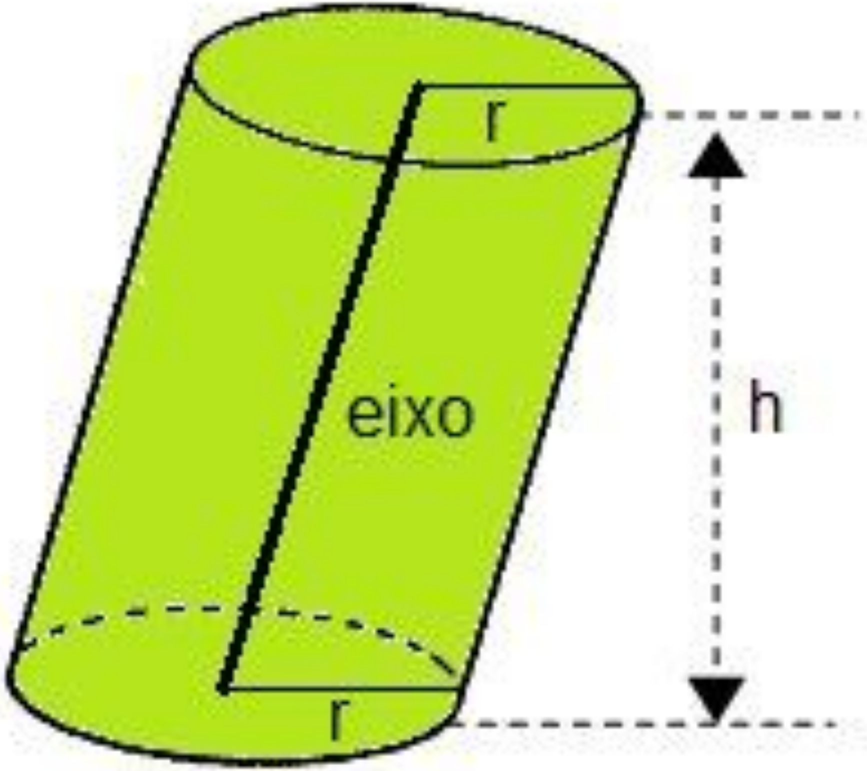
- A ideia do cilindro partindo do prisma: A medida que aumenta-se os lados das bases do prisma, elas tendem a se transformar em um círculo. Assim, o cilindro pode ser visto como um prisma cujas bases são polígonos com n lados, sendo n muito grande. Quando n se torna indefinidamente grande, o limite das bases são círculos.
- Definição: Sejam A e B planos paralelos distintos, uma reta s secante a esses planos e um círculo C de centro O contido em A. Consideram-se todos os segmentos de retas, paralelos a s, de modo que cada um deles tenha um extremo pertencente ao círculo C e o outro extremo pertencente a B.

Elementos do Cilindro

- A reta que passa entre os centros das duas bases é o eixo do cilindro.
- O raio r do círculo é o raio da base do cilindro.
- Todo segmento de reta, paralelo ao eixo, que tem extremidades nas bases é chamado geratriz do cilindro.
- A distância d entre os planos que contêm as bases é a altura do cilindro.
- Classificação dos cilindros: Reto e Oblíquo



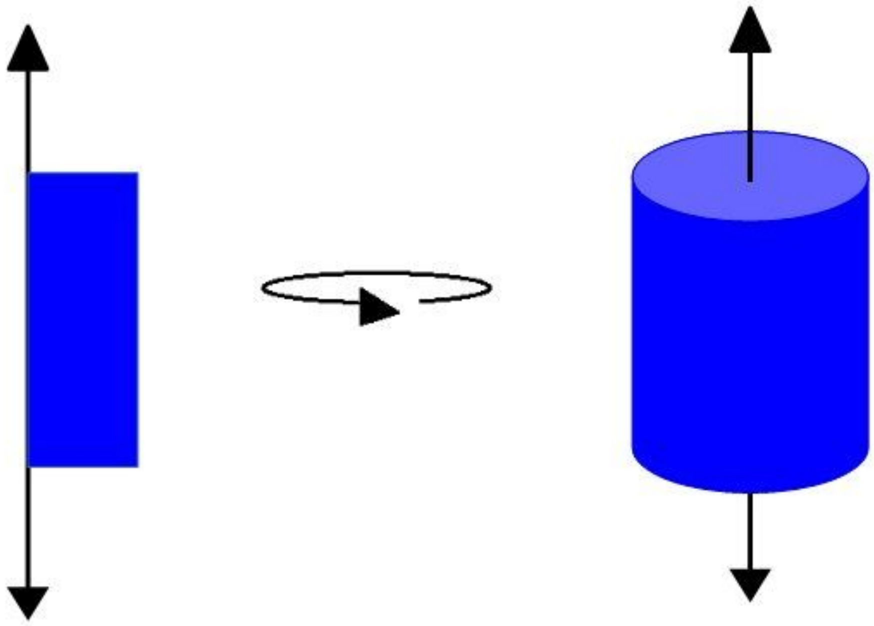
Cilindro reto



Cilindro oblíquo

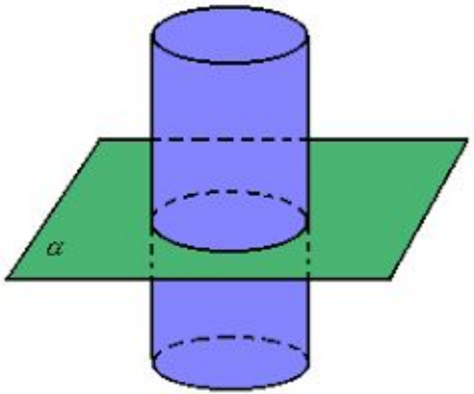
Cilindro de revolução

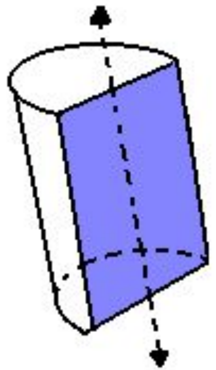
- Cilindro de revolução é o sólido obtido pela rotação completa de um retângulo em torno de um eixo que contém um dos seus lados.



Secções de um cilindro

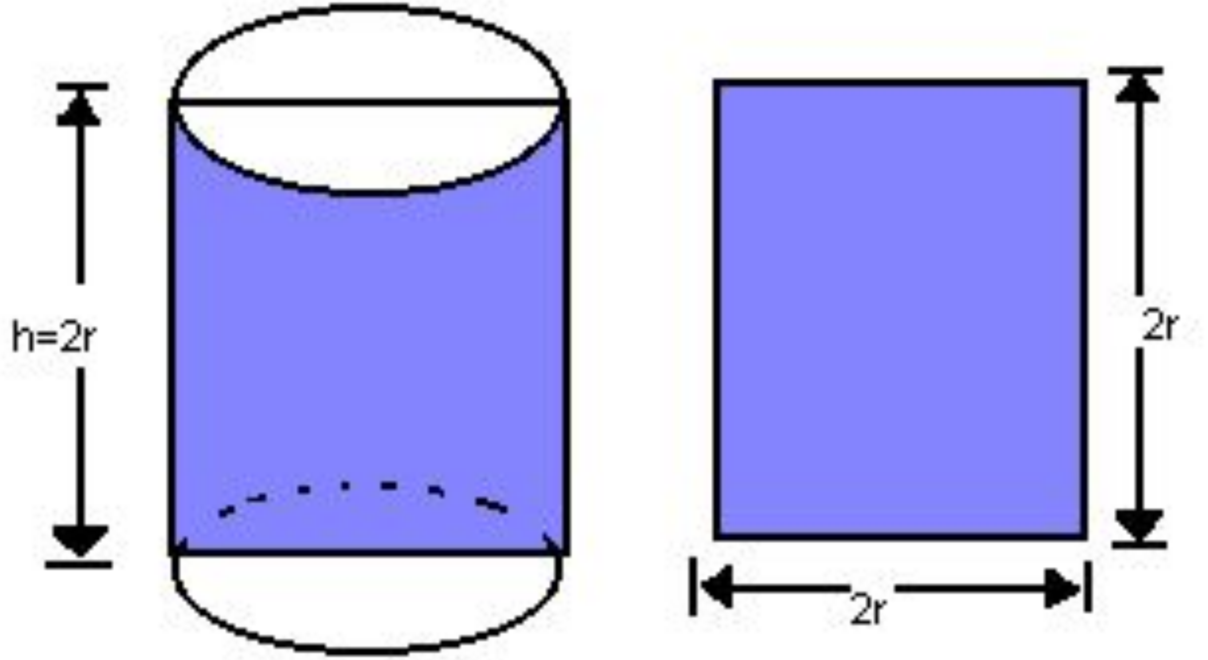
- Secção transversal: Uma secção transversal do cilindro é qualquer intersecção não vazia do cilindro com um plano paralelo às suas bases. Toda secção transversal de um cilindro circular é um círculo congruente às bases.
- Secção meridiana: Uma secção meridiana de um cilindro circular é a intersecção do cilindro com um plano que passa pelos centros das bases desse cilindro. OBS: Se o cilindro é reto, sua secção meridiana é um retângulo. Qualquer secção meridiana de um cilindro reto divide-o em dois sólidos congruentes chamados semicilindros circulares retos.





Cilindro circular equilátero

- Cilindro equilátero é um cilindro cuja secção meridiana é um quadrado
- g = 2r = h

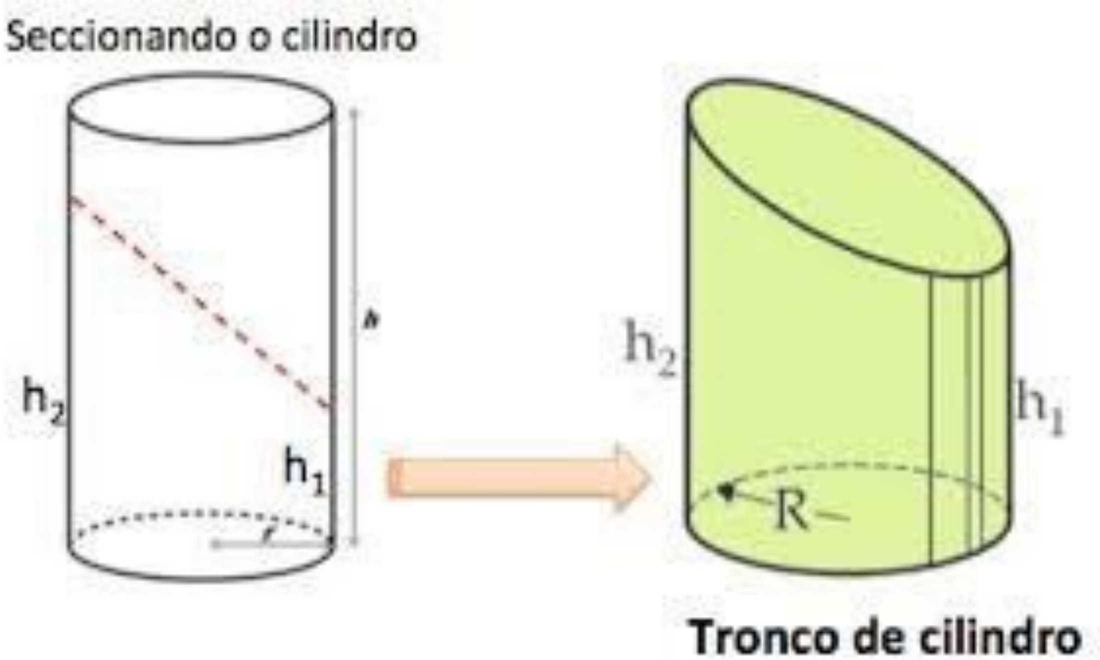


Área da superfície lateral e total de um cilindro reto e o volume do cilindro

- A área lateral do cilindro reto é composta de um retângulo de lados medindo $2\pi r$ (comprimento do círculo base) e h (altura do cilindro).
- Área lateral: $A = 2\pi rh$
- Área total: Área lateral + $2A_{base}$
- Volume do cilindro: $V = A_{base} . h$

Tronco de cilindro com uma base circular

- Um plano A que intercepta todas as geratrizes de um cilindro circular reto separa-o em dois sólidos chamados de troncos de cilindro com uma base circular.



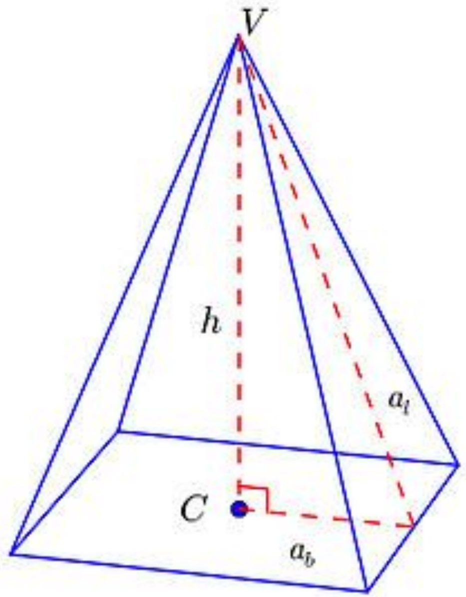
Volume de um tronco de cilindro reto com uma base circular

- Sejam dois troncos de cilindro reto idênticos, com o mesmo volume V. Juntando esses dois troncos formamos um cilindro reto reto com geratriz medindo G+g.
- O volume do cilindro formado é igual a: $V=\pi r^2(G+g)$.
- Como os troncos possuem o mesmo volume, cada um possui a metade da equação acima.
- Lembrete: $(G+g)/2$ é a média aritmética das geratrizes, ou seja, $V=\pi r^2 \cdot G_{média}$

Ficha 6 - Pirâmide

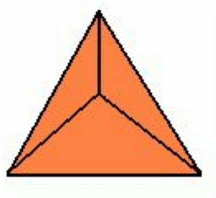
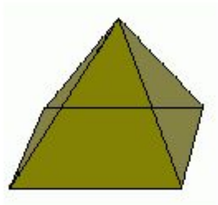
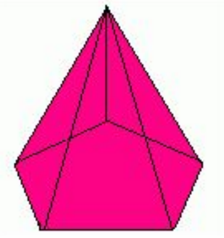
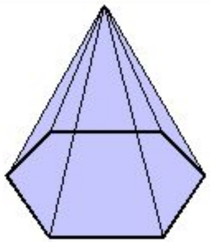
Pirâmide

- Definição e elementos: Consideremos um polígono ABC...PQ situado em um plano A e um ponto V não pertencente a A. Chama-se pirâmide a reunião de todos os segmentos que têm uma extremidade V e a outra nos pontos do polígono.



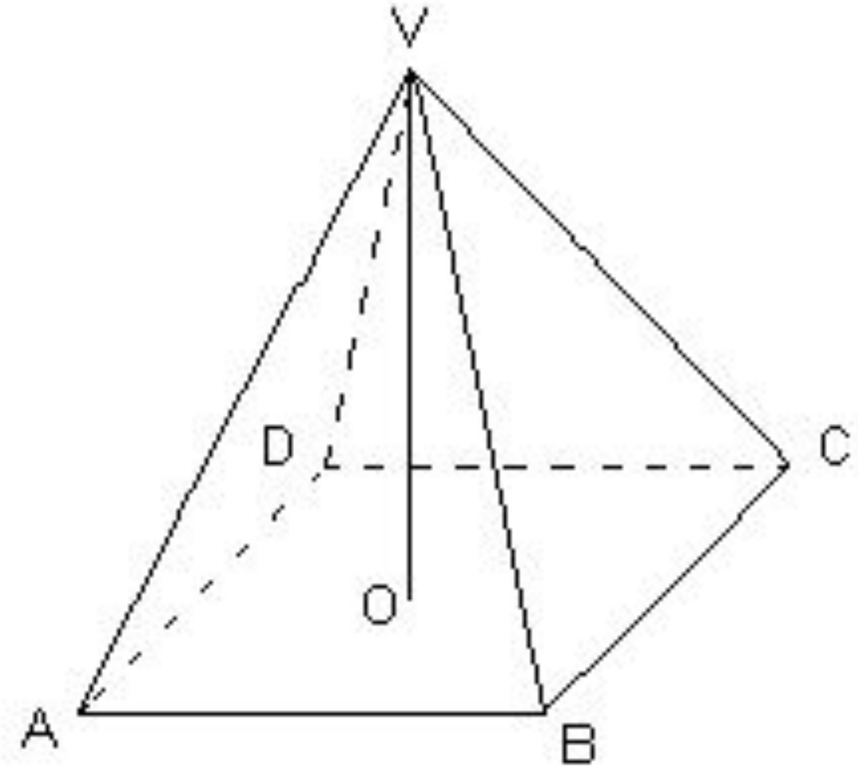
Superfícies

- Superfície lateral é a reunião das faces laterais da pirâmide. A área dessa superfície é indicada por A_L.
- Superfície total é a reunião da superfície lateral com a superfície da base da pirâmide.
- Classificação das pirâmides quanto ao número de arestas da base:
    - Podem ser triangulares, quadrangulares, pentagonais, etc.

TRIANGULAR	QUADRANGULAR	PENTAGONAL	HEXAGONAL
			
BASE : TRIANGULO	BASE: QUADRADO	BASE: PENTÁGONO	BASE: HEXÁGONO

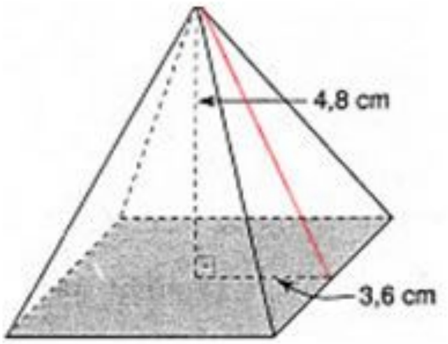
Pirâmide Regular

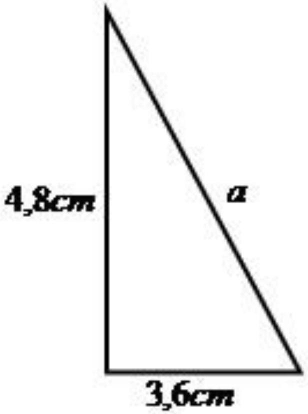
- Pirâmide regular é uma pirâmide cuja base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base coincide com o centro do polígono da base. Numa pirâmide regular as arestas laterais são congruentes e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes.
- Se a projeção ortogonal do seu vértice V não coincide com o centro O do polígono, a pirâmide não é regular.
- Para a pirâmide ser regular, é necessário que a base seja um polígono regular e que a projeção ortogonal de seu vértice V sobre a base, coincida com o centro do polígono da base.



Apótema da pirâmide regular

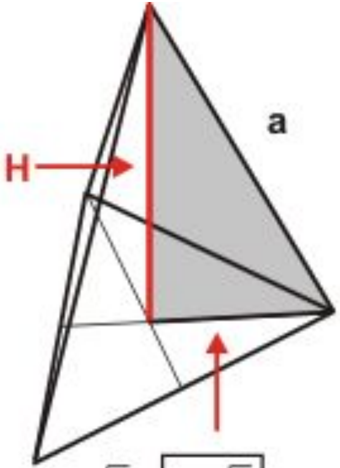
- Numa pirâmide regular, as faces laterais são triângulos isósceles congruentes. A altura de qualquer desses triângulos, relativamente ao lado da base, é denominada apótema da pirâmide. O apótema “liga” o vértice da pirâmide ao ponto médio de uma das arestas da base.
- Num polígono regular, o segmento que une o centro ao ponto médio de um lado é denominado apótema do polígono da base.





Tetraedro Regular

- Tetraedro regular é uma pirâmide regular na qual as quatro faces são triângulos equiláteros congruentes



$$\frac{2}{3}h = \frac{2}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{a\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$a^2 = H^2 + (a\frac{\sqrt{3}}{3})^2 \Rightarrow a^2 = H^2 + \frac{a^2}{3} \Rightarrow H^2 = \frac{2}{3}a^2 \Rightarrow \boxed{H = a\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

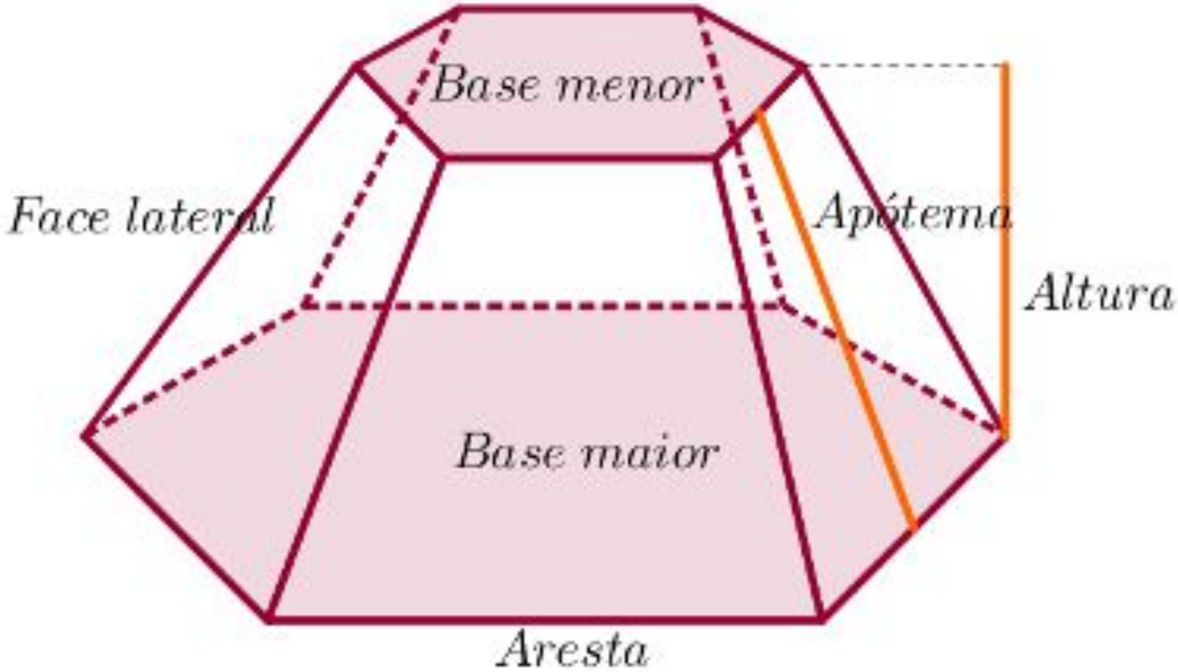
Área e Volume da Pirâmide Regular

- Área lateral da pirâmide: Soma de todas as faces laterais.
- A área da pirâmide total é a soma da área lateral com a área da base
- $V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h$

Tronco da Pirâmide

$A = A_{base\ maior} + A_{base\ menor} + A_{lateral}$ (trapézios isósceles)

$V = h/3 \cdot (A_1 + \text{raiz de } A_1 \cdot A_2 + A_2)$



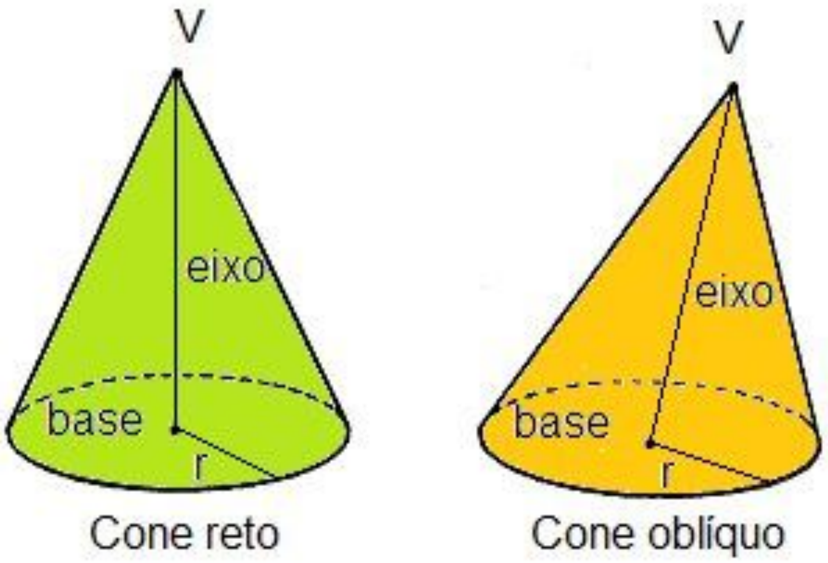
Ficha 7 - Cone Circular

Cone

- **Definição:** Vamos considerar um círculo de centro *O* e raio *r* situado em um plano *A* e um ponto *V*, não pertencente a *A*. Denominamos cone circular à reunião de todos os segmentos de reta com uma extremidade no ponto *V* e a outra nos pontos do círculo.
- **Elementos:**
- Uma base (círculo de centro *O* e raio *r*)
- Geratriz (segmentos com uma extremidade em *V* e a outra em qualquer ponto da circunferência da base)
- Vértice (ponto V)
- Eixo (reta OV)
- Altura (representada por h, é a distância entre V e o plano da base A)

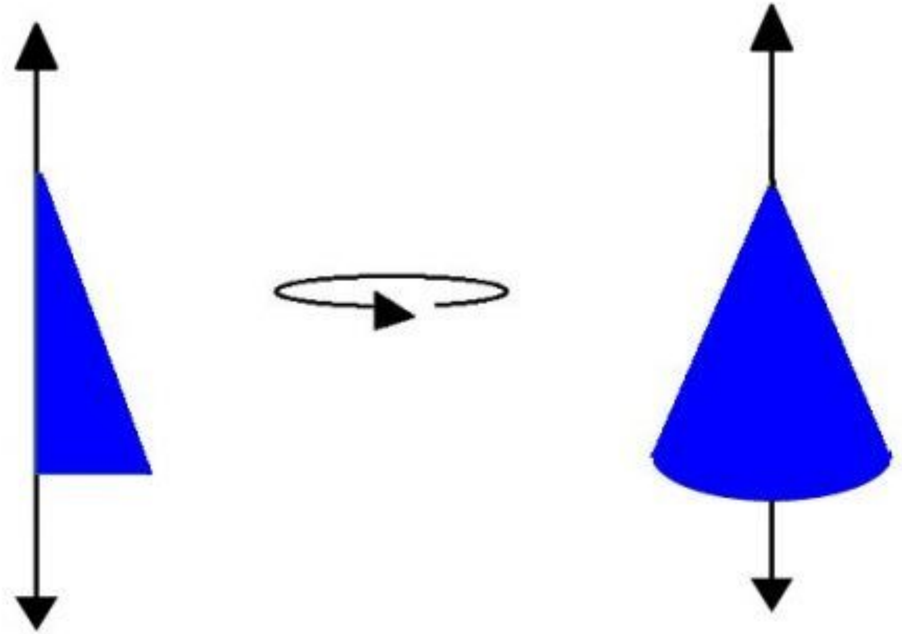
Classificação

- Oblíquo: Quando o eixo é oblíqua ao plano que contém a base.
- Reto: Quando o eixo é perpendicular ao plano que contém a base.



Cone de Revolução

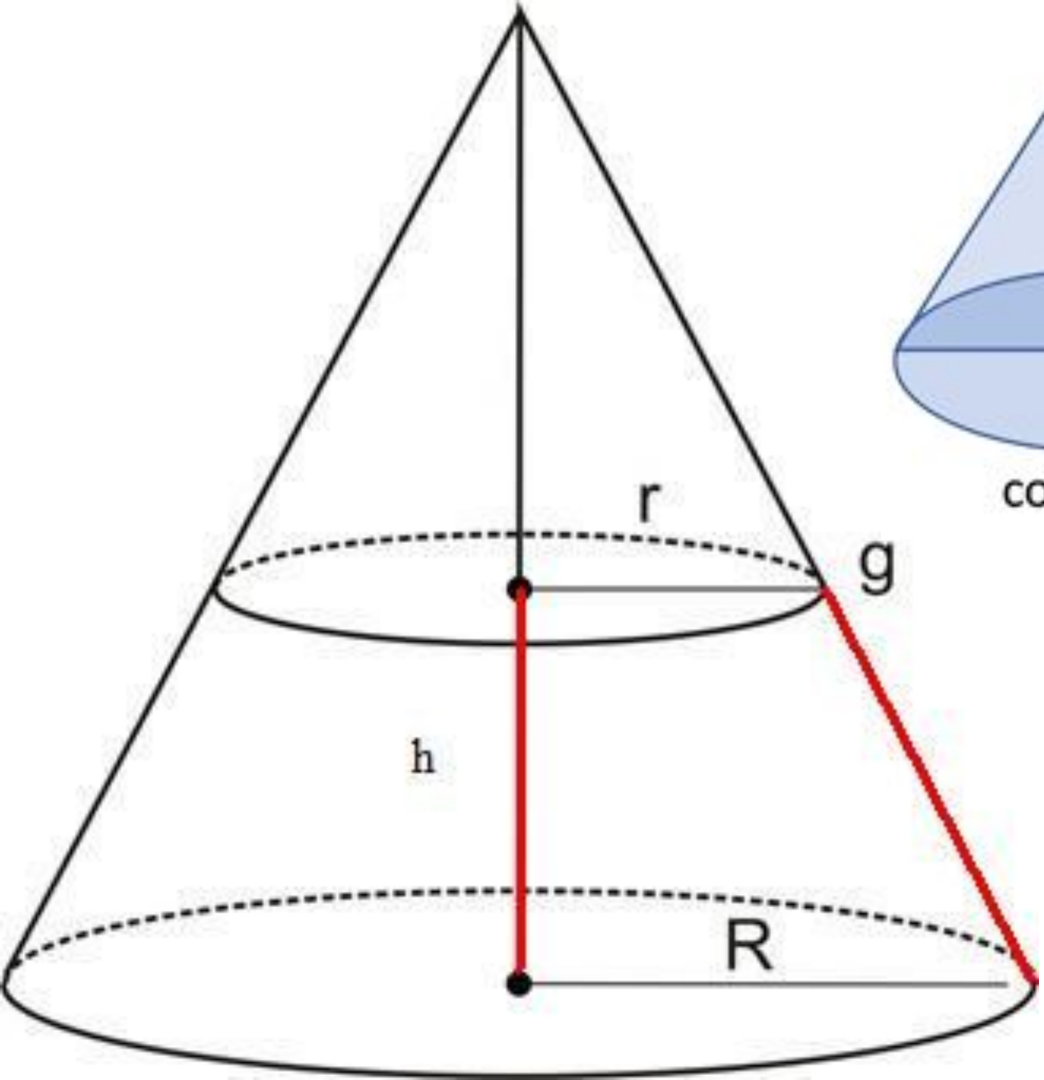
- Um cone reto pode ser obtido quando gira-se uma região triangular cujo contorno é um triângulo retângulo em torno de uma reta que contém um dos catetos.

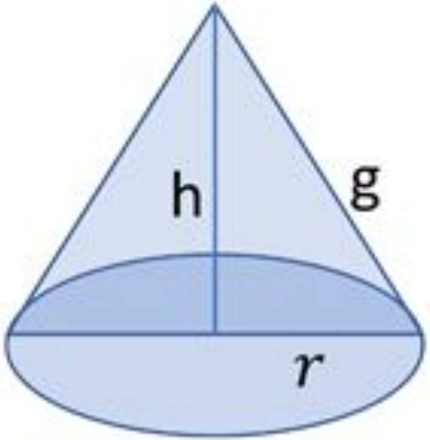


$$\boxed{g^2 = r^2 + h^2}$$

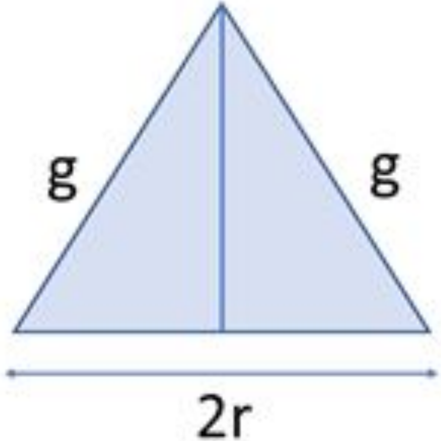
Secção Transversal, Meridiana e Cone Transversal

- **Transversal:** Quando seccionamos um cone por um plano paralelo ao plano da base, obtemos uma secção transversal do cone, que é um círculo.
- **Meridiana:** de um cone é obtida pela intersecção do cone com um plano A que contém o eixo OV. A secção meridiana de um cone circular reto é um triângulo isósceles em que a base mede 2r (diâmetro), a altura é a altura h do cone e os lados congruentes são geratrizes. Quando este triângulo é equilátero (g = 2r), o cone é chamado cone equilátero.





cone reto



seção meridiana

Áreas

- Área lateral = área do setor circular de raio g (geratriz) e arco de comprimento igual ao perímetro da base do cone ($2\pi r$).

$$\boxed{A_{lateral} = \pi r g}$$

$$\boxed{A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = \pi r g + \pi r^2}$$

Setor Circular e Volume do Cone

Para calcular o ângulo do setor circular correspondente a Área Lateral do cone.

$$\boxed{\theta = 360° \cdot r / g}$$

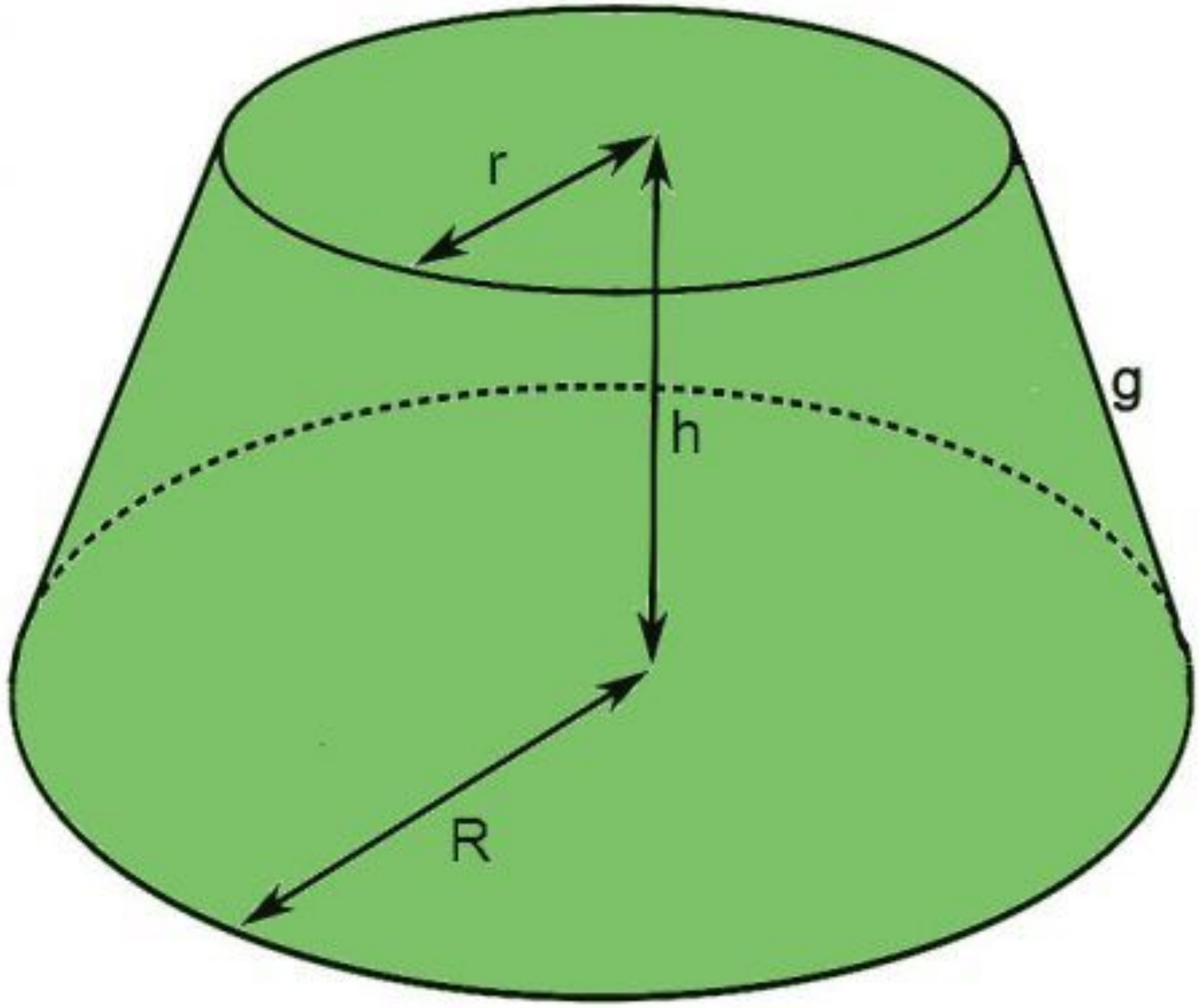
Princípio de Cavalieri: sólidos têm volumes iguais. Sendo assim, o volume V do cone é dado pela mesma fórmula do volume da pirâmide.

$$\boxed{V_{cone} = \pi r^2 h/3}$$

Tronco de cone Circular reto

- Uma seção transversal divide um cone em duas partes: um cone menor e a outra parte é denominada tronco, com bases paralelas.

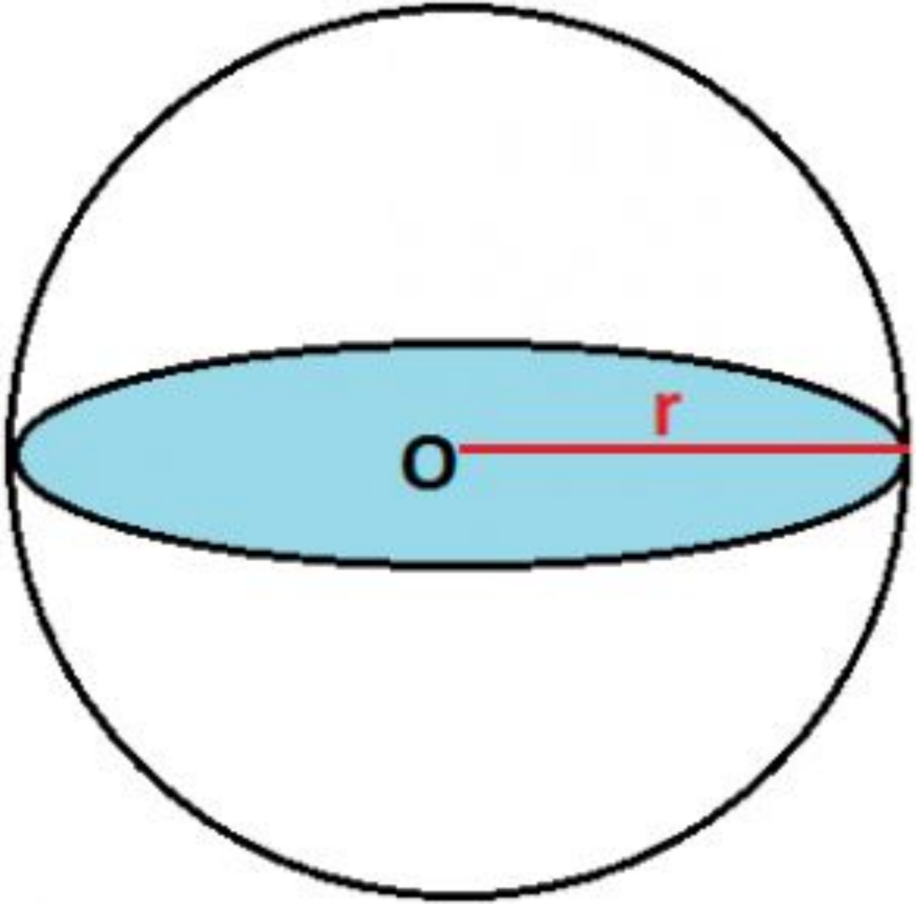
$$\boxed{V_T = h/3\ .\ (B + \text{raíz de } B.b + b)}$$


r
h
g
R

Ficha 8 - Esfera

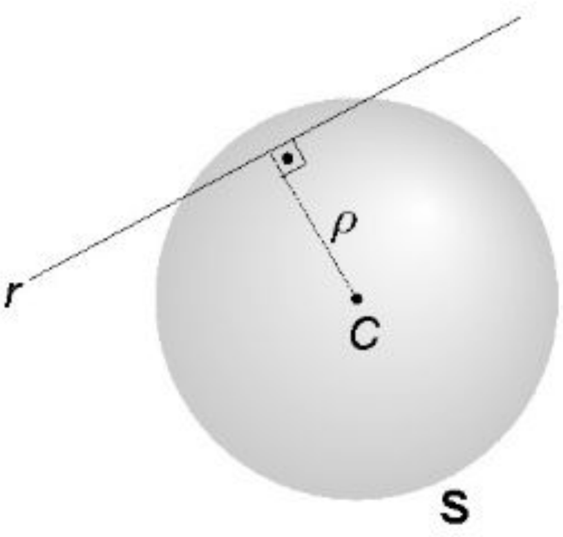
A esfera

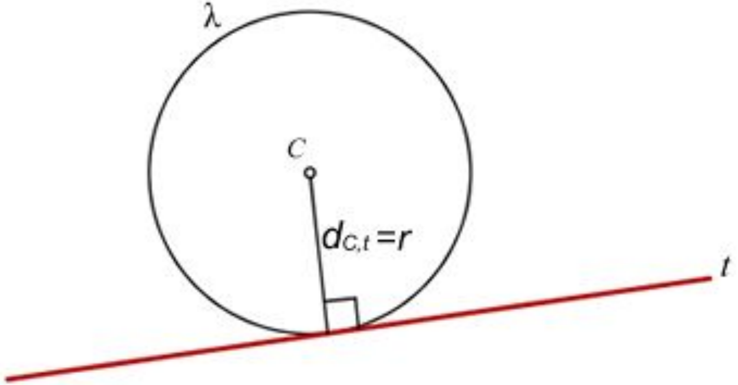
- Considere um ponto O e uma medida R, com R maior que 0. Chama-se esfera de centro O e raio R o conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias ao ponto O são menores ou iguais a R.



Reta Secante e Tangente a uma Esfera

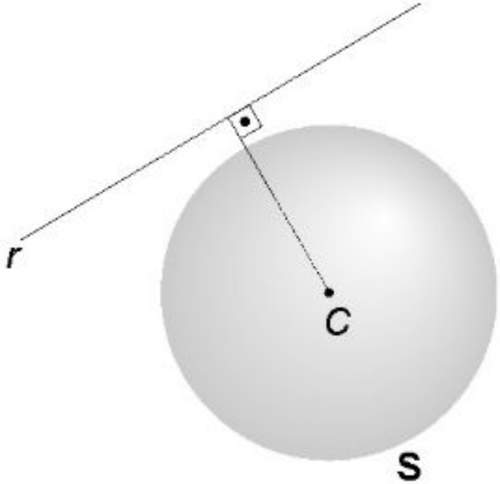
- Uma reta é secante a uma esfera se, e somente se, ambas têm em comum infinitos pontos.
- Uma reta é tangente a uma esfera se, e somente se, ambas têm em comum um único ponto. A reta é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

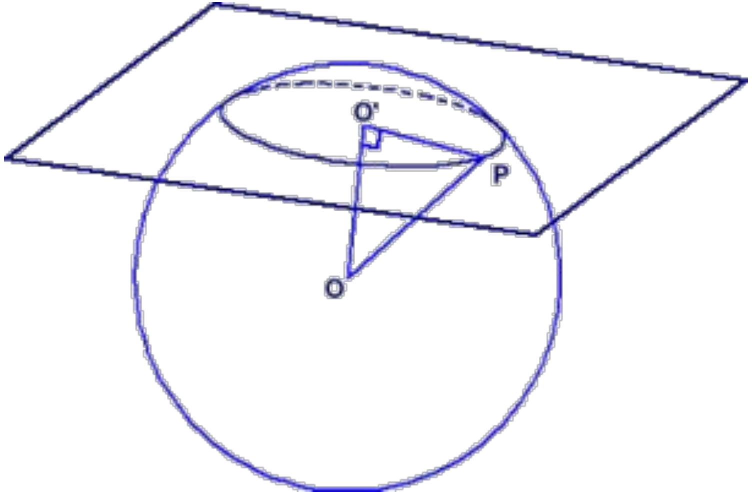




Reta exterior a uma esfera e interseção com um plano

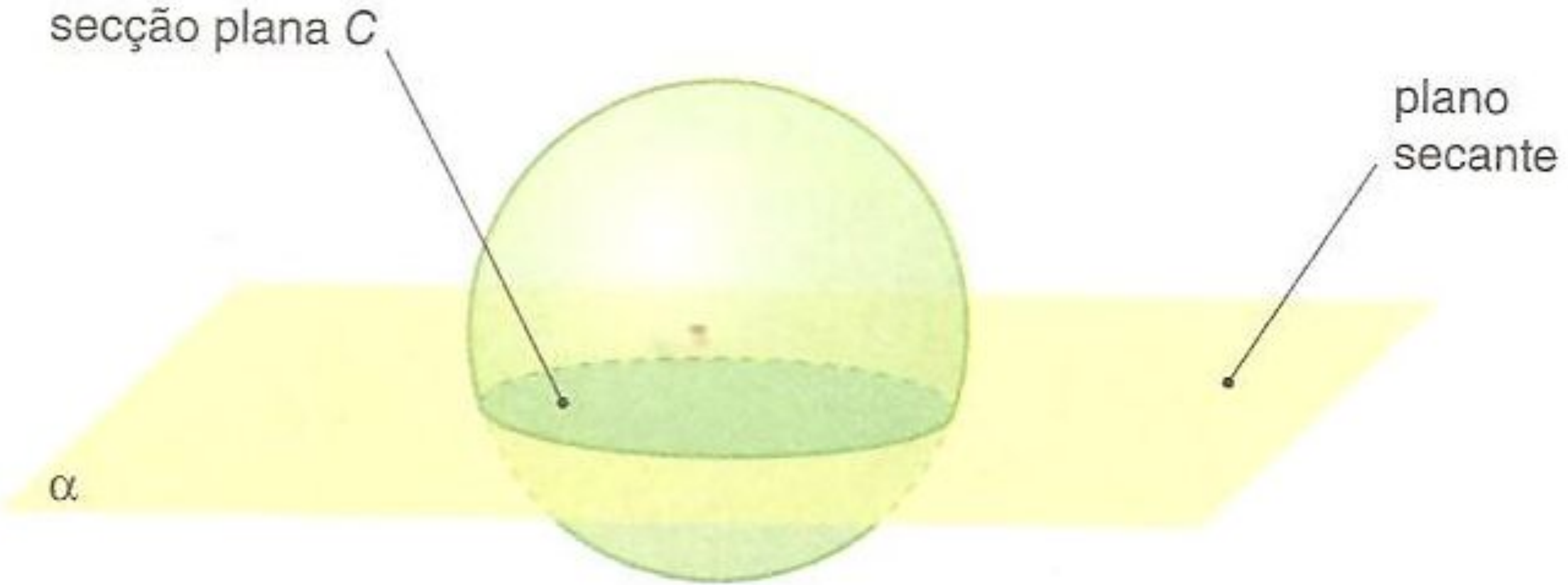
- Uma reta é exterior a uma esfera se, e somente se, não existe ponto comum a ambas
- Um plano β que intercepta uma esfera de raio R e passa pelo seu centro, determina um círculo de raio R. Se o plano intercepta a esfera mas não passa pelo seu centro, fica determinado um círculo de raio r menor que R

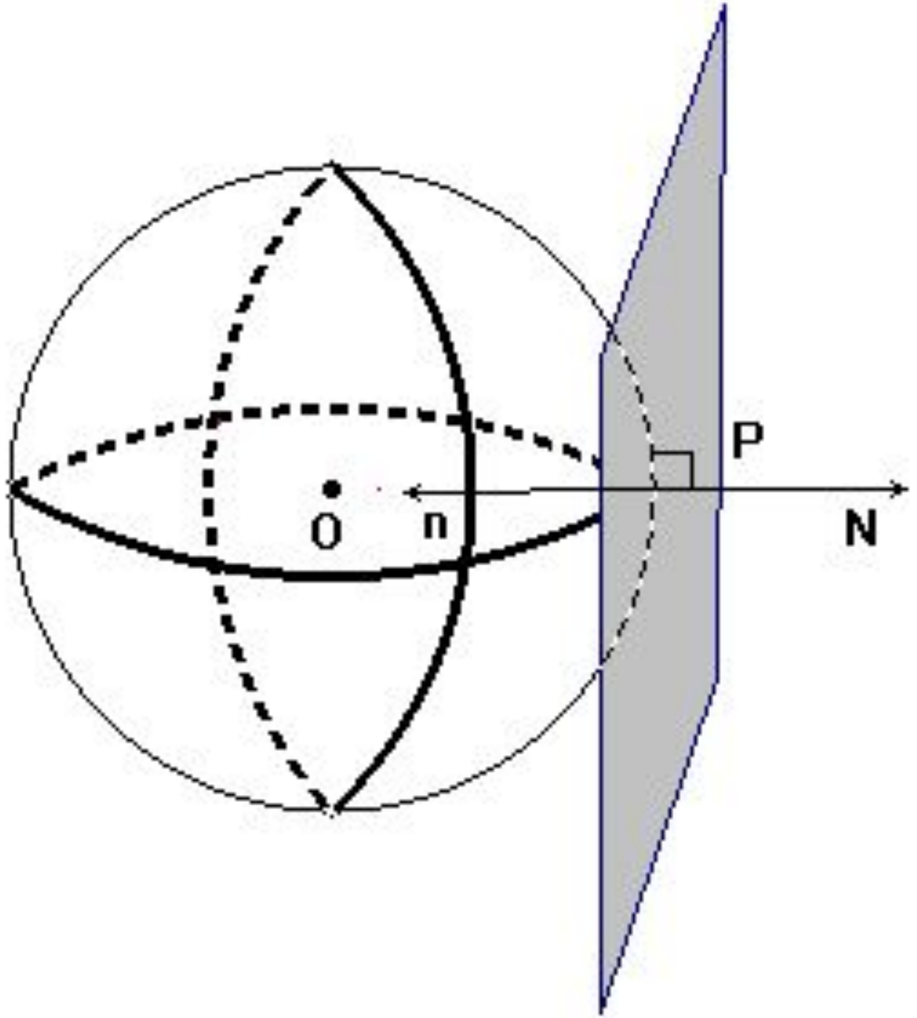


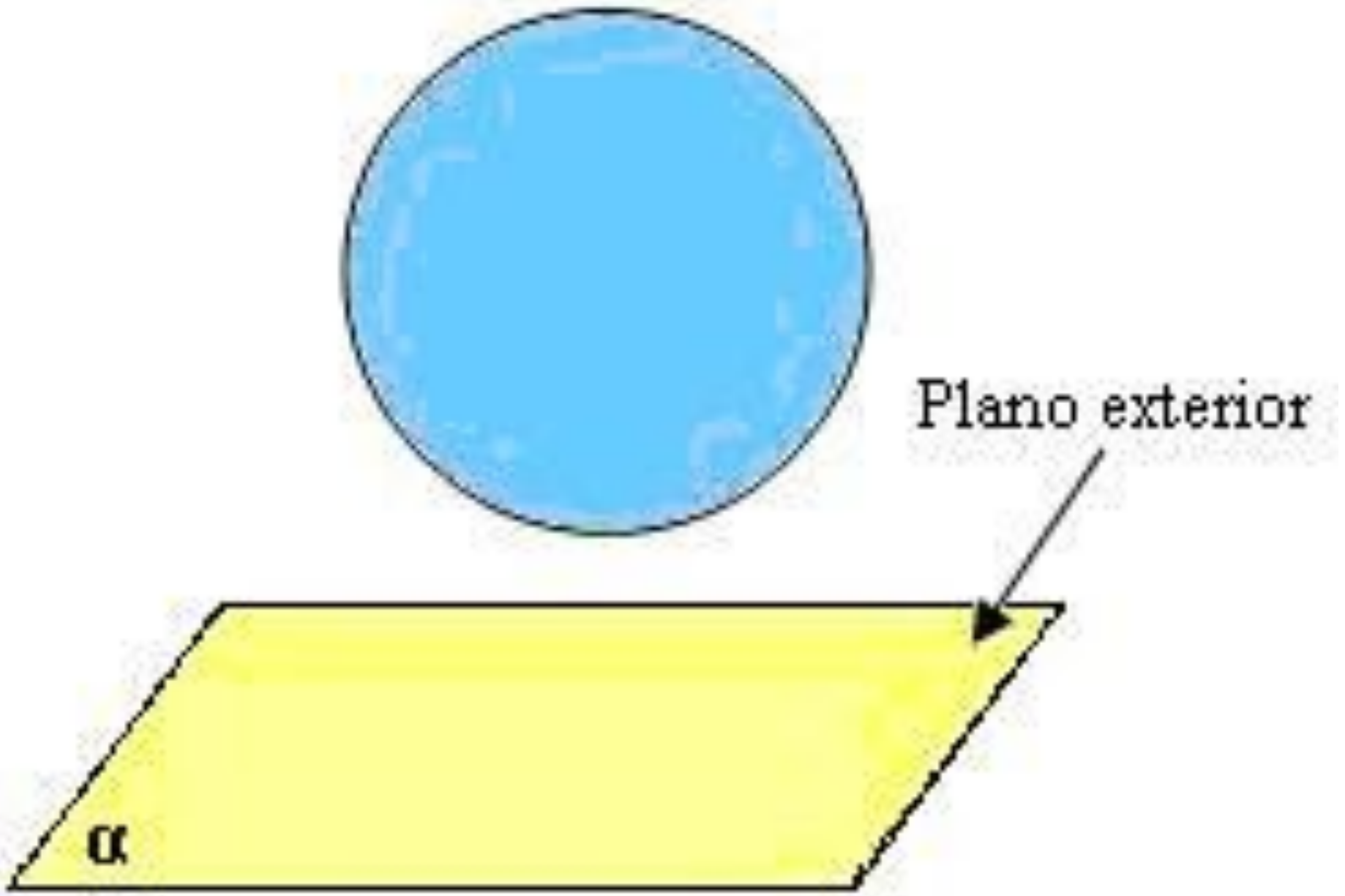


Posições relativas entre um plano e uma esfera

1) Plano secante a uma esfera: Se ambos têm em comum infinitos pontos. Esses pontos formam um círculo O chamado de secção plana da esfera. Uma secção plana que passa pelo centro de uma esfera tem o mesmo centro e o mesmo raio dessa esfera e é chamada de *círculo máximo da esfera*. A circunferência que limita esse círculo é chamada de *circunferência máxima da esfera*. O círculo máximo de uma esfera separa-a em dois sólidos chamados hemisférios.
2) Plano tangente a uma esfera: Ambos têm um comum um único ponto. O raio da esfera é perpendicular ao plano
3) Plano exterior: Não existe nenhum ponto em comum

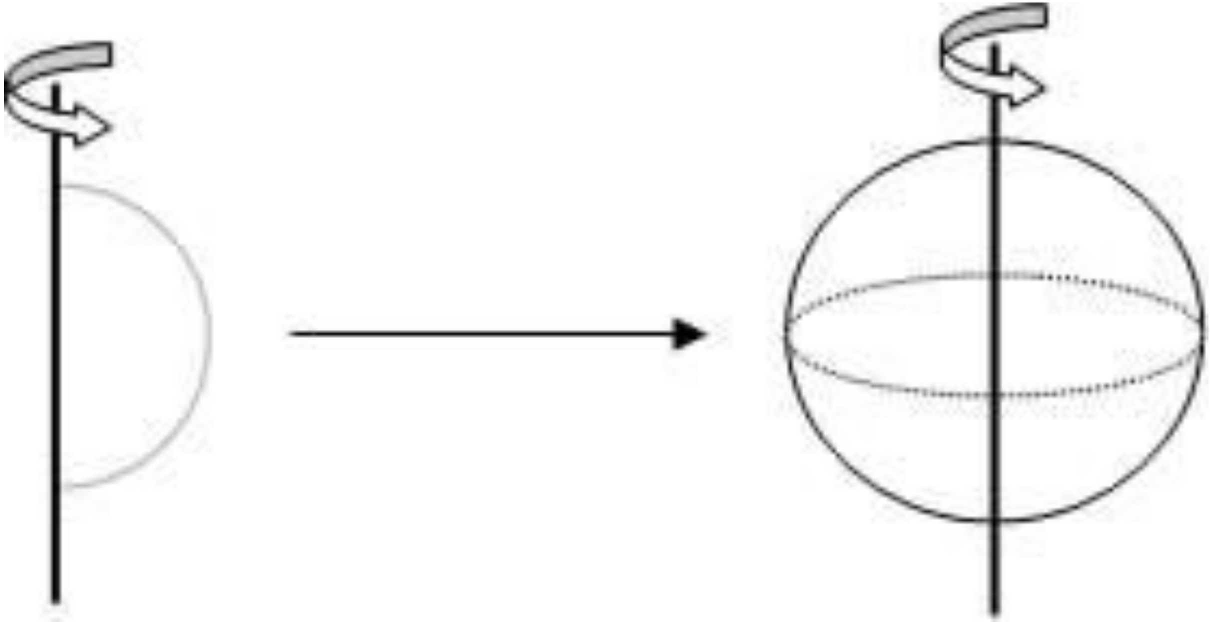

secção plana C
plano
secante
α


P
O
n
N


Plano exterior
α

Sólido de revolução

- A esfera pode ser obtida pela rotação completa de um semi círculo ou círculo em torno de um eixo que contém o diâmetro. A superfície gerada pela rotação é a superfície esférica da esfera.

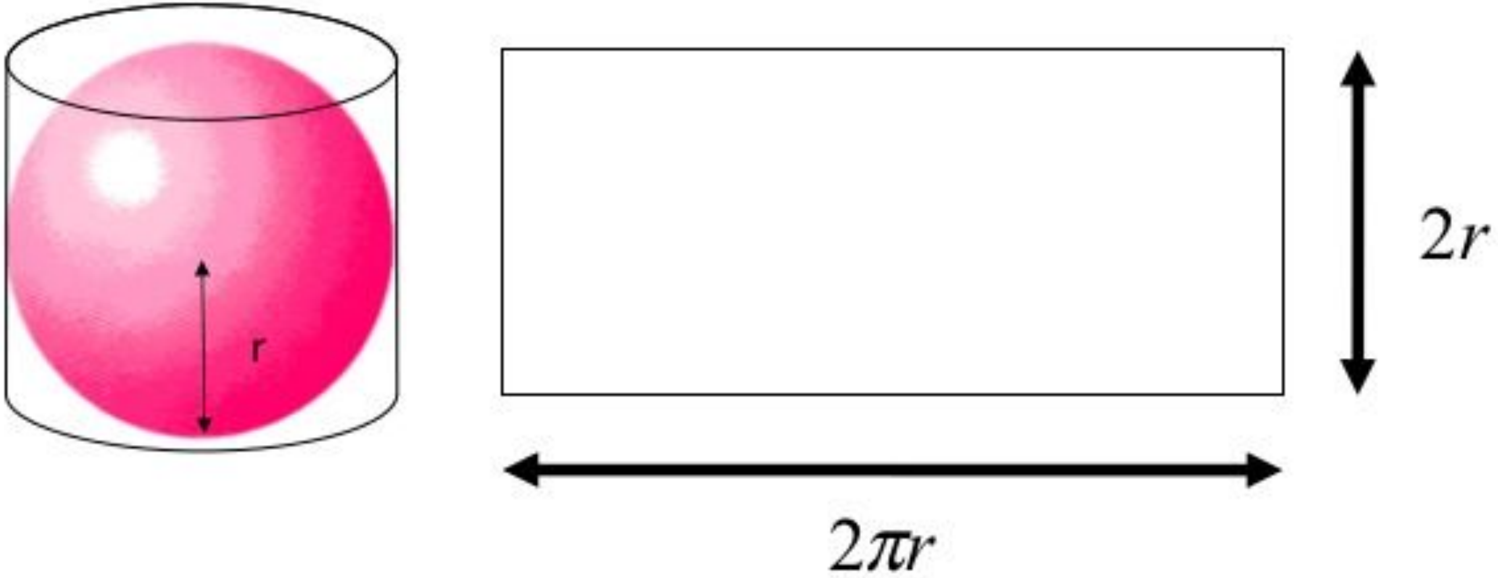


Volume da esfera e Área da Coroa Circular

$$\boxed{V_{esfera} = 4\pi R^3/3}$$

$$\boxed{A = \pi r^2 - \pi d^2 = \pi\,(r^2 - d^2)}$$

Área da superfície



$$A_{Superfície\ \ esférica} = 2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$$

Cálculo do volume da cunha e área da calota esférica

$$\boxed{\propto \pi r^3/270}$$

$$\boxed{A_{calota} = 2\pi r h}$$