Prova 2: MCF IMPA 2021

(Data de Entrega: 14 de Junho)

1. Considere o modelo de volatilidade local

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma(S(t), t)S(t)dW(t), \tag{1}$$

(Note que esta equação é similar à de Black-Scholes clássica, mas aqui a volatilidade é uma função do tempo e do preço da ação $S(t)$. Neste caso não existe uma fórmula para a solução, portanto é necessário o uso de métodos numéricos)

(a) Implemente um código computacional que simule, usando o método de *Milstein*, M trajetórias do preço da ação no intervalo $[0\ T]$. Para isto considere

$$\sigma(S, t) = \sigma_0 + \sigma_1 \cos(\frac{2\pi S}{K}) \sin(\frac{2\pi t}{K})$$

e considere M, μ, σ_0, σ_1, K, S_0, T como parâmetros de entrada.

(b) Implemente um código computacional para a precificação de uma opção Call Europeia. Isto é, calcule

$$C(0, S_0) = e^{-rT} E \left(S(T) - K\right)^+ .$$

Considere μ, σ_0, σ_1, K, S_0, r, T como parâmetros de entrada, e use para isto o método *Euler-Maruyama Simplicado* (ou seja, o *Weak Euler-Maruyama*).

(c) Implemente um código computacional para a precificação de uma opção do tipo Asian-European Call. Isto é, calcule

$$C(0, S_0) = e^{-rT} E \left(\frac{1}{T} \int_0^T S(u)du - K \right)^+ .$$

Considere μ, σ_0, σ_1, K, S_0, r, T como parâmetros de entrada, e use o método numérico que você desejar. (**Dica:** *Defina* $y(t) = \int_0^t S(u)du$ e considere o sistema de EDEs formado pela equação (1) e pela equação para $y(t)$. Agora o problema se resume em calcular $C(0, S_0) = e^{-rT} E \left(\frac{1}{T} y(T) - K\right)^+$. O qual é essencialmente o problema do item b)

2. No caso que σ depende de S e t (i.e., modelo (1)), a equação de Black-Scholes para o preço de uma opção Call Europeia com vencimento em $t = T$ e strike K, toma a forma:

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma(S(t), t) S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rS\frac{\partial C}{\partial S} + rC = 0, \quad S > 0,\ t < T$$

com condição inicial e de contorno:

$$\begin{aligned} C(S, 0) &= (S(0) - K)^+, \\ C(0, t) &= 0, \\ C(L, t) &= L. \end{aligned}$$

(a) Implemente o cálculo da opção Call Europeia, usando o método FTCS. Considere

$$\sigma(S(t), t) = \sigma_0 + \sigma_1 \cos(\frac{2\pi t}{T}) \exp\left(-\left(\frac{S}{K} - 1\right)^2 \right),$$

e use σ_0, σ_1, K, L, r, T como parâmetros de entrada.

(b) Faça um plot em $[0\ L] \times [0\ T]$ da superfície de precificação $C(S, t)$.