

Análise Matemática II

Exame de Época de Recurso

LEI e BE

28 de junho de 2024

9h00 - 11h30

Todos os passos nas suas repostas têm que ser justificados, invocando os resultados explicados nas aulas e/ou apresentando os cálculos relevantes.

1 Séries

1. Mostre que a série

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4}{n^2 - 4}$$

é convergente e calcule o valor da sua soma. (2)

2. Determine a natureza da seguinte série (i.e. diga se é divergente ou simples ou absolutamente convergente):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) \quad (2)$$

3. Determine o centro c , o raio R , o intervalo de convergência absoluta I_0 e o intervalo de convergência I da seguinte série de potências:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3(x-2)^n}{n^4 + 1} \quad (3)$$

2 Cálculo Diferencial em \mathbb{R}^n

4. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + 2x^2y - 7y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua em $(0, 0)$. (1)

(b) Calcule a derivada direcional $f'_{\vec{v}}(0, 0)$ para qualquer vetor unitário $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. (1)

(c) Verifique se f é diferenciável em $(0, 0)$. (1)

5. Seja

$$f(x, y) = x^2y - 4xy - 2y^2.$$

(a) Determine os pontos estacionários/críticos de f . (2)

(b) Determine se os pontos estacionários de f são máximos, mínimos ou pontos de sela. (2)

3 Cálculo integral em \mathbb{R}^n

6. Considere

$$\mathcal{I} = \int_{-2}^0 \int_{-x-2}^{\sqrt{4-x^2}} y \, dy \, dx + \int_0^2 \int_{x-2}^{\sqrt{4-x^2}} y \, dy \, dx.$$

(a) Faça o esboço gráfico do domínio de integração. (1)

(b) Inverta a ordem de integração. (1)

(c) Calcule o valor de \mathcal{I} usando a ordem de integração da sua preferência. (1)

7. Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$.

(a) Esboce o sólido S e descreva-o em coordenadas esféricas. (1,5)

(b) Utilizando coordenadas esféricas, calcule

$$\iiint_S 2z \, dV. \quad (1,5)$$