AM II, LEI + BE, TP: Regra da Cadeia e Aplicações

Marco Mackaaij

FCT, Universidade do Algarve

Regra da Cadeia 1

Seja $f = f(x, y)\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em $(x_0, y_0) \in D_f^\circ$.

Teorema

Caso

1. $x = x(t), y = y(t)\colon I \subseteq \mathbb{R} \to D_f$ *sejam ambas funções duma outra variável* t*;*
2. $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$ *para um dado* $t_0 \in I^\circ$*;*
3. x *e* y *sejam diferenciáveis em* t_0*,*

a função composta $g(t) := f(x(t), y(t))$ *é diferenciável em* t_0 *e a sua derivada satisfaz*

$$g'(t_0) = f'_x(x_0, y_0)x'(t_0) + f'_y(x_0, y_0)y'(t_0).$$

Regra da Cadeia 2

Seja $f = f(x, y)\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em $(x_0, y_0) \in D_f^\circ$.

Teorema

Caso

1. $x = x(s,t), y = y(s,t)\colon R \subseteq \mathbb{R}^2 \to D_f$ *sejam ambas funções dum par de novas variáveis* (s,t)*;*
2. $(x(s_0,t_0), y(s_0,t_0)) = (x_0, y_0)$ *para um dado* $(s_0, t_0) \in R^\circ$*;*
3. x *e* y *sejam diferenciáveis em* (s_0, t_0)*,*

a função composta $g(s,t) := f(x(s,t), y(s,t))$ *é diferenciável em* (s_0, t_0) *e as suas derivadas parciais satisfazem*

$$\begin{aligned} g'_s(s_0,t_0) &= f'_x(x_0,y_0)x'_s(s_0,t_0) + f'_y(x_0,y_0)y'_s(s_0,t_0); \\ g'_t(s_0,t_0) &= f'_x(x_0,y_0)x'_t(s_0,t_0) + f'_y(x_0,y_0)y'_t(s_0,t_0). \end{aligned}$$

Exercícios

1. Usando a Regra da Cadeia, calcule $g'(t_0)$, onde $g(t) = f(x(t), y(t))$:
   - $f(x, y) = 3x + 4y$, $x = t^2$, $y = 2t$, $t_0 = 1$;
   - $f(x, y) = \dfrac{x}{y^2 + 1}$, $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

Soluções: Exercício 1a

Sejam $f(x, y) = 3x + 4y$, $x = t^2$, $y = 2t$, $t_0 = 1$.

- Note-se que $(x_0, y_0) = (1^2, 2 \cdot 1) = (1, 2)$. Pela Regra da Cadeia:

$$
\begin{aligned}
g'(1) &= f'_x(1,2) \cdot (t^2)'|_{t=1} + f'_y(1,2) \cdot (2t)'|_{t=1} \\
&= 3 \cdot 2t|_{t=1} + 4 \cdot 2 \\
&= 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \\
&= 14.
\end{aligned}
$$

Soluções: Exercício 1b

Sejam $f(x,y) = \dfrac{x}{y^2+1}$, $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

- Note-se que $(x_0, y_0) = (\cos(\frac{\pi}{2}), \sin(\frac{\pi}{2})) = (0,1)$. Pela Regra da Cadeia:

$$
\begin{aligned}
g'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= f'_x(0,1)(\cos(t))'|_{t=\frac{\pi}{2}} + f'_y(0,1)(\sin(t))'|_{t=\frac{\pi}{2}} \\
&= \left.\frac{1}{y^2+1}\right|_{(0,1)} \cdot \left(-sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \left.\frac{2xy}{(y^2+1)^2}\right|_{(0,1)} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (-1) + 0 \cdot 0 \\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Exercícios

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

2. Calcule $g(3)$ e $g'(3)$, onde $g(t) = f(t^3 - 5t, 11t - 1)$ tal que $f(12, 32) = 0$, $f'_x(12, 32) = -3$ e $f'_y(12, 32) = 2$.

3. Calcule $g(0)$ e $g'(0)$, onde $g(t) = f(\sin(t), \cos(t))$ tal que $f(0, 1) = 50$, $f'_x(0, 1) = 10$ e $f'_y(0, 1) = -7$.

Soluções: Exercício 2

Sabemos que $g(t) = f(t^3 - 5t, 11t - 1)$, $f(12, 32) = 0$:

- Como $f = f(x, y)$, vê-se que $x = t^3 - 5t$ e $y = 11t - 1$.
- Pede-se para calcular $g(3)$, logo

$$t_0 = 3;$$

$$(x_0, y_0) = (3^3 - 5 \cdot 3, 11 \cdot 3 - 1) = (12, 32);$$

$$\boxed{g(3) = f(12, 32) = 0.}$$

Soluções: Exercício 2

Também sabemos que $f'_x(12,32) = -3$, $f'_y(12,32) = 2$:

- Logo

$$\begin{aligned} g'(3) &= f'_x(12,32) \cdot (t^3 - 5t)'|_{t=3} + f'_y(12,32) \cdot (11t-1)'|_{t=3} \\ &= f'_x(12,32) \cdot (3t^2 - 5)|_{t=3} + f'_y(12,32) \cdot 11 \\ &= -3 \cdot 22 + 2 \cdot 11 \\ &= -44. \end{aligned}$$

$$\boxed{g'(3) = -44.}$$

Soluções: Exercício 3

Sabemos que $g(t) = f(\sin(t), \cos(t))$, $f(0,1) = 50$:

- Como $f = f(x, y)$, vê-se que $x = \sin(t)$ e $y = \cos(t)$.
- Pede-se para calcular $g(0)$, logo

$$t_0 = 0$$

$$(x_0, y_0) = (\sin(0), \cos(0)) = (0, 1);$$

$$\boxed{g(0) = f(0,1) = 50.}$$

Soluções: Exercício 3

Também sabemos que $f'_x(0,1) = 10$, $f'_y(0,1) = -7$.

- Logo

$$
\begin{aligned}
g'(0) &= f'_x(0,1) \cdot \sin'(t)|_{t=0} + f'_y(0,1) \cdot \cos'(t)|_{t=0} \\
&= f'_x(0,1) \cdot \cos(0) + f'_y(0,1) \cdot (-\sin(0)) \\
&= (10 \cdot 1) - (7 \cdot 0) \\
&= 10.
\end{aligned}
$$

$$\boxed{g'(0) = 10.}$$

Exercícios

4. Usando a Regra da Cadeia, calcule $g'_s(s_0, t_0)$ e $g'_t(s_0, t_0)$, onde $g(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$:
   - $f(x,y) = x^2y$, $x = s - t$, $y = 2s + 4t$, $(s_0, t_0) = (1, 0)$;
   - $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$, $x = t$, $y = st^2$, $(s_0, t_0) = (1, 1)$.

Soluções: Exercício 4a

Sejam $f(x, y) = x^2 y$, $x = s - t$, $y = 2s + 4t$, $(s_0, t_0) = (1, 0)$.

- Note-se que $(x_0, y_0) = (1 - 0, 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0) = (1, 2)$. Pela Regra da Cadeia:

$$\begin{aligned} g'_s(1,0) &= f'_x(1,2)(s-t)'_s|_{(1,0)} + f'_y(1,2)(2s+4t)'_s|_{(1,0)} \\ &= 2xy\Big|_{(1,2)} \cdot 1 + x^2\Big|_{(1,2)} \cdot 2 \\ &= 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1^2 \cdot 2 \\ &= 4 + 2 \\ &= 6. \end{aligned}$$

Soluções: Exercício 4a

Sejam $f(x,y) = x^2y$, $x = s - t$, $y = 2s + 4t$, $(s_0, t_0) = (1, 0)$.

- Note-se que $(x_0, y_0) = (1 - 0, 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0) = (1, 2)$. Pela Regra da Cadeia:

$$\begin{aligned}
g'_t(1,0) &= f'_x(1,2)(s-t)'_t|_{(1,0)} + f'_y(1,2)(2s+4t)'_t|_{(1,0)} \\
&= 2xy\Big|_{(1,2)} \cdot (-1) + x^2\Big|_{(1,2)} \cdot 4 \\
&= 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-1) + 1^2 \cdot 4 \\
&= -4 + 4 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Soluções: Exercício 4b

Sejam $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$, $x = t$, $y = st^2$, $(s_0, t_0) = (1, 1)$.

- Note-se que $(x_0, y_0) = (1, 1 \cdot 1^2) = (1, 1)$. Pela Regra da Cadeia:

$$\begin{aligned} g_s'(1,1) &= f_x'(1,1)(t)_s'|_{(1,1)} + f_y'(1,1)(st^2)_s'|_{(1,1)} \\ &= -2xe^{-(x^2+y^2)}\Big|_{(1,1)} \cdot 0 - 2ye^{-(x^2+y^2)}\Big|_{(1,1)} \cdot t^2|_{(1,1)} \\ &= 0 - 2 \cdot 1 \cdot e^{-(1^2+1^2)} \cdot 1^2 \\ &= -2e^{-2}. \end{aligned}$$

Soluções: Exercício 4b

Sejam $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$, $x = t$, $y = st^2$, $(s_0, t_0) = (1, 1)$.

- Note-se que $(x_0, y_0) = (1, 1 \cdot 1^2) = (1, 1)$. Pela Regra da Cadeia:

$$
\begin{aligned}
g'_t(1,1) &= f'_x(1,1)(t)'_t|_{(1,1)} + f'_y(1,1)(st^2)'_t|_{(1,1)} \\
&= -2xe^{-(x^2+y^2)}\Big|_{(1,1)} \cdot 1 - 2ye^{-(x^2+y^2)}\Big|_{(1,1)} \cdot 2st|_{(1,1)} \\
&= -2 \cdot 1 \cdot e^{-(1^2+1^2)} \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot e^{-(1^2+1^2)} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \\
&= -2e^{-2} - 4e^{-2} \\
&= -6e^{-2}.
\end{aligned}
$$

Exercícios

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

5. Calcule $g(0,0)$, $g'_s(0,0)$ e $g'_t(0,0)$, onde $g(s,t) = f(t\sin(s), s\sin(t))$ tal que $f(0,0) = 4$, $f'_x(0,0) = 10$ e $f'_y(0,0) = 2$.

6. Calcule $g'_s(0,2)$ e $g'_t(0,2)$, onde $g(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$ com $x(s,t) = st^2$ e $y(s,t) = te^s$ e tal que $f'_x(0,2) = 10$ e $f'_y(0,2) = -5$.

Soluções: Exercício 5

Sabemos que $g(s,t) = f(t\sin(s), s\sin(t))$, $f(0,0) = 4$:

- Como $f = f(x,y)$, vê-se que $x = t\sin(s)$ e $y = s\sin(t)$.
- Pede-se para calcular $g(0,0)$, logo

$$(s_0, t_0) = (0,0);$$

$$(x_0, y_0) = (0\cdot\sin(0), 0\cdot\sin(0)) = (0,0);$$

$$\boxed{g(0,0) = f(0,0) = 4.}$$

Soluções: Exercício 5

Também sabemos que $f'_x(0,0) = 10$, $f'_y(0,0) = 2$:

- Logo

$$\begin{aligned} g'_s(0,0) &= f'_x(0,0)t\sin'_s(s)|_{(s,t)=(0,0)} + f'_y(0,0)s'_s\sin(t)|_{(s,t)=(0,0)} \\ &= f'_x(0,0)t\cos(s)|_{(s,t)=(0,0)} + f'_y(0,0)\sin(t)|_{(s,t)=(0,0)} \\ &= (10\cdot 0) + (2\cdot 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'_t(0,0) &= f'_x(0,0)t'_t\sin(s)|_{(s,t)=(0,0)} + f'_y(0,0)s\sin'_t(t)|_{(s,t)=(0,0)} \\ &= f'_x(0,0)\sin(s)|_{(s,t)=(0,0)} + f'_y(0,0)s\cos(t)|_{(s,t)=(0,0)} \\ &= (10\cdot 0) + (2\cdot 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{g'_s(0,0) = g'_t(0,0) = 0.}$$

Soluções: Exercício 5

Sabemos que $g(s,t) = f(st^2, te^s)$, $f'_x(0,2) = 10$, $f'_y(0,2) = -5$:

- Neste caso, é dado que $x = st^2$ e $y = te^s$.
- Pede-se para calcular $g'_s(0,2)$ e $g'_t(0,2)$, logo

$$(s_0, t_0) = (0,2);$$

$$(x_0, y_0) = (0 \cdot 2^2, 2 \cdot e^0) = (0,2);$$

Soluções: Exercício 5

Também sabemos que $f'_x(0,2) = 10$, $f'_y(0,2) = -5$:

- Logo

$$\begin{aligned}
g'_s(0,2) &= f'_x(0,2)(st^2)'_s|_{(s,t)=(0,2)} + f'_y(0,2)(te^s)'_s|_{(s,t)=(0,2)} \\
&= f'_x(0,2)t^2|_{(s,t)=(0,2)} + f'_y(0,2)te^s|_{(s,t)=(0,2)} \\
&= (10 \cdot 2^2) + (-5 \cdot 2) \\
&= 30.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g'_t(0,2) &= f'_x(0,2)(st^2)'_t|_{(s,t)=(0,2)} + f'_y(0,2)(te^s)'_t|_{(s,t)=(0,2)} \\
&= f'_x(0,2)(2st)|_{(s,t)=(0,2)} + f'_y(0,2)e^s|_{(s,t)=(0,2)} \\
&= (10 \cdot 0) + (-5 \cdot 1) \\
&= -5.
\end{aligned}$$

$$\boxed{g'_s(0,2) = 30 \text{ e } g'_t(0,2) = -5.}$$

O gradiente

Sejam $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a,b) \in D_f^\circ$.

Definição

Caso exista, o **gradiente** *de f em (a,b) é o vetor*

$$\nabla f(a,b) := \big(f'_x(a,b), f'_y(a,b)\big) \in \mathbb{R}^2.$$

Variando o ponto (a,b), o gradiente define uma **função vetorial**

$$\nabla f = (f'_x, f'_y)\colon D_{\nabla f} \to \mathbb{R}^2.$$

Relação do gradiente com as derivadas direcionais

Proposição

Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *diferenciável em* $(a, b) \in D_f^\circ$. *Para todo o* $\vec{v} = (v, w) \in \mathbb{R}^2$ *unitário,* $f'_{\vec{v}}(a, b)$ *existe e satisfaz*

$$f'_{\vec{v}}(a, b) = \nabla f(a, b) \cdot (v, w) := f'_x(a, b)v + f'_y(a, b)w.$$

AVISO: Esta proposição é falsa para funções não diferenciáveis!

Interpretação geométrica do gradiente

Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em $(a, b) \in D_f^\circ$.

Corolário

Para todo o vetor unitário $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$-\|\nabla f(a, b)\| \leq f'_{\vec{v}}(a, b) \leq \|\nabla f(a, b)\|.$$

Além disso,

$f'_{\vec{v}}(a, b) = \pm\|\nabla f(a, b)\|$ *sse* $\vec{v}$ *aponta na direção de* $\pm\nabla f(a, b)$.

Se $\nabla f(a, b) = 0$, *então* $f'_{\vec{v}}(a, b) = 0$ *para todo o* $\vec{v}$, *i.e.* $T_f(a, b)$ *é horizontal.*

Plano tangente a uma superfície

- Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície definida por uma equação do tipo

$$F(x, y, z) = 0,$$

  onde F é uma função diferenciável.

- A equação de $T_S(a, b, c)$ é:

$$\boxed{F'_x(a, b, c)(x - a) + F'_y(a, b, c)(y - b) + F'_z(a, b, c)(z - c) = 0.}$$

Exercícios

1. Determine a derivada direcional de $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$, no ponto $(1,1)$, ao longo do vetor unitário na direção da bissetriz do primeiro ângulo coordenado.
2. Determine a derivada direcional de $f(x,y) = x^3 + xy$ em qualquer ponto de $\mathbb{R}^2$ e ao longo do vetor unitário que faz um ângulo de $\pi/3$ com o eixo-x no plano-xy.

Soluções: Exercício 1

- O gradiente de $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ em $(1, 1)$:

$$\begin{aligned}
\nabla f(1,1) &= (f'_x(1,1), f'_y(1,1)) \\
&\overset{(*)}{=} \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)\Bigg|_{(x,y)=(1,1)} \\
&= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\nabla f(1,1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).}$$

Exercícios: Exercício 1

$$\ln(\sqrt{x^2+y^2}) = \ln((x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2).$$

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \frac{1}{2}(\ln(x^2+y^2))'_x \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+y^2)'_x}{x^2+y^2} \\ &= \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}x}{x^2+y^2} \\ &= \frac{x}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Soluções: Exercício 1

- O vetor unitário na direção da bissectriz do primeiro ângulo coordenado:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{(1,1)}{\|(1,1)\|} \\ &= \frac{(1,1)}{\sqrt{1^2+1^2}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).}$$

Soluções: Exercício 1

Dos slides anteriores: $\nabla f(1,1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

- Pela Proposição:

$$\begin{aligned} f'_{\vec{v}}(1,1) &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{f'_{\vec{v}}(1,1) = \frac{\sqrt{2}}{2}.}$$

Soluções: Exercício 2

- O gradiente de $f(x,y) = x^3 + xy$ em $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= ((x^3+xy)'_x, (x^3+xy)'_y) \\ &= (3x^2+y, x). \end{aligned}$$

$$\boxed{\nabla f(x,y) = (3x^2+y, x).}$$

Soluções: Exercício 2

- O vetor unitário $\vec{v} = (v, w) \in \mathbb{R}^2$ que faz um ângulo de $\pi/3$ com o eixo de x:

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \qquad (\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1) \\
&= \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).}$$

Soluções: Exercício 2

Dos slides anteriores: $\nabla f(x,y) = (3x^2 + y, x)$ e $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

- Pela Proposição:

$$\begin{aligned} f'_{\vec{v}}(x,y) &= (3x^2 + y, x) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}x \\ &= \frac{1}{2}\left(3x^2 + \sqrt{3}x + y\right). \end{aligned}$$

$$\boxed{f'_{\vec{v}}(x,y) = \frac{1}{2}\left(3x^2 + \sqrt{3}x + y\right).}$$

Exercícios

3. Qual a direção de maior/menor crescimento de f no ponto $(2,1)$, onde $f(x,y) = -x^2y + xy^2 + xy$?
4. Quais os vetores unitários $\vec{v}$ tais que $f'_{\vec{v}}(3,1) = 0$, onde $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy - 7x$?

Soluções: Exercício 3

Qual a direção de maior/menor crescimento de f no ponto $(2,1)$, onde $f(x,y) = -x^2y + xy^2 + xy$?

- É preciso calcular o gradiente de f no ponto $(2,1)$:

$$\begin{aligned}
\nabla f(2,1) &= (f'_x(2,1), f'_y(2,1)) \\
&= (-2xy + y^2 + y, -x^2 + 2xy + x)|_{(x,y)=(2,1)} \\
&= (-2 \cdot 2 \cdot 1 + 1^2 + 1, -2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2) \\
&= (-2, 2).
\end{aligned}$$

A direção de maior crescimento é $(-2,2)$ e a direção de menor crescimento é $-(-2,2) = (2,-2)$.

Soluções: Exercício 4

Quais os vetores unitários $\vec{v}$ tais que $f'_{\vec{v}}(3,1) = 0$, onde $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy - 7x$?

- Em primeiro lugar:

$$\begin{aligned} \nabla f(3,1) &= (2x - y - 7, 4y - x)\big|_{(x,y)=(3,1)} \\ &= (2 \cdot 3 - 1 - 7, 4 \cdot 1 - 3) \\ &= (-2, 1) \end{aligned}$$

- Portanto ($\vec{v} = (v, w)$):

$$f'_{\vec{v}}(3,1) = 0 \Leftrightarrow (-2,1)\cdot(v,w) = 0 \Leftrightarrow -2v + w = 0 \Leftrightarrow w = 2v.$$

Soluções: Exercício 4

Do slide anterior: $f'_{\vec{v}}(3,1) = 0 \Leftrightarrow w = 2v$, onde $\vec{v} = (v, w)$.

- Há apenas dois vetores unitários $\vec{v}$ que satisfazem $w = 2v$:

$$\|\vec{v}\| = 1 \;\Leftrightarrow\; v^2 + (2v)^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; 5v^2 = 1; \Leftrightarrow\; v = \frac{\pm 1}{\sqrt{5}}.$$

$$\boxed{f'_{\vec{v}}(3,1) = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \left(\frac{\pm 1}{\sqrt{5}}, \frac{\pm 2}{\sqrt{5}}\right).}$$

Exercícios

5. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- Determine $f_{\vec{v}}(0,0)$ para todo o vetor unitário $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$;
- Verifique se f é diferenciável em $(0,0)$.

Soluções: Exercício 5a

Seja

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

- Determinemos $f'_{\vec{v}}(0,0)$, onde $\vec{v}=(v,w)$ tal que $v^2+w^2=1$:

$$\begin{aligned} f'_{\vec{v}}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(tv,tw)-f(0,0)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3v^3}{t^2v^2+t^2w^2}-0}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\cancel{t^3}v^3}{\cancel{t^3}(v^2+w^2)}\\ &= v^3. \end{aligned}$$

Soluções: Exercício 5b

Do slide anterior $f'_{\vec{v}}(0,0) = v^3$.

- Se f fosse diferenciável em $(0,0)$, então

$$f'_{\vec{v}}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot (v,w) = f'_x(0,0)v + f'_y(0,0)w$$

para **todo** o vetor unitário $\vec{v} = (v,w) \in \mathbb{R}^2$.

Mas isso é falso em geral, porque

$$f'_x(0,0) = f'_{(1,0)}(0,0) = 1^3 = 1 \text{ e } f'_y(0,0) = f'_{(0,1)}(0,0) = 0^3 = 0,$$

logo

$$\begin{aligned} f'_{\vec{v}}(0,0) = f'_x(0,0)v + f'_y(0,0)w \quad &\Leftrightarrow \\ v^3 = 1 \cdot v + 0 \cdot w = v \quad &\Leftrightarrow \\ v = 0 \vee v = \pm 1. \quad & \end{aligned}$$

Soluções: Exercício 5b

$\boxed{f \text{ **não** é diferenciável em } (0,0).}$

Exercícios

6. Determine a equação do plano tangente à superfície S de equação $x^2 - 2y^2 + z^2 = 3$ no ponto $(-1, 1, 2)$.
7. Determine os pontos do hiperbolóide S de equação $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 16$ em que o plano tangente é paralelo ao plano V de equação $4x - 2y + 4z = 5$.
8. Determine os pontos do parabolóide S de equação $z = 4x^2 + 9y^2$ em que a reta normal é paralela à reta ℓ que passa pelos pontos $P = (-2, 4, 3)$ e $Q = (5, -1, 2)$.

Resolução: 6

Determine a equação do plano tangente à superfície S de equação $x^2 - 2y^2 + z^2 = 3$ no ponto $(-1, 1, 2)$.

- Seja $F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^2 - 3$. Então

$$F'_x(-1,1,2) = 2x|_{(-1,1,2)} = -2,$$
$$F'_y(-1,1,2) = -4y|_{(-1,1,2)} = -4,$$
$$F'_z(-1,1,2) = 2z|_{(-1,1,2)} = 4.$$

- A equação de $T_S(-1, 1, 2)$:

$$\begin{aligned} F'_x(-1,1,2)(x-(-1)) + F'_y(-1,1,2)(y-1) + F'_z(-1,1,2)(z-2) = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ -2(x+1) - 4(y-1) + 4(z-2) = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ -2x - 4y + 4z = 6 \quad & \end{aligned}$$

Resolução: 7

Determine os pontos do hiperbolóide S de equação $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 16$ em que o plano tangente é paralelo ao plano V de equação $4x - 2y + 4z = 5$.

- Seja $F(x,y,z) = x^2 - 2y^2 - 4z^2 - 16$. Então,

  $$T_S(x,y,z) \parallel V \Leftrightarrow \nabla F(x,y,z) = \lambda(4,-2,4) \text{ para um } \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

- $\nabla F(x,y,z) = (2x, -4y, -8z)$ e

  $$(2x,-4y,-8z) = (4\lambda, -2\lambda, 4\lambda) \Leftrightarrow (x,y,z) = (2\lambda, \lambda/2, -\lambda/2).$$

- Substituir $(x,y,z) = (2\lambda, \lambda/2, -\lambda/2)$ em $F(x,y,z) = 0$ dá:

  $$4\lambda^2 - \frac{\lambda^2}{2} - \lambda^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow \frac{5\lambda^2}{2} = 16 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{32}{5}}.$$

Resolução: 7

- Do slide anterior: $(x, y, z) = (2\lambda, \lambda/2, -\lambda/2)$ e $\lambda = \pm\sqrt{32/5}$. Logo

$$(x,y,z) = \left(2\sqrt{\frac{32}{5}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{32}{5}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{32}{5}}\right) \quad \vee$$

$$(x,y,z) = \left(-2\sqrt{\frac{32}{5}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{32}{5}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{32}{5}}\right) \quad .$$

Resolução: 8

Determine os pontos do parabolóide S de equação $z = 4x^2 + 9y^2$ em que a reta normal é paralela à reta ℓ que passa pelos pontos $P = (-2, 4, 3)$ e $Q = (5, -1, 2)$.

- S: $F(x, y, z) = 0$, onde $F(x, y, z) = 4x^2 + 9y^2 - z$.
- ℓ é gerada pelo vetor $Q - P = (7, -5, -1)$.
- $\nabla F(x, y, z) = (8x, 18y, -1) \perp T_S(x, y, z)$, $\forall (x, y, z) \in S$.
- Logo, a reta normal a S em $(x, y, z) \in S$ é paralela a ℓ sse

$$(8x, 18y, -1) = (7\lambda, -5\lambda, -\lambda) \text{ para um } \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

- Essa equação só tem uma solução quando $\lambda = 1$ e nesse caso

$$x = \frac{7}{8} \wedge y = -\frac{5}{18}.$$

Resolução: 8

Do slide anterior: $x = 7/8$ e $y = -5/18$.

- Para se determinar o valor de z, substitui-se os valores de x e y na equação $z = 4x^2 + 9y^2$:

$$z = 4 \cdot \frac{49}{64} + 9 \cdot \frac{25}{324} \;\Leftrightarrow\; z = \frac{541}{144}.$$

- Só há um ponto de S onde a reta normal é paralela a ℓ:

$$(x, y, z) = \left(\frac{7}{8}, -\frac{5}{18}, \frac{541}{144}\right).$$

FIM