AM II, LEI + BE, T: Derivadas parciais, diferenciabilidade e plano tangente

Marco Mackaaij

FCT, Universidade do Algarve

Diferenciabilidade numa variável: 1ª revisão

Sejam $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in D_f^\circ$.

Definição

A função f diz-se **diferenciável em** *a se o seguinte limite existir:*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

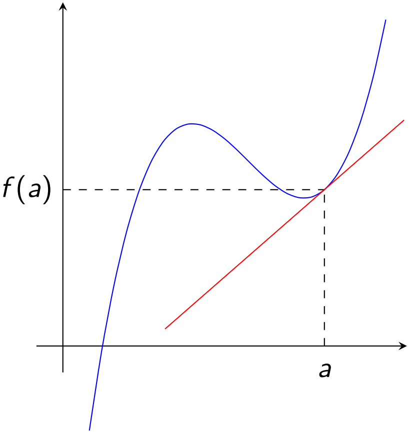
Este limite é **a derivada de f em** *a e é denotada por $f'(a)$.*

Obs.: Substituindo $x = a + t$, obtém-se

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t)-f(a)}{t}.$$

Diferenciabilidade numa variável: 1ª revisão

- $f'(a)$ é o **declive** da **reta tangente** a G_f no ponto $(a, f(a))$:



Derivadas parciais

Sejam $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a, b) \in D_f^\circ$.

Definição (Derivadas parciais)

- *A* **derivada parcial de** f **em ordem a** x *no ponto* (a, b) *é definida por*

$$f'_x(a, b) := \lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}.$$

- *A* **derivada parcial de** f **em ordem a** y *no ponto* (a, b) *é definida por*

$$f'_y(a, b) := \lim_{y \to b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}.$$

Derivadas parciais

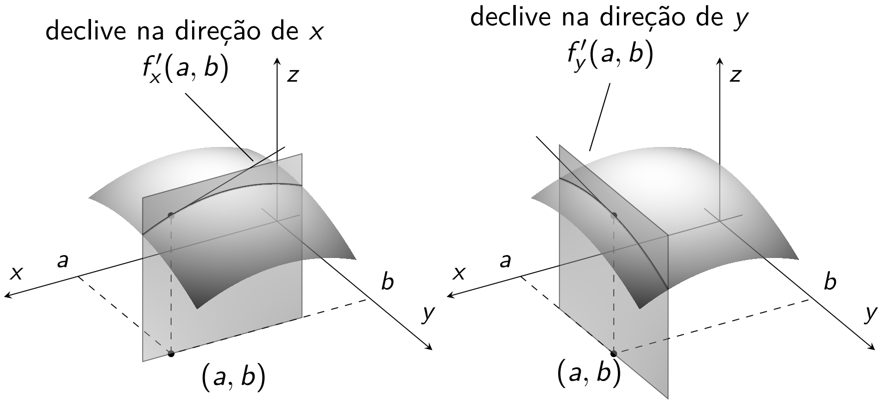
- Substituindo $x = a + t$, obtém-se

$$f'_x(a,b) := \lim_{x \to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x - a} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t,b) - f(a,b)}{t}.$$

- Substituindo $y = b + t$ obtém-se

$$f'_y(a,b) := \lim_{y \to b} \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y - b} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a,b+t) - f(a,b)}{t}.$$

Interpretação geométrica



Formulação alternativa

- Seja $g(t) := f(a+t, b)$. Então

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t, b) - f(a, b)}{t} \\ &= f_x'(a, b). \end{aligned}$$

$$\boxed{g'(0) = f_x'(a, b).}$$

- Seja $h(t) := f(a, b+t)$. Então

$$\boxed{h'(0) = f_y'(a, b).}$$

Exemplo

Exemplo

Por exemplo,

$$x'_x = 1, \quad x'_y = 0, \quad y'_x = 0, \quad y'_y = 1.$$

Propriedades elementares

Sejam $f, g\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $(a, b) \in D^\circ$. Caso todas as derivadas parciais existam, existem as seguintes regras (válidas para ambas as derivadas parciais):

Lema

1. $(f \pm g)'_x(a, b) = f'_x(a, b) \pm g'_x(a, b)$;
2. $(\lambda f)'_x(a, b) = \lambda f'_x(a, b)$;
3. $(fg)'_x(a, b) = f'_x(a, b)g(a, b) + f(a, b)g'_x(a, b)$;
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'_x(a, b) = \dfrac{f'_x(a, b)g(a, b) - f(a, b)g'_x(a, b)}{(g(a, b))^2}$, $g(a, b) \neq 0$.

Exemplos

1.

$$\begin{aligned}(xy^2)'_x &= y^2,\\ (xy^2)'_y &= 2xy.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(\sin(xy))'_x &= \cos(xy)(xy)'_x = \cos(xy)y,\\ (\sin(xy))'_y &= \cos(xy)(xy)'_y = \cos(xy)x.\end{aligned}$$

Exemplos

1.

$$
\begin{aligned}
(xy^2e^{x+y^2})'_x &= (xy^2)'_x e^{x+y^2} + xy^2(e^{x+y^2})'_x \\
&= y^2e^{x+y^2} + xy^2e^{x+y^2}(x+y^2)'_x \\
&= y^2e^{x+y^2} + xy^2e^{x+y^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(xy^2e^{x+y^2})'_y &= (xy^2)'_y e^{x+y^2} + xy^2(e^{x+y^2})'_y \\
&= 2xye^{x+y^2} + xy^2e^{x+y^2}(x+y^2)'_y \\
&= 2xye^{x+y^2} + 2xy^3e^{x+y^2}.
\end{aligned}
$$

Exemplos

1.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)'_x &= \frac{(x^2-y^2)'_x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)(x^2+y^2)'_x}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{2x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)(2x)}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2},
\end{aligned}$$

Exemplos

- $$\begin{aligned}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)'_y &= \frac{(x^2-y^2)'_y(x^2+y^2)-(x^2-y^2)(x^2+y^2)'_y}{(x^2+y^2)^2}\\ &= \frac{-2y(x^2+y^2)-(x^2-y^2)(2y)}{(x^2+y^2)^2}\\ &= \frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

Exemplo

- Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Neste caso somos obrigados a calcular $f'_x(0,0)$ e $f'_y(0,0)$ pela definição, porque precisamos de ambos os ramos de f:

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x\cdot 0}{x^2+0^2} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0;$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{0\cdot y}{0^2+y^2} - 0}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0.$$

Derivadas direcionais

As derivadas parciais são casos especiais de **derivadas direcionais**.

Dados:

- uma função $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$;
- um ponto $(a, b) \in D_f^\circ$;
- um **vetor unitário** $\vec{v} = (v, w) \in \mathbb{R}^2$ ($\|\vec{v}\| = \sqrt{v^2 + w^2} = 1$).

Definição

A **derivada direcional** *de f em (a, b) ao longo de $\vec{v}$ é definida por*

$$f'_{\vec{v}}(a, b) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv, b + tw) - f(a, b)}{t}.$$

Derivadas parciais

Derivadas direcionais:

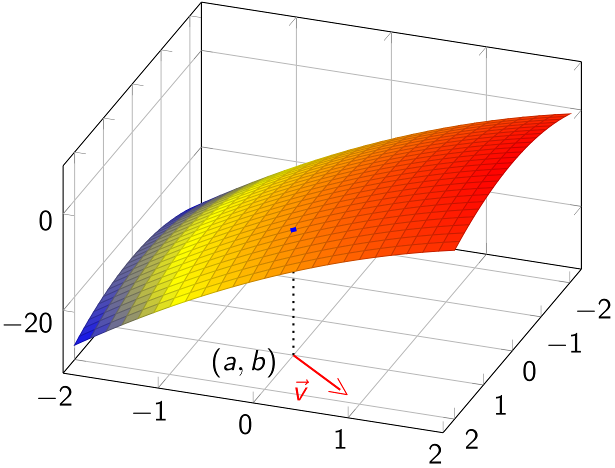
$$f'_{\vec{v}}(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv, b+tw) - f(a,b)}{t}$$

Derivadas parciais:

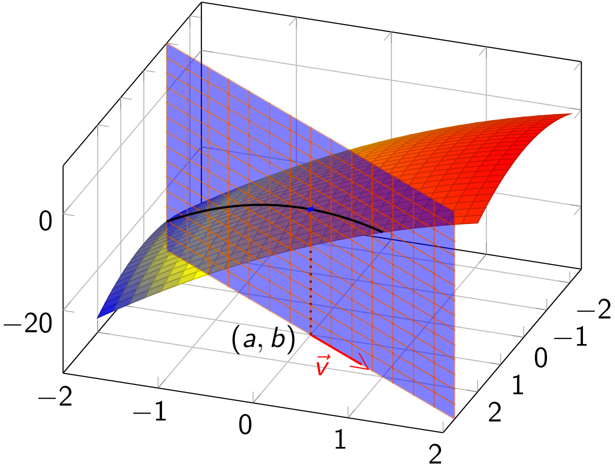
$$f'_{(1,0)}(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t, b) - f(a,b)}{t} = f'_x(a,b)$$

$$f'_{(0,1)}(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a, b+t) - f(a,b)}{t} = f'_y(a,b)$$

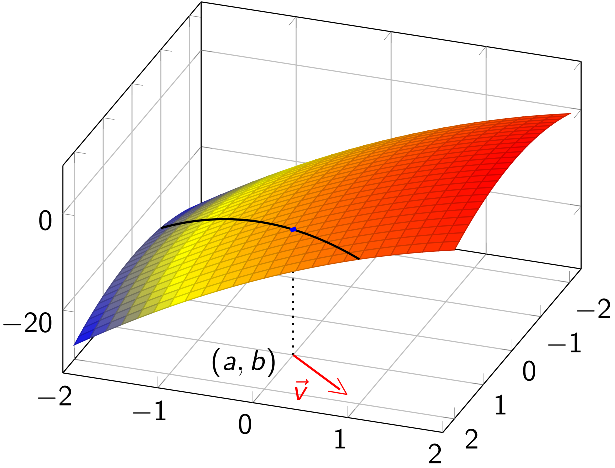
Interpretação geométrica: $(a, b) \in D_f$ e $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ $(\|\vec{v}\| = 1)$



Interpretação geométrica: plano vertical paralelo a $\vec{v}$



Interpretação geométrica: $g(t) = f(a + tv, b + tw)$



Formulação alternativa

Seja $g(t) := f(a+tv, b+tw)$. Então

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{t\to 0} \frac{g(t)-g(0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv, b+tw) - f(a,b)}{t} \\ &= f'_{\vec{v}}(a,b). \end{aligned}$$

Logo

$$\boxed{g'(0) = f'_{\vec{v}}(a,b)}$$

Exemplo

- Sejam

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

e $\vec{v} = (v,w)$ um vetor unitário $(v^2 + w^2 = 1)$:

$$\begin{aligned} f'_{\vec{v}}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(tv,tw) - f(0,0)}{t} && = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{(tv)(tw)^2}{(tv)^2+(tw)^2} - 0}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3vw^2}{t^2(v^2+w^2)}}{t} && = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^3}vw^2}{\cancel{t^3}(v^2+w^2)} \\ &= \frac{vw^2}{(v^2+w^2)} && = vw^2. \end{aligned}$$

A seguinte animação mostra as derivadas direcionais de

$$f(x,y) = 3\frac{\sin(x)\sin(y)}{xy}$$

no ponto $(1,1)$ em todas as direções:

©John F. Putz

▸ derivadas direcionais

Diferenciabilidade

- A noção de diferenciabilidade é mais complexa para funções de duas ou mais variáveis do que para funções de uma variável.

Exemplo

Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \textit{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \textit{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. *f é descontínua em $(0,0)$;*
2. $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0.$

A existência de $f'_x(0,0)$ e $f'_y(0,0)$ nem sequer garante a continuidade de f em $(0,0)$!

Diferenciabilidade numa variável: 2ª revisão

- Recorde-se que o gráfico G_f é definido pela equação:

$$y = f(x).$$

- Qualquer reta não-vertical em $\mathbb{R}^2$ que passe por $(a, f(a))$ é definida por uma equação do tipo:

$$y = f(a) + \alpha(x - a),$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma constante.

Diferenciabilidade numa variável: 2ª revisão

- f é diferenciável em a se e só se numa vizinhança de a houver uma **aproximação linear**

$$f(x) \approx f(a) + \alpha(x-a) \;\Leftrightarrow\; f(x) - [f(a) + \alpha(x-a)] \approx 0$$

para um certo $\alpha \in \mathbb{R}$, satisfazendo uma condição adicional:

Lema

A função f é diferenciável em a se e só se existir $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - [f(a) + \alpha(x-a)]}{x-a} = 0.$$

Diferenciabilidade numa variável: 2ª revisão

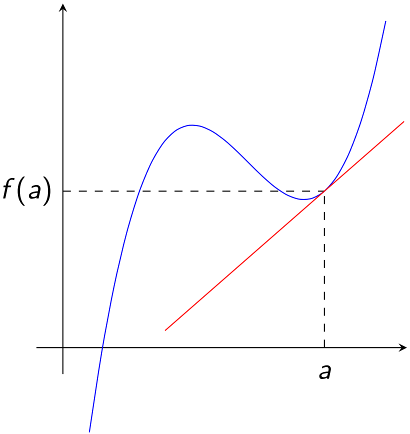
- *Demonstração*:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{f(x) - [f(a) + \alpha(x-a)]}{x-a} = 0 \quad &\Leftrightarrow \\
\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - \alpha(x-a)}{x-a} = 0 \quad &\Leftrightarrow \\
\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - \alpha \frac{\cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}} = 0 \quad &\Leftrightarrow \\
f'(a) - \alpha = 0 \quad &\Leftrightarrow \\
f'(a) = \alpha. &
\end{aligned}
$$

Diferenciabilidade numa variável: 2ª revisão

- A aproximação linear de f em a corresponde à **reta tangente**:

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x - a).}$$



Diferenciabilidade em duas variáveis

Sejam $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a,b) \in D_f^\circ$.

- Recorde-se que o gráfico G_f é definido pela equação:

$$z = f(x,y).$$

- Um plano não-vertical em $\mathbb{R}^3$ que passe por $(a,b,f(a,b))$ é definido por uma equação do tipo:

$$z = f(a,b) + \alpha(x-a) + \beta(y-b),$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são constantes.

Diferenciabilidade em duas variáveis

- f diz-se diferenciável em (a, b) se numa vizinhança de (a, b) houver uma **aproximação linear**

$$f(x, y) \approx f(a, b) + \alpha(x - a) + \beta(y - b) \quad \Leftrightarrow$$

$$f(x, y) - [f(a, b) + \alpha(x - a) + \beta(y - b)] \approx 0$$

para certos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, satisfazendo uma condição adicional:

Definição

A função f é **diferenciável** *em (a, b) se existirem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x, y) - [f(a, b) + \alpha(x - a) + \beta(y - b)]}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = 0.$$

Diferenciabilidade em duas variáveis

Lema

Suponhamos que f é diferenciável em (a, b). Então

$$f'_x(a, b) = \alpha \quad e \quad f'_y(a, b) = \beta,$$

onde α e β são as constantes do slide anterior.

Diferenciabilidade em duas variáveis

Demonstração: Suponhamos que f é diferenciável em (a, b). Então,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - [f(a,b) + \alpha(x-a) + \beta(y-b)]}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0.$$

Restringindo este limite à reta $y = b$, obtém-se

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x,b) - [f(a,b) + \alpha(x-a)]}{x-a} = 0 \;\Leftrightarrow\; f'_x(a,b) = \alpha.$$

Restringindo o limite à reta $x = a$, obtém-se

$$\lim_{y\to b} \frac{f(a,y) - [f(a,b) + \beta(y-b)]}{y-b} = 0 \;\Leftrightarrow\; f'_y(a,b) = \beta.$$

Formulação alternativa

Lema

A função f é diferenciável em (a,b) se e só se

1. $f'_x(a,b)$ *e* $f'_y(a,b)$ *existirem;*
2. $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)-\left[f(a,b)+f'_x(a,b)(x-a)+f'_y(a,b)(y-b)\right]}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0.$$

O limite em 2 é equivalente ao limite $(x = a + s,\ y = b + t)$:

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{f(a+s,b+t)-\left[f(a,b)+f'_x(a,b)s+f'_y(a,b)t\right]}{\sqrt{s^2+t^2}} = 0.$$

Exemplos

- A função $f(x,y)=x$ é diferenciável em todo o $\mathbb{R}^2$.

1. $$f'_x(a,b)=1,\quad f'_y(a,b)=0.$$

2. $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)-\left[f(a,b)+f'_x(a,b)(x-a)+f'_y(a,b)(y-b)\right]}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} =$$
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{x-[a+1\cdot(x-a)+0\cdot(y-b)]}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} =$$
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\cancel{x}-\cancel{a}-\cancel{x}+\cancel{a}}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0.$$

- A função $f(x,y)=y$ também é diferenciável em todo o $\mathbb{R}^2$.

Propriedades elementares

Sejam $f, g\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a, b) \in D^\circ$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Lema

Se f e g forem diferenciáveis em (a, b), as seguintes funções também o são:

1. $f \pm g$; *(soma/diferença)*
2. λf; *(múltiplos)*
3. fg; *(produto)*
4. $\frac{f}{g}$ $\quad (g(a, b) \neq 0)$. *(quociente)*

Exemplos

Exemplos

Como x e y são diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$:

- todos os polinómios em x e y são diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$;
- todas as funções racionais em x e y, i.e. quocientes de polinómios em x e y, são diferenciáveis nos seus domínios.

Exemplos

Exemplo

A função $\sqrt{x^2+y^2}$ **não** *é diferenciável em* $(0,0)$*, porque* $f'_x(0,0)$ *e* $f'_y(0,0)$ *não existem. Por exemplo,*

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2}-0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

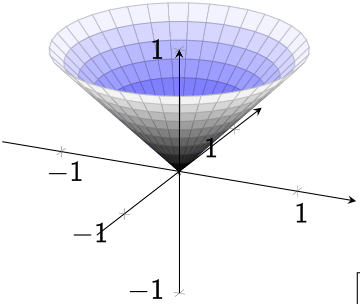
não existe:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1$$

enquanto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1.$$

Exemplos



$$\boxed{z = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Exemplo

Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

A função f **não** é diferenciável em $(0,0)$:

- Já vimos que $f_x'(0,0) = f_y'(0,0) = 0$.
- Mas o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \left[f(0,0) + f_x'(0,0)x + f_y'(0,0)y\right]}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

não existe. (*)

Exemplo

Substituindo os vários ingredientes no limite, obtém-se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \left[f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y\right]}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

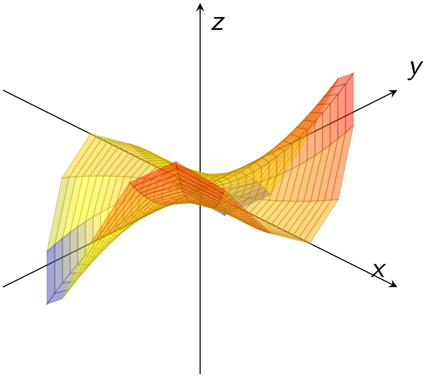
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy^2}{x^2+y^2} - [0 + 0 \cdot x + 0 \cdot y]}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Este limite não existe. Por exemplo, porque o limite trajetorial para $x = y$ não existe:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{2x^2\sqrt{2x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}.$$

Soluções: exercício extra



$$\boxed{z = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}}$$

Plano tangente

Recorde-se que uma função f é diferenciável em (a, b) se admitir uma aproximação linear

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)$$

numa vizinhança de (a, b).

Definição

Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em $(a, b) \in D_f^\circ$. O **plano tangente** *a G_f no ponto $(a, b, f(a, b)) \in G_f$, denotado por $T_f(a, b)$, é o plano em $\mathbb{R}^3$ definido pela equação:*

$$z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b).$$

Exemplo

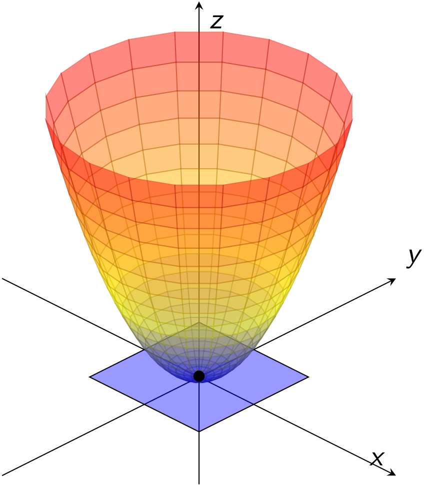
Sejam $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $(a,b) = (0,0)$.

- $f(0,0) = 0$.
- $f'_x(x,y) = 2x$ e $f'_y(x,y) = 2y$.
- $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$.
- A equação de $T_f(0,0)$ é:

$$
\begin{aligned}
z = f(0,0) + f'_x(0,0)(x-0) + f'_y(0,0)(y-0) \quad &\Leftrightarrow \\
z = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot y \quad &\Leftrightarrow \\
z = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{T_f(0,0) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\right\}.}
$$

Exemplo



A mesma função noutro ponto:

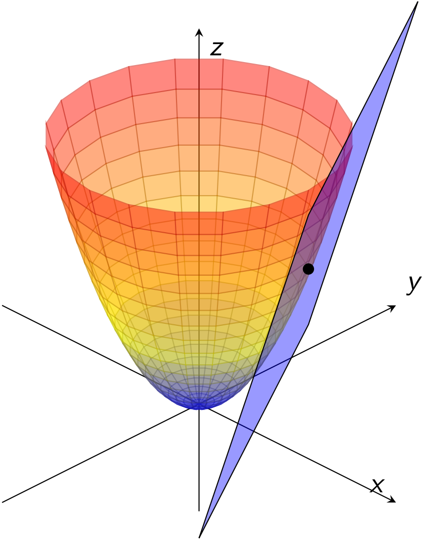
Sejam $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $(a,b) = (1,1)$.

- $f(1,1) = 2$.
- $f'_x(x,y) = 2x$ e $f'_y(x,y) = 2y$.
- $f'_x(1,1) = f'_y(1,1) = 2$.
- A equação de $T_f(1,1)$ é:

$$\begin{aligned} z = f(1,1) + f'_x(1,1)(x-1) + f'_y(1,1)(y-1) \quad &\Leftrightarrow \\ z = 2 + 2\cdot(x-1) + 2\cdot(y-1) \quad &\Leftrightarrow \\ z = 2x + 2y - 2. \end{aligned}$$

$$\boxed{T_f(1,1) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2x + 2y - 2\right\}.}$$

Exemplo



Diferenciabilidade implica continuidade

Proposição

Se $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ for diferenciável num dado ponto $(a, b) \in D_f^\circ$, então f também é contínua em (a, b).

Esboço da demonstração:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - \left[f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)\right]}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0 \implies$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) - \left[f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)\right] = 0 \implies$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) - [f(a,b) + 0 + 0] = 0 \implies$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

Exemplo

Exemplo

Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & se\ (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & se\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Já vimos:

1. $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0;$
2. *f é descontínua em $(0,0)$.*

Pela proposição, 2 implica que f **não** *é diferenciável em $(0,0)$.*

Critério de diferenciabilidade

Teorema

Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $(a, b) \in D_f^\circ$. *Suponhamos que* f'_x *e* f'_y

1. *existem numa vizinhança de* (a, b);
2. *são contínuas em* (a, b).

Então f *é diferenciável em* (a, b).

Exemplos

Eis uma maneira alternativa de provar a diferenciabilidade de polinómios e de funções racionais:

Exemplo

1. *Todos os polinómios são diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$, porque as derivadas parciais dum polinómio são polinómios e todos os polinómios são contínuos em $\mathbb{R}^2$.*
2. *Todas as funções racionais são diferenciáveis nos seus domínios, porque as derivadas parciais duma função racional são funções racionais (com o mesmo domínio) e todas as funções racionais são contínuas nos seus domínios.*

Exemplos

Exemplo

A função $f(x, y) = \sin(xy)$ *é diferenciável em* $\mathbb{R}^2$*, porque*

1. $f'_x(x, y) = y\cos(xy)$ *e* $f'_y(x, y) = x\cos(xy)$*;*
2. $y\cos(xy)$ *e* $x\cos(xy)$ *são funções contínuas em* $\mathbb{R}^2$*.*

Cuidado!

O critério de diferenciabilidade é **suficiente** mas **não é necessário**.
Por exemplo, a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

é diferenciável em $(0,0)$, mas $f'_x(x,y)$ e $f'_y(x,y)$ são descontínuas em $(0,0)$. (*)

Cuidado!

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} 2x\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \dfrac{x\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$f'_y(x,y) = \begin{cases} 2y\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \dfrac{y\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Cuidado!

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$\lim_{x\to 0} 2x\sin\left(\frac{1}{|x|}\right) - \frac{x\cos\left(\frac{1}{|x|}\right)}{|x|} =$$

$$-\lim_{x\to 0}\frac{x\cos\left(\frac{1}{|x|}\right)}{|x|}.$$

Este último limite não existe:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos\left(\frac{1}{|x|}\right)}{|x|} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0^+}\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Cuidado!

f é diferenciável em $(0,0)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-(f(0,0)+f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y)}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \\
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \\
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) &= 0,
\end{aligned}$$

porque $0 \leq \left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \leq 1$, logo

$$0 \leq \left|\sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \leq \sqrt{x^2+y^2}.$$

FIM