AM II, LEI + BE, TP: DPOS, Extremos e Pontos de Sela

Marco Mackaaij

FCT, Universidade do Algarve

2022/2023

DPOS

- Tal como as derivadas normais de ordem superior, as derivadas parciais de ordem superior definem-se recursivamente (caso existam).

Exemplo

$$\begin{array}{lclclcl}
(x^2y^3)''_{xx} & = & ((x^2y^3)'_x)'_x & = & (2xy^3)'_x & = & 2y^3; \\
(x^2y^3)''_{xy} & = & ((x^2y^3)'_x)'_y & = & (2xy^3)'_y & = & 6xy^2; \\
(x^2y^3)''_{yx} & = & ((x^2y^3)'_y)'_x & = & (3x^2y^2)'_x & = & 6xy^2; \\
(x^2y^3)''_{yy} & = & ((x^2y^3)'_y)'_y & = & (3x^2y^2)'_y & = & 6x^2y.
\end{array}$$

Matriz hessiana

Tal como as derivadas parciais duma função f formam um vetor, chamado gradiente:

$$\nabla f(x,y) = \left(f'_x(x,y), f'_y(x,y)\right),$$

as derivadas parciais de segunda ordem formam uma matriz, chamada **matriz hessiana**:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{yx}(x,y) \\ f''_{xy}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{pmatrix}.$$

O determinante desta matriz chama-se o **hessiano**:

$$h_f(x,y) = \det(H_f(x,y)) = f''_{xx}(x,y)f''_{yy}(x,y) - f''_{yx}(x,y)f''_{xy}(x,y).$$

Teorema de Schwarz

Sejam $f \colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a, b) \in D_f^{\circ}$. Suponhamos que $B_\epsilon(a, b) \subseteq D_f$ para um certo $\epsilon > 0$.

Teorema

Se todas as derivadas parciais de f de ordem ≤ 2 existirem em $B_\epsilon(a, b)$ e forem contínuas em (a, b), então

$$f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b).$$

Exercícios

1. Determine a matriz hessiana das seguintes funções:
   - $f(x, y) = x^4 - 4x^2y^2 + y^5$.
   - $f(x, y) = \sin(xy)$.
   - $f(x, y) = \ln(x^2 + y)$.
   - $f(x, y, z) = ye^x + x\ln(z)$.

Soluções: Exercício 1a

Determine a matriz hessiana de $f(x,y) = x^4 - 4x^2y^2 + y^5$.

- $$\nabla f(x,y) = (f'_x(x,y), f'_y(x,y)) = \left(4x^3 - 8xy^2, -8x^2y + 5y^4\right).$$

- $$\begin{aligned} H_f(x,y) &= \begin{pmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{yx}(x,y) \\ f''_{xy}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(4x^3 - 8xy^2\right)'_x & \left(-8x^2y + 5y^4\right)'_x \\ \left(4x^3 - 8xy^2\right)'_y & \left(-8x^2y + 5y^4\right)'_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12x^2 - 8y^2 & -16xy \\ -16xy & -8x^2 + 20y^3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Soluções: Exercício 1b

Determine a matriz hessiana de $f(x, y) = \sin(xy)$.

- $$\nabla f(x, y) = (f'_x(x, y), f'_y(x, y)) = (y\cos(xy), x\cos(xy)) .$$

- $$\begin{aligned} H_f(x, y) &= \begin{pmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{yx}(x, y) \\ f''_{xy}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (y\cos(xy))'_x & (x\cos(xy))'_x \\ (y\cos(xy))'_y & (x\cos(xy))'_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -y^2\sin(xy) & \cos(xy) - xy\sin(xy) \\ \cos(xy) - xy\ \sin(xy) & -x^2\sin(xy) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Soluções: Exercício 1c

Determine a matriz hessiana de $f(x,y) = \ln(x^2+y)$.

- $$\nabla f(x,y) = (f'_x(x,y), f'_y(x,y)) = \left(\frac{2x}{x^2+y}, \frac{1}{x^2+y}\right).$$

- $$\begin{aligned} H_f(x,y) &= \begin{pmatrix} \left(\frac{2x}{x^2+y}\right)'_x & \left(\frac{1}{x^2+y}\right)'_x \\ \left(\frac{2x}{x^2+y}\right)'_y & \left(\frac{1}{x^2+y}\right)'_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-2x^2+2y}{(x^2+y)^2} & \frac{-2x}{(x^2+y)^2} \\ \frac{-2x}{(x^2+y)^2} & \frac{-1}{(x^2+y)^2} \end{pmatrix}. \qquad (*) \end{aligned}$$

Soluções: Exercício 1c

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2x}{x^2+y}\right)'_x &= \frac{(2x)'_x(x^2+y)-2x(x^2+y^2)'_x}{(x^2+y)^2}\\
&= \frac{2(x^2+y)-2x\cdot 2x}{(x^2+y)^2}\\
&= \frac{2x^2+2y-4x^2}{(x^2+y)^2}\\
&= \frac{-2x^2+2y}{(x^2+y)^2}.
\end{aligned}$$

Soluções: Exercício 1d

Determine a matriz hessiana de $f(x,y,z) = ye^x + x\ln(z)$.

- $$\begin{aligned}\nabla f(x,y,z) &= \left(f'_x(x,y,z), f'_y(x,y,z), f'_z(x,y,z)\right)\\ &= \left(ye^x + \ln(z),\ e^x,\ \frac{x}{z}\right).\end{aligned}$$

- $$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x,y,z) & f''_{yx}(x,y,z) & f''_{zx}(x,y,z)\\ f''_{xy}(x,y,z) & f''_{yy}(x,y,z) & f''_{zy}(x,y,z)\\ f''_{xz}(x,y,z) & f''_{yz}(x,y,z) & f''_{zz}(x,y,z)\end{pmatrix}.$$

Soluções: Exercício 1d

- $$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} (ye^x+\ln(z))'_x & (e^x)'_x & \left(\frac{x}{z}\right)'_x \\ (ye^x+\ln(z))'_y & (e^x)'_y & \left(\frac{x}{z}\right)'_y \\ (ye^x+\ln(z))'_z & (e^x)'_z & \left(\frac{x}{z}\right)'_z \end{pmatrix}$$

  $$= \begin{pmatrix} ye^x & e^x & \frac{1}{z} \\ e^x & 0 & 0 \\ \frac{1}{z} & 0 & -\frac{x}{z^2} \end{pmatrix}. \qquad (H_f \text{ é simétrica!})$$

Exercícios

2. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- Prove que $f''_{xy}(0,0) = -1$ e $f''_{yx}(0,0) = +1$.
- O que é que se pode concluir acerca de f'_x e f'_y?

Soluções: Exercício 2a

Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Prove que $f''_{xy}(0,0) = -1$ e $f''_{yx}(0,0) = +1$.

- *Obervações*:
  1. A função f é contínua em $\mathbb{R}^2$;
  2. A função f é antisimétrica: $f(y,x) = -f(x,y)$;
  3. Note-se que
  $$xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}.$$

Soluções: Exercício 2a

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- Quando $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \frac{(x^3y - xy^3)'_x(x^2+y^2) - (x^3y - xy^3)(x^2+y^2)'_x}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - (x^3y - xy^3)(2x)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}; \end{aligned}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{-xy^4 - 4x^3y^2 + x^5}{(x^2+y^2)^2}.$$

Soluções: Exercício 2a

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- Quando $(x,y) = (0,0)$:

$$f'_x(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0;$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0.$$

Soluções: Exercício 2a

$$\nabla f(x,y) =$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}, \dfrac{-xy^4-4x^3y^2+x^5}{(x^2+y^2)^2} \right), & (x,y) \neq (0,0), \\ (0,0), & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

-

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f'_x(0,t) - f'_x(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{-\cancel{t^5}}{\cancel{t^4}} - 0}{\cancel{t}} = \lim_{t\to 0} -1 = -1$$

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f'_y(t,0) - f'_y(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\cancel{t^5}}{\cancel{t^4}} - 0}{\cancel{t}} = \lim_{t\to 0} 1 = 1.$$

Soluções: Exercício 2b

- No slide anterior vimos que $\nabla f(x,y)$ existe para todo o $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
- Como $f''_{xy}(0,0) = -1 \neq 1 = f''_{yx}(0,0)$, a função f não satisfaz as hipóteses do Teorema de Schwarz, pelos vistos.
- Não é difícil de mostrar que $H_f(x,y)$ existe para todo o $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Logo, $H_f(x,y)$ é descontínua em $(0,0)$.

Extremos de funções de duas variáveis

A partir de agora suponhamos sempre que $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2.

Método

- Determinar os pontos estacionários de f, usando ∇f.
- Em cada ponto estacionário determinar se f tem um extremo ou um ponto de sela, usando H_f.

Pontos estacionários

Seja $(a, b) \in D_f^\circ$.

Definição

O ponto (a, b) diz-se um **ponto estacionário** *de f se*

$$\nabla f(a, b) = (0, 0).$$

Obs.: Se (a, b) for um ponto estacionário de f, então o plano tangente $T_f(a, b)$ é horizontal.

Lema

Se f tiver um extremo local em (a, b), então $\nabla f(a, b) = (0, 0)$.

Determinar os extremos

Teorema

Suponhamos que $(a, b) \in D_f^\circ$ *é um ponto estacionário de* f*.*

1. *Se* $h_f(a, b) > 0$ *e* $f''_{xx}(a, b) > 0$*, então* f *tem um mínimo local em* (a, b)*;*
2. *Se* $h_f(a, b) > 0$ *e* $f''_{xx}(a, b) < 0$*, então* f *tem um máximo local em* (a, b)*;*

Definição

Suponhamos que $(a, b) \in D_f^\circ$ *é um ponto estacionário de* f*.*

3. *Se* $h_f(a, b) < 0$*, diz-se que* f *tem um* **ponto de sela** *em* (a, b)*.*

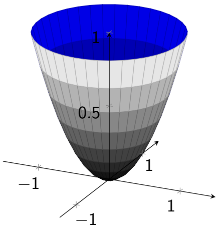
Exemplos

Seja $f(x,y) = x^2 + y^2$. Então

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \;\Leftrightarrow\; (2x, 2y) = (0,0) \;\Leftrightarrow\; (x,y) = (0,0).$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Conclusão: f tem um mínimo local em $(0,0)$.



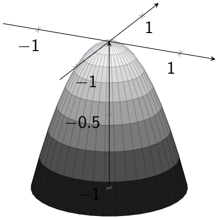
Exemplos

Seja $f(x,y) = -x^2 - y^2$. Então

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (-2x,-2y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0).$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Conclusão: f tem um máximo local em $(0,0)$.



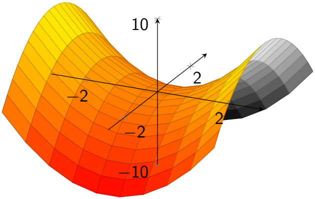
Exemplos

Seja $f(x, y) = x^2 - y^2$. Então

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \;\Leftrightarrow\; (2x, -2y) = (0, 0) \;\Leftrightarrow\; (x, y) = (0, 0).$$

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Conclusão: f tem um ponto de sela em $(0, 0)$.



Exercícios

1. Determine os extremos locais e os pontos de sela das seguintes funções:
   - $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20;$
   - $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1;$
   - $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1;$
   - $f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2.$

Soluções: Exercício 1a

Seja $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$.

1. Pontos estacionários:

$$\nabla f(x, y) = (4x + 8, 2y - 6).$$

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow 4x+8 = 0 \wedge 2y-6 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \wedge y = 3.$$

   Há 1 ponto estacionário: $(-2, 3)$.

2. Extremos e pontos de sela:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   $h_f(-2, 3) = 8 > 0$ e $f''_{xx}(-2, 3) = 4 > 0$, logo f tem um mín. loc. em $(-2, 3)$.

3. Conclusão:

$$\boxed{f \text{ tem um mínimo local em } (-2, 3).}$$

Soluções: Exercício 1b

Seja $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$.

1. Pontos estacionários:

$$\nabla f(x,y) = (-3x^2 + 4y, 4x - 4y).$$

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) = (0,0) &\Leftrightarrow -3x^2 + 4y = 0 \wedge 4x - 4y = 0 \\ &\Leftrightarrow -3x^2 + 4y = 0 \wedge x = y. \end{aligned}$$

Substituindo $y = x$ na primeira igualdade:

$$-3x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(-3x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{4}{3}.$$

Há 2 pontos estacionários: $(0,0)$, $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Soluções: Exercício 1b

Do slide anterior: $\nabla f(x,y) = (-3x^2 + 4y, 4x - 4y)$ e os pts. estac.: $(0,0)$, $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

2. Extremos e pontos de sela:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -6x & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Portanto

- $$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix},$$

  $h_f(0,0) = -16 < 0$, logo f tem um pt. de sela em $(0,0)$.

- $$H_f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix},$$

  $h_f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = 16 > 0$ e $f''_{xx}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = -8 < 0$, logo f tem um máx. loc. em $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Soluções: Exercício 1b

3. Conclusão:

$$\boxed{f \text{ tem um pt. de sela em } (0,0) \text{ e um máx. loc. em } \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right).}$$

Soluções: Exercício 1c

Seja $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

1. Pontos estacionários:

$$\nabla f(x,y) = (4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x).$$

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) = (0,0) \quad &\Leftrightarrow \quad 4x^3 - 4y = 0 \wedge 4y^3 - 4x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad y = x^3 \wedge x = y^3. \end{aligned}$$

Substituindo $x = y^3$ na primeira igualdade:

$$y = y^9 \Leftrightarrow y(y^8 - 1) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee y = \pm 1.$$

Há 3 pontos estacionários: $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$.

Soluções: Exercício 1c

Do slide anterior: $\nabla f(x,y) = (4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x)$ e os pts. estac.: $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$.

2. Extremos e pontos de sela:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}.$$

Portanto

- $$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix},$$

  $h_f(0,0) = -16 < 0$, logo f tem um pt. de sela $(0,0)$.

- $$H_f(\pm1,\pm1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix},$$

  $h_f(\pm1,\pm1) = 128 > 0$ e $f''_{xx}(\pm1,\pm1) = 12 > 0$, logo f tem um mín. loc. em $(\pm1,\pm1)$.

Soluções: Exercício 1c

3. Conclusão:

$$\boxed{f \text{ tem um pt. de sela em } (0,0) \text{ e míns. loc. em } (\pm 1, \pm 1).}$$

Soluções: Exercício 1d

Seja $f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$.

1. Pontos estacionários:

$$\nabla f(x, y) = (6xy - 6x, 3x^2 + 3y^2 - 6y).$$

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) = (0, 0) \quad &\Leftrightarrow \quad 6xy - 6x = 0 \,\wedge\, 3x^2 + 3y^2 - 6y = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 6x(y - 1) = 0 \,\wedge\, 3x^2 + 3y^2 - 6y = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x = 0 \vee y = 1) \,\wedge\, x^2 + y^2 - 2y = 0.\end{aligned}$$

Substituindo $x = 0$ na segunda igualdade:

$$y^2 - 2y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(y - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0 \vee y = 2.$$

Substituindo $y = 1$ na segunda igualdade:

$$x^2 + 1 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1.$$

Há 4 pontos estacionários: $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$.

Soluções: Exercício 1d

Do slide anterior: $\nabla f(x,y) = (6xy - 6x, 3x^2 + 3y^2 - 6y)$ e os pts. estac.: $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,1)$, $(-1,1)$.

2. Extremos e pontos de sela:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6y-6 & 6x \\ 6x & 6y-6 \end{pmatrix}.$$

Portanto

- $$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix},$$

  $h_f(0,0) = 36 > 0$ e $f''_{xx}(0,0) = -6 < 0$, logo f tem um máx. loc. em $(0,0)$;

- $$H_f(0,2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix},$$

  $h_f(0,2) = 36 > 0$ e $f''_{xx}(0,2) = 6 > 0$, logo f tem um mín. loc. em $(0,2)$;

Soluções: Exercício 1d

2.
  - $$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix},$$
    $h_f(1,1) = -36 < 0$, logo f tem um pt. de sela em $(1,1)$;
  - $$H_f(-1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix},$$
    $h_f(-1,1) = -36 < 0$, logo f tem um pt. de sela em $(-1,1)$;
3. Conclusão:

$$\boxed{\begin{array}{c} f \text{ tem um máx. loc. em } (0,0), \text{ um mín. loc. em } (0,2) \\ \text{e pts. de sela em } (1,1) \text{ e } (-1,1). \end{array}}$$

Exercícios

2. Uma empresa quer encomendar caixas de ângulos direitos para embalar os seus produtos. Cada caixa deve ter um volume de $0,5$ litros. O preço de cada caixa depende apenas da área total dos seus lados. Para minimizar o preço da encomenda, quais devem ser o comprimento, a largura e a altura de cada caixa?

Soluções: Exercício 2

Uma empresa quer encomendar caixas de ângulos direitos para embalar os seus produtos. Cada caixa deve ter um volume de $0,5$ litros. O preço de cada caixa depende apenas da área total dos seus lados. Para minimizar o preço da encomenda, quais devem ser as dimensões de cada caixa?

1. Seja x o comprimento, y a largura e z a altura de cada caixa. Então o volume de cada caixa é igual a xyz e a área total dos seus lados é $2(xy + xz + yz)$.
2. O volume de cada caixa deve ser $0,5$ litros:

$$xyz = \frac{1}{2} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2xy}.$$

   Note-se que obviamente $x, y, z \neq 0$, portanto dividir por xy é permitido.

Soluções: Exercício 2

3. Substituindo $z = 1/(2xy)$, obtém-se

$$\begin{aligned} 2(xy+xz+yz) &= 2xy + 2(x+y)z \\ &= 2xy + \frac{\cancel{2}(x+y)}{\cancel{2}xy} \\ &= 2xy + \frac{x+y}{xy} \\ &= 2xy + \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}y} + \frac{\cancel{y}}{x\cancel{y}} \\ &= 2xy + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

4. Para resolver o nosso problema, temos de determinar o mínimo absoluto da função

$$f(x,y) = 2xy + \frac{1}{y} + \frac{1}{x}.$$

Soluções: Exercício 2

$$f(x, y) = 2xy + \frac{1}{y} + \frac{1}{x}.$$

5. Os pontos estacionários:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \left(2y - \frac{1}{x^2}, 2x - \frac{1}{y^2}\right) \\ &= \left(\frac{2x^2y - 1}{x^2}, \frac{2xy^2 - 1}{y^2}\right). \end{aligned}$$

Soluções: Exercício 2

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{2x^2y-1}{x^2}, \frac{2xy^2-1}{y^2}\right).$$

5. Os pontos estacionários:

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \;\Leftrightarrow\; 2x^2y = 1 \wedge 2xy^2 = 1.$$

Dividindo por xy, obtém-se

$$2x^2y = 2xy^2 \;\Leftrightarrow\; 2x = 2y \;\Leftrightarrow\; x = y.$$

Portanto,

$$2x^2y = 1 \;\Leftrightarrow\; 2x^3 = 1 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Há 1 ponto estacionário: $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$.

Soluções: Exercício 2

$$\nabla f(x,y) = \left(2y - x^{-2}, 2x - y^{-2}\right) \text{ e 1 pt estac.: } \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right).$$

6. Determinar os extremos:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x^{-3} & 2 \\ 2 & 2y^{-3} \end{pmatrix}.$$

Logo

$$H_f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$h_f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = 12 > 0 \text{ e } f''_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = 4 > 0.$$

$$\boxed{f \text{ tem um mínimo local em } \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right).}$$

Soluções: Exercício 2

7. Pela natureza do problema ($x, y > 0$), o mínimo é absoluto.
8. Falta calcular o valor de $z = 1/(2xy)$ em $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$:

$$z = \frac{1}{2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2} = \frac{(\sqrt[3]{2})^2}{2} = \frac{(\sqrt[3]{2})^2}{(\sqrt[3]{2})^3} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

9. Conclusão: as caixas devem ter a forma dum cubo com

$$\boxed{x = y = z = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.}$$

FIM