AM II, LEI + BE: Integrais duplos e repetidos e aplicações

Marco Mackaaij

FCT, Universidade do Algarve

Motivação

- Recorde se que

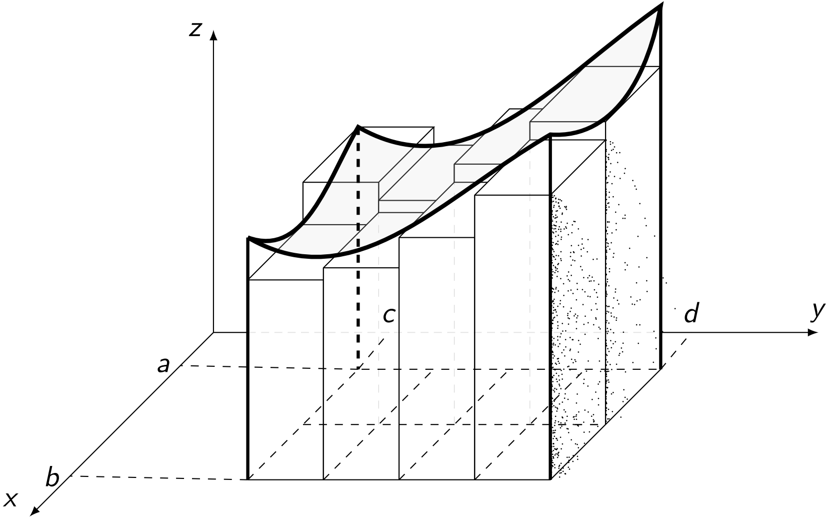
$$[a, b] \times [c, d] := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\right\}$$

  é um **retângulo** no plano.
- Seja $f\colon R \to \mathbb{R}_0^+$ **contínua**, onde $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$.
- O valor do **integral duplo**

$$\iint_R f \, dA$$

  deve ser igual ao volume da região em $\mathbb{R}^3$ entre o plano-xy e G_f.
- Essa região pode ser aproximada por **paralelepípedos**, cujo volume é igual a: àrea da base $\times$ altura.
- Quantos mais paralelepípedos, melhor a aproximação. O **"limite"** é igual ao volume pretendido.

Uma imagem vale mil palavras



Animação

©2014 Regents of the University of Michigan

Link

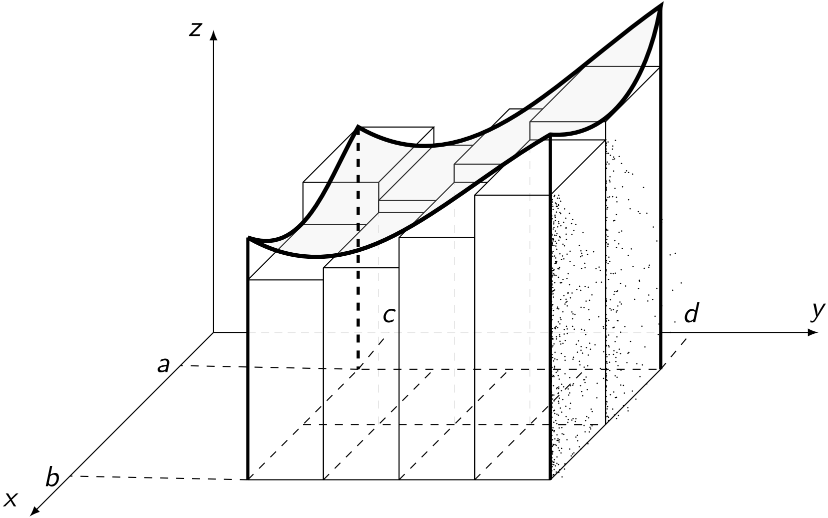
Definição

- Seja $f\colon R \to \mathbb{R}$ uma função **limitada**.
- Seja P uma **partição** de R:

$$a = x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_m = b \quad \text{e} \quad c = y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n = d.$$

- Seja $R_{ij} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \subseteq R$ um **subretângulo**.
- Seja $A_{ij} := \text{Área}(R_{ij}) = (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$.
- Sejam $M_{ij}(f) := \sup_{R_{ij}}(f)$ e $m_{ij}(f) := \inf_{R_{ij}}(f)$.

Uma imagem vale mil palavras



Definição

- Consideremos a **soma inferior** e a **soma superior**:

$$
\begin{aligned}
s(f,P) &:= \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} m_{ij}(f)A_{ij},\\
S(f,P) &:= \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} M_{ij}(f)A_{ij}.
\end{aligned}
$$

- Para todas as partições P e P' de R:

$$s(f,P) \leq S(f,P')$$

Definição

Definição

A função f diz-se **integrável** *se existir um e um só número real, chamado o* **integral duplo de** f **sobre** R *e denotado por*

$$\iint_R f\,dA,$$

tal que

$$s(f,P) \leq \iint_R f\,dA \leq S(f,P')$$

para todas as partições P, P' de R.

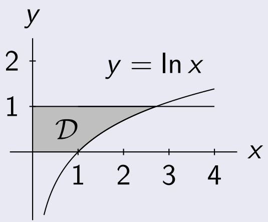
Funções integráveis

Teorema

Se $f : R \to \mathbb{R}$ for contínua, então é integrável.

- Este teorema pode ser generalizado para funções contínuas com domínios D cuja fronteira é constituída por um número finito de curvas diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$:

Exemplo



Propriedades elementares

Sejam $f, g \colon D \to \mathbb{R}$ integráveis e $k \in \mathbb{R}$ uma constante. Então, existem as seguintes propriedades:

1. $$\iint_D f \pm g \, dA = \iint_D f \, dA \pm \iint_D g \, dA.$$

2. $$\iint_D kf \, dA = k \iint_D f \, dA.$$

3. $$\left| \iint_D f \, dA \right| \leq \iint_D |f| \, dA.$$

Propriedades elementares

4. Se $f(x, y) = 0$, excepto para (x, y) pertencentes a um número finito de curvas diferenciáveis em D, então

$$\iint_D f \, dA = 0.$$

5. Se $f(x, y) \leq g(x, y)$ para todo o $(x, y) \in D$, então

$$\iint_D f \, dA \leq \iint_D g \, dA.$$

6. Se $D = D_1 \cup D_2$ tal que $D_1 \cap D_2$ seja a reunião dum número finito de curvas diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$, então

$$\iint_D f \, dA = \iint_{D_1} f \, dA + \iint_{D_2} f \, dA.$$

Integrais repetidos

- Para calcular integrais duplos usam-se **integrais repetidos**.

Definição

Seja $f\colon R \to \mathbb{R}$ *uma função integrável, onde* $R = [a,b] \times [c,d]$*.*
Existem dois **integrais repetidos** *de* f *sobre* R*:*

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx := \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx$$

e

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy := \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy.$$

Exemplo: integrais repetidos

Exemplo

Sejam $f(x,y) = x^2 y$ *e* $R = [1,2] \times [-3,4]$. *Então*

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \int_{-3}^4 x^2 y \, dy \, dx &= \int_1^2 \left[\int_{-3}^4 x^2 y \, dy \right] dx \\
&= \int_1^2 \left[x^2 \frac{y^2}{2} \Big|_{y=-3}^{y=4} \right] dx \\
&= \int_1^2 \frac{7x^2}{2} \, dx \\
&= \frac{7x^3}{6} \Big|_{x=1}^{x=2} \\
&= \frac{49}{6}.
\end{aligned}$$

Exemplo: integrais repetidos

Exemplo

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{4}\int_{1}^{2} x^2 y\, dx\, dy &= \int_{-3}^{4}\left[\int_{1}^{2} x^2 y\, dx\right] dy \\
&= \int_{-3}^{4}\left[\frac{x^3}{3} y\Big|_{x=1}^{x=2}\right] dy \\
&= \int_{-3}^{4} \frac{7y}{3}\, dy \\
&= \frac{7y^2}{6}\Big|_{y=-3}^{y=4} \\
&= \frac{49}{6}.
\end{aligned}$$

- O resultado é igual!

Teorema de Fubini

Teorema

Seja $f : R \to \mathbb{R}$ uma função contínua, onde $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$. Então

$$\iint_R f\, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy.$$

Animação

Link

Domínios regulares

- O Teorema de Fubini também é válido para domínios de integração não-retangulares.
- Seja

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \ \wedge \ g(x) \leq y \leq h(x)\right\},$$

onde $g, h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ são diferenciáveis.

Teorema

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então

$$\iint_D f \, dA = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy \, dx.$$

Domínios regulares

- Seja

$$D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(y) \leq x \leq h(y) \ \wedge \ c \leq y \leq d\right\},$$

onde $g, h \colon [c,d] \to \mathbb{R}$ são diferenciáveis.

Teorema

Seja $f\colon D \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então

$$\iint_D f \, dA = \int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y) \, dx \, dy.$$

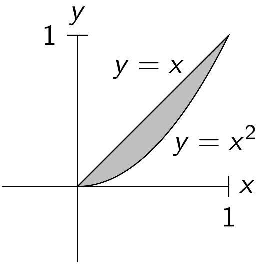
Animação

Link

Exemplo: domínios regulares

Sejam $f(x,y) = y$ e

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1 \ \wedge \ x^2 \le y \le x\}.$$



Exemplo: domínios regulares

Então

$$\begin{aligned}
\iint_D y\,dA &= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} y\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \Big|_{y=x^2}^{y=x} \right] dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2}\,dx \\
&= \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10} \right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{1}{15}.
\end{aligned}$$

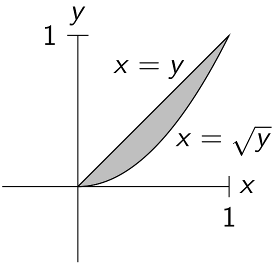
Exemplo: domínios regulares

Note-se que

$$y = x \;\Leftrightarrow\; x = y \quad \text{e} \quad y = x^2 \;\Leftrightarrow\; x = \pm\sqrt{y}.$$

Por isso

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \le x \le \sqrt{y} \;\wedge\; 0 \le y \le 1\right\}.$$



Exemplo: domínios regulares

Então

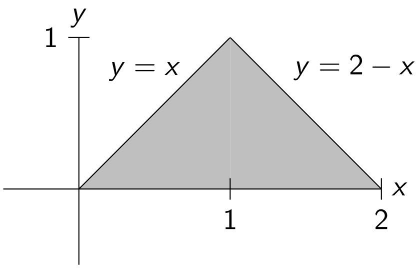
$$\begin{aligned}\iint_D y\,dA &= \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} y\,dx\,dy \\ &= \int_0^1 \left[xy \Big|_{x=y}^{x=\sqrt{y}} \right] dy \\ &= \int_0^1 y^{\frac{3}{2}} - y^2\,dy \\ &= \left[\frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1} \\ &= \frac{1}{15}.\end{aligned}$$

Domínios seccionalmente regulares

Seja D a região em $\mathbb{R}^2$ delimitada pelas retas $y = 0$, $y = x$ e $y = 2 - x$.

Repare-se que

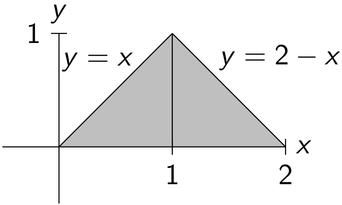
$$x = 2 - x \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$



Exemplo: domínios seccionalmente regulares

Por isso, pode-se descrever D da seguinte forma:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \ \wedge \ 0 \leq y \leq x\} \\ \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2 \ \wedge \ 0 \leq y \leq 2-x\}.$$



Seja $f : D \to \mathrm{R}$ uma função contínua arbitrária. Então

$$\iint_D f\, dA = \int_0^1 \int_0^x f(x,y)\, dy\, dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x,y)\, dy\, dx.$$

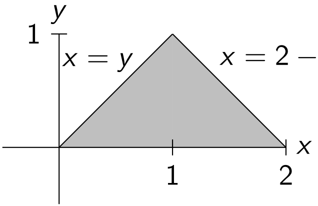
Exemplo: domínios seccionalmente regulares

Note-se que

$$y = x \iff x = y \quad \text{e} \quad y = 2 - x \iff x = 2 - y.$$

Por isso, o domínio D também pode ser definido como

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x \leq 2 - y \ \wedge \ 0 \leq y \leq 1\}.$$



Logo, o integral duplo de f sobre D também satisfaz

$$\iint_D f\, dA = \int_0^1 \int_y^{2-y} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Cálculo de áreas e volumes

Caso geral

Se $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ forem contínuas e $f(x,y) \geq g(x,y)$ para todo o $(x,y) \in D$, então

$$\iint_D f - g \, dA = Vol(V_g^f),$$

onde $V_g^f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D \wedge g(x,y) \leq z \leq f(x,y)\}$.

Caso especial: $g \equiv 0$

Se $f\colon D \to \mathbb{R}_0^+$ for contínua, então

$$\iint_D f \, dA = Vol(V_0^f).$$

Cálculo de volumes e áreas

Áreas: $f \equiv 1$ e $g \equiv 0$

Se $f(x,y) = 1$ para todo o $(x,y) \in D$, então

$$\iint_D dA = \text{Área}(D).$$

Exemplo: áreas

Exemplo

Vamos calcular a área da região planar delimitada pelas curvas dadas por

$$y = x^2 - 4, \; y = \frac{x}{2} + 1, \; y = -\frac{x}{2} + 1.$$

Exemplo: áreas

$$\boxed{D\colon\ y = x^2 - 4,\ \ y = \frac{x}{2} + 1,\ \ y = -\frac{x}{2} + 1.}$$

$$x^2 - 4 = \frac{x}{2} + 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2 - \frac{x}{2} - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x = -2 \ \vee \ x = \frac{5}{2}.}$$

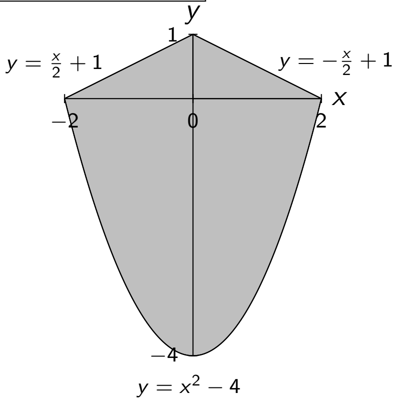
$$x^2 - 4 = -\frac{x}{2} + 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2 + \frac{x}{2} - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x = -\frac{5}{2} \ \vee \ x = 2.}$$

$$\frac{x}{2} + \cancel{1} = -\frac{x}{2} + \cancel{1} \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x = 0.}$$



Exemplo: áreas

$$
\begin{aligned}
\text{Área}(D) &= \iint_D dA \\
&= \int_{-2}^{0}\int_{x^2-4}^{\frac{x}{2}+1} dy\, dx + \int_{0}^{2}\int_{x^2-4}^{-\frac{x}{2}+1} dy\, dx \\
&= 2\int_{0}^{2}\int_{x^2-4}^{-\frac{x}{2}+1} dy\, dx \\
&= 2\int_{0}^{2} -\frac{x}{2}+1-(x^2-4)\, dx \\
&= 2\int_{0}^{2} -x^2-\frac{x}{2}+5\, dx \\
&= 2\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{4}+5x\right]_0^2 = \frac{38}{3}.
\end{aligned}
$$

Exemplo: volumes

Exemplo

Calcule o volume do sólido delimitado pelos planos dados por

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ z = 2 - 2x - y.$$

Exemplo: volumes

$$\boxed{V: x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ z = 2 - 2x - y.}$$

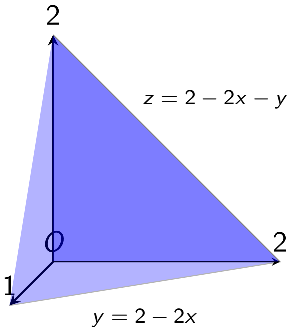
$$\boxed{z = 2 - 2x - y}$$

$$x = z = 0: \quad y = 2;$$
$$y = z = 0: \quad x = 1;$$
$$x = y = 0: \quad z = 2.$$

$$\boxed{(1, 0, 0),\ (0, 2, 0),\ (0, 0, 2).}$$

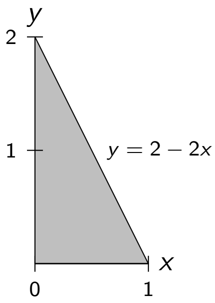
$$0 = 2 - 2x - y \quad \Leftrightarrow$$
$$y = 2 - 2x.$$

$$\boxed{z = 0:\ y = 2 - 2x.}$$



Exemplo: volumes

$$\boxed{D\colon\ y = 2 - 2x,\ \ x = 0,\ \ y = 0.}$$



$$\boxed{\mathrm{Vol}(V) = \int_0^1 \int_0^{2-2x} 2 - 2x - y \, dy \, dx}$$

Exemplo: volumes

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(V) &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} 2 - 2x - y \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 \left[2y - 2xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx \\
&= \int_0^1 2\,(2-2x) - 2x\,(2-2x) - \frac{(2-2x)^2}{2} \, dx \\
&= \int_0^1 2x^2 - 4x + 2 \, dx \\
&= \left[\frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 2x \right]_0^1 \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Fim de aula

FIQUEM BEM

E

NÃO DESISTAM DE ESTUDAR!