VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS

Problema 1.
Considere a variável aleatória X, contínua, com função densidade de probabilidade (f.d.p) dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2}, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a) Verifique que se trata efectivamente de uma f.d.p.
b) Deduza a função de distribuição.
c) Calcule o valor esperado da variável $Y = 3X - 2$.
d) Determine o valor de b tal que $P(X \leq b) = 0.5$.

Problema 2.
Um posto de gasolina é abastecido uma vez por semana. Baseando-se em experiências passadas, pode afirmar-se que a função densidade de probabilidade das vendas semanais de gasolina (X), em dezenas de milhares de litros, é

$$f(x) = \begin{cases} x/4, & 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a) Qual é a probabilidade de serem vendidos no máximo 16 mil litros numa semana?
b) Determine o valor esperado e variância da venda semanal de gasolina.
c) Qual é a quantidade mínima de gasolina a adquirir semanalmente pelo posto de modo a que a procura seja satisfeita até ao próximo abastecimento em pelo menos 92% das semanas?

Problema 3.
Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} k, & -2 \leq x < 1, \\ 0.5, & 1 \leq x < 1.5, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a) Determine o valor de k.
b) Deduza a função distribuição de X.
c) Determine o valor esperado e a mediana de X.
d) Calcule $P(X < 1 | 0.5 < X < 2)$.

Problema 4.
Considere a variável aleatória X, contínua, com função distribuição dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ 0.25x + k, & -2 \leq x < 2, \\ 1, & 2 \leq x. \end{cases}$$

a) Determine k de forma a que $F(x)$ seja função distribuição da v.a. X.
b) Deduza a função densidade de probabilidade.
c) Calcule a variância da variável $Y = 1 - 2X$.
d) Determine o valor de x tal que $P(X > x) = 0.25$.

Problema 5.
Suponha que chega a uma paragem de autocarro às 10 horas e que o tempo de chegada do autocarro é uniformemente distribuído entre as 10 horas e as 10 horas e 30 minutos.

a) Determine o valor esperado e variância do tempo de espera pelo autocarro.
b) Qual a probabilidade de ter de esperar mais do que 15 minutos pelo autocarro?
c) Se às 10 horas e 15 minutos o autocarro ainda não chegou, qual é a probabilidade de ter de esperar pelo menos mais 10 minutos?

Problema 6.
O tempo requerido para terminar um determinado produto numa linha de montagem é uniformemente distribuído entre 30 e 40 segundos.

a) Determine a proporção de artigos que requerem mais de 37 segundos na linha de montagem.
b) Qual o tempo que é excedido por 90% dos artigos na linha de montagem?
c) Qual a probabilidade de em 10 artigos, 4 deles requererem menos de 37 segundos na linha de montagem?

Problema 7.
O tempo de reacção de um condutor a um estímulo visual é normalmente distribuído com média de 0.4 segundos e desvio padrão de 0.05 segundos.

a) Calcule a probabilidade de o tempo de reacção estar compreendido entre 0.4 e 0.5 segundos.
b) Determine o tempo de reacção que é excedido 90% das vezes.
c) Qual a probabilidade de em 100 condutores selecionados ao acaso, encontrar 10 com tempos de reacção superiores a 0.45 segundos?

Problema 8.
O tempo de vida de um semicondutor a uma potência constante é normalmente distribuido com média de 7000 horas e desvio padrão de 600 horas.

a) Qual a probabilidade de um semicondutor falhar antes das 5000 horas?
b) Qual o tempo de vida em horas que é excedido por 5% dos semicondutores?
c) Se três semicondutores são utilizados num determinado equipamento e, assumindo que eles falham independentemente uns dos outros, qual a probabilidade de todos os semicondutores estarem a funcionar, após 7600 horas?

Problema 9.
Seja X uma variável aleatória com distribuição normal de valor esperado 10 e variância 4, que representa o comprimento de uma barra de ferro. Suponha que a barra é considerada não defeituosa se $8 \leq X \leq 12$ e defeituosa caso contrário.

a) Qual a probabilidade de que uma barra seja não defeituosa?
b) Qual a probabilidade de que, em 10 barras escolhidas ao acaso e com reposição do fabrico diário, pelo menos 2 sejam defeituosas?

Problema 10. A emissão de uma fonte radiocativa é tal que o número de partículas emitidas num período de 60 segundos, X tem distribuição de Poisson com $V[X]$=30. Calcule a probabilidade aproximada de serem emitidas pelo menos 40 partículas num período de 60 segundos?

Problema 11. Num canal de comunicação digital, o número de bits recebidos com erro pode ser modelado através de uma v.a. binomial, em que a probabilidade de um bit ser recebido com erro é igual a 10^{-5}. Se 16 milhões de bits são transmitidos, qual é a probabilidade de mais de 150 bits apresentarem erros?

Problema 12.
O tempo de produção de uma certa peça de porcelana é uma variável aleatória com distribuição exponencial de valor esperado 1 hora.

a) Calcule a probabilidade de tempo de produção de uma peça ser superior a 45 minutos?
b) Verificando-se que em certo momento uma peça já está a ser produzida há 45 minutos, qual a probabilidade de ser necessário esperar pelo menos mais 60 minutos para concluir a peça?

Problema 13.
Assuma que o tempo entre chegadas de mensagens (em minutos) à sua caixa de correio electrónico é exponencialmente distribuído com variância 4.

a) Determine a probabilidade de o tempo entre duas mensagens ser inferior a 2 horas.
b) Se a última mensagem recebida foi há mais de quatro horas, qual a probabilidade de não receber nenhuma mensagem nas próximas duas horas?

Problema 14.
O tempo entre chegadas (consecutivas) de clientes a uma caixa de multibanco segue uma distribuição exponencial. Sabe-se que a probabilidade do tempo entre chegadas de clientes ser superior a 2 minutos é de 0.67.

a) Calcule a probabilidade do tempo entre chegadas de clientes ser inferior a 10 minutos?
b) Sabendo que o último cliente chegou há mais de 5 minutos, qual a probabilidade do próximo cliente chegar dentro de 1 minuto?