Capítulo 5

Interpolação polinomial

5.1 Fórmula de Taylor

Como já vimos em capítulos anteriores, a fórmula de Taylor tem um papel fundamental em Análise Numérica para aproximarmos valores de uma função usando a sua aproximação por polinómios.

Proposição 5.1.1 (**Fórmula de Taylor**). Seja f uma função definida num intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$, e n vezes diferenciável num ponto $x_0 \in I$. Tem-se então, para qualquer $x \in I$,

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 \\ &+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x-x_0)\,, \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

onde

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x-x_0)}{(x-x_0)^n} = 0\,. \tag{5.1.2}$$

Demonstração: Definamos o polinómio de ordem n seguinte

$$T_n(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\,. \tag{5.1.3}$$

Por simples derivação, mostra-se que $T_n(x)$ é o único polinómio de ordem, quanto muito, igual a n tal que

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \qquad \forall\, k \in \{0,\ 1, \ldots,\ n\}\,, \tag{5.1.4}$$

onde $T_n^{(k)}(x_0)$ denota a derivada de ordem k de $T_n(x)$ no ponto $x = x_0$. Mostremos que, quando x tende para x_0, $r_n(x-x_0) := f(x) - T_n(x)$ é um infinitésimo quando comparado com $(x-x_0)^n$, *i.e.* que se verifica (5.1.2). Pelas hipóteses feitas sobre f e tendo em conta (5.1.4), podemos aplicar a

Regra de Cauchy-L'Hospital sucessivamente e obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x-x_0)}{(x-x_0)^n}&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-T_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\dots\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)-T_n^{(n)}(x_0)}{n!}=\frac{f^{(n)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)}{n!}=0.\end{aligned}$$ □

Observemos que, no caso de $n=0$, basta que f seja contínua. A fórmula anterior, chama-se **Fórmula de Taylor de ordem** n da função f no ponto $x=x_0$. A função $r_n(x-x_0)$ designa-se por **resto de ordem** n e, de entre as várias expressões possíveis, apresentamos, na proposição seguinte, aquelas que têm mais interesse neste texto.

Proposição 5.1.2. Seja f uma função definida num intervalo aberto $I\subseteq\mathbb{R}$ e $x_0\in I$. Suponhamos que f e as suas derivadas até à ordem $n+1$ são funções contínuas em I. Então existe um ponto ξ entre x_0 e $x\in I$ tal que o resto da Fórmula de Taylor de ordem n de f em $x=x_0$ é dado por uma das fórmulas seguintes:

$$r_n(x-x_0)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\,, \tag{5.1.5}$$

$$r_n(x-x_0)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0)\,. \tag{5.1.6}$$

Demonstração: Consideremos o polinómio $T_n(x)$ definido na demonstração da proposição anterior em (5.1.3) e definamos

$$F(t):=f(t)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k\,. \tag{5.1.7}$$

Observemos que $F(x)=f(x)$ e $F(x_0)=T_n(x)$, pelo que

$$r_n(x-x_0)=F(x)-F(x_0)\,. \tag{5.1.8}$$

Por outro lado, derivando (5.1.7) e, depois, usando as propriedades das somas telescópicas, obtemos

$$\begin{aligned}F'(t)=&f'(t)+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k-\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}\right]\\=&\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,.\end{aligned} \tag{5.1.9}$$

Sem perda de generalidade, consideremos o caso de $x>x_0$, sendo que o caso $x<x_0$ é inteiramente análogo. Consideremos, agora, uma função arbitrária G, mas tal que G é contínua em $[x_0,x]$ e diferenciável em (x_0,x), e, ainda, tal que $G'(t)\neq 0$ para todo $t\in(x_0,x)$. Então, pelo Teorema de Cauchy, existe $\xi\in(x_0,x)$ tal que

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} \tag{5.1.10}$$

Para provarmos (5.1.5) ou (5.1.6), basta considerarmos, em (5.1.10), $G(t)=(x-t)^{n+1}$ ou $G(t)=x-t$, respectivamente, e usar as identidades (5.1.8) e (5.1.9). □

Observe-se que a condição de que $f^{(n+1)}$ seja contínua no intervalo I não é de todo necessária para a demonstração da Proposição 5.1.2. Basta assumir que $f^{(n+1)}$ exista e que $f^{(n)}$ seja contínua, ambas no intervalo I.

Os restos da Fórmula de Taylor expressos em (5.1.5) e em (5.1.6) são conhecidos na literatura como **Resto de Lagrange** e **Resto de Cauchy**, respectivamente. As correspondentes fórmulas de Taylor são designadas por **Fórmula de Taylor-Lagrange** e **Fórmula de Taylor-Cauchy**. Existem várias outras possibilidades para expressar o resto da Fórmula de Taylor, mas todas elas devem satisfazer à condição (5.1.2). Tal como iremos ver na demonstração da proposição seguinte, e principalmente no estudo dos desenvolvimentos em série de Taylor (ver [**?**]), o resto de Lagrange é útil em situações em que consigamos majorar $|f^{(n+1)}(\xi)|$ por alguma constante positiva (independente de n), digamos C, porque, neste caso, iremos ter

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \leq C\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to +\infty. \tag{5.1.11}$$

Por sua vez, o resto de Cauchy permite desbloquear situações em que não conseguimos majorar $|f^{(n+1)}(\xi)|$, o que acontece, por exemplo, quando na expressão de $f^{(n+1)}(\xi)$ aparecem expressões do tipo $n!$ no numerador.

No caso particular de $x_0 = 0$, a Fórmula de Taylor reduz-se a

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x)\,, \tag{5.1.12}$$

onde

$$\lim_{x\to 0}\frac{r_n(x)}{x^n} = 0\,. \tag{5.1.13}$$

Neste caso, a Fórmula de Taylor recebe o nome de **Fórmula de Maclaurin**.

Proposição 5.1.3 (Fórmulas Fundamentais)**.** As funções elementares seguintes admitem as Fórmulas de Maclaurin de ordem n indicadas:

(1) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + r_n(x)$;

(2) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + r_n(x)$;

(3) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + r_n(x)$;

(4) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \begin{pmatrix}\alpha\\2\end{pmatrix}x^2 + \cdots + \begin{pmatrix}\alpha\\n\end{pmatrix}x^n + r_n(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}$;

(5) $\operatorname{sen}(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\dfrac{x^n}{n!} + r_n(x)$;

(6) $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\dfrac{x^n}{n!} + r_n(x)$.

Na Fórmula Fundamental (4) da proposição anterior, estendemos a notação binomial de números inteiros não negativos para um número real α qualquer,

$$\begin{pmatrix}\alpha\\n\end{pmatrix} = \frac{\alpha!}{n!(\alpha-n)!} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots[\alpha-(n-1)]}{n!}\,.$$

Observe-se, em particular, que $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = 1$ e $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha$. Por outro lado, tal como iremos ver na demonstração a seguir, subentende-se que $\begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} = 0$ para todo $n > \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{N}$. Usando uma notação mais abreviada, podemos escrever a Fórmula de Taylor (4) na forma seguinte

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=1}^{k} [\alpha - (i-1)] \frac{x^k}{k!}. \tag{5.1.14}$$

Demonstração: (1) Se $f(x) = \frac{1}{1-x}$, determinando as sucessivas derivadas, temos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1\,,\\
f''(x) &= \frac{2}{(1-x)^3} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 2\,,\\
f'''(x) &= \frac{2\times 3}{(1-x)^4} \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = 2\times 3\,,\\
&\cdots\\
f^{(n)}(x) &= \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(0) = n!, \quad n \geq 0\,.
\end{aligned}$$

Então, substituindo na Fórmula de Maclaurin (5.1.12), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} =& 1 + x + \frac{2}{2}x^2 + \frac{3!}{3!}x^3 + \cdots + \frac{n!}{n!}x^n + r_n(x)\\
=& 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + r_n(x)\,.
\end{aligned}$$

Falta apenas ver que (5.1.2) é satisfeita. De facto, usando a definição (5.1.5) para o resto, temos

$$\lim_{x\to 0} \frac{r_n(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{(n+1)!}{(1-\xi)^{n+2}}}{(n+1)!}x = \lim_{x\to 0} \frac{x}{(1-\xi)^{n+2}} = 0\,.$$

A última igualdade resulta do facto de ξ estar entre 0 e x (que, por definição, é diferente de 1) e, por isso, $\xi \to 0$ quando $x \to 0$.

(2) Para $f(x) = e^x$, temos $f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Substituindo em (5.1.12), obtemos a Fórmula de Maclaurin respectiva. Para ver que (5.1.2) é satisfeita, usamos a definição (5.1.5) para o resto e obtemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{r_n(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{e^\xi}{(n+1)!}x = 0\,.$$

(3) Se $f(x) = \ln(1+x)$, temos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1\,,\\
f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = -1\,,\\
f'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = 2\,,
\end{aligned}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{2\times 3}{(1+x)^4} \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(0) = -2\times 3\,,$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!, \quad n\geq 1\,.$$

Substituindo em (5.1.12), tem-se

$$\begin{aligned}
&\ln(1+x) = \\
&0 + 1\times x + \frac{-1}{2}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{-3!}{4!}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n(n-1)!}{n!}x^n + r_n(x) = \\
&x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n\frac{x^n}{n} + r_n(x)\,.
\end{aligned}$$

Vejamos que (5.1.2) é satisfeita, usando a definição (5.1.5) para o resto. De facto, observando que $\xi\to 0$ quando $x\to 0$, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{r_n(x)}{x^n} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}}{x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{(-1)^n\frac{n!}{(1+\xi)^{n+1}}}{(n+1)!}x \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(-1)^n}{(1+\xi)^{n+1}(n+1)}x = 0\,.
\end{aligned}$$

(4) No caso de $\alpha\in\mathbb{R}$ e $f(x) = (1+x)^\alpha$, tem-se

$$\begin{aligned}
&f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = \alpha\,,\\
&f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = \alpha(\alpha-1)\,,\\
&f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3} \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\,,\\
&\ \ \vdots\\
&f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots[\alpha-(n-1)](1+x)^{\alpha-n}\\
&\qquad \Rightarrow \quad f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots[\alpha-(n-1)], \quad n\geq 1\,.
\end{aligned}$$

Substituindo em (5.1.12) e usando a escrita abreviada sugerida pela identidade

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots[\alpha-(k-1)] = \frac{\alpha!}{(\alpha-k)!} = k!\begin{pmatrix}\alpha\\ k\end{pmatrix},$$

onde $\alpha,\ k\in\mathbb{N}$ e $\alpha\geq k$, obtemos

$$\begin{aligned}
&(1+x)^\alpha = \\
&1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots\\
&\ + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots[\alpha-(n-1)]}{n!}x^n + r_n(x) = \\
&1 + \alpha x + \begin{pmatrix}\alpha\\ 2\end{pmatrix}x^2 + \begin{pmatrix}\alpha\\ 3\end{pmatrix}x^3 + \cdots + \begin{pmatrix}\alpha\\ n\end{pmatrix}x^n + r_n(x)\,.
\end{aligned}$$

Falta apenas ver que (5.1.2) é satisfeita. De facto, usando a definição (5.1.5) para o resto, observando que $x \neq -1$ e novamente que $\xi \to 0$ quando $x \to 0$, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{r_n(x)}{x^n} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}}{x^n}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots[\alpha-(n-1)](1+\xi)^{\alpha-n}}{(n+1)!}x = 0\,.\end{aligned}$$

(5) Seja, agora, $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. Temos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \cos(x) = \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad f'(0)=1\,,\\
f''(x) &= -\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}\left(x+\frac{2\pi}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad f''(x)=0\,,\\
f'''(x) &= -\cos(x) = \operatorname{sen}\left(x+\frac{3\pi}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad f'''(0)=-1\,,\\
f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}\left(x+\frac{4\pi}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad f^{(4)}(0)=0\,,\\
f^{(5)}(x) &= \cos(x) = \operatorname{sen}\left(x+\frac{5\pi}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad f^{(5)}(0)=1\,,\\
&\vdots\\
f^{(n)}(x) &= \operatorname{sen}\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad f^{(n)}(0)=\begin{cases}0\,, & \text{se } n \text{ par}\\ \pm 1 & \text{se } n \text{ ímpar}\end{cases}\,,\quad n\geq 0\,.
\end{aligned}$$

Substituindo em (5.1.12), temos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x) =&0+1\times x+\frac{0}{2}x^2+\frac{-1}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}x^n+r_n(x)\\ =&x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\frac{x^n}{n!}+r_n(x)\,.\end{aligned}$$

Vejamos, agora, que (5.1.2) é satisfeita. De facto, usando a definição (5.1.5) para o resto, temos

$$\lim_{x\to 0}\frac{r_n(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}}{x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(\xi+\frac{n\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x = 0\,.$$

(6) Finalmente, no caso de $f(x) = \cos(x)$, temos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\operatorname{sen}(x) = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad f'(0)=0\,,\\
f''(x) &= -\cos(x) = \cos\left(x+\frac{2\pi}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad f''(x)=-1\,,\\
f'''(x) &= \operatorname{sen}(x) = \cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad f'''(0)=0\,,\\
f^{(4)}(x) &= \cos(x) = \cos\left(x+\frac{4\pi}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad f^{(4)}(0)=1\,,\\
f^{(5)}(x) &= -\operatorname{sen}(x) = \cos\left(x+\frac{5\pi}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad f^{(5)}(0)=0\,,
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } n \text{ ímpar} \\ \pm 1 & \text{se } n \text{ par} \end{cases} \quad , \quad n \geq 0\,.$$

Substituindo em (5.1.12), temos

$$\begin{aligned}\cos(x) =& 1 + 0 \times x + \frac{-1}{2}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 + \cdots + \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}x^n + r_n(x) \\ =& 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\frac{x^n}{n!} + r_n(x)\,.\end{aligned}$$

Para ver que (5.1.2) é satisfeita, usamos a definição (5.1.5) para obter

$$\lim_{x\to 0}\frac{r_n(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}}{x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\xi + \frac{n\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x = 0. \qquad \square$$

Exemplo 5.1.1. Determinar a Fórmula de Maclaurin de ordem n da função seguinte:

$$f(x) = \text{sen}^2(x)\,, \quad x = 0\,.$$

Resolução: Comecemos por observar que

$$f(x) = \text{sen}^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}\,.$$

Então, usando a Proposição 5.1.3:(6), obtemos

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(2x)^{2k}}{(2k)!} + r_n(2x)\right] = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}x^{2k} + R_n(x)\,, \tag{5.1.15}$$

onde $R_n(x) = -\frac{1}{2}r_n(2x)$, com $\lim_{x\to 0}\frac{r_n(2x)}{(2x)^n} = 0$. Para ver que (5.1.2) é satisfeita, basta ver que

$$\lim_{x\to 0}\frac{R_n(x)}{x^n} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{r_n(2x)}{x^n} = -2^{n-1}\lim_{x\to 0}\frac{r_n(2x)}{(2x)^n} = 0\,.$$

Assim, (5.1.15) é a Fórmula de Maclaurin da função dada.

No caso particular de $f(x)$ ser um polinómio de grau menor ou igual a n, então $r_n(x) = 0$ em (5.1.12).

Exemplo 5.1.2. Determinar a Fórmula de Taylor de ordem n do polinómio seguinte em torno do ponto indicado:

$$g(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5\,, \quad x = 2\,.$$

Resolução: Neste caso, temos:

$$\begin{aligned}
&g(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5 \qquad \Rightarrow \qquad g(2) = 11\,,\\
&g'(x) = 3x^2 - 4x + 3 \qquad \Rightarrow \qquad g'(2) = 7\,,\\
&g''(x) = 6x - 4 \qquad \Rightarrow \qquad g''(2) = 8\,,\\
&g'''(x) = 6 \qquad \Rightarrow \qquad g'''(2) = 6\,,\\
&g^{(n)}(x) = 0 \quad \forall\, n \geq 4 \qquad \Rightarrow \qquad g^{(n)}(0) = 0 \quad \forall\, n \geq 4\,.
\end{aligned}$$

Então para todo $n \geq 3$, $r_n(x-2) = 0$ e

$$g(x) = 11 + 7(x-2) + \frac{8}{2!}(x-2)^2 + \frac{6}{3!}(x-2)^3 = 11 + 7(x-2) + 4(x-2)^2 + (x-2)^3\,.$$

Se, por exemplo, $n = 2$, temos

$$g(x) = 11 + 7(x-2) + \frac{8}{2!}(x-2)^2 + r_2(x) = 11 + 7(x-2) + 4(x-2)^2 + r_2(x-2)\,,$$

onde, usando (5.1.5), se tem

$$\lim_{x\to 2} \frac{r_2(x-2)}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{g'''(\xi)}{3!}(x-2)^3}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2}(x-2) = 0\,,$$

sendo ξ um ponto entre x e 2.

As funções cujas fórmulas de Taylor, em torno de determinado ponto, têm restos cada vez mais pequenos à medida que a ordem n aumenta, dizem-se **analíticas**.

Podemos usar a Fórmula de Taylor para obter valores aproximados de funções, tal com mostra e exemplo seguinte.

Exemplo 5.1.3. Usando a fórmula de Maclaurin da função $f(x) = e^x$ até à ordem $n = 4$, calcular um valor aproximado do número de Euler e.

Resolução: Da Proposição 5.1.3, sabemos que a fórmula de Maclaurin de ordem $n = 4$ de $f(x) = e^x$ é

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + r_4(x)\,.$$

Tomando $x = 1$, temos

$$e = 1 + 1 + 0.5 + 0.(6) + 0.041(6) + r_4(1) = 2.708(3) + r_4(1)\,.$$

Usando (5.1.5), podemos estimar o erro $r_4(1)$ cometido nesta aproximação por

$$r_n(1) = \frac{f^{(4+1)}(\xi)}{(4+1)!} = \frac{(1+\xi)^5}{5!} \leq \frac{2^5}{120} = \frac{4}{15} = 0.2(6) \leq 0.3\,.$$

Com se observa no exemplo anterior, o resto permanece muito grande, quando comparamos com o real valor de e. Para obtermos valores mais próximos, pode-se, por exemplo, calcular um valor de potência inferior, por exemplo $e^{\frac{1}{2}}$, e depois passar, neste exemplo, o quadrado para o outro lado.

5.2 Polinómio interpolador de Lagrange

Comecemos por introduzir a noção de polinómio interpolador.

Definição 5.2.1. Consideremos uma função f para a qual conhecemos $(n+1)$ pontos de coordenadas

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ \ldots,\ (x_n, y_n)\,,$$

com $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ todos distintos entre si. Chama-se **polinómio interpolador** da função $y = f(x)$ (definida pelos pontos de coordenadas dados) nos pontos

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$$

a todo o polinómio $P(x)$ tal que

$$\begin{aligned} &P(x_0) = f(x_0) = y_0\,,\\ &P(x_1) = f(x_1) = y_1\,,\\ &\vdots\\ &P(x_n) = f(x_n) = y_n\,. \end{aligned}$$

Para um conjunto de pontos de coordenadas está sempre garantida a existência de um único polinómio interpolador, tal como mostra a proposição seguinte

Proposição 5.2.1. Seja $(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ \ldots,\ (x_n, y_n)$ um conjunto de $(n+1)$ pares ordenados, com $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ todos distintos entre si. Então, existe um, e só um, polinómio interpolador de grau menor ou igual a n que interpola os pontos dados.

Demonstração: Consideremos um polinómio arbitrário de grau n,

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\,.$$

Se $P_n(x)$ é um polinómio interpolador de $(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ \ldots,\ (x_n, y_n)$, temos

$$\left\{\begin{array}{l} P(x_0) = y_0\\ P(x_1) = y_1\\ \vdots\\ P(x_n) = y_n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = y_0\\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = y_1\\ \vdots\\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = y_1\,. \end{array}\right. \tag{5.2.16}$$

Escrevamos este sistema na forma matricial seguinte,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ & \vdots & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}_{Y}.$$

Como $\det(X) \neq 0$, este sistema é possível determinado, ou seja existe uma única solução $(a_0, a_1, \ldots, x_n)$.

Para mostrar que $\det(X) \neq 0$, usamos indução matemática no número de linhas (que é igual ao número de colunas) da matriz A. Se X for uma matriz de ordem 1×1, claramente $\det(X) = 1 \neq 0$. Suponhamos que para a matriz X de ordem $m \times m$, com $1 < m < n + 1$ se tem $\det(X) \neq 0$. Mostremos então para a matriz de ordem $(m + 1) \times (m + 1)$ que $\det(X) \neq 0$. Consideremos esta matriz com a última coluna escrita na potência $(n + 1)$ da variável x,

$$A_m = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^m & x^{m+1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m & x^{m+1} \\ & \vdots & & & & \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^m & x^{m+1} \\ 1 & x_{m+1} & x_{m+1}^2 & \cdots & x_{m+1}^m & x^{m+1} \end{bmatrix}$$

Sabemos que $\det(A_m)$ é um polinómio de grau máximo $m+1$. Como este polinómio já se anula em $(m+1)$ valores distintos $x_0, x_1, \ldots, x_m$, não se pode anular em mais nenhum outro valor. Com x_{m+1} é distinto de qualquer valor $x_0, x_1, \ldots, x_m$, $\det(A_m) \neq 0$ em $x = x_{m+1}$, o que conclui o processo indutivo.

Como $\det(X) \neq 0$, o sistema $XA = Y$ é possível determinado, ou seja existe uma única solução $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ do sistema (5.2.16). □

A matriz

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ & \vdots & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$$

obtida na demonstração da proposição anterior designa-se por **matriz de Vandermonde**. A demonstração anterior fornece-nos um primeiro método de calcular o polinómio interpolador de um conjunto de pares ordenados.

Exemplo 5.2.1. Considere a tabela seguinte de pares de abcissas e ordenadas de uma função f,

x	1.0	1.3	1.9
y	0.83	0.96	0.95

(a) Determine o polinómio interpolador de grau mínimo que interpola os pares ordenados fornecidos pela tabela.

(b) Com o polinómio encontrado em (a), indique uma estimativa para o valor de $f(1.65)$.

(c) Sabendo que a função interpolada é $f(x) = \text{sen}(x)$, calcule o erro relativo cometido em (b).

(d) Esboce os gráficos de $P(x)$ e $f(x)$ num mesmo referencial cartesiano.

Resolução: (a) $P(x) = -0.463x^2 + 1.465x - 0.162$.

(b) $f(1.65) \simeq 0.995$.

(c) $E_r \leq 0.0019$.

Por vezes, o conjunto de pares ordenados pode não ser dado directamente, mas através das abcissas e da expressão designatória da função.

Exemplo 5.2.2. Considere a função e o conjunto de as abcissas indicadas a seguir,

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}\,, \qquad -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\,.$$

(a) a Determine o polinómio interpolador de grau mínimo que interpola f nos pontos de abcissas indicados.

(b) Esboce os gráficos do polinómio encontrado em (a) e de $f(x)$ num mesmo referencial cartesiano.

Resolução: (a) $P(x) = -\frac{1}{44200}x^{10} + \frac{7}{5525}x^8 - \frac{83}{3400}x^6 + \frac{2181}{11050}x^4 - \frac{149}{221}x^2 + 1$.

Definição 5.2.2. Consideremos uma função f para a qual conhecemos $(n+1)$ pontos de coordenadas

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ \ldots,\ (x_n, y_n)\,,$$

com $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ todos distintos entre si. O **polinómio interpolador de Lagrange** de grau menor ou igual a n é dado por

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \mathcal{L}_i(x) y_i\,,$$

onde

$$\mathcal{L}_i(x) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Como se observa desta definição, para cada $x_i \in \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ tem-se

$$P(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \mathcal{L}_i(x_i) y_i = y_i,$$

onde

$$\mathcal{L}_k(x_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = i \\ 0 & \text{se } k \neq i \end{cases} .$$

Resulta da definição anterior que no caso $n = 1$,

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 \,,$$

e para $n = 2$

$$P_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2 \,.$$

Exemplo 5.2.3. Considere a função $f(x) = \frac{1}{x}$ e o conjunto de abcissas $x_0 = 2$, $x_1 = 2.5$, $x_2 = 4$. Usando o polinómio interpolador de Lagrange, calcule um valor aproximado de $f(3)$.

Resolução: $P_2(x) = 0.05x^2 - 0.425x + 1.15 \Rightarrow P_2(3) \simeq 0.326$.

Na proposição seguinte apresentamos uma forma de calcular o erro cometido pela utilização do polinómio interpolador de Lagrange.

Proposição 5.2.2. Consideremos $(n+1)$ abcissas reais $x_0, x_1, \ldots, x_n$, todas distintas entre si, num intervalo $[a, b]$ e seja f uma função $(n+1)-$vêzes diferenciável em (a, b). Se $P_n(x)$ é o polinómio interpolador de Lagrange de grau menor ou igual a n que interpola os pontos de abcissa anteriores na função f, então

$$\forall\, x \in [a, b]\ \exists\ \xi(x) \in (a, b) : f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) \,.$$

Pela proposição anterior, o **erro** é então dado por

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) \,.$$

Exemplo 5.2.4. Na tabela seguinte estão listados valores de abcissa e ordenada de uma função f:

x	1	1.3	1.6	1.9	2.2
y	0.765977	0.6200860	0.4554022	0.2818186	0.1103623

(a) Calcular valores aproximados de $f(1.5)$ usando polinómios interpoladores Lagrange de diferentes graus.

(b) Sabendo que o valor da função em $x = 1.5$ é $f(1.5) = 0.5118277$, calcule majorantes para o erro absoluto cometido com cada polinómio.

Resolução: (a) Usando a fórmula do polinómio interpolador de Lagrange, temos:

$$
\begin{aligned}
&P_1(x) = -0.548946x + 1.3357158\\
&P_2^1(x) = -0.04944333x^2 - 0.40556034x + 1.23087366\\
&P_2(x)^2 = -0.1085227x^2 - 0.2341035x + 1.1078239\\
&P_3^1(x) = 0.0680685x^3 - 0.3761722x^2 + 0.110797x + 0.9698669\\
&P_3^2(x) = 0.0658784x^3 - 0.3656596x^2 + 0.0944567x + 0.9705223\\
&P_4(x) = 0.0018251x^4 + 0.0552928x^3 - 0.3430466x^2 2 + 0,0733913x + 0.9777351
\end{aligned}
$$

(b) Temos então em $x = 1.5$

$$
\begin{aligned}
&P_1(1.5) = 0.5102968\\
&P_2^1(1.5) = 0.5112857\\
&P_2(x)^2 = 0.5124926\\
&P_3^1(1.5) = 0.5118302\\
&P_3^2(1.5) = 0.5118127\\
&P_4(1.5) = 0.5118199
\end{aligned}
$$

5.3 Método de Neville

A ideia do método de Neville é utilizar polinómios de Lagrange de menor potência de modo recursivo para calcular polinómios de Lagrange de potências superiores. Isto é útil, por exemplo, se tivermos polinómios de Lagrange baseados num conjunto de pontos conhecidos $(x_i, f(x_i))$, $i \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ n\}$, e, assim, obter um novo ponto $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$. O método de Neville baseia-se na proposição seguinte.

Proposição 5.3.1. Seja f uma função definida nos pontos de abcissas $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e sejam x_i e x_j duas abcissas distintas do conjunto $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Para $k \in \{1, \ldots, n\}$, o $k-$ésimo polinómio de Lagrange que interpola a função f nos $k+1$ pontos de abcissa $x_0, x_1, \ldots, x_k$ é dado por

$$P_k(x) = \frac{x - x_i}{x_i - x_j} P_{0,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}(x) - \frac{x - x_j}{x_i - x_j} P_{0,1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}(x),$$

onde $P_{0,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}(x)$ é o polinómio interpolador de Lagrange de ordem k que interpola os pontos de abcissas $\{x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k\}$, e $P_{0,1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}(x)$ é o polinómio interpolador de Lagrange de ordem k que interpola os pontos de abcissas $\{x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_k\}$.

No processo iterativo, iremos denotar o polinómio de ordem $k+1$ dado pela proposição anterior por

$$\begin{aligned} P_{0,1,\ldots,k}(x) &= P_{0,1,\ldots,i,\ldots,j\ldots,k}(x), \qquad i<j\,, \\ P_{0,1,\ldots,k}(x) &= P_{0,1,\ldots,j,\ldots,i\ldots,k}(x), \qquad i>j\,. \end{aligned}$$

Nos cálculos do processo iterativo, iremos construir uma tabela da forma seguinte,

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$\ldots$
x_0	$P_0=y_0$					
x_1	$P_1=y_1$	$P_{0,1}$				
x_2	$P_2=y_2$	$P_{1,2}$	$P_{0,1,2}$			
x_3	$P_3=y_3$	$P_{2,3}$	$P_{1,2,3}$	$P_{0,1,2,3}$		
x_4	$P_4=y_4$	$P_{3,4}$	$P_{2,3,4}$	$P_{1,2,3,4}$	$P_{0,1,2,3,4}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
x_k	$P_k=y_k$	$P_{k-1,k}$	$P_{k-2,k-1,k}$	$P_{k-3,k-2,k-1,k}$	$P_{k-4,k-3,k-2,k-1,k}$	$\cdots$

onde, por exemplo,

$$P_{2,3,4}(x) = \frac{x-x_2}{x_2-x_4}P_{3,4}(x) - \frac{x-x_4}{x_2-x_4}P_{2,3}(x).$$

A proposição anterior dá-nos um método iterativo que definimos a seguir.

Definição 5.3.1 (Método de Neville). Denotemos por

$$Q_{i,j}, \qquad i \geq j$$

o polinómio interpolador de grau $n=j$ que interpola $(j+1)$ pontos de abcissas

$$x_{i-j},\ x_{i-j+1},\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_i$$

Para calcular, fazemos

$$Q_{i,j} = P_{i-j,i-j+1,\ldots,i-1,i}$$

e usamos

$$Q_{i,j-1} = P_{i-j+1,\ldots,i-1,i}, \qquad Q_{i-1,j-1} = P_{i-j,i-j+1,\ldots,i-1}$$

para obter a fórmula recursiva

$$\begin{aligned} Q_{i,0} &= y_i = f(x_i)\,, \\ Q_{i,j}(x) &= \frac{x-x_{i-j}}{x_i-x_{i-j}}Q_{i,j-1}(x) - \frac{x-x_i}{x_i-x_{i-j}}Q_{i-1,j-1}(x)\,. \end{aligned}$$

Tal como anteriormente, nos cálculos do método iterativo de Neville construímos uma tabela da forma seguinte,

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$\dots$	$n=k$
x_0	$Q_{0,0}=y_0$						
x_1	$Q_{1,0}=y_1$	$Q_{1,1}$					
x_2	$Q_{2,0}=y_2$	$Q_{2,1}$	$Q_{2,2}$				
x_3	$Q_{3,0}=y_3$	$Q_{3,1}$	$Q_{3,2}$	$Q_{3,3}$			
x_4	$Q_{4,0}=y_4$	$Q_{4,1}$	$Q_{4,2}$	$Q_{4,3}$	$Q_{4,4}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
x_k	$Q_{k,0}=y_k$	$Q_{k,1}$	$Q_{k,2}$	$Q_{k,3}$	$Q_{k,4}$	$\dots$	$Q_{k,k}$

onde, por exemplo,

$$Q_{4,2}(x)=\frac{x-x_2}{x_4-x_2}Q_{4,1}(x)-\frac{x-x_4}{x_4-x_2}Q_{3,2}(x).$$

Os métodos para determinação da representação explícita de uma interpolação polinomial a partir de dados de uma tabela, são conhecidos por **métodos de diferenças divididas**. O método de Neville é, pois, um método de diferenças divididas, assim como o método de Newton que iremos abordar na secção seguinte.

Implementação numérica do método de Neville

Determinar o polinómio interpolador de Lagrange de $(n+1)$ pontos de abcissas $x_0, x_1, \dots, x_n$ para uma função f.

(i) Input

- $x_0, x_1, \dots, x_n$
- $y_0, y_1, \dots, y_n$, ou dar $y=f(x)$ e calcular $y_0, y_1, \dots, y_n$: primeira coluna $Q_{0,0},\ Q_{1,0},\ \dots,\ Q_{n,0}$ fica conhecida

(ii) Output: Tabela Q com $P(x)=Q_{n,n}(x)$

1. For $i=1,\ 2,\ \dots,\ n$
    2. For $j=1,\ 2,\ \dots,\ i$ set

$$Q_{i,j}(x)=\frac{x-x_{i-j}}{x_i-x_{i-j}}Q_{i,j-1}(x)-\frac{x-x_i}{x_i-x_{i-j}}Q_{i-1,j-1}(x)$$

3. Output Q

O algoritmo pode facilmente ser modificado de modo a usar um critério de paragem com tolerância (absoluta ou relativa) ou com número máximo de iterações.

Este critério só funciona enquanto $i \leq n$, onde $(n+1)$ é o número de pontos interpolados. Caso contrário, seria necessário adicionar novos pontos de interpolação. No entanto, este matéria não faz parte dos conhecimentos a avaliar.

5.4 Método de Newton das diferenças divididas

Embora o método de Neville seja eficiente e útil para muitas aplicações, tem algumas limitações quando se lida com grandes conjuntos de dados, ou quando os pontos estão pouco espaçados. À medida que o número de pontos aumenta, especialmente se estiverem agrupados, o polinómio resultante pode apresentar um comportamento oscilatório, levando a imprecisões na interpolação. Esta limitação realça a importância de considerar métodos alternativos que possam fornecer resultados mais estáveis sob determinadas condições.

O método de Newton das diferenças divididas é um procedimento numérico para interpolar um polinómio, conhecido um conjunto de pontos de abcissas e ordenadas. Ao contrário do método de Neville, que é usado para aproximar o valor de um polinómio interpolador num ponto, o método de Newton das diferenças divididas permite construir o polinómio interpolador.

Seja f uma função real de variável e suponhamos que P_n é a $n-$ésima interpolação de Lagrange de f que coloca $(n+1)$ pontos de abcissas distintas $x_0, x_1, \ldots, x_n$. As diferenças divididas de f em relação a $x_0, x_1, \ldots, x_n$ são determinadas mostrando que P_n tem a representação

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\,, \qquad (5.4.17)$$

para constantes adequadas $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Para determinar os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$, vamos substituir sucessivamente em (5.4.17) x por x_0, x_1, x_2, …

$$\begin{aligned}
&P_n(x_0) = a_0 \Leftrightarrow a_0 = f(x_0)\,,\\
&P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1-x_0) \Leftrightarrow a_1 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\,,\\
&P_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2-x_0) + a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1) \Leftrightarrow a_2 = \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_1}\,,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

De modo a simplificar a escrita das diferenças divididas, introduzimos a notação seguinte,

$$\begin{aligned}
&f[x_0] = f(x_0)\,, \quad f[x_1] = f(x_1)\,, \quad \ldots\\
&f[x_0,x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}, \quad f[x_1,x_2] = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\,, \quad \ldots\\
&f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}\,, \quad f[x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}\,, \quad \ldots\\
&\vdots\\
&f[x_i,x_{i+1},\ldots,x_{i+k-1},x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1},\ldots,x_{i+k-1},x_{i+k}]-f[x_i,x_{i+1},\ldots,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}\,, \quad \ldots\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Os coeficientes a_k de (5.4.17) são então calculados por

$$a_k = f[x_0,x_1,\ldots,x_k]\,, \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$$

e podemos escrever a designada **fórmula interpoladora de Newton para as diferenças divididas**

$$\begin{aligned}P_n(x) =& f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})\\ =& f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) +\\ & f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})\,.\end{aligned}$$

Para uma melhor leitura, podemos tabelar as diferenças divididas de Newton através de uma tabela como a que se segue,

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$\ldots$
x_0	$f[x_0]=y_0$					
x_1	$f[x_1]=y_1$	$f[x_0,x_1]$				
x_2	$f[x_2]=y_2$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$			
x_3	$f[x_3]=y_3$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$		
x_4	$f[x_4]=y_4$	$f[x_3,x_4]$	$f[x_2,x_3,x_4]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	$f[x_0x_1,x_2,x_3,x_4]$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
x_k	$f[x_k]=y_k$	$f[x_{k-1},x_k]$	$f[x_{k-2},x_{k-1},x_k]$	$f[x_{k-3},x_{k-2},x_{k-1},x_k]$	$f[x_{k-4},x_{k-3},x_{k-2},x_{k-1},x_k]$	$\cdots$

onde, por exemplo,

$$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2}.$$

Quando se interpola uma função f por um polinómio P_n (de grau n) em $(n+1)$ pontos de abcissas $x_0, x_1, \ldots, x_n$, a **fórmula do erro** é dada por

$$E_n(f(x)) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n; x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)\,, \tag{5.4.18}$$

onde

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n; x]$$

é a $(n+1)-$ésima diferença dividida do conjunto de pares ordenados

$$(x_0, f(x_0)),\ (x_1, f(x_1)),\ \ldots,\ (x_n, f(x_n)),\ (x, f(x))\,.$$

Como facilmente se observa,

$$f(x) - P_n(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n; x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)\,.$$

Para estimar o erro quando se usa a fórmula interpoladora de Newton, podemos usar o resultado seguinte.

Proposição 5.4.1. Suponhamos que f é uma função $n-$vezes diferenciável num intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ abcissas todas distintas entre si. Então

$$\exists\ \xi \in (x_0, x_n) : f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\,.$$

No caso da diferença dividida dada pela fórmula (5.4.18), a expressão para calcular a respectiva diferença dividida é

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n; x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \xi \in (x_0, x), \quad x > x_n. \tag{5.4.19}$$

A Proposição 5.4.1 é particularmente útil para quando não se conhece a expressão da função $f(x)$. Neste sentido, a utilidade de (5.4.19) é quando se lê da direita para a esquerda. No entanto, tal como para o Método de Neville, se o erro a calcular for pedido na ordem da última abcissa tabelada, há que introduzir um novo ponto de coordenadas (x, y) na nossa tabela.

Podemos resumir a questão do erro para as diferenças divididas de Newton na proposição seguinte.

Proposição 5.4.2. Se P_n é o polinómio interpolador de grau n, dado pelo Método de Newton das diferenças divididas, de uma função f, então

$$f(x) = P_n(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n; x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i),$$

onde

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n; x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

para algum ξ pertencente a um intervalo que contenha $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$.

Exemplo 5.4.1. Considere a tabela do Exemplo 5.2.4:

x	1	1.3	1.6	1.9	2.2
y	0.765977	0.6200860	0.4554022	0.2818186	0.1103623

(a) Calcular os coeficientes do polinómio interpolador de grau 4, usando as diferenças divididas de Newton.

(b) Indique a expressão do respectivo polinómio interpolador e calcule uma aproximação de $f(1.5)$.

Resolução: (a) Com as fórmulas das diferenças divididas, construímos a tabela seguinte:

x_i	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
1.0	0.7659770				
1.3	0.6200860	-0.4837057			
1.6	0.4554022	-0.5489460	-0.1087339		
1.9	0.2818186	-0.5786120	-0.0494433	0.0658784	
2.2	0.1103623	-0.5715210	0.0118183	0.0680685	0.0018251

(b) Com a ajuda da tabela construída em (a), podemos calcular o polinómio interpolador,

$$\begin{aligned}P_4(x) =& f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)+\\ & f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)+\\ & f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\\ =& 0.7651977 - 0.4837057(x - 1.0) + 0,1087339(x - 1.0)(x - 1.3)+\\ & 0.0658784(x - 1.0)(x - 1.3)(x - 1.6) + 0.0018251(x - 1.0)(x - 1.3)(x - 1.6)(x - 1.9)\end{aligned}$$

Temos então $P_4(1.5) = 0.5118200$.

Implementação numérica do método das diferenças divididas de Newton

Obter os coeficientes do polinómio interpolador $P_n(x)$ de $(n + 1)$ pontos de abcissas distintas entre si $x_0, x_1, \ldots, x_n$ usando as diferenças divididas de Newton:

(i) Input

- $x_0, x_1, \ldots, x_n$
- $y_0, y_1, \ldots, y_n$, ou dar $y = f(x)$ e calcular $y_0, y_1, \ldots, y_n$: primeira coluna $D_{0,0} = f[x_0],\ D_{1,0} = f[x_1],\ \ldots,\ D_{n,0} = f[x_n]$ fica conhecida

(ii) Output: Tabela das diferenças divididas $D_{0,0},\ D_{1,1},\ \ldots,\ D_{n,n}$, com

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} D_{i,i} \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

1. For $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$
   2. For $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ i$ set
   $$D_{i,j}(x) = \frac{D_{i,j-1} - D_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}$$
3. Output $D_{0,0},\ D_{1,1},\ \ldots,\ D_{n,n}$ $(D_{i,i} = f[x_0, x_1, \ldots, x_i])$
4. Stop