AM II, LEI + BE, T: Noções topológicas, limites e continuidade

Marco Mackaaij

FCT, Universidade do Algarve

Section outline

Norma e distância euclidianas

Definição

A **norma (euclidiana)** *dum vetor* $\vec{v} = (v, w) \in \mathbb{R}^2$ *é por definição igual a*

$$\|\vec{v}\| = \|(v, w)\| = \sqrt{v^2 + w^2}.$$

Norma e distância euclidianas

Definição

A **norma (euclidiana)** *dum vetor* $\vec{v} = (v, w) \in \mathbb{R}^2$ *é por definição igual a*

$$\|\vec{v}\| = \|(v, w)\| = \sqrt{v^2 + w^2}.$$

Definição

A **distância (euclidiana)** *entre dois pontos* $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ *é por definição igual a*

$$\|(c, d) - (a, b)\| = \|(c - a, d - b)\| = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}.$$

Norma e distância euclidianas

Definição

A **norma (euclidiana)** *dum vetor* $\vec{v} = (v, w) \in \mathbb{R}^2$ *é por definição igual a*

$$\|\vec{v}\| = \|(v, w)\| = \sqrt{v^2 + w^2}.$$

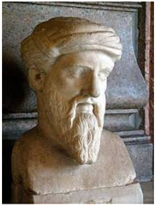
Definição

A **distância (euclidiana)** *entre dois pontos* $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ *é por definição igual a*

$$\|(c, d) - (a, b)\| = \|(c - a, d - b)\| = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}.$$

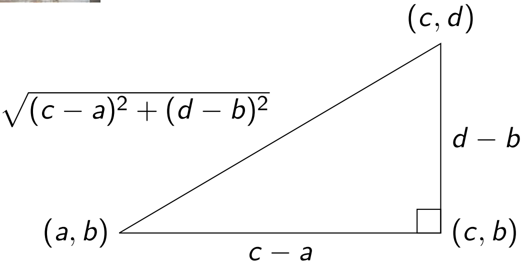
Obs.: $(c, d) - (a, b) = (c - a, d - b)$ é o vetor de (a, b) para (c, d).

Teorema de Pitágoras



(Pitágoras: c. 570 – 495 a.C.)

(Euclides: c. 325 – 265 a.C.)



Propriedades elementares

Sejam $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ dois vetores e $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar.

Propriedades elementares

Sejam $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ dois vetores e $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar.

Lema

1. $\|\vec{v}\| \geq 0$; *(não-negatividade)*

Propriedades elementares

Sejam $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ dois vetores e $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar.

Lema

1. $\|\vec{v}\| \geq 0$; *(não-negatividade)*
2. $\|\vec{v}\| = 0$ *sse* $\vec{v} = (0, 0)$; *(não-degenerescência)*

Propriedades elementares

Sejam $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ dois vetores e $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar.

Lema

1. $\|\vec{v}\| \geq 0$; *(não-negatividade)*
2. $\|\vec{v}\| = 0$ *sse* $\vec{v} = (0,0)$; *(não-degenerescência)*
3. $\|\vec{v}\| = \|-\vec{v}\|$; *(simetria)*

Propriedades elementares

Sejam $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ dois vetores e $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar.

Lema

1. $\|\vec{v}\| \geq 0$; *(não-negatividade)*
2. $\|\vec{v}\| = 0$ *sse* $\vec{v} = (0,0)$; *(não-degenerescência)*
3. $\|\vec{v}\| = \|-\vec{v}\|$; *(simetria)*
4. $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\|$

Propriedades elementares

Sejam $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ dois vetores e $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar.

Lema

1. $\|\vec{v}\| \geq 0$; *(não-negatividade)*
2. $\|\vec{v}\| = 0$ *sse* $\vec{v} = (0,0)$; *(não-degenerescência)*
3. $\|\vec{v}\| = \| - \vec{v}\|$; *(simetria)*
4. $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\|$
5. $\|\vec{v} \pm \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$. *(desigualdade triangular)*

Propriedades elementares

Sejam $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ dois vetores e $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar.

Lema

1. $\|\vec{v}\| \geq 0$; *(não-negatividade)*
2. $\|\vec{v}\| = 0$ *sse* $\vec{v} = (0,0)$; *(não-degenerescência)*
3. $\|\vec{v}\| = \|-\vec{v}\|$; *(simetria)*
4. $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\|$
5. $\|\vec{v} \pm \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$. *(desigualdade triangular)*
6. $\|\vec{v} + \vec{w}\| = \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ *sse* $\vec{v} = \lambda\vec{w}$ *e* $\lambda > 0$.

Pontos de acumulação

A **distância** entre um ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e um subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}^2$ é definida por

$$d((a,b),E) := \inf\{\|(a,b)-(x,y)\| \mid (x,y) \in E\}.$$

Pontos de acumulação

A **distância** entre um ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e um subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}^2$ é definida por

$$d((a, b), E) := \inf\{\|(a, b) - (x, y)\| \mid (x, y) \in E\}.$$

Definição

$(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *diz-se* **ponto de acumulação** *de* D *se*

$$d((a, b), D \backslash \{(a, b)\}) = 0.$$

Pontos de acumulação

A **distância** entre um ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e um subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}^2$ é definida por

$$d((a,b),E) := \inf\{\|(a,b)-(x,y)\| \mid (x,y) \in E\}.$$

Definição

$(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *diz-se* **ponto de acumulação** *de* D *se*

$$d((a,b),D\backslash\{(a,b)\}) = 0.$$

Ao conjunto de todos os pontos de acumulação de D *chama-se* **derivado** *de* D*, denotado por* $\mathbf{Der(D)}$.

Pontos de acumulação

A **distância** entre um ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e um subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}^2$ é definida por

$$d((a, b), E) := \inf\{\|(a, b) - (x, y)\| \mid (x, y) \in E\}.$$

Definição

$(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *diz-se* **ponto de acumulação** *de D se*

$$d((a, b), D\backslash\{(a, b)\}) = 0.$$

Ao conjunto de todos os pontos de acumulação de D chama-se **derivado** *de D, denotado por* **Der(D)**.

Os pontos de $D\backslash\mathrm{Der}(D)$ são os **pontos isolados** *de D.*

Pontos de acumulação

A **distância** entre um ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e um subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}^2$ é definida por

$$d((a, b), E) := \inf\{\|(a, b) - (x, y)\| \mid (x, y) \in E\}.$$

Definição

$(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *diz-se* **ponto de acumulação** *de* D *se*

$$d((a, b), D\backslash\{(a, b)\}) = 0.$$

Ao conjunto de todos os pontos de acumulação de D *chama-se* **derivado** *de* D*, denotado por* **Der(D)***.*

Os pontos de $D\backslash\mathrm{Der}(D)$ *são os* **pontos isolados** *de* D*.*

Ao conjunto $\overline{D} = D \cup \mathrm{Der}(D)$ *chama-se* **fecho** *de* D*.*

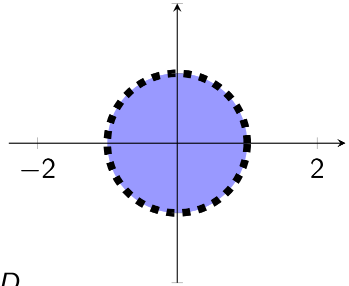
Exemplos

- Seja $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| < 1\}$.

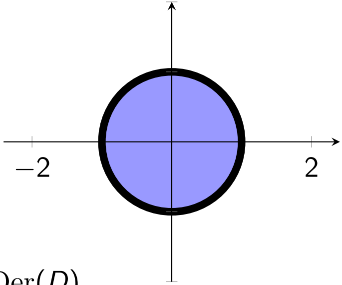
Exemplos

- Seja $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| < 1\}$. Então

$$\overline{D} = \mathrm{Der}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| \leq 1\}.$$



D



$\overline{D} = \mathrm{Der}(D)$

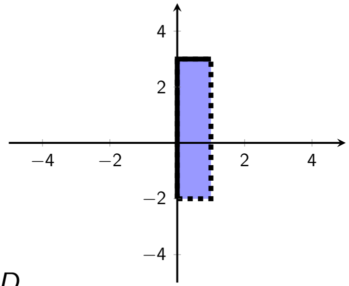
Exemplos

- Seja $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < 1,\ -2 < y \leq 3\}$.

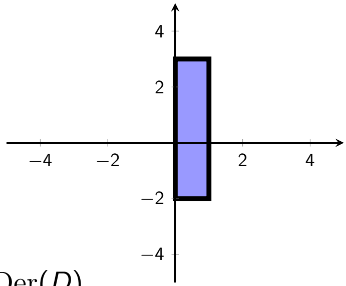
Exemplos

- Seja $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq x<1,\ -2<y\leq 3\}$. Então

$$\overline{D}=\mathrm{Der}(D)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq x\leq 1,\ -2\leq y\leq 3\}.$$



D



$\overline{D}=\mathrm{Der}(D)$

Exemplos

- Seja $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

Exemplos

- Seja $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Então $\overline{D} = \mathrm{Der}(D) = \mathbb{R}^2$.

Exemplos

- Seja $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Então $\overline{D} = \mathrm{Der}(D) = \mathbb{R}^2$. Note-se que

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| > 0\} \\ \mathbb{R}^2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| \geq 0\}. \end{aligned}$$

Exemplos

- Seja $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Então $\overline{D} = \mathrm{Der}(D) = \mathbb{R}^2$. Note-se que

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| > 0\} \\ \mathbb{R}^2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| \geq 0\}. \end{aligned}$$

- Seja $D = \{\left(\frac{1}{n}, 0\right) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Exemplos

- Seja $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Então $\overline{D} = \mathrm{Der}(D) = \mathbb{R}^2$. Note-se que

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| > 0\} \\ \mathbb{R}^2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| \geq 0\}. \end{aligned}$$

- Seja $D = \{\left(\frac{1}{n}, 0\right) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Então $\mathrm{Der}(D) = \{(0,0)\}$.

Exemplos

- Seja $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Então $\overline{D} = \mathrm{Der}(D) = \mathbb{R}^2$. Note-se que

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| > 0\} \\ \mathbb{R}^2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| \geq 0\}. \end{aligned}$$

- Seja $D = \{\left(\frac{1}{n}, 0\right) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Então $\mathrm{Der}(D) = \{(0,0)\}$. Portanto

$$\overline{D} = D \cup \mathrm{Der}(D) = \left\{\left(\frac{1}{n}, 0\right) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{(0,0)\}.$$

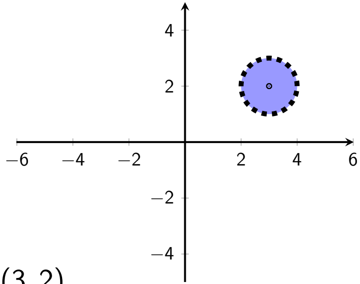
Obs.: Todos os pontos de D são pontos isolados!

Discos abertos

Para quaisquer $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, seja

$$B_\epsilon(a, b) := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y) - (a, b)\| < \epsilon\right\}.$$

o **disco aberto** de **centro** (a, b) e **raio** ϵ.



$B_1(3, 2)$

Pontos interiores

Seja $D \subseteq \mathbb{R}^2$ um subconjunto qualquer.

Pontos interiores

Seja $D \subseteq \mathbb{R}^2$ um subconjunto qualquer.

Definição

Um ponto $(a, b) \in D$ *diz-se* **ponto interior** *de* D *se existir* $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ *tal que*

$$B_\epsilon(a, b) \subseteq D.$$

Pontos interiores

Seja $D \subseteq \mathbb{R}^2$ um subconjunto qualquer.

Definição

Um ponto $(a, b) \in D$ *diz-se* **ponto interior** *de* D *se existir* $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ *tal que*

$$B_\epsilon(a, b) \subseteq D.$$

Ao conjunto de todos os pontos interiores de D *chama-se* **interior** *de* D*, denotado por* D°.

Pontos interiores

Seja $D \subseteq \mathbb{R}^2$ um subconjunto qualquer.

Definição

Um ponto $(a, b) \in D$ diz-se **ponto interior** *de D se existir $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que*

$$B_\epsilon(a, b) \subseteq D.$$

Ao conjunto de todos os pontos interiores de D chama-se **interior** *de D, denotado por D°.*

Obs.: $D^\circ \subseteq D \cap \mathrm{Der}(D)$.

Pontos interiores

Seja $D \subseteq \mathbb{R}^2$ um subconjunto qualquer.

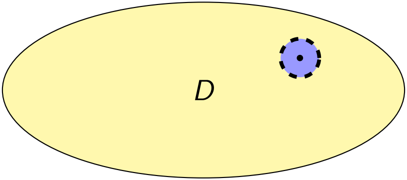
Definição

Um ponto $(a, b) \in D$ diz-se **ponto interior** *de D se existir $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que*

$$B_\epsilon(a, b) \subseteq D.$$

Ao conjunto de todos os pontos interiores de D chama-se **interior** *de D, denotado por D°.*

Obs.: $D^\circ \subseteq D \cap \mathrm{Der}(D)$.



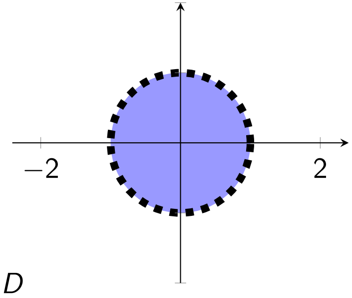
Exemplos

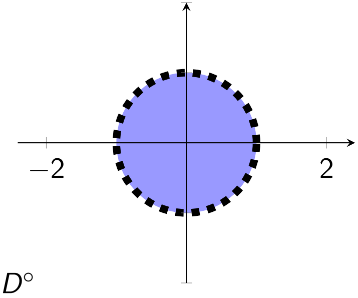
- Seja $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| < 1\}$.

Exemplos

- Seja $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| < 1\}$. Então

$$D^\circ = D$$





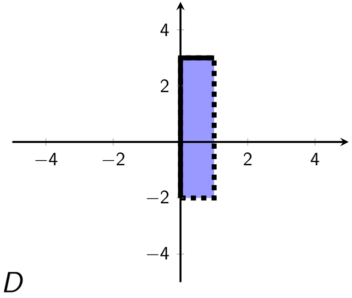
Exemplos

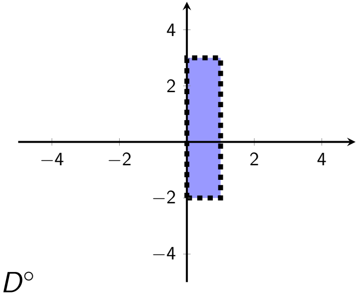
- Seja $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < 1,\ -2 < y \leq 3\}$.

Exemplos

- Seja $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < 1,\ -2 < y \leq 3\}$. Então

$$D^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1,\ -2 < y < 3\}.$$





Exemplos

- Seja $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

Exemplos

- Seja $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Então $D^\circ = D$.

Exemplos

- Seja $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Então $D^\circ = D$. Note-se que

$$D = D^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| > 0\}.$$

Exemplos

- Seja $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Então $D^\circ = D$. Note-se que
$$D = D^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| > 0\}.$$

- Seja $D = \left\{\left(\frac{1}{n}, 0\right) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

Exemplos

- Seja $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Então $D^\circ = D$. Note-se que
$$D = D^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| > 0\}.$$

- Seja $D = \left\{\left(\frac{1}{n}, 0\right) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N}\right\}$. Então $D^\circ = \emptyset$. Obs.: Não há pontos interiores!

Exercícios: Noções topológicas

- Determine o interior, o derivado e o fecho de D_f:
  1. $f(x,y) = \ln\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$.
  2. $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$.
  3. $f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$.

Soluções: exercício 1

Seja $f(x, y) = \ln\left(\dfrac{xy}{x^2 + y^2}\right)$.

Soluções: exercício 1

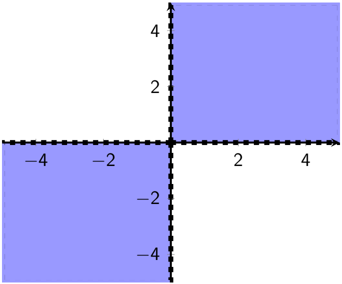
Seja $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)$.

- $$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\right\} =$$
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0,\ y < 0\right\}.$$

Soluções: exercício 1

Seja $f(x,y) = \ln\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$.

- $$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\right\} =$$
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0,\ y < 0\right\}.$$



Soluções: exercício 1

- $$D_f^{\circ} = D_f.$$

Soluções: exercício 1

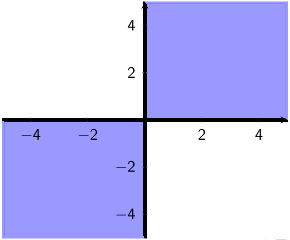
- $$D_f^\circ = D_f\,.$$

- $$\overline{D_f} = \mathrm{Der}(D_f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\right\} =$$
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0,\ y \leq 0\right\}.$$

Soluções: exercício 1

- $$D_f^\circ = D_f.$$

- $$\overline{D_f} = \mathrm{Der}(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0,\ y \leq 0\}.$$



Soluções: exercício 2

Seja $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$.

Soluções: exercício 2

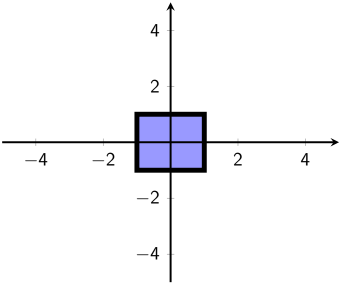
Seja $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$.

- $$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x, y \leq 1\right\} = [-1,1]^2.$$

Soluções: exercício 2

Seja $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$.

- $$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x, y \leq 1\} = [-1,1]^2.$$

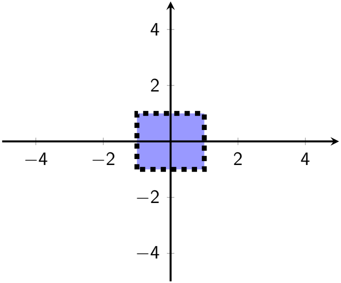


Soluções: exercício 2

- $$D_f^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x, y \ < 1\} =]-1,1[^2.$$

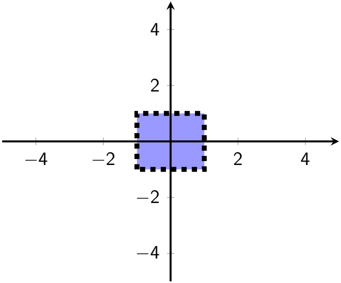
Soluções: exercício 2

- $$D_f^\circ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x, y \ < 1\right\} =]-1,1[^2.$$



Soluções: exercício 2

- $$D_f^\circ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x, y \ < 1\right\} =]-1,1[^2.$$



- $$\overline{D_f} = \mathrm{Der}(D_f) = D_f$$

Soluções: exercício 3

Seja $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$.

Soluções: exercício 3

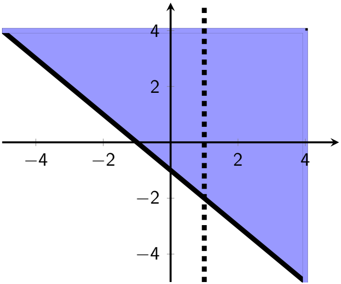
Seja $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$.

- $$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y+1 \geq 0 \ \wedge \ x \neq 1\right\}.$$

Soluções: exercício 3

Seja $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$.

- $$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y+1 \geq 0 \ \wedge \ x \neq 1\right\}.$$

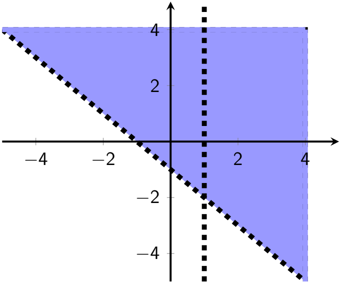


Soluções: exercício 3

- $$D_f^\circ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y+1>0 \ \wedge \ x \neq 1\right\}.$$

Soluções: exercício 3

- $$D_f^\circ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y+1>0 \ \wedge \ x \neq 1\right\}.$$

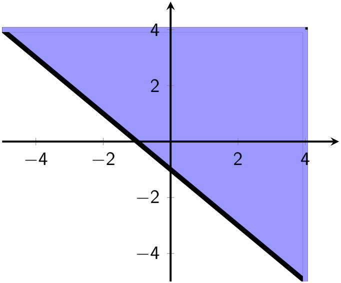


Soluções: exercício 3

- $$\overline{D_f} = \mathrm{Der}(D_f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y + 1 \geq 0\right\}.$$

Soluções: exercício 3

- $$\overline{D_f} = \operatorname{Der}(D_f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y+1 \geq 0\right\}.$$



Section outline

Notação matemática

- Para todo(s) o(s): $\forall$
- Existe(m): $\exists$
- Existe um(a) e um(a) só: $\exists!$
- Não existe nenhum(a): $\nexists$
- Tal que (tais que): $:$
- Implica: $\Rightarrow$
- Se e só se: $\Leftrightarrow$

Limites

Definição

Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a, b) \in \mathrm{Der}(D_f)$ *e* $L \in \mathbb{R}$. *Diz-se que*

o limite de f, quando (x, y) tende para (a, b), é igual a L

e escreve-se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L,$$

se

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \|(x, y) - (a, b)\| < \delta \implies |f(x, y) - L| < \epsilon$$

para todo o $(x, y) \in D_f \backslash \{(a, b)\}$.

Exemplo 1

- Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$. Vamos provar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0,$$

segundo a definição.

Exemplo 1

- Seja $f(x,y) = x^2 + y^2$. Vamos provar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0,$$

segundo a definição.

Seja $\epsilon > 0$.

Exemplo 1

- Seja $f(x,y) = x^2 + y^2$. Vamos provar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0,$$

segundo a definição.

Seja $\epsilon > 0$. Temos que provar que existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$\|(x,y) - (0,0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \implies |x^2 + y^2 - 0| < \epsilon$$

para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

Exemplo 1

- Seja $f(x,y) = x^2 + y^2$. Vamos provar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0,$$

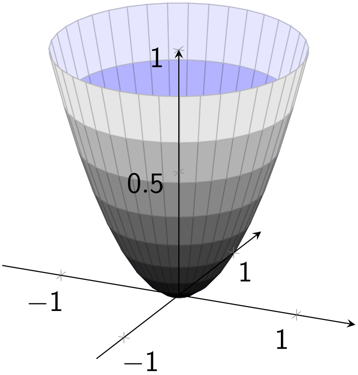
segundo a definição.

Seja $\epsilon > 0$. Temos que provar que existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$\|(x,y) - (0,0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \implies |x^2 + y^2 - 0| < \epsilon$$

para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Podemos escolher $\delta = \sqrt{\epsilon}$, porque $|x^2 + y^2 - 0| = x^2 + y^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2$,

Exemplo 1: o gráfico



$$\boxed{z = x^2 + y^2}$$

Enquadramento

Sejam $f, g, h\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a, b) \in \mathrm{Der}(D)$.

Enquadramento

Sejam $f, g, h\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a,b) \in \mathrm{Der}(D)$.

Proposição

Suponhamos que $f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y)$ *para todo o* $(x,y) \in D$. *Então*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = L \quad \Longrightarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L.$$

Exemplo 2

- Vamos provar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

Exemplo 2

- Vamos provar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0.$

  Existe o seguinte enquadramento:

$$0 \leq \left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq 3|y|. \qquad (*)$$

  Como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 3|y| = 0$, o resultado fica provado.

Exemplo 2

- Vamos provar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0.$

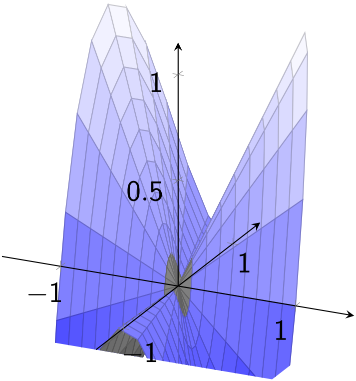
  Existe o seguinte enquadramento:

$$0 \leq \left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq 3|y|. \qquad (*)$$

  Como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 3|y| = 0$, o resultado fica provado.

$$\left(0 \leq \left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{3|x^2||y|}{|x^2+y^2|} = 3|y|\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 3|y|.\right)$$

Exemplo 2: o gráfico



$$z = \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$$

Limites trajetoriais

Suponhamos que C é uma curva (contínua e orientada) no plano que termina em (a, b). O **limite trajetorial**

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in C}} f(x, y).$$

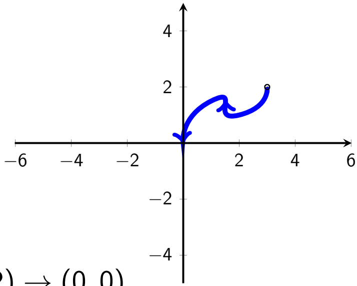
define-se como o limite normal, mas com a restrição de que (x, y) siga a trajetória de C.

Limites trajetoriais

Suponhamos que C é uma curva (contínua e orientada) no plano que termina em (a, b). O **limite trajetorial**

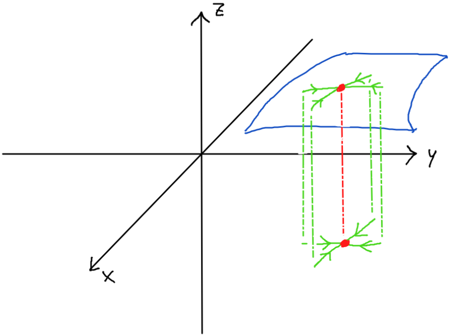
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in C}} f(x, y).$$

define-se como o limite normal, mas com a restrição de que (x, y) siga a trajetória de C.



$C : (3, 2) \to (0, 0)$

Limites trajetoriais



Limites trajetoriais

Proposição

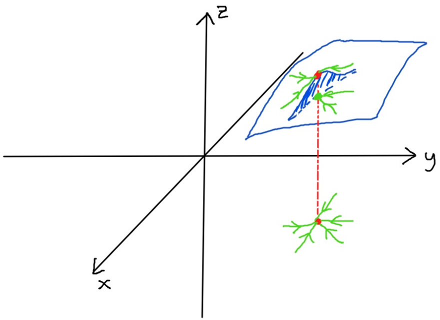
Suponhamos que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L.$$

Então, para toda a curva $C \subset \mathbb{R}^2$ *que termine em* (a,b)*, tem-se*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in C}} f(x,y) = L.$$

Limites trajetoriais



Exemplo 3

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ não existe, porque

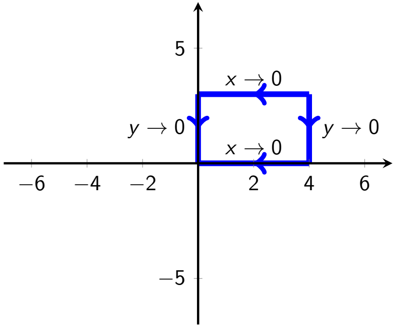
$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -1. \qquad (*)$$

Exemplo 3

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ não existe, porque

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=1 \quad \text{e} \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=-1. \qquad (*)$$

Estes **limites repetidos** correspondem a curvas especiais:



Exemplo 3: cálculos auxiliares

- $$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Exemplo 3: cálculos auxiliares

- $$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-0^2}{x^2+0^2}$$

Exemplo 3: cálculos auxiliares

- $$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-0^2}{x^2+0^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}$$

Exemplo 3: cálculos auxiliares

- $$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-0^2}{x^2+0^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=\lim_{x\to 0}1$$

Exemplo 3: cálculos auxiliares

- $$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-0^2}{x^2+0^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=\lim_{x\to 0}1=1.$$

Exemplo 3: cálculos auxiliares

- $$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-0^2}{x^2+0^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=\lim_{x\to 0}1=1.$$

- $$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Exemplo 3: cálculos auxiliares

- $$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-0^2}{x^2+0^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=\lim_{x\to 0}1=1.$$

- $$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{0^2-y^2}{0^2+y^2}$$

Exemplo 3: cálculos auxiliares

- $$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-0^2}{x^2+0^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=\lim_{x\to 0}1=1.$$

- $$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{0^2-y^2}{0^2+y^2}=\lim_{y\to 0}-\frac{\cancel{y^2}}{\cancel{y^2}}$$

Exemplo 3: cálculos auxiliares

- $$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-0^2}{x^2+0^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=\lim_{x\to 0}1=1.$$

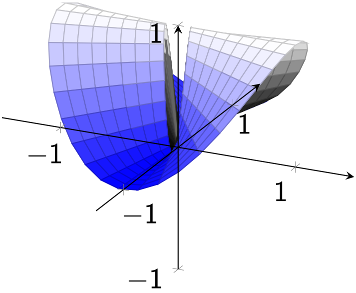
- $$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{0^2-y^2}{0^2+y^2}=\lim_{y\to 0}-\frac{\cancel{y^2}}{\cancel{y^2}}=\lim_{y\to 0}-1$$

Exemplo 3: cálculos auxiliares

- $$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-0^2}{x^2+0^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=\lim_{x\to 0}1=1.$$

- $$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{0^2-y^2}{0^2+y^2}=\lim_{y\to 0}-\frac{\cancel{y^2}}{\cancel{y^2}}=\lim_{y\to 0}-1=-1.$$

Exemplo 3: o gráfico



$$\boxed{z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$$

Exemplo 4

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ não existe.

Exemplo 4

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ não existe. Desta vez

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = 0.$$

Exemplo 4

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ não existe. Desta vez

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = 0.$$

Mas o limite trajetorial sobre a curva $C : x = y^2$ dá um valor diferente:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

Exemplo 4

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ não existe. Desta vez

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4} = 0.$$

Mas o limite trajetorial sobre a curva $C : x = y^2$ dá um valor diferente:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0}\frac{y^4}{y^4+y^4}$$

Exemplo 4

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ não existe. Desta vez

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = 0.$$

Mas o limite trajetorial sobre a curva $C : x = y^2$ dá um valor diferente:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{y^4}{y^4+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{\cancel{y^4}}{2\cancel{y^4}}$$

Exemplo 4

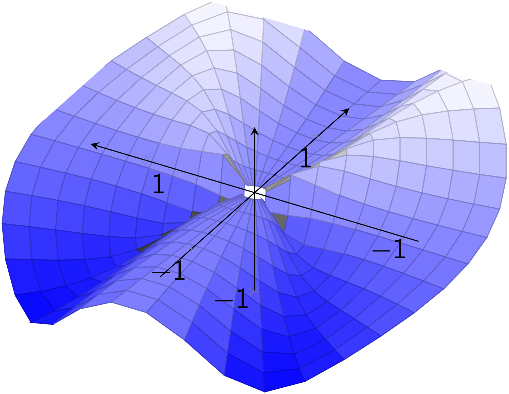
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ não existe. Desta vez

  $$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4} = 0.$$

  Mas o limite trajetorial sobre a curva $C : x = y^2$ dá um valor diferente:

  $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0}\frac{y^4}{y^4+y^4} = \lim_{y\to 0}\frac{\cancel{y^4}}{2\cancel{y^4}} = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 4: o gráfico



$$\boxed{z = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}}$$

Propriedades elementares

Sejam $f, g\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ duas funções, $(a, b) \in \mathrm{Der}(D)$ um ponto e $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar.

Propriedades elementares

Sejam $f, g\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ duas funções, $(a, b) \in \mathrm{Der}(D)$ um ponto e $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar.

Lema

Se $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = K$ *e* $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x, y) = L$, *então*

Propriedades elementares

Sejam $f, g\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ duas funções, $(a,b) \in \mathrm{Der}(D)$ um ponto e $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar.

Lema

Se $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = K$ e $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L$, então

1. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f(x,y) \pm g(x,y)) = K \pm L;$ *(soma/diferença)*

Propriedades elementares

Sejam $f, g\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ duas funções, $(a, b) \in \operatorname{Der}(D)$ um ponto e $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar.

Lema

Se $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = K$ *e* $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x, y) = L$*, então*

1. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f(x, y) \pm g(x, y)) = K \pm L;$ *(soma/diferença)*
2. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} (\lambda f(x, y)) = \lambda K;$ *(múltiplos)*

Propriedades elementares

Sejam $f, g\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ duas funções, $(a, b) \in \mathrm{Der}(D)$ um ponto e $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar.

Lema

Se $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = K$ *e* $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x, y) = L$, *então*

1. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f(x, y) \pm g(x, y)) = K \pm L;$ *(soma/diferença)*
2. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} (\lambda f(x, y)) = \lambda K;$ *(múltiplos)*
3. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f(x, y)g(x, y)) = KL;$ *(produto)*

Propriedades elementares

Sejam $f, g\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ duas funções, $(a,b) \in \mathrm{Der}(D)$ um ponto e $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar.

Lema

Se $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = K$ *e* $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L$, *então*

1. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f(x,y) \pm g(x,y)) = K \pm L;$ *(soma/diferença)*
2. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} (\lambda f(x,y)) = \lambda K;$ *(múltiplos)*
3. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f(x,y)g(x,y)) = KL;$ *(produto)*
4. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{K}{L}. \quad (L \neq 0).$ *(quociente)*

Section outline

Continuidade

Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a, b) \in D_f \cap \mathrm{Der}(D_f)$.

Continuidade

Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a, b) \in D_f \cap \mathrm{Der}(D_f)$.

Definição

A função f diz-se **contínua em (a, b)** *se*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Continuidade

Sejam $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a, b) \in D_f \cap \mathrm{Der}(D_f)$.

Definição

A função f diz-se **contínua em $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$** *se*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Se $D_f \subseteq \mathrm{Der}(D_f)$ e f for contínua em todo o $(a, b) \in D_f$, a função f diz-se **contínua**.

Propriedades elementares

Sejam $f, g\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ duas funções, $(a, b) \in D \cap \mathrm{Der}(D)$ um ponto e $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar.

Propriedades elementares

Sejam $f, g\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ duas funções, $(a, b) \in D \cap \mathrm{Der}(D)$ um ponto e $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar.

Lema

Se as funções f, g forem contínuas em (a, b), as seguintes funções também o são:

Propriedades elementares

Sejam $f, g\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ duas funções, $(a, b) \in D \cap \mathrm{Der}(D)$ um ponto e $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar.

Lema

Se as funções f, g forem contínuas em (a, b), as seguintes funções também o são:

1. $f \pm g$; *(soma/diferença)*

Propriedades elementares

Sejam $f, g\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ duas funções, $(a, b) \in D \cap \mathrm{Der}(D)$ um ponto e $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar.

Lema

Se as funções f, g forem contínuas em (a, b), as seguintes funções também o são:

1. $f \pm g$; *(soma/diferença)*
2. λf; *(múltiplos)*

Propriedades elementares

Sejam $f, g\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ duas funções, $(a, b) \in D \cap \mathrm{Der}(D)$ um ponto e $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar.

Lema

Se as funções f, g forem contínuas em (a, b), as seguintes funções também o são:

1. $f \pm g$; *(soma/diferença)*
2. λf; *(múltiplos)*
3. fg; *(produto)*

Propriedades elementares

Sejam $f, g\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ duas funções, $(a, b) \in D \cap \mathrm{Der}(D)$ um ponto e $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar.

Lema

Se as funções f, g forem contínuas em (a, b), as seguintes funções também o são:

1. $f \pm g$; *(soma/diferença)*
2. λf; *(múltiplos)*
3. fg; *(produto)*
4. $\frac{f}{g}$ $\quad (g(a, b) \neq 0)$. *(quociente)*

Exemplos

Exemplos

- As funções coordenadas x e y são contínuas em $\mathbb{R}^2$.

Exemplos

Exemplos

- As funções coordenadas x e y são contínuas em $\mathbb{R}^2$.
- Todos os polinómios de duas variáveis são contínuos em $\mathbb{R}^2$.

Exemplos

Exemplos

- As funções coordenadas x e y são contínuas em $\mathbb{R}^2$.
- Todos os polinómios de duas variáveis são contínuos em $\mathbb{R}^2$.
- Todas as funções racionais de duas variáveis, i.e. quocientes de polinómios de duas variáveis, são contínuas no seu domínio.

Funções compostas 1

Suponhamos que $f = f(x,y)\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g = g(z)\colon D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são duas funções tais que $D'_f \subseteq D_g$ e seja $(a,b) \in D_f \cap \mathrm{Der}(D_f)$.

Funções compostas 1

Suponhamos que $f = f(x,y)\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g = g(z)\colon D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são duas funções tais que $D_f' \subseteq D_g$ e seja $(a,b) \in D_f \cap \mathrm{Der}(D_f)$.

Lema

Se f for contínua em (a,b) e g for contínua em $c = f(a,b)$, então $g \circ f$ é contínua em (a,b).

Exemplos: funções compostas 1

Exemplo

- Sejam $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $g(z) = \sin(z)$.

Exemplos: funções compostas 1

Exemplo

- Sejam $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $g(z) = \sin(z)$. Então

$$(g \circ f)(x, y) = g(f(x, y)) = \sin(x^2 + y^2).$$

Exemplos: funções compostas 1

Exemplo

- Sejam $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $g(z) = \sin(z)$. Então

$$(g \circ f)(x,y) = g(f(x,y)) = \sin(x^2 + y^2).$$

Esta função é contínua em $\mathbb{R}^2$, porque $x^2 + y^2$ é contínuo em $\mathbb{R}^2$ e $\sin(z)$ é contínuo em $\mathbb{R}$.

Exemplos: funções compostas 1

Exemplo

- Sejam $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ e $g(z) = \ln(z)$.

Exemplos: funções compostas 1

Exemplo

- Sejam $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ e $g(z) = \ln(z)$. Então

$$(g \circ f)(x,y) = g(f(x,y)) = \ln\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right).$$

Exemplos: funções compostas 1

Exemplo

- Sejam $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ e $g(z) = \ln(z)$. Então

$$(g \circ f)(x,y) = g(f(x,y)) = \ln\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right).$$

Esta função é contínua em

$$D_{g \circ f} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\right\},$$

porque $\frac{xy}{x^2+y^2}$ é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \supseteq D_{g \circ f}$ e $\ln(z)$ é contínuo em $\mathbb{R}^+$.

Funções compostas 2

Dados:

1. $f = f(x, y) \colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$;

Funções compostas 2

Dados:

1. $f = f(x,y)\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$;
2. $(x = x(t), y = y(t))\colon I \subseteq \mathbb{R} \to D_f$;

Funções compostas 2

Dados:

1. $f = f(x, y)\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$;
2. $(x = x(t), y = y(t))\colon I \subseteq \mathbb{R} \to D_f$;
3. $g(t) = f(x(t), y(t))$.

Funções compostas 2

Dados:

1. $f = f(x, y)\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$;
2. $(x = x(t), y = y(t))\colon I \subseteq \mathbb{R} \to D_f$;
3. $g(t) = f(x(t), y(t))$.
4. $t_0 \in I$ e $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0)) \in D_f \cap \mathrm{Der}(D_f)$;

Funções compostas 2

Dados:

1. $f = f(x, y)\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$;
2. $(x = x(t), y = y(t))\colon I \subseteq \mathbb{R} \to D_f$;
3. $g(t) = f(x(t), y(t))$.
4. $t_0 \in I$ e $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0)) \in D_f \cap \mathrm{Der}(D_f)$;

Lema

Se x e y forem ambas contínuas em t_0 e f for contínua em (x_0, y_0), então g é contínua em t_0.

Exemplos: funções compostas 2

Exemplo

Sejam $f(x,y) = \ln\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$ e $x = t$, $y = t^2$.

Exemplos: funções compostas 2

Exemplo

Sejam $f(x, y) = \ln\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$ e $x = t$, $y = t^2$. Então

$$g(t) = f(x(t), y(t)) = \ln\left(\frac{t^3}{t^2 + t^4}\right).$$

Exemplos: funções compostas 2

Exemplo

Sejam $f(x,y) = \ln\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$ e $x = t$, $y = t^2$. Então

$$g(t) = f(x(t), y(t)) = \ln\left(\frac{t^3}{t^2+t^4}\right).$$

Obs.: $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\right\}$ e $(t, t^2) \in D_f$ sse $t \in \mathbb{R}^+$.

Exemplos: funções compostas 2

Exemplo

Sejam $f(x,y) = \ln\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$ e $x = t$, $y = t^2$. Então

$$g(t) = f(x(t), y(t)) = \ln\left(\frac{t^3}{t^2+t^4}\right).$$

Obs.: $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\right\}$ e $(t, t^2) \in D_f$ sse $t \in \mathbb{R}^+$.

A função g é contínua em $\mathbb{R}^+$, porque

a) $\ln\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$ é contínua em D_f;

Exemplos: funções compostas 2

Exemplo

Sejam $f(x,y) = \ln\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$ e $x = t$, $y = t^2$. Então

$$g(t) = f(x(t), y(t)) = \ln\left(\frac{t^3}{t^2+t^4}\right).$$

Obs.: $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\right\}$ e $(t, t^2) \in D_f$ sse $t \in \mathbb{R}^+$.

A função g é contínua em $\mathbb{R}^+$, porque

a) $\ln\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$ é contínua em D_f;

b) t e t^2 são contínuos em $\mathbb{R}^+$.

Funções compostas 3

Dados:

1. $f = f(x, y)\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$;

Funções compostas 3

Dados:

1. $f = f(x, y) \colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$;
2. $(x = x(s, t), y = y(s, t)) \colon R \subseteq \mathbb{R}^2 \to D_f$;

Funções compostas 3

Dados:

1. $f = f(x, y)\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$;
2. $(x = x(s, t), y = y(s, t))\colon R \subseteq \mathbb{R}^2 \to D_f$;
3. $g(s, t) = f(x(s, t), y(s, t))$.

Funções compostas 3

Dados:

1. $f = f(x, y) \colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$;
2. $(x = x(s, t), y = y(s, t)) \colon R \subseteq \mathbb{R}^2 \to D_f$;
3. $g(s, t) = f(x(s, t), y(s, t))$.
4. $(s_0, t_0) \in R$ e $(x_0, y_0) = (x(s_0, t_0), y(s_0, t_0)) \in D_f \cap \mathrm{Der}(D_f)$;

Funções compostas 3

Dados:

1. $f = f(x, y)\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$;
2. $(x = x(s, t), y = y(s, t))\colon R \subseteq \mathbb{R}^2 \to D_f$;
3. $g(s, t) = f(x(s, t), y(s, t))$.
4. $(s_0, t_0) \in R$ e $(x_0, y_0) = (x(s_0, t_0), y(s_0, t_0)) \in D_f \cap \mathrm{Der}(D_f)$;

Lema

Se x e y forem ambas contínuas em (s_0, t_0) e f for contínua em (x_0, y_0), então g é contínua em (s_0, t_0).

Exemplos: funções compostas 3

Exemplo

Sejam $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $x = s\cos(t)$, $y = s\sin(t)$.

Exemplos: funções compostas 3

Exemplo

Sejam $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $x = s\cos(t)$, $y = s\sin(t)$. Então

$$g(s, t) = f(x(s, t), y(s, t))$$

Exemplos: funções compostas 3

Exemplo

Sejam $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $x = s\cos(t)$, $y = s\sin(t)$. Então

$$\begin{aligned} g(s,t) &= f(x(s,t), y(s,t)) \\ &= (s\cos(t))^2 + (s\sin(t))^2 \end{aligned}$$

Exemplos: funções compostas 3

Exemplo

Sejam $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $x = s\cos(t)$, $y = s\sin(t)$. Então

$$\begin{aligned} g(s,t) &= f(x(s,t), y(s,t)) \\ &= (s\cos(t))^2 + (s\sin(t))^2 \\ &= s^2(\cos^2(t) + \sin^2(t)) \end{aligned}$$

Exemplos: funções compostas 3

Exemplo

Sejam $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $x = s\cos(t)$, $y = s\sin(t)$. Então

$$\begin{aligned} g(s,t) &= f(x(s,t), y(s,t)) \\ &= (s\cos(t))^2 + (s\sin(t))^2 \\ &= s^2(\cos^2(t) + \sin^2(t)) \\ &= s^2. \end{aligned}$$

Exemplos: funções compostas 3

Exemplo

Sejam $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $x = s\cos(t)$, $y = s\sin(t)$. Então

$$\begin{aligned} g(s,t) &= f(x(s,t), y(s,t)) \\ &= (s\cos(t))^2 + (s\sin(t))^2 \\ &= s^2(\cos^2(t) + \sin^2(t)) \\ &= s^2. \end{aligned}$$

Trata-se dum polinómio e por isso é contínuo em $\mathbb{R}^2$.

Exemplos: funções compostas 3

Exemplo

Sejam $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $x = s\cos(t)$, $y = s\sin(t)$. Então

$$
\begin{aligned}
g(s,t) &= f(x(s,t), y(s,t)) \\
&= (s\cos(t))^2 + (s\sin(t))^2 \\
&= s^2(\cos^2(t) + \sin^2(t)) \\
&= s^2.
\end{aligned}
$$

Trata-se dum polinómio e por isso é contínuo em $\mathbb{R}^2$. Note-se que $x^2 + y^2$, $s\cos(t)$ e $s\sin(t)$ são todas contínuas em $\mathbb{R}^2$.

FIM