Análise Matemática II
Sucessões e Séries

---

1 Sucessões numéricas

Este capítulo é apenas uma breve revisão da matéria das sucessões numéricas, que em parte já foi estudada no ensino secundário. Servirá como preparação para o estudo das séries, que formam o tópico do capítulo seguinte.

1.1 Definições e propriedades elementares

Definição 1.1.1 (Sucessões)**.** *Uma sucessão (numérica) é uma função*

$$a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Escrevendo $a_n := a(n)$*, costumamos denotar a sucessão por* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$*.*

Observação 1.1.2. *Por vezes, a sucessão pode começar em* $n = d > 1$*. Nesse caso, escrevemos* $(a_n)_{n=d}^{\infty}$*. Uma parte finita duma sucessão* $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*, por exemplo a imagem de* $\{d, d+1, \ldots, r\} \subset \mathbb{N}$ *para qualquer* $r \geq d$*, é denotado por* $(a_n)_{n=d}^{r}$*.*

Exemplo 1.1.3. *Podemos definir, por exemplo,*

$$a_n = \frac{1}{n}$$

para $n \in \mathbb{N}$*.*

Um dos conceitos mais fundamentais para todo o cálculo infinitesimal é o de *limite*. Contudo, a sua definição matemática pode parecer um pouco abstrata e misteriosa à primeira vista.

Intuitivamente, quando dizemos que o limite de $(a_n)_{n=d}^{\infty}$ é igual a a, temos em mente qualquer coisa como: a distância entre a e a_n torna-se arbitrariamente pequena, quando n se torna arbitrariamente grande. Mas "arbitrariamente pequena" e "arbitrariamente grande" são formulações vagas demais para a matemática: nunca permitiriam provar que uma determinada sucessão tem um determinado limite, por exemplo.

Daí a seguinte definição rigorosa:

Definição 1.1.4 (Limite)**.** *Diz-se que a sucessão* $(a_n)_{n=d}^{\infty}$ converge *para* $a \in \mathbb{R}$ *(o* limite*), se para todo o* $\epsilon > 0$ *existe um número natural* $N \geq d$ *tal que* $|a - a_n| < \epsilon$ *para todo o* $n > N$*. Em notação matemática:*

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N \geq d \colon n > N \Rightarrow |a - a_n| < \epsilon.$$

Se $(a_n)_{n=d}^{\infty}$ *tiver um limite, a sucessão diz-se* convergente*. Caso contrário, diz-se* divergente*.*

Em notação matemática escreve-se $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, para indicar que a é o limite de $(a_n)_{n=d}^{\infty}$.

Observação 1.1.5. *Nenhuma sucessão tem mais que um limite:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \;\wedge\; \lim_{n\to\infty} a_n = b \quad \Rightarrow \quad a = b.$$

A demonstração deste facto é óbvia: seja $\epsilon = |a - b|/2$*. Segundo a definição de limite, existem números* $N, M \geq d$ *tais que* $|a - a_n| < \epsilon$ *e* $|b - a_n| < \epsilon$ *para todo o* $n > \max(N, M)$*. Isto só é possível se* $a = b$*.*

Nesta disciplina não vamos insistir muito na verificação da definição de limite em exercícios concretos, mas ilustramo-la com a sucessão do Exemplo 1.1.3.

Exemplo 1.1.6. *Consideremos a sucessão* $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$*. Seja* $\epsilon > 0$ *um número real positivo arbitrário mas fixo. Então, para qualquer* $n > 1/\epsilon$ *verifica-se*

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{1/\epsilon} = \epsilon.$$

Isto mostra que $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$*, segundo a Definição 1.1.4 (e não apenas "de forma intuitiva").*

Tal como no Exemplo 1.1.6, pode-se provar que a sucessão

$$\frac{1}{n^a}$$

converge para 0 se $a > 0$. Se $a = 0$, a sucessão é constante porque todos os termos são iguais a 1, logo converge de forma trivial para esse mesmo valor. Se $a < 0$, a sucessão diverge (para $+\infty$), porque

$$\frac{1}{n^a} = n^{-a}$$

e $-a > 0$ neste caso.

Revejamos algumas propriedades elementares de limites.

Lema 1.1.7 (Propriedades elementares de limites de sucessões)**.** *Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sucessões convergentes, e sejam $c \in \mathbb{R}$ e $d \in \mathbb{N}$ duas constantes. Então as seguintes sucessões também são convergentes e os limites têm as propriedades indicadas:*

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$;
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n$;
3. $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n / \lim_{n\to\infty} b_n$, *desde que* $b_n \neq 0$ *para todo o* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$;
4. $\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n$;
5. $\lim_{n\to\infty} a_n^c = (\lim_{n\to\infty} a_n)^c$;
6. $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\lim_{n\to\infty} a_n|$;
7. *se* $a_n \leq b_n$ *para todo* $n \geq d$, *então* $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.

Observação 1.1.8. *Note-se que*

$$\sqrt[q]{a^p} = a^{p/q},$$

para $a \in \mathbb{R}^+$ *e* $p, q \in \mathbb{N}$, *portanto a alínea 5 do Lema 1.1.7 já inclui a regra para raizes.*

Usando estas propriedades, podemos logo estudar uma classe inteira de exemplos.

Exemplo 1.1.9. *Sejam* $p(n) = a_r n^r + a_{r-1} n^{r-1} + \cdots + a_0$ *e* $q(n) = b_s n^s + b_{s-1} n^{s-1} + \cdots + b_0$ *dois polinómios de variável* n *e graus* r *e* s *respetivamente (i.e.* $a_r, b_s \neq 0$*).*

Vamos mostrar o seguinte: o quotiente $p(n)/q(n)$

1. *diverge se* $r > s$;
2. *converge para* 0 *se* $r < s$;
3. *converge para* a_r/b_r *se* $r = s$.

Supomos que $r > s$. Dividindo $p(n)$ e $q(n)$ por n^s, obtemos

$$\frac{p(n)}{q(n)} = \frac{a_r n^{r-s} + a_{r-1} n^{r-s-1} + \cdots + a_0 n^{-s}}{b_s + b_{s-1} n^{-1} + \cdots + b_0 n^{-s}} \tag{1}$$

Segundo a discussão acima, o numerador diverge (para $+\infty$) e o denominador converge para b_s. Logo o quotiente diverge.

Supomos que $r < s$. Neste caso o numerador em (1) converge para 0 e o denominador converge para b_s. Logo o quotiente converge para 0.

Por fim, supomos que $r = s$. Agora o numerador em (1) converge para a_r e o denominador converge para b_r. Logo o quotiente converge para a_r/b_r.

A seguinte definição está diretamente relacionada com a nossa discussão das dízimas e do facto de $\mathbb{R}$ ser completo.

Definição 1.1.10 (Sucessões de Cauchy)**.** *Uma sucessão $(a_n)_{n=d}^{\infty}$ diz-se* de Cauchy *se para todo o $\epsilon > 0$ existe um número natural $N \geq d$ tal que $|a_m - a_n| < \epsilon$ para todos os $m, n > N$. Em notação matemática:*

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists N \geq d \colon m, n > N \Rightarrow |a_m - a_n| < \epsilon.$$

Já devem ter reparado que esta definição é parecida com a de convergência. De facto, para sucessões reais elas são equivalentes, de ponto de vista lógico.

Teorema 1.1.11. *Uma sucessão real $(a_n)_{n=d}^{\infty}$ é convergente sse é de Cauchy.*

Provar que uma sucessão convergente é também de Cauchy é simples. Supomos que $(a_n)_{n=d}^{\infty}$ converge para $a \in \mathbb{R}$. Seja $\epsilon > 0$. Pela definição de convergência, existe um $N \geq d$ tal que

$$|a - a_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

para todo o $n > N$. Logo, para todos os $m, n > N$ verifica-se

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Ou seja, a sucessão é de Cauchy.

A demonstração do recíproco é mais complexa e omitimos nestes apontamentos. Do ponto de vista lógico, o facto de cada sucessão de Cauchy convergir em $\mathbb{R}$, é equivalente ao facto de $\mathbb{R}$ ser completo (i.e. de satisfazer a Propriedade dos Supremos e dos Ínfimos). Note-se que todas as dízimas respresentam sucessões de Cauchy racionais, logo têm um limite em $\mathbb{R}$ (mas não necessariamente em $\mathbb{Q}$).

Não vamos fazer exercícios com sucessões de Cauchy, mas o Teorema 1.1.11 vai ser útil na parte das séries.

1.2 Critérios de convergência

Neste capítulo vamos estudar três critérios de convergência para sucessões. Veremos que uma coisa é determinar a convergência duma sucessão, outra é calcular o valor do limite.

O primeiro critério de convergência diz respeito a sucessões *monótonas.*

Definição 1.2.1 (Sucessões monótonas)**.** *Uma sucessão* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diz-se* monotonamente crescente *se* $a_n \leq a_m$ *sempre que* $n \leq m$*, e* monotonamente decrescente *se* $a_n \geq a_m$ *sempre que* $n \leq m$*. Uma sucessão diz-se* monótona *se é monotonamente crescente ou decrescente.*

A importância desta noção deriva do primeiro critério de convergência. Por definição, uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diz-se limitada superior ou inferiormente se o conjunto dos seus termos $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ o é.

Teorema 1.2.2 (Critério de monotonia limitada)**.** *Uma sucessão monotonamente crescente (decrescente) e limitada superiormente (inferiormente) é convergente.*

Proof. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotonamente crescente e limitada superiormente. Pela Propriedade dos Supremos, o subconjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ tem um supremo, digamos M. Vamos provar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para M.

Seja $\epsilon > 0$ arbitrário mas fixo. Repara que $a_n \leq M$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Mostremos que existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$M - a_n < \epsilon. \tag{2}$$

Por absurdo, supomos que $M - a_n \geq \epsilon$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Como

$$M - a_n \geq \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad M - \epsilon \geq a_n,$$

$M - \epsilon$ seria um majorante de $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ menor do que M. Mas isso contradiz o facto de M ser o supremo, i.e. o menor majorante. Isto prova a existência dum $N \in \mathbb{N}$ tal que a igualdade em (2) se verifique.

Uma vez que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monotonamente crescente, isto implica que

$$a_N \leq a_n \leq M$$

para todo o $n \geq N$. Em particular,

$$M - a_n \leq M - a_N < \epsilon$$

para todo o $n \geq N$, o que mostra que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para M.

Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monotonamente decrescente e limitada inferiormente, prova-se de forma análoga que converge para $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. □

Exemplo 1.2.3. *A sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ do Exemplo 1.1.3 é convergente.*

Podemos aplicar o Teorema 1.2.2. A sucessão é monotonamente descrescente, porque

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{m} \Leftrightarrow n \leq m.$$

Como $\frac{1}{n} > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, a sucessão também é limitada inferiormente. Logo é convergente.

É óbvio que $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{1/n : n \in \mathbb{N}\} = 0$.

Exemplo 1.2.4. *A sucessão $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com*

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

é convergente.

Mais uma vez, podemos aplicar o Teorema 1.2.2, porque a sucessão é monótonamente crescente e limitada superiormente. Contudo, provar estes dois factos requer algum trabalho.

Pelo Binómio de Newton:

$$b_n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \frac{1}{n^r}; \tag{3}$$

$$b_{n+1} = \sum_{r=0}^{n+1} \binom{n+1}{r} \frac{1}{(n+1)^r}. \tag{4}$$

Daí que

$$b_{n+1} - b_n = \sum_{r=0}^{n} \left[\binom{n+1}{r} \frac{1}{(n+1)^r} - \binom{n}{r} \frac{1}{n^r} \right] + \frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$$

A seguir podemos usar o seguinte:

$$\binom{n}{r}\frac{1}{n^r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!n^r} \tag{5}$$

$$= \frac{1}{r!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right) \tag{6}$$

e

$$\binom{n+1}{r}\frac{1}{(n+1)^r} = \frac{1}{r!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n+1}\right).$$

Como $1-(i/n) < 1-(i/(n+1))$ *para todo o* $1 \leq i \leq r-1$*, concluimos que* $b_n \leq b_{n+1}$ *para todo o* $n \in \mathbb{N}$*. Logo a sucessão é monotonamente crescente.*

Para mostrar que a sucessão é limitada superiormente, note-se que

$$b_n \leq \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!}.$$

Isto é uma consequência de (3) *e* (5)*, porque* $1-(i/n) < 1$ *para todo o* $1 \leq i \leq r-1$*.*

Como

$$r! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r \geq 2^{r-1},$$

verifica-se

$$b_n \leq 1 + \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{2^{r-1}} < 1 + \frac{1}{1-(1/2)} = 3$$

pela fórmula para a soma duma série geométrica. Portanto a sucessão é limitada superiormente, porque 3 *é um majorante.*

Dos nossos argumentos também segue que $2 \leq b_n$ *para todo o* $n \in \mathbb{N}$*, logo a sucessão converge para um limite cujo valor se situa entre* 2 *e* 3*.*

O limite é igual ao número de Neper, denotado por e*. Esta afirmação pode ser considerada uma definição ou um resultado, conforme a abordagem escolhida.*

O segundo critério de convergência usa o enquadramento de sucessões.

Teorema 1.2.5 (Critério dos limites enquadrados)**.** *Sejam* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *três sucessões, tais que*

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

para todo o $n \geq d$, onde $d \in \mathbb{N}$ é arbitrário mas fixo. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergem ambas para um dado limite ℓ, então $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também converge para ℓ.

Proof. Seja $\epsilon > 0$. Por definição, existem $N_1, N_2 \geq d$ tais que:

1. $|\ell - c_n| < \epsilon/3$ para todo o $n > N_1$;

2. $|\ell - a_n| < \epsilon/3$ para todo o $n > N_2$.

Escolhendo $N = \max(N_1, N_2)$, garantimos a validade das duas desigualdades simultaneamente para todo o $n > N$.

Então, para todo o $n > N$ também se verifica

$$|c_n - a_n| = |c_n - \ell + \ell - a_n| \leq |c_n - \ell| + |\ell - a_n| < \frac{2\epsilon}{3},$$

logo

$$|\ell - b_n| = |\ell - c_n + c_n - b_n| \leq |\ell - c_n| + |c_n - b_n| \leq |\ell - c_n| + |c_n - a_n| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{2\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Isto prova que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para ℓ. □

Exemplo 1.2.6. *Seja $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão cujo termo geral é*

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+1}}.$$

Vamos mostrar por enquadramento que esta sucessão converge para 2.

Repara que b_n é uma soma de $2n+1$ frações e que $1/\sqrt{n^2+1}$ é a maior e $1/\sqrt{n^2+2n+1} = 1/\sqrt{(n+1)^2} = \dfrac{1}{n+1}$ a menor. Logo

$$\frac{2n+1}{n+1} \leq b_n \leq \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}}$$

É fácil demonstrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}} = 2,$$

logo $\lim_{n\to\infty} b_n = 2$, pelo Teorema 1.2.5.

Exemplo 1.2.7. *Seja* $d_n = n^{1/n}$*, para* $n \in \mathbb{N}$*. Vamos provar que* $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* 1*, utilizando o Teorema 1.2.5.*

Consideremos $b_n := n^{1/n} - 1$*. Basta provarmos que* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* 0*.*

Usando apenas um dos termos do Binómio de Newton, obtemos a seguinte desigualdade, para todo o $n \geq 2$*:*

$$n = (b_n + 1)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} b_n^2,$$

logo

$$0 < b_n \leq \sqrt{2/(n-1)}.$$

Como $\sqrt{2/(n-1)}$ *converge para* 0*, podemos aplicar o Teorema 1.2.5 com* $a_n = 0$ *e* $c_n = \sqrt{2/(n-1)}$*. Logo* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* 0*, o que implica que* $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* 1*.*

Por fim, queremos aflorar o conceito de *subsucessão.*

Definição 1.2.8. *Uma* subsucessão *de* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sucessão*

$$(a_{i_n})_{n\in\mathbb{N}},$$

onde $i\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *é uma função estritamente crescente e* $i_n = i(n)$*.*

Exemplo 1.2.9. *Seja* $a_n = (-1)^n$*. Então há duas subsucessões constantes, a dos termos pares e a dos termos ímpares:*

$$a_{2n} = 1 \quad e \quad a_{2n-1} = -1$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$*.*

A importância das subsucessões é ilustrada pelo seguinte resultado:

Proposição 1.2.10 (Critério dos sublimites)**.** *Uma sucessão* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* a *sse todas as suas subsucessões convergem para* a*.*

Proof. Só provamos uma das implicações, a outra involve noções matemáticas que optámos por excluir destes apontamentos.

Supomos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a e seja $(a_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ uma subsucessão. Para qualquer $\epsilon > 0$ existe um $N \geq 1$ tal que

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |a - a_n| < \epsilon.$$

Como $i\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é estritamente crescente, verifica-se $i_n \geq n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Por isso

$$n > N \quad \Rightarrow \quad i_n > N \quad \Rightarrow \quad |a - a_{i_n}| < \epsilon,$$

o que mostra que $(a_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a também. $\square$

Em particular, vemos que a sucessão $(-1)^n$ diverge, porque tem duas subsucessões com limites diferentes. No entanto, a sucessão dos módulos converge, porque $|(-1)^n| = 1$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.2.11. *Seja*

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

Como no exemplo anterior, os termos pares são positivos e os termos ímpares negativos, mas desta vez ambos convergem para zero (o único número $a \in \mathbb{R}$ que satisfaz $a = -a$!). De facto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Observação 1.2.12. *Como já vimos, a convergência de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ implica a convergência de $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Contudo, os últimos dois exemplos mostram que a convergência de $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ não implica necessariamente a convergência de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemplo 1.2.13. *Vamos provar que*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \tag{7}$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Para $x = 0$, a igualdade é imediata:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{0}{n}\right)^n = 1 = e^0.$$

A seguir, suponhamos que $x \neq 0$. Primeiro vamos mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}} = e. \tag{8}$$

Depois mostraremos que o resultado em (8) implica que o resultado em (7).

Repara que

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}} = \left(1+\frac{1}{\left(\frac{n}{x}\right)}\right)^{\frac{n}{x}}.$$

Como qualquer número real está enquadrado por dois números naturais, existe um $p_n \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$p_n \leq \frac{n}{x} < p_n + 1, \tag{9}$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$*. Repara que* $p(n) := p_n$ *define uma função estritamente crescente* $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*.*

As desigualdades em (9) *permitem-nos enquadrar o termo geral da sucessão em* (8)*:*

$$\left(1+\frac{1}{(p_n+1)}\right)^{p_n} \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}} \leq \left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{(p_n+1)} \tag{10}$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$*.*

Repara que

$$\left(\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad e \quad \left(\left(1+\frac{1}{(p_n+1)}\right)^{(p_n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

são ambas subsucessões de

$$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)_{n\in\mathbb{N}},$$

por isso ambas convergem para e*, pelo Teorema 1.2.5.*

Por sua vez, esta observação implica que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{(p_n+1)}\right)^{p_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{(p_n+1)}\right)^{(p_n+1)}}{\left(1+\frac{1}{(p_n+1)}\right)} = \frac{e}{(1+0)} = e \tag{11}$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{(p_n+1)} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}\left(1+\frac{1}{p_n}\right) = e(1+0) = e. \tag{12}$$

Aplicando mais uma vez o Teorema 1.2.5, chegamos ao resultado em (8) *a partir de* (10), (11) *e* (12).

Falta só mostrar que o resultado em (8) implica que o resultado em (7). Repara que

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x,$$

logo

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x = e^x,$$

para todo o $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Como já tínhamos provado o caso $x = 0$*, concluimos que o resultado em (7) é válido para todo o* $x \in \mathbb{R}$.

1.3 Exercícios

1. Mostra que a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com

$$a_n = r^n$$

   converge sse $-1 < r \leq 1$. Em caso de convergência, determina o limite.

2. Prova que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n = \frac{1}{2}.$$

3. Prova que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+5}}{n} = 1.$$

4. Mostra que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1,$$

   para qualquer $c \in \mathbb{R}^+$.

5. Mostra que

$$\lim_{n\to\infty} (an)^{b/n} = 1,$$

   para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}^+$.

6. Seja $a_1 = \sqrt{2}$ e define recursivamente

$$a_n = \sqrt{2+\sqrt{a_{n-1}}}$$

   para todo o $n \geq 2$.

(a) Prova por indução que a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monotonamente crescente.

(b) Prova por indução que $a_n \leq 2$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Conclui que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

7. Sejam $a_1 = 1$ e $a_n = \sqrt{1 + 2a_{n-1}}$, para todo $n \geq 2$.

   (a) Assumindo que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, mostra que $\lim_{n\to\infty} a_n = 1+\sqrt{2}$.

   (b) Mostra que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monotonamente crescente e limitada superiormente por $1 + \sqrt{2}$, usando indução.

8. Usando o Teorema 1.2.2 e seguindo o Exemplo 1.2.4, mostra que a sucessão $(a_n)_{n\in N}$ com
$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$
converge.

9. Usando o Teorema 1.2.5, mostra que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0.$$

10. Determina a natureza da sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Em caso de convergência, calcula o limite.

    (a)
$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^4+2}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^4+2n+1}}.$$

    (b)
$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}} + \frac{n}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{(2n-1)2n}}.$$

    (c)
$$a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

11. Usando o Teorema 1.2.5, mostra que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{1/n} = 1.$$

2 Séries numéricas

2.1 Somas parciais e séries

Dada uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, podemos definir a *soma parcial de ordem k*

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + \cdots + a_k$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Por sua vez, estas somas formam uma sucessão: a *sucessão das somas parciais.*

Definição 2.1.1 (Séries convergentes e divergentes)**.** *Se a sucessão $(S_k)_{k\in N}$ converge e tem limite igual a S, dizemos que a* série *(numérica) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$* converge *e que a sua* soma *é igual a S. Caso contrário, dizemos que a série* diverge*.*

Observação 2.1.2. *Embora este não seja o lugar certo para discutir o assunto em mais pormenor, é importante perceber que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é um mero símbolo formal. A série pode ser vista como uma notação intuitiva e simplificada para o limite da sucessão das somas parciais, só que esse limite pode não existir.*

Esta observação está relacionada com a nossa discussão da interpretação das dízimas infinitas no primeiro capítulo.

Podemos igualmente considerar séries $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$, para um número inteiro $d \geq 0$ qualquer, associadas a somas parciais de ordem k cuja primeira parcela é a_d:

$$s_k = a_d + a_{d+1} + \cdots + a_{d+k-1}.$$

Note-se que a notação das séries permite reindexações, por exemplo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=d}^{\infty} a_{n-d}.$$

Neste capítulo vamos estudar vários critérios de convergência para séries. Em geral, esses critérios não nos permitem calcular o valor da soma duma série convergente. No capítulo sobre as séries de Taylor veremos como calcular o valor da soma dalgumas séries, mas aqui concentramo-nos principalmente no problema de determinar a natureza duma dada série, i.e. se é convergente ou divergente.

2.2 O primeiro critério de Cauchy e o critério necessário

O primeiro critério é o análogo para séries do Teorema 1.1.11.

Teorema 2.2.1. *A série* $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *converge sse para todo o* $\epsilon > 0$ *existe um* $N \geq d$ *tal que* $|\sum_{n=k}^{m} a_n| < \epsilon$ *para todos os* $k, m > \mathbb{N}$.

Proof. Este critério é uma consequência imediata do critério correspondente para sucessões (Teorema 1.1.11), porque

$$\sum_{n=k}^{m} a_n = S_{m-d+1} - S_{k-d},$$

onde S_ℓ é a soma parcial dos primeiros ℓ termos da série.

□

Exemplo 2.2.2. *A* série harmónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge, pelo Teorema 2.2.1.

Para todos os $1 \leq k \leq m$, *verifica-se*

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots \frac{1}{m} \geq \frac{m-k+1}{m},$$

porque a soma tem $m-k+1$ *termos e* $1/m$ *é o menor deles. Escolhendo* $m = 2k$, *obtem-se*

$$\frac{m-k+1}{m} = \frac{k+1}{2k} \geq \frac{1}{2},$$

logo

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots \frac{1}{m} \geq \frac{1}{2}.$$

Ou seja, a condição necessária do Teorema 2.2.1 falha para $\epsilon = 1/2$.

O seguinte corolário dá apenas um critério necessário (ou seja, é um resultado mais fraco do que o do Teorema 2.2.1), mas é muito útil na prática.

Corolário 2.2.3 (Critério necessário)**.** *Se a série* $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *é convergente, então a sucessão* $(a_n)_{n=d}^{\infty}$ *converge para* 0.

Proof. Este critério é um caso especial do Teorema 2.2.1: quando $m = k$, obtém-se

$$\sum_{n=k}^{k} a_n = a_k.$$

$\square$

Exemplo 2.2.4. *A série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

diverge, porque a sucessão $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*

2.3 Séries geométricas e séries de Mengoli

A seguir vamos estudar dois tipos de séries especiais que têm critérios de convergência próprios. São as *séries geométricas* e as *séries de Mengoli.* Estes critérios também dão uma fórmula para as somas das séries, caso sejam convergentes.

2.3.1 Séries geométricas

Definição 2.3.1 (Séries geométricas)**.** *Uma série* $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *diz-se* geométrica *se* $a_n \neq 0$ *e existe uma constante* $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *tal que*

$$a_{n+1}/a_n = r$$

para todo o $n \geq d$*. Caso exista,* r *é chamada a* razão *da série geométrica.*

Proposição 2.3.2 (Critério para séries geométricas)**.** *Seja* $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *uma série geométrica com razão* r*.*

1. *A série converge sse* $-1 < r < 1$*.*
2. *Em caso de convergência, a soma da série é igual a*

$$\frac{a_d}{1-r}.$$

Proof. Para todo o $n \geq d$ verifica-se $a_{n+1}/a_n = r$, o que é equivalente a $a_{n+1} = a_n r$. Recursivamente obtemos

$$a_n = a_{n-1}r = a_{n-2}r^2 = \ldots = a_d r^{n-d}.$$

Portanto, a soma parcial S_{n-d+1} é igual a $a_d + a_d r + \cdots + a_d r^{n-d}$. No primeiro capítulo mostrámos que

$$a_d + a_d r + \cdots + a_d r^{n-d} = \frac{a_d(1 - r^{n-d+1})}{1 - r}.$$

Já vimos que $(r^{n-d+1})_{n=d}^{\infty}$ é convergente para 0 sse $|r| < 1$. Neste caso, a série converge para $a_d/(1-r)$.

Para $r = 1$, o termo geral da série é constante: $a_n = a_d \neq 0$, para todo o $n \geq d$. Logo a série diverge, porque não satisfaz o Critério Necessário (Corolário 2.2.3).

Para $r \leq -1$ ou $r \geq 1$, a sucessão $(r^{n-d+1})_{n=d}^{\infty}$ diverge, logo a série diverge também.

Resumindo, as somas parciais da série convergem sse $|r| < 1$. Em caso de convergência, a soma da série é igual a $a_d/(1-r)$. □

Exemplo 2.3.3. *A série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}$$

é geométrica com razão $r = 1/10$. Logo é convergente e a soma é igual a

$$\frac{9/10}{1 - (1/10)} = 1.$$

Observação 2.3.4. *O exemplo 2.3.3 já tínhamos visto noutra notação. Repara que*

$$\begin{aligned} 0,(9) &= 0,9 + 0,09 + 0,009 + \cdots \\ &= \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}. \end{aligned}$$

Ou seja, $0,(9)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} 9/10^n$ representam "a mesma coisa", cujo limite (soma) é igual a 1.

De forma análoga, todas as dízimas periódicas correspondem a séries geométricas com razão igual a $1/10^s$*, para um certo* $s \in \mathbb{N}$*, e vice-versa.*

Esta observação não é válida para dízimas aperiódicas nem para séries geométricas com outras razões.

2.3.2 Séries de Mengoli

As outras séries especiais, com um critério de convergência próprio, são as *séries de Mengoli* (nome alternativo: *séries telescópicas*).

Definição 2.3.5 (Séries de Mengoli)**.** *A série* $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *diz-se* de Mengoli *se existem uma sucessão* $(b_n)_{n=d}^{\infty}$ *e uma constante* $t \in \mathbb{N}$ *tais que*

$$a_n = b_n - b_{n+t},$$

para todo o $n \geq d$*.*

Proposição 2.3.6 (Critério para séries de Mengoli)**.** *Seja* $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *uma série de Mengoli com termo geral* $a_n = b_n - b_{n+t}$*, para todo o* $n \geq d$*.*

1. *A série converge sse a sucessão* $(b_n)_{n=d}^{\infty}$ *converge.*

2. *Em caso de convergência, a soma da série é igual a*

$$b_d + b_{d+1} + \cdots + b_{d+t-1} - t \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Proof. Para qualquer $k \geq t$, a soma parcial de ordem k é igual a

$$\begin{aligned} S_k &= a_d + \cdots + a_{d+k-1} \\ &= b_d - \cancel{b_{d+t}} + b_{d+1} - \cdots + b_{d+t-1} - \cancel{b_{d+2t-1}} + \cancel{b_{d+t}} - \cdots - b_{d+t+k-1} \\ &= b_d + \cdots + b_{d+t-1} - b_{d+k} - \cdots - b_{d+t+k-1}. \end{aligned}$$

Note-se que t é um número fixo, portanto $b_d + \cdots + b_{d+t-1}$ não depende do valor de k desde que $k \geq t$.

Se $(b_n)_{n=d}^{\infty}$ converge, a sucessão das somas parciais $(S_k)_{k=t}^{\infty}$ também converge e

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} S_k &= b_d + \cdots + b_{d+t-1} - \lim_{k\to\infty} b_{d+k} - \cdots - \lim_{k\to\infty} b_{d+t+k-1} \\ &= b_d + b_{d+1} + \cdots + b_{d+t-1} - t \lim_{n\to\infty} b_n. \end{aligned}$$

Caso contrário, a sucessão das somas parciais $(S_k)_{k=t}^{\infty}$ diverge. □

Exemplo 2.3.7. *A série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \tag{13}$$

é de Mengoli, porque

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$ (basta igualar os denominadores para verificar a igualdade). Neste caso $b_n = 1/n$ e $t = 1$.

Como $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, a série em (3) é convergente. Como $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$ e $t = 1$, a soma da série é igual a

$$b_1 - 1 \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{1} - 1 \cdot 0 = 1.$$

Exemplo 2.3.8. *A série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+3}\right)$$

é de Mengoli, porque

$$\ln\left(\frac{n}{n+3}\right) = \ln(n) - \ln(n+3).$$

Neste caso $b_n = \ln(n)$ e $t = 3$.

Como $(ln(n))_{n\in N}$ diverge, a série diverge também.

2.4 Séries de Dirichlet

As séries de Dirichlet são muito úteis para provar a convergência ou a divergência doutras séries por comparação, como veremos na próxima secção. A sua própria natureza podemos determinar através dum critério que involve integrais.

Teorema 2.4.1 (Critério do Integral). *Seja $f\colon [d, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ uma função contínua e descrescente. Nesse caso, verifica-se:*

$$\sum_{n=d}^{+\infty} f(n) \textbf{ converge } \Leftrightarrow \int_d^{+\infty} f(x)\, dx \textbf{ converge}.$$

Proof. Como f descresce, verificam-se as seguintes desigualdades para todo o $n \geq d$:

$$f(n) \geq f(x) \geq f(n+1) \quad \forall x \in [n, n+1].$$

Desse modo, para todo o $n \geq d$:

$$f(n) = \int_n^{n+1} f(n)\,dx \geq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq \int_n^{n+1} f(n+1)\,dx = f(n+1).$$

Ou seja, para todo $m \geq d$:

$$\sum_{n=d}^{m} f(n) \geq \int_d^m f(x)\,dx \geq \sum_{n=d}^{m} f(n+1). \tag{14}$$

Como f é uma função não-negativa, as sucessões

$$\left(\sum_{n=d}^{m} f(n)\right)_{m=d}^{\infty} \quad \text{e} \quad \left(\int_d^m f(x)\,dx\right)_{m=d}^{\infty}$$

são ambas monotonamente crescentes. O resultado segue de (14) e do Teorema 1.2.2. □

Corolário 2.4.2 (Critério para Séries de Dirichlet)**.** *A série de Dirichlet*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

converge sse $s > 1$.

Proof. Para todo o $s \leq 0$ a série é divergente pelo Critério Necessário, porque

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^s} = \begin{cases} 1 & \text{se } s = 0; \\ +\infty & \text{se } s < 0. \end{cases}$$

Para $s = 1$ trata-se da série harmónica, que diverge como sabemos (Exemplo 2.2.2). No intervalo $[1, +\infty[$ verifica-se

$$\frac{1}{x^s} \geq \frac{1}{x}$$

para todo o $0 < s \leq 1$, por isso o Critério de Comparação no Teorema 2.5.3 implica que a série diverge para todo o $0 < s \leq 1$.

Suponhamos que $s > 1$. A função

$$f(x) := \frac{1}{x^s}$$

é positiva, contínua, decrescente em $[1, +\infty[$ e satisfaz $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, portanto podemos aplicar o Critério do Integral no Teorema 2.4.1. É fácil de verificar a convergência do integral:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s}\, dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t x^{-s} = \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{x^{-s+1}}{-s+1} \right]_1^t = -\frac{1}{-s+1}.$$

Portanto, a série converge para todo o $s > 1$, o que termina a demonstração deste corolário. $\square$

2.5 Critérios de convergência para séries não-negativas

Uma série $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ diz-se *não-negativa* se $a_n \geq 0$ para todo o $n \geq d$. Nesta secção assumimos que todas as séries são não-negativas.

2.5.1 O critério de Comparação

O critério de comparação tem duas versões, que ambas são importantes para nós. De ponto de vista lógico, as duas são equivalentes, mas na prática uma pode ser mais fácil de aplicar do que a outra.

Teorema 2.5.1 (Critério de Comparação, versão 1)**.** *Dadas duas séries não-negativas $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=d}^{\infty} b_n$, supomos que existe um número inteiro $t \geq d$ tal que $a_n \leq b_n$ para todo o $n \geq t$.*

1. *Se a série $\sum_{n=d}^{\infty} b_n$ converge, a série $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ converge também.*

2. *Se a série $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ diverge, a série $\sum_{n=d}^{\infty} b_n$ diverge também.*

Proof. Como ambas as séries são não-negativas, as sucessões das somas parciais, que denotamos por $S_k(a)$ e $S_k(b)$ respectivamente, são monotonamente crescentes.

Sem perda de generalidade podemos assumir que $t = d$, porque a natureza duma série não depende dum número finito de termos iniciais. Por hipótese, verifica-se então

$$S_k(a) \leq S_k(b), \tag{15}$$

para todo o $k \in \mathbb{N}$.

Supomos primeiro que a série $\sum_{n=d}^{\infty} b_n$ converge e que a soma é igual a S. Claramente, $S_k(b) \leq S$ para todo o $k \in \mathbb{N}$. Graças a (15), isto implica que $S_k(a) \leq S$ para todo o $k \in \mathbb{N}$. Ou seja, $(S_k(a))_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão monotonamente crescente e limitada superiormente. Pelo Teorema 1.2.2 concluímos que esta série das somas parciais converge, o que equivale a dizer que a série $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ converge.

A segunda afirmação da proposição é equivalente à primeira, do ponto de vista lógico, portanto é automaticamente verdadeira também. Mais precisamente: se, por absurdo, supusermos que $\sum_{n=d}^{\infty} b_n$ não diverge na segunda parte da proposição, então converge. Pela primeira parte, que acabámos de provar, isso implicaria que $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ converge também, mas isso contradiz a hipótese da segunda parte. □

Exemplo 2.5.2. *Um exemplo para cada alínea do Teorema 2.5.1:*

1. *A série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

converge.

Repara que

$$\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n},$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$, e a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

é uma série geométrica convergente, porque a sua razão é igual a $1/2$.

Pela primeira alínea do Teorema 2.5.1, a série $\sum_{n=0}^{\infty} 1/(n2^n)$ converge também.

2. *A série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^3+5}$$

é divergente. Podemos compará-la com uma série de Dirichlet divergente, porque

$$\frac{n^2+3}{n^3+5} \geq \frac{n^2}{2n^3}$$

para todo o $n \geq 1$. Note-se que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge, porque é metade da série harmónica.

Por vezes pode ser mais prático usar uma segunda versão do Critério de Comparação. Diz-se que duas séries são *da mesma natureza* se ambas convergem ou ambas divergem.

Teorema 2.5.3 (Critério de Comparação, versão 2)**.** *Dadas duas séries não-negativas $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=d}^{\infty} b_n$, supomos que $(a_n/b_n)_{n=d}^{\infty}$ converge para λ, i.e.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda.$$

1. *Se $\lambda > 0$, ambas as séries são da mesma natureza.*

2. *Se $\lambda = 0$ e $\sum_{n=d}^{\infty} b_n$ converge, a série $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ converge.*

3. *Se $\lambda = 0$ e $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ diverge, a série $\sum_{n=d}^{\infty} b_n$ diverge.*

Observação 2.5.4. *A segunda e a terceira alínea da proposição são equivalentes, de ponto de vista lógico.*

Proof. Supomos que $\lambda > 0$. Pela definição de limite, existe um $N \geq d$ tal que

$$\frac{\lambda}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3\lambda}{2},$$

para todo o $n > N$. Logo

$$\frac{\lambda}{2} b_n < a_n < \frac{3\lambda}{2} b_n,$$

para todo o $n > N$ (aqui estamos a usar que $b_n > 0$). A primeira versão do Critério de Comparação (Teorema 2.5.1) implica que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são da mesma natureza.

Supomos agora que $\lambda = 0$. Neste caso, existe um $N \geq d$ tal que

$$\frac{a_n}{b_n} < 1,$$

para todo o $n > N$. Isto que equivale a

$$a_n < b_n,$$

para todo o $n > N$. A primeira versão do Critério de Comparação prova agora as duas últimas alíneas da segunda versão. $\square$

Exemplo 2.5.5. *A série*

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{n^4 - 3n^3 + 5n - 7}{n^6 + n^5 - n + 3}$$

é convergente, porque é da mesma natureza que a série

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

que converge por ser de Dirichlet com $s = 2 > 1$.

Para mostrar que são da mesma natureza, basta calcular o limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^4 - 3n^3 + 5n - 7)/(n^6 + n^5 - n + 3)}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^6 - 3n^5 + 5n^3 - 7n^2}{n^6 + n^5 - n + 3} = 1$$

2.6 Os Critérios de Cauchy e de d'Alembert

A desvantagem do Critério de Comparação, seja qual for a versão, é que a sua aplicação requer primeiro a "invenção" duma série alternativa cuja natureza se conhece. Com alguma prática isso torna-se mais fácil, mas, mesmo assim, seria bom ter critérios aplicáveis diretamente. Nesta secção damos dois critérios desses: o *Critério de Cauchy* e o *Critério de d'Alembert.*

Teorema 2.6.1 (Critério de Cauchy)**.** *Seja $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ uma série não-negativa. Supomos que $(\sqrt[n]{a_n})_{n=d}^{\infty}$ converge para λ, i.e.*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda.$$

1. *Se $\lambda < 1$, a série converge.*

2. *Se $\lambda > 1$, a série diverge.*

3. *Se $\lambda = 1$, não se tira nenhuma conclusão.*

Proof. Supomos que $\lambda < 1$. Podemos escolher $r \in]\lambda, 1[$. Pela definição de limite, existe um $N \geq d$ tal que

$$\sqrt[n]{a_n} < r,$$

ou seja,

$$a_n < r^n$$

para todo o $n > N$.

Note-se que a série $\sum_{n=d}^{\infty} r^n$ converge, por ser geométrica com razão igual a r e $|r| < 1$. Pelo Critério de Comparação (Teorema 2.5.1), a série $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ também converge.

Supomos agora que $\lambda > 1$. Podemos escolher $r \in]1, \lambda[$. Pela mesma razão de há bocado, existe um $N \geq d$ tal que

$$a_n > r^n$$

para todo o $n > N$. Neste caso, a série geométrica $\sum_{n=d}^{\infty} r^n$ diverge, porque $r > 1$. Pelo Critério de Comparação (Teorema 2.5.1), a série $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ também diverge.

Para mostrar que não se pode tirar nenhuma conclusão, caso $\lambda = 1$, basta considerar as séries de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Para todas elas $\lambda = 1$, mas são convergentes se $s > 1$ e divergentes se $s \leq 1$. □

Exemplo 2.6.2. *Para a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

é fácil calcular

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{1}{2}.$$

Logo, segundo o Critério de Cauchy, a série converge.

O Critério de d'Alembert é muito parecido mas não é equivalente, como veremos depois.

Teorema 2.6.3 (Critério de d'Alembert)**.** *Seja* $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *uma série não-negativa. Supomos que* $(a_{n+1}/a_n)_{n=d}^{\infty}$ *converge para* λ*, i.e.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda.$$

1. *Se* $\lambda < 1$*, a série converge.*

2. *Se* $\lambda > 1$*, a série diverge.*

3. *Se* $\lambda = 1$*, não se tira nenhuma conclusão.*

Proof. Supomos que $\lambda < 1$. Podemos escolher $r \in]\lambda, 1[$. Pela definição de limite, existe um $N \geq d$ tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r,$$

ou seja,

$$a_{n+1} < a_n r$$

para todo o $n > N$. Assim, recursivamente, obtemos

$$a_n < a_{n-1} r < a_{n-2} r^2 < \cdots < a_d r^{n-d}.$$

A série $\sum_{n=d}^{\infty} a_d r^{n-d} = a_d \sum_{n=d}^{\infty} r^{n-d}$ converge, por ser geométrica com razão igual a r e $|r| < 1$. Pelo Critério de Comparação (Teorema 2.5.1), a série $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ também converge.

Supomos agora que $\lambda > 1$. Podemos escolher $r \in]1, \lambda[$. Pela mesma razão de há bocado, existe um $N \geq d$ tal que

$$a_n > a_d r^{n-d}$$

para todo o $n > N$. Agora a série geométrica $\sum_{n=d}^{\infty} a_d r^{n-d}$ diverge, porque $r > 1$. Pelo Critério de Comparação (Teorema 2.5.1), a série $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ também diverge.

Para mostrar que não se pode tirar nenhuma conclusão caso $\lambda = 1$, basta outra vez considerar as séries de Dirichlet, porque mais uma vez todas têm $\lambda = 1$. □

Exemplo 2.6.4. *Para a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

verifica-se

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}} = \frac{1}{n+1},$$

uma vez que $(n+1)! = (n+1)n(n-1)\cdots 1 = (n+1)n!$. *Logo*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Pelo Critério de d'Alembert, a série converge.

Exemplo 2.6.5. *Um exemplo ligeiramente mais complicado: consideremos a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!3^n}{n^n}.$$

Neste caso

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!3^{n+1}/(n+1)^{n+1}}{n!3^n/n^n} \\
&= \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{3^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{1}{(n+1)^{n+1}/n^n} \\
&= \frac{\cancel{(n+1)}\cancel{n!}}{\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{3^n}3}{\cancel{3^n}} \cdot \frac{1}{\cancel{(n+1)}\left((n+1)/n\right)^n} \\
&= \frac{3}{(1+1/n)^n}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n} = \frac{3}{e}.$$

Como $e < 3$, *este limite é maior que* 1. *Pelo Critério de d'Alembert, a série diverge.*

Observação 2.6.6. *Dada uma série* $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$, *se a sucessão* $(a_{n+1}/a_n)_{n=d}^{\infty}$ *converge, a sucessão* $(\sqrt[n]{a_n})_{n=d}^{\infty}$ *também converge e*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Omitimos a demonstração desta afirmação, porque requer matéria que não consta no programa de Cálculo Infinitesimal I.

Reciprocamente, a convergência de $(\sqrt[n]{a_n})_{n=d}^{\infty}$ **não** *garante a convergência de* $(a_{n+1}/a_n)_{n=d}^{\infty}$*. Um bom contra-exemplo é a série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+(-1)^n}}.$$

Para esta série

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}.$$

Mas

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 1/8 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 2 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases},$$

logo $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$ *não existe. Ou seja, o Critério de Cauchy mostra que esta série converge, mas o Critério de d'Alembert não se aplica.*

Costuma-se dizer que o "Critério de Cauchy é mais forte do que o critério de d'Alembert".

Observação 2.6.7. *Pela observação anterior, podemos usar*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

caso exista e seja fácil de calcular, para determinar

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Por exemplo, seja $a_n = n$*. Sabemos que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1,$$

logo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Este resultado já tínhamos provado pelo Critério dos Limites Enquadrados, mas esta prova é mais curta.

Observação 2.6.8. *Por vezes, podemos usar o Critério de Cauchy ou o Critério de d'Alembert, em conjunto com o Critério Necessário, para determinar o limite duma sucessão.*

Por exemplo, consideremos a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *com*

$$a_n := \frac{n^p}{r^n}$$

onde $p \in \mathbb{N}$ *e* $r \in]1, +\infty[$ *são duas constantes fixas. Vamos provar que* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Consideremos primeiro a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{r^n}.$$

Pelo Critério de Cauchy, esta série converge, porque

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^p}{r^n}} = \frac{1}{r} < 1.$$

Então, pelo Critério Necessário, o termo geral da série tende para zero, ou seja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{r^n} = 0.$$

2.7 Convergências simples e absoluta e séries alternadas

Temos estudado principalmente séries não-negativas mas nesta secção levantamos essa restrição.

Definição 2.7.1 (Séries dos módulos)**.** *A* série dos módulos *duma dada série* $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *é por definição a série não-negativa*

$$\sum_{n=d}^{\infty} |a_n|.$$

O seguinte resultado mostra que os critérios de convergência para séries não-negativas podem ser úteis para séries mais gerais também.

Lema 2.7.2. *Se* $\sum_{n=d}^{\infty} |a_n|$ *converge, a série* $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *converge também.*

Proof. Supomos que $\sum_{n=d}^{\infty} |a_n|$ converge.

Vamos provar que a sucessão das somas parciais $(S_k(a))_{k\in\mathbb{N}}$ associada à série $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ é de Cauchy. Pelo Teorema 1.1.11, isso basta para concluir que $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ converge.

Seja $\epsilon > 0$ arbitrário mas fixo. Pelo Teorema 1.1.11, a sucessão das somas parciais $(S_k(|a|))_{k\in\mathbb{N}}$ associada a $\sum_{n=d}^{\infty} |a_n|$ é de Cauchy. Logo, existe um $N \geq d$ tal que

$$|S_k(|a|) - S_m(|a|)| < \epsilon$$

para todos os $k, m > N$.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $k \geq m$. Nesse caso, verifica-se

$$|S_k(|a|) - S_m(|a|)| = \left| \sum_{n=d}^{d+k-1} |a_n| - \sum_{n=d}^{d+m-1} |a_n| \right| = \sum_{n=d+m}^{d+k-1} |a_n|.$$

A desigualdade triangular do módulo implica

$$|S_k(a) - S_m(a)| = \left| \sum_{n=d+m}^{d+k-1} a_n \right| \leq \sum_{n=d+m}^{d+k-1} |a_n|.$$

Juntar todos estes resultados mostra que

$$|S_k(a) - S_m(a)| \leq |S_k(|a|) - S_m(|a|)| < \epsilon$$

para todos os $k, m > N$.

Logo $(S_k(a))_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy. □

Observação 2.7.3. *Note-se que Lemma 2.7.2 também implica que* $\sum_{n=d}^{\infty} |a_n|$ *diverge se* $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *diverge.*

Mais adiante veremos que o recíproco do Lema 2.7.2 é falso: existem séries convergentes cujas séries dos módulos divergem. Este facto justifica a seguinte definição.

Definição 2.7.4.

1. *Uma série* $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *diz-se* absolutamente convergente *se a série dos módulos* $\sum_{n=d}^{\infty} |a_n|$ *converge.*
2. *Uma série* $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *diz-se* simplesmente convergente *se converge mas a série dos módulos* $\sum_{n=d}^{\infty} |a_n|$ *diverge.*

3. *Uma série* $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *diz-se* divergente *se não é absoluta nem simplesmente convergente.*

Exemplo 2.7.5. *A série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

é absolutamente convergente, porque a série dos módulos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

é uma série de Dirichlet convergente $(s = 2 > 1)$*.*

Quando estudamos a natureza duma dada série, primeiro devemos verificar se se trata duma série geométrica, de Mengoli ou de Dirichlet. Se for esse o caso, podemos resolver o exercício com o respetivo critério.

Caso contrário, verificamos se o Critério Necessário está satisfeito. Note-se que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

Portanto, das duas uma:

1. ou chegamos à conclusão que a série diverge (e a série dos módulos também) e o exercício termina aí,

2. ou chegamos à conclusão que a série e a série dos módulos ambas satisfazem o Critério Necessário. Mas como é apenas necessário, e não suficiente, ainda não podemos concluir nada acerca da natureza da série.

No segundo caso continuamos, analisando primeiro a série dos módulos. Como esta é não-negativa, podemos tentar aplicar um dos critérios de convergência das secções anteriores. Se deste modo conseguirmos provar que a série dos módulos converge, então a série é absolutamente convergente, pelo Lema 2.7.2, e o exercício termina aí.

Caso contrário, teremos que usar um critério de convergência para séries gerais. Nestes apontamentos o único critério desse tipo é o *Critério de Leibniz* para *séries alternadas.*

Definição 2.7.6. *Uma série* $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *diz-se* alternada *se* $a_n a_{n+1} < 0$ *para todo o* $n \geq d$.

Repara que $a_n a_{n+1} < 0$ equivale a dizer que a_n e a_{n+1} têm sinais opostos, ou seja, o sinal dos termos alterna.

Teorema 2.7.7 (Critério de Leibniz)**.** *Seja* $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *uma série alternada. Supomos que satisfaz as seguintes condições:*

1. $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$;
2. $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ *para todo o* $n \geq d$.

Então a série converge.

Proof. Sem perda de generalidade, assumimos que $d = 1$ e $a_1 > 0$. Nesse caso podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n,$$

onde $b_n = |a_n|$.

A seguir consideremos as somas parciais pares:

$$S_{2N} = (b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) + \cdots + (b_{2N-1} - b_{2N}).$$

Cada expressão entre parênteses é não-negativa, porque a sucessão $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monotonamente descrescente por hipótese (a segunda condição). Logo, a sucessão $(S_{2N})_{N\in\mathbb{N}} = (S_2, S_4, S_6, \ldots)$ é monotonamente crescente.

Analogamente a sucessão formada pelas somas parciais ímpares

$$S_{2N+1} = b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \cdots - (b_{2N} - b_{2N+1})$$

é monotonamente descrescente.

Como

$$S_{2N+1} = S_{2N} + b_{2N+1} \geq S_{2N},$$

verificam-se as seguintes desigualdades para todo o $N \geq 1$:

$$S_2 \leq S_4 \leq \cdots \leq S_{2N} \leq S_{2N+1} \leq \cdots \leq S_3 \leq S_1.$$

Isto mostra que $(S_{2N})_{N\in\mathbb{N}}$, além de monotonamente crescente, é limitada superiormente (porque $S_1 = b_1$ é um majorante). Logo tem um limite, digamos

S_P. Também mostra que $(S_{2N+1})_{N\in\mathbb{N}}$, além de monotonamente decrescente, é limitada inferiormente, logo tem um limite também, digamos S_I.

Mas S_P e S_I são iguais, porque

$$S_I = \lim_{N\to\infty} S_{2N+1} = \lim_{N\to\infty} S_{2N} + \lim_{N\to\infty} b_{2N+1} = S_P,$$

sendo $\lim_{N\to\infty} b_{2N+1} = 0$ por hipótese (a primeira condição).

A prova de que isto implica que a sucessão das somas parciais $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $S_P = S_I$, deixamos como exercício. $\square$

Exemplo 2.7.8. *A série harmónica alternada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

claramente satisfaz todas as premissas do Critério de Leibniz, logo converge. A série dos módulos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

é a série harmónica normal, que diverge, como já sabemos.

A série harmónica alternada é portanto uma série simplesmente convergente.

Observação 2.7.9. *Ambas as condições no Critério de Leibniz são necessárias.*

A condição $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *é exatamente o Critério Necessário 2.2.3.*

A condição $|a_{n+1}| \leq |a_n|$*, para todo o* $n \geq d$*, também é necessária, como podemos ver no seguinte contra-exemplo: consideremos a série* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$*, onde*

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \textit{se } n \textit{ é par,} \\ \\ \dfrac{1}{n^2} & \textit{se } n \textit{ é ímpar.} \end{cases}$$

Esta série alternada satisfaz o Critério Necessário, mas $b_{2k} \not\leq b_{2k-1}$ *para todo o* $k \in \mathbb{N}$*. Vamos mostrar que ela diverge.*

Para todo o $m \in \mathbb{N}$*, a soma parcial de ordem* $2m$ *dá*

$$S_{2m} = \sum_{n=1}^{2m} (-1)^n b_n = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(2k-1)^2}. \tag{16}$$

Suponhamos, por absurdo, que a nossa série converge para S, i.e. que $\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S$.

Pelo Critério de Comparação (v1, Teorema 2.5.1), a série $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(2k-1)^2$ *converge, porque*

$$\frac{1}{(2k-1)^2} \leq \frac{1}{k^2} \quad \textit{para todo o } k \in \mathbb{N}$$

e $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ *é uma série de Dirichlet convergente* ($s = 2 > 1$)*. Seja D a sua soma, i.e.*

$$D := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Quando $m \to \infty$, o limite em (16) *dá*

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} - D,$$

o que equivale a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = S + D.$$

Mas isto é uma contradição, porque $\sum_{k=1}^{\infty} 1/2k = (1/2)\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ *e a série harmónica diverge.*

Chegamos à conclusão que $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ *diverge.*

2.8 Séries de potências

Até agora estudámos apenas séries numéricas: $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$, com cada cada a_n um número real. Em geral, podemos considerar séries de funções $\sum_{n=d}^{\infty} f_n(x)$, onde $f_n\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função real duma variável real tal que $D \subseteq D_{f_n}$ para cada $n \geq d$. Nesta secção só vamos estudar um caso particular:

Definição 2.8.1. *Chama-se* série de potências *a uma série do tipo*

$$\sum_{n=d}^{\infty} a_n (x-c)^{p_n}$$

onde x é uma variável real, c uma constante real (chamada o centro*),* $(a_n)_{n=d}^{\infty}$ *uma sucessão real e* $(p_n)_{n=d}^{\infty}$ *uma sucessão estritamente crescente de números inteiros não-negativos.*

Exemplo 2.8.2. *Aqui há três exemplos:*

1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-1)^{n-1} \qquad (c=1).$$

2.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (c=0).$$

3.
$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+5)^{2n}}{n} \qquad (c=-5).$$

Seja $\sum_{n=d}^{\infty} a_n (x-c)^{p_n}$ uma série de potências arbitrária. Para $x=c$, a série converge absolutamente:

$$\sum_{n=d}^{\infty} |a_n||(c-c)|^{p_n} \begin{cases} |a_d| & \text{se } p_d = 0, \\ 0 & \text{se } p_d > 0, \end{cases}$$

porque $p_n \geq p_d$ para todo o $n \geq d$.

Proposição 2.8.3. *Para a série de potências $\sum_{n=d}^{\infty} a_n (x-c)^{p_n}$ existem as seguintes possibilidades:*

1. *a série converge absolutamente para $x=c$ e diverge para todo o $x \neq c$;*
2. *a série converge absolutamente para todo o $x \in \mathbb{R}$;*
3. *existe um $R \in \mathbb{R}^+$ tal que a série converge absolutamente para todo o $x \in]c-R, c+R[$, diverge para todo o $x < c-R$ e todo o $x > c+R$, e, além disso,*
   (a) *converge absolutamente para $x = c+R$ e $x = c-R$, ou*
   (b) *converge simplesmente para $x = c+R$ e/ou $x = c-R$, ou*
   (c) *diverge para $x = c+R$ e $x = c-R$.*

Observação 2.8.4. *As primeiras duas alíneas da Proposição 2.8.3 podem ser vistas como casos degenerados da terceira alínea: a primeira corresponde ao caso $R=0$ e a segunda ao caso $R=+\infty$.*

Proof. Sem perda de generalidade, podemos supor que $d = 1$. Isto implica que $p_n \geq n$ para todo o $n \geq 1$.

Primeiro vamos mostrar o seguinte: se existe um determinado $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tal que a série convirja para $x = c + s$, então ela converge absolutamente para todo o $x \in]c - |s|, c + |s|[$.

Quando $x = c + s$, a série é igual a

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n s^{p_n}.$$

Por isso, convergência para $x = c + s$ implica que $\lim_{n\to\infty} a_n s^{p_n} = 0$, pelo Critério Necessário (Corolário 2.2.3). Em particular, existe um $N \geq 1$ tal que $|a_n s^{p_n}| < 1$ para todo o $n \geq N$.

Então, para todos os $n \geq N$ e $x \in]c - |s|, c + |s|[$, verifica-se

$$|a_n(x-c)^{p_n}| = |a_n s^{p_n}| \left|\frac{x-c}{s}\right|^{p_n} \leq \left|\frac{x-c}{s}\right|^{p_n} \leq \left|\frac{x-c}{s}\right|^{n}. \tag{17}$$

A última desigualdade é válida porque $p_n \geq n$ e

$$\left|\frac{x-c}{s}\right| < 1.$$

Para todo o $x \in]c - s, c + s[$, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x-c}{s}\right|^{n}$$

é uma série geométrica com razão menor que 1, logo converge.

Pelo Critério de Comparação (versão 1, Teorema 2.5.1) e pelas desigualdades em (17), a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-c)^{p_n}$ converge absolutamente para todo o $x \in]c - s, c + s[$.

Seja I, resp. I_0, o conjunto de todos os pontos de convergência, resp. de convergência absoluta, de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-c)^{p_n}$. Pelos argumentos acima, I e I_0 são intervalos.

Reparem que, para todo o $s \in I$, a série converge absolutamente para $x = c + s$ sse converge absolutamente para $x = c - s$, porque

$$|a_n s^{p_n}| = |a_n(-s)^{p_n}|$$

para todo o $n \geq d$. Ou seja, o intervalo I_0 é simétrico em torno de c.

Se $I = \mathbb{R}$, os argumentos acima mostram que $I_0 = \mathbb{R}$.

Supomos agora que $I \neq \mathbb{R}$. Então, I tem que ser limitado. Senão, seria possível escolher uma sucessão $s_n \in I$ tal que $|s_n| \geq n$ para todo o $n \in N$. Pelos argumentos acima, isso implicaria que

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty}]c-n, c+n[\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}]c-|s_n|, c+|s_n|[\subseteq I,$$

o que contradiz a nossa suposição.

Portanto, I é limitado e por isso tem um supremo. Seja $R := \sup(I) - c \geq 0$. Se $R = 0$, os argumentos acima implicam que $I = I_0 = \{c\}$. Se $R > 0$, os argumentos acima implicam que

$$I_0 =]c-R, c+R[\quad \text{ou} \quad I_0 = [c-R, c+R],$$

e I é igual a $]c-R, c+R[$, $[c-R, c+R[$, $]c-R, c+R]$ ou $[c-R, c+R]$. $\square$

Definição 2.8.5. *a) Ao número $R \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ da Proposição 2.8.3 chama-se o* raio de convergência *da série de potências.*

b) O intervalo de convergência *da série, denotado por I, é por definição o conjunto de todos os seus pontos de convergência simples ou absoluta.*

c) O intervalo de convergência absoluta*, denotado por I_0, é por definição o conjunto de todos os seus pontos de convergência absoluta.*

Obviamente $I_0 \subseteq I$. Pela Proposição 2.8.3, existem as seguintes hipóteses:

$$I_0 =]c-R, c+R[\quad \text{ou} \quad I_0 = [c-R, c+R],$$

$I =]c-R, c+R[$, $I = [c-R, c+R[$, $I =]c-R, c+R]$ ou $I = [c-R, c+R]$.

Na prática usa-se o Critério de Cauchy ou o Critério de d'Alembert para determinar o intervalo de convergência duma série de potências.

Exemplo 2.8.6. *1. Para a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-1)^{n-1},$$

o limite do Critério de Cauchy dá

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n^n(x-1)^{n-1}|} = \lim_{n\to\infty} n|x-1|^{1-1/n}.$$

Este limite é zero se $x=1$. Para todos os outros valores de x "o limite é $+\infty$". Logo a série converge absolutamente quando $x=1$, e diverge quando $x \neq 1$.

Portanto, $I = I_0 = \{1\}$ e $R = 0$.

2. *Para a série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

o limite do Critério de d'Alembert dá

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}/(n+1)!}{|x|^n/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$. Logo, esta série de potências converge absolutamente para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Portanto, $I = I_0 = \mathbb{R}$ e $R = +\infty$.

3. *Para a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+5)^{2n}}{n}$$

o limite do Critério de Cauchy dá

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n \frac{(x+5)^{2n}}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x+5)^2}{\sqrt[n]{n}} = (x+5)^2.$$

Ora, $(x+5)^2 < 1$ sse $x \in]-6,-4[$, e neste intervalo a série converge absolutamente.

Quando $x=-6$ ou $x=-4$, a série é igual à série harmónica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

que é simplesmente convergente, como já sabemos.

Quando $x < -6$ ou $x > -4$, a série diverge. Portanto

Portanto, $I = [-6,-4]$, $I_0 =]-6,-4[$ e $R = 1$.

No seu intervalo de convergência I, uma série de potências $\sum_{n=d}^{\infty} a_n(x - c)^{p_n}$ converge para uma soma que depende de x:

$$\sum_{n=d}^{\infty} a_n(x-c)^{p_n} =: s(x) \quad \text{para todo o } x \in I.$$

Reparem que $s\colon I \to \mathbb{R}$ é uma função real duma variável real com domínio igual a I. Por exemplo, mais adiante veremos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \quad \text{para todo o } x \in \mathbb{R},$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} = \ln(x), \quad \text{para todo o } x \in]0,2].$$

Quando o raio de convergência R é positivo, diz-se que $s(x)$ é *uma função real analítica*.

Dados uma função real $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ e um ponto $c \in D_f$ (onde D_f é o domínio de f), veremos na secção sobre *Séries de Taylor* como determinar se existe um intervalo $I \subseteq D_f$, centrado em c, onde f é real analítica e como calcular a série de potências $\sum_{n=d}^{\infty} a_n(x-c)^{p_n}$ tal que

$$\sum_{n=d}^{\infty} a_n(x-c)^{p_n} = f(x) \quad \text{para todo o } x \in I.$$

Esta relação entre séries de potências e funções reais analíticas permite resolver certos problemas de séries recorrendo a funções e, vice-versa, certos problemas de funções recorrendo a séries.

2.9 Séries de Taylor

Na secção anterior vimos que a soma duma série de potências convergente é uma função. Nesta secção vamos ver o recíproco: como se pode associar a uma função uma série de potências, a chamada *série de Taylor*.

Notem que as somas parciais de qualquer série de potências são polinómios. No caso duma série de Taylor, são os chamados *polinómios de Taylor*. Portanto, os polinómios de Taylor duma função f podem ser vistos como aproximações de f: quanto maior o grau do polinómio de Taylor, melhor a aproximação. Na situação ideal, o limite da sucessão dos polinómios de Taylor, i.e. a série de Taylor, converge para a função.

Mas é preciso dar logo alguns avisos. Em geral, a aproximação só é válida localmente, i.e. num (pequeno) intervalo. Pior, a série pode não convergir de todo ou, caso seja convergente, pode não convergir para a função inicial. Vamos, portanto, também ver quais as condições que a função tem de satisfazer para evitar estes problemas.

Para perceber melhor a definição das séries de Taylor, estudemos primeiro o caso das funções mais simples: os polinómios.

Proposição 2.9.1. *Seja $f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0$ um polinómio de grau m (ou seja, $a_m \neq 0$). Para todo o $x \in \mathbb{R}$, verifica-se a seguinte igualdade*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m.$$

Proof. A demonstração é uma consequência do seguinte facto:

$$(x^k)^{(n)} = \begin{cases} x^k, & \text{se } n = 0; \\ k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n}, & \text{se } 1 \leq n \leq k; \\ 0, & \text{se } n > k. \end{cases}$$

Isto mostra que

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} n!a_n & \text{se } 0 \leq n \leq m; \\ 0 & \text{se } n > m \end{cases}.$$

□

É possível generalizar este resultado do seguinte modo:

Corolário 2.9.2. *Para $c \in \mathbb{R}$, seja $f(x) = a_m(x-c)^m + a_{m-1}(x-c)^{m-1} + \cdots + a_0$ ($a_m \neq 0$). Para todo o $x \in \mathbb{R}$ verifica-se a seguinte igualdade*

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(m)}(c)}{m!}(x-c)^m.$$

Reparem que uma função f é um polinómio de grau m sse $f^{(m+1)}(x) = 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Por isso, a aproximação duma função não-polinomial por polinómios é dada por uma série infinita, cujo termo de grau m involve a derivada de ordem m para todo o $m \in \mathbb{N}_0$. Em particular, a função tem que ser suave (infinitamente diferenciável).

Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função suave, onde I é um intervalo aberto, e seja $c \in I$ um ponto arbitrário mas fixo.

Definição 2.9.3. *A* série de Taylor *associada a f e centrada em c é a série de potências $T = T(f, c)$ dada por*

$$T(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Para todo o $m \in \mathbb{N}_0$, o *polinómio de Taylor de ordem* m, designado por $T_m = T_m(f, c)$, é a soma parcial de ordem m de $T(f, c)$:

$$T_m(x) := \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Observação 2.9.4. *No caso particular $c = 0$, os polinómios e as séries de Taylor também são conhecidos como* os polinómios e as séries de MacLaurin.

Exemplo 2.9.5.

1. *Sejam f um polinómio de grau m e $c \in \mathbb{R}$ um ponto arbitrário. Pelo Corolário 2.9.2, verifica-se*

   $$T(f, c)(x) = T_m(f, c)(x) = f(x),$$

   para todo o $x \in \mathbb{R}$.

   Neste caso, a série de Taylor é igual ao polinómio de Taylor de grau m. Como os termos de $T(f, c)$ de grau superior a m são todos nulos, obtém-se $T_m(f, c) = T_{m+1}(f, c) = T_{m+2}(f, c) = \ldots = T(f, c)$. Isto acontece sse f é um polinómio de grau m.

2. *Para $f(x) = e^x$ e $c = 0$, obtém-se*

   $$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

   o que é uma consequência imediata de $(e^x)^{(n)} = e^x$ e $e^0 = 1$.

   Pelo Critério de d'Alembert, esta série converge absolutamente para todo o $x \in \mathbb{R}$. Neste caso, veremos que a soma é exactamente e^x, ou seja, podemos escrever

   $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

   para todo o $x \in \mathbb{R}$.

3. *Para* $f(x) = \ln(x)$ *e* $c = 1$*, obtém-se*

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}.$$

Por indução, prova-se facilmente que

$$\ln^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

Como

$$\ln(1) = 0 \quad e \quad \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n},$$

a fórmula na Definição 2.9.3 resulta na série de potências acima.

Pelo Critério de Cauchy, esta série converge absolutamente para todo o $x \in]0,2[$. *Para* $x = 2$*, a série converge simplesmente, pelo Critério de Leibniz. Veremos que neste caso*

$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n},$$

para todo o $x \in]0,2]$.

4. *Para* $f(x) = \sin(x)$ *e* $c = 0$*, obtém-se*

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Nesta série todos termos com potências pares são nulos. O resultado é uma consequência imediata de $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$ *e*

$$\sin^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{n/2} \sin(x), & \text{se } n \text{ é par} \\ (-1)^{(n-1)/2} \cos(x), & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Pelo Critério de d'Alembert, a série converge absolutamente para todo o $x \in \mathbb{R}$. *Veremos que neste caso*

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Observação 2.9.6. *Mudando o valor de c, a série de Taylor também muda, embora a função f seja a mesma. Por exemplo, se $c = \pi/2$, obtemos*

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x - \frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n)!},$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$.

A seguinte proposição é uma generalização imediata do Corolário 2.9.2. A sua demonstração é igual.

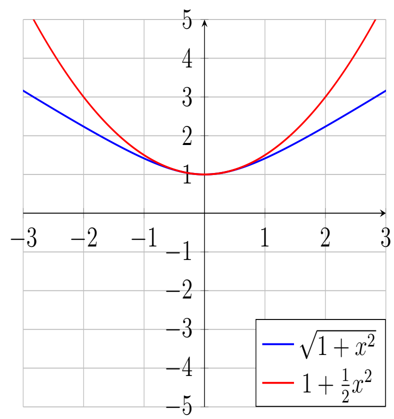
Proposição 2.9.7. *Se f é uma função m vezes diferenciável em c, verifica-se*

$$\begin{array}{rcl} f(c) & = & T_m(c) \\ f'(c) & = & T'_m(c) \\ f''(c) & = & T''_m(c) \\ & \vdots & \\ f^{(m)}(c) & = & T_m^{(m)}(c), \end{array}$$

onde $T_m(x) = T_m(f, c)(x)$.

Como já explicámos no início desta secção, os polinómios de Taylor $T_m(f, c)$ são aproximações de f numa vizinhança de c.

Exemplo 2.9.8. *Seja $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$. O polinómio de Tayler de grau 2 com centro em 0 é fácil de calcular: $T_2(x) = 1 + \dfrac{1}{2}x^2$. Nos gráficos abaixo vê-se que $T_2(x)$ é de facto uma boa aproximão de $f(x)$ na vizinhança de $x = 0$.*



Para determinarmos se $T(f,c)$ converge para f numa vizinhança de c, introduzimos a noção de *resto*:

Definição 2.9.9. *Sejam $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função suave e $c \in I$ um ponto arbitrário mas fixo. O* resto de ordem m *é a função $R_m = R_m(f,c)$ dada por*

$$R_m(x) := f(x) - T_m(x)$$

para $x \in I$, onde $T_m = T_m(f,c)$.

Por definição, $T(f,c)(x) = \lim_{m\to\infty} T_m(f,c)(x)$ para $x \in I$, caso este limite exista. Portanto,

$$T(f,c)(x) = f(x) \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty} T_m(f,c)(x) = f(x) \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty} R_m(f,c)(x) = 0.$$

O *Teorema do Resto*, cuja demonstração omitimos nestes apontamentos, permite determinar $\lim_{m\to\infty} R_m(f,c)(x)$.

Teorema 2.9.10 (Teorema do Resto)**.** *Sejam $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função suave e $c \in I$ um ponto arbitrário mas fixo. Para todo o $m \in \mathbb{N}_0$, existe $z = z_m \in\,]\min(c,x), \max(c,x)[$ tal que*

$$R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(z)(x-c)^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Notem que

$$]\min(c,x), \max(c,x)[= \begin{cases}]c,x[& \text{se } c < x; \\ ]x,c[& \text{se } c > x. \end{cases}$$

Observação 2.9.11. *A fórmula para o resto no Teorema 2.9.10 é a chamada* forma de Lagrange*. Existem outras fórmulas, que não incluímos nestes apontamentos.*

Na prática, o Teorema do Resto (Teorema 2.9.10) permite-nos encontrar limites superiores de $R_m(x)$ num certo intervalo à volta de c. Revejamos os nossos exemplos não-polinomiais.

Exemplo 2.9.12.

1. *Sejam $f(x) = e^x$ e $c = 0$. Pelo Teorema do Resto, para todos os $m \in \mathbb{N}_0$ e $x \in \mathbb{R}$ existe $z = z_m \in]\min(0,x), \max(0,x)[$ tal que*

$$R_m(x) = \frac{e^z x^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Logo, para todo o $x \in \mathbb{R}$, verifica-se

$$\lim_{m\to\infty} T_m(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{e^z x^{m+1}}{(m+1)!} = 0. \tag{18}$$

A última igualdade pode ser provada da seguinte maneira: a série

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^z x^{m+1}}{(m+1)!}$$

converge, pelo Critério de Leibniz. Por isso, o Critério Necessário dá a última igualdade em (18)*.*

Isto tudo mostra que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$.

2. *Sejam $f(x) = \ln(x)$ e $c = 1$. Pelo Teorema do Resto, para todos os $m \in \mathbb{N}$ e $x > 0$ existe $z = z_m \in]\min(1,x), \max(1,x)[$ tal que*

$$T_m(x) = (-1)^m \frac{(x-1)^{m+1}}{(m+1)z^{m+1}}.$$

Reparem que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{(x-1)^{m+1}}{(m+1)z^{m+1}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]1/2, 2].$$

Para esses valores de x verifica-se

$$0 \le \frac{x-1}{z} \le 1,$$

logo

$$0 \le \frac{(x-1)^{m+1}}{(m+1)z^{m+1}} \le \frac{1}{m+1}.$$

Isto mostra que

$$ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$$

para todo o $x \in]1/2, 2]$.

Usando outros argumentos, mostraremos no Exemplo 2.9.17 que este resultado é válido para todo o $x \in]0, 2]$.

3. Sejam $f(x) = \sin(x)$ *e* $c = 0$. *Pelo Teorema do Resto, para todos os* $m \in \mathbb{N}$ *e* $x \in \mathbb{R}$ *existe* $z = z_m \in]\min(0,x), \max(0,x)[$ *tal que*

$$R_{2m+1}(x) = \frac{(-1)^{m+1}\cos(z)x^{2m+3}}{(2m+3)!}.$$

O contradomínio do cosseno é $[-1,1]$, *logo*

$$\left|\frac{(-1)^{m+1}\cos(z)x^{2m+3}}{(2m+3)!}\right| \leq \frac{|x|^{2m+3}}{(2m+3)!}.$$

É fácil de mostrar que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{|x|^{2m+3}}{(2m+3)!} = 0$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$, *logo* $\lim_{m\to\infty} R_{2m+1}(x) = 0$, *por enquadramento.*

Isto mostra que

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Nem todas as funções suaves admitem uma série de Taylor "bem comportada". Daí a seguinte definição e o contra-exemplo a seguir.

Definição 2.9.13. *Seja* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *uma função suave num intervalo* I. *A função* f *diz-se* analítica *num ponto* $c \in I$ *se existem* $R \in \mathbb{R}^+$ *e uma série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *tal que* $]c-R, c+R[\subseteq I$ *e*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n,$$

para todo o $x \in]c-R, c+R[$.

Exemplo 2.9.14. *Seja* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função definida por*

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Demonstremos que f é suave em 0. Em primeiro lugar, obtemos

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = 0$$

e

$$f'(x) = \left(e^{-1/x^2}\right)' = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2},$$

para $x \neq 0$.

Portanto,

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Do mesmo modo prova-se que

$$\left(e^{-1/x^2}\right)^{(n)} = \begin{cases} P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

onde P_n é um polinómio. Por isso,

$$T(f,0)(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como $f(x) > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, chegamos à conclusão de que $f(x)$ não é analítica em $x = 0$. Dito doutra maneira, é impossível aproximar $f(x)$ por polinómios numa vizinhança de 0.

Faltam ainda dois teoremas, cuja demonstração omitimos porque requer a noção de *convergência uniforme*, que infelizmente está fora do âmbito destes apontamentos.

Teorema 2.9.15. *Seja*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

para todo o $x \in]c-R, c+R[$, onde $R > 0$ é o raio de convergência da série de potências.

1. *Para todo o $x \in]c-R, c+R[$ pode-se derivar a série termo por termo, i.e.*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1},$$

mantendo-se o mesmo raio da convergência.

2. *Para todo o $x \in]c-R, c+R[$ pode-se primitivar a série termo por termo, i.e.*

$$\int f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x-c)^{n+1}}{n+1} + C,$$

mantendo-se o mesmo raio de convergência. Obviamente, esta igualdade entre primitivas é válida a menos duma constante $C \in \mathbb{R}$.

Antes de ilustrarmos a utilidade do Teorema 2.9.15 com um exemplo, damos primeiro o chamado *Teorema de Abel*.

Teorema 2.9.16 (Teorema de Abel)**.** *Seja*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

para todo o $x \in]c-R, c+R[$, onde $R > 0$ é o raio de convergência da série de potências.

1. *Se $\sum_{n=0} a_n R^n$ converge, o limite lateral esquerdo $\lim_{x \to R^-} f(x)$ existe e*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = \lim_{x \to R^-} f(x).$$

2. *Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ converge, o limite lateral direito $\lim_{x \to (-R)^+} f(x)$ existe e*

$$\sum_{n=0} a_n (-R)^n = \lim_{x \to (-R)^+} f(x).$$

Exemplo 2.9.17. *Seja $f(x) = \ln(1+x)$. Queremos determinar a série de Taylor de f, com centro em $c = 0$, e estudar a sua convergência. Para isso derivamos primeiro a função f:*

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Esta fracção podemos escrever como uma série geométrica:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

para todo o $x \in]-1,1[$.

Pelo Teorema 2.9.15(ii), podemos primitivar esta série termo por termo:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \tag{19}$$

para todo o $x \in]-1,1[$. *Reparem que* $\int 1/(1+x)\,dx = \ln(1+x) + b$, *para uma constante* $b \in \mathbb{R}$. *Para ver que* $b = 0$ *em* (19), *basta substituir* $x = 0$ *em ambos os lados da igualdade.*

Porém, podemos obter um resultado ainda melhor. A série de potências em (19) *converge simplesmente em* $x = 1$, *porque nesse ponto é igual à série harmónica alternada. Pelo Teorema de Abel (Teorema 2.9.16), isto implica que*

$$\ln(2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}.$$

Reparem que a série de potências em (19) *diverge em* $x = -1$, *uma vez que nesse ponto é igual à série harmónica. Isto é consistente com o facto de* -1 *não pertencer ao domínio de* $\ln(1+x)$.

2.10 Exercícios

1. Mostra que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente nas seguintes alíneas:

   (a) $a_n = n^{-1/n}$.

   (b) $a_n = \dfrac{\ln(n)}{\ln(3+n^2)}$.

   (c) $a_n = \dfrac{1}{\sin^2(1/n)}$.

   (d) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$.

   (e) $a_n = (-1)^n \cos(n)$.

2. Em cada alínea mostra que $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ é uma série geométrica e verifica se é convergente. Em caso afirmativo, calcula a soma.

   (a) $a_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n$ e $d = 3$.

   (b) $a_n = e^{-n}$ com $d = 1$.

   (c) $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{2-n}$ e $d = 4$.

   (d) $a_n = \frac{(-1)^n 3^{n+1}}{2^{2n-4}}$ e $d = 3$.

   (e) $a_n = \frac{5^{n-4}}{3^{3n-17}}$ e $d = 7$.

3. Em cada alínea mostra que $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ é uma série de Mengoli e verifica se é convergente. Em caso afirmativo, calcula a soma.

   (a) $a_n = \frac{1}{25n^2 + 15n - 4}$ e $d = 1$.

   (b) $a_n = \frac{4n}{(n^2 - 2n + 1)(n^2 + 2n + 1)}$ e $d = 2$.

   (c) $a_n = \frac{n!}{(n+5)!}$ e $d = 0$. Sugestão: calcule $b_n - b_{n+1}$ com $b_n = \frac{n!}{(n+4)!}$.

   (d) $a_n = n^2 - (n+2)^2$ e $d = 5$.

   (e) $a_n = \frac{2n^2 + 4n + 1}{(n^2 + n)^2}$ com $d = 1$. Sugestão: resolva a equação

   $$\frac{2n^2 + 4n + 1}{(n^2 + n)^2} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n+1} + \frac{d}{(n+1)^2}.$$

   (f) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2 + 8n + 17}}$ e $d = 3$.

   (g) $a_n = \ln\left(\frac{n+3}{n}\right)$ e $d = 1$.

   (h) $a_n = \frac{1}{n^2 + 6n + 8}$ e $d = 2$.

(i) $a_n = \dfrac{1}{n^2+2n-8}$ e $d = 3$.

4. Em cada alínea determina a natureza de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, utilizando uma das versões do Critério de Comparação:

   (a) $a_n = \dfrac{n^4+7n^3+3}{3n^5+8n^2+2}$.

   (b) $a_n = \dfrac{7n}{2n^3+1}$.

   (c) $a_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$.

   (d) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}+1/2}$.

   (e) $a_n = \dfrac{(1+\frac{1}{n})^n}{n^2}$.

   (f) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n^5}+3}$

5. Em cada alínea determina a natureza de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, utilizando o Critério de Cauchy ou o Critério de d'Alembert:

   (a) $a_n = \dfrac{4^n}{n!}$.

   (b) $a_n = \dfrac{n!2^n}{n^n}$.

   (c) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-n^2}$

   (d) $a_n = \dfrac{n}{2^n}$.

   (e) $a_n = \left(\dfrac{2n}{3n+1}\right)^n$.

   (f) $a_n = \dfrac{n^2+2n+3}{3^n+2}$.

   (g) $a_n = \dfrac{3n+1}{(\sqrt{2})^n}$.

6. Em cada alínea determina a natureza de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, utilizando um critério à tua escolha:

(a) $a_n = \dfrac{n}{(n+1)2^{n-1}}$.

(b) $a_n = \dfrac{n2^n + 5}{4n^3 + 3n}$.

(c) $a_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

(d) $a_n = \dfrac{(2n-1)!}{4^{2n-1}}$.

(e) $a_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

(f) $a_n = n^4 2^{-n}$.

(g) $a_n = \dfrac{2n-1}{2n}$.

(h) $a_n = \ln(4 - \frac{3}{n})$.

(i) $a_n = \dfrac{1}{n^3(n+1)}$.

(j) $a_n = \left(2 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{4}{n^2}\right)^2$.

(k) $a_n = \dfrac{1}{2^n + 1}$.

(l) $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{3^n n!}$.

(m) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n} - 1/2}$.

(n) $a_n = n \sin(\dfrac{1}{n})$.

(o) $a_n = \sin(\dfrac{1}{n^2})$.

(p) $a_n = \dfrac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$.

(q) $a_n = \dfrac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$.

(r) $a_n = \ln\left(\dfrac{n^2}{2n^2+1}\right)$.

7. Em cada alínea determina a natureza de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, indicando se é simples ou absolutamente convergente ou divergente:

   (a) $a_n = (-1)^n \cos(n)$.

   (b) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n2^n}$.

   (c) $a_n = (-1)^n \dfrac{\sqrt{n}}{n+4}$.

   (d) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$.

   (e) $a_n = \cos\left(\dfrac{(-1)^n n}{n^2+1}\right)$.

   (f) $a_n = (-1)^n \dfrac{(2n+1)}{n(n+1)}$.

   (g) $a_n = (-1)^n \dfrac{3^{n-1}}{4^n}$.

   (h) $a_n = (-1)^n \dfrac{n!3^n}{(2n)^n}$.

   (i) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}$.

   (j) $a_n = (-1)^n \dfrac{n^2-3n+1}{n^4+5n^2-8}$.

   (k) $a_n = \dfrac{\sin(n)}{n^2}$.

   (l) $a_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$.

   (m) $a_n = (-1)^n \dfrac{n\ln(n)}{n^4+5n^2+3}$.

8. Determina o raio e o intervalo de convergência das seguintes séries de potências:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(x-2)^n$. (Fórmula de Stirling: $\lim_{n\to\infty} n!e^n/n^{n+\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi}$))

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{n(n+1)}$.

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n+1}$.

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n5^n}$.

(g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x+1)^{2n}}{n^2+1}$.

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n}$.

(i) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)}(x-4)^n$.

9. Determina a série de Taylor das seguintes funções com o centro indicado:

   (a) $f(x) = \sin(2x)$ com $c = 0$.

   (b) $f(x) = \cos(x)$ com $c = \pi/2$.

   (c) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ com $c = 0$.

   (d) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ com $c = 0$.

10. Utilizando as séries de MacLaurin que já conheces, determina a série de MacLaurin das seguintes funções:

   (a) $f(x) = 2xe^x$.

   (b) $f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

(c) $f(x) = \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

(d) $f(x) = e^{x^2}$.

(e) $f(x) = \dfrac{x^2}{9 + x^2}$.

(f) $f(x) = \ln(1 + 2x)$.

(g) $f(x) = \dfrac{x + 3}{2 - x}$.

11. Usando o Teorema 2.9.15, determina a série de Taylor das seguintes funções com o centro indicado (ver Exemplo 2.9.17 também):

    (a) $f(x) = 1/x^2$ com $c = 1$. (sugestão: primitivar f e usar $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{1 + (x - 1)}$).

    (b) $f(x) = \arctan(x)$ com $c = 0$.

12. Usando séries de Taylor, determinem os seguintes limites:

    (a)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}.$$

    (b)
$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \arctan(x)}{x^2}.$$

13. Sejam

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^{2n+1}}{2n + 1}; \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n}; \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n + 1)3^{2n}}.$$

    (a) Determina o intervalo de convergência para cada série;

    (b) Calcula $f'(1/4)$ e $h'(1)$;

    (c) Determina a função $g(x)$, recorrendo à série derivada (e usando Teorema 2.9.15).

14. Determina a soma das seguintes séries, utilizando a série de Taylor de funções conhecidas:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n+1}}{2^n(2n+1)!}$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{n}}{n!}$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-7)^n\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}$.

15. Determina a série de Taylor das seguintes primitivas. Note-se que nenhuma delas tem uma solução em termos de funções elementares:

(a) $\displaystyle\int\frac{\cos(x^3)-1}{x^2}dx$.

(b) $\displaystyle\int\frac{\sin(x)}{x}dx$.

(c) $\displaystyle\int e^{-x^2/2}dx$.

(d) $\displaystyle\int\frac{\ln(x+1)}{x}dx$.

2.11 Algumas soluções

2.

(a)

$$\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n.$$

Série geométrica com $r=-1/2$. Como $-1<r<1$, a série converge. A soma é igual a

$$\frac{(-1/2)^3}{1+(1/2)}=-\frac{1}{12}.$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-1}\right)^n.$$

Série geométrica com $r = e^{-1}$. Como $-1 < r < 1$, a série converge. A soma é igual a

$$\frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} = \frac{1}{e - 1}.$$

(c)

$$\sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{2-n} = \sum_{n=4}^{\infty} 4^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} 4^n.$$

Série geométrica com $r = 4$. Como $r > 1$, a série diverge.

(d)

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{n+1}}{2^{2n-4}} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{n+1}}{4^{n-2}}.$$

Série geométrica com $r = -3/4$. Como $-1 < r < 1$, a série converge. A soma é igual a

$$\frac{-3^4/4}{1 + (3/4)} = -\frac{81}{7}.$$

(e)

$$\sum_{n=7}^{\infty} \frac{5^{n-4}}{3^{3n-17}}.$$

Série geométrica com $r = 5/27$. Como $-1 < r < 1$, a série converge. A soma é igual a

$$\frac{5^3/3^4}{1 - (5/27)} = \frac{125}{66}.$$

3.

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25n^2 + 15n - 4} = \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n - 1} - \frac{1}{5n + 4}.$$

Série de Mengoli com $t = 1$ e $b_n = 1/5\,(5n - 1)$. Como $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, a série converge. A soma é igual a $b_1 = 1/20$.

(b)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-2n+1)(n^2+2n+1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-2n+1} - \frac{1}{n^2+2n+1}$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Série de Mengoli com $t = 2$ e $b_n = 1/\left(n-1\right)^2$. Como $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, a série converge. A soma é igual a $b_2 + b_3 = 1 + (1/4) = 5/4$.

(c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+5)!} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+4)!} - \frac{(n+1)!}{(n+5)!}.$$

Série de Mengoli com $t = 1$ e $b_n = (n!)\,/4\,(n+4)!$. Como $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, a série converge. A soma é igual a $b_0 = 1/96$.

(d)

$$\sum_{n=5}^{\infty} n^2 - (n+2)^2.$$

Série de Mengoli com $t = 2$ e $b_n = n^2$. Como $\lim_{n\to\infty} n^2$ é infinito, a série diverge.

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+4n+1}{(n^2+n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+4n+1}{n^2(n+1)^2}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

Série de Mengoli com $t = 1$ e

$$b_n = \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} = \frac{2n+1}{n^2}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, a série converge. A soma é igual a $b_1 = 3$.

(f)

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+8n+17}}$$

Série de Mengoli com $t = 4$ e

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, a série converge. A soma é igual a

$$b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{26}} + \frac{1}{\sqrt{37}}.$$

(g)

$$\ln\left(\frac{n+3}{n}\right) = \ln(n+3) - \ln(n) = -\ln(n) - (-\ln(n+3)).$$

Série de Mengoli com $t = 3$ e $b_n = -\ln(n)$. Como $\lim_{n\to\infty} b_n$ é (menos) infinito, a série diverge.

(h)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+6n+8} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+4}.$$

Série de Mengoli com $t = 2$ e

$$b_n = \frac{1}{2(n+2)}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, a série converge. A soma é igual a

$$b_2 + b_3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{10} = \frac{9}{40}.$$

(i)

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n-8} = \frac{1}{6}\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+4}.$$

Série de Mengoli com $t = 6$ e

$$b_n = \frac{1}{6(n-2)}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, a série converge. A soma é igual a

$$b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7 + b_8 = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) = \frac{49}{120}.$$

4.

(a) A série diverge, por ser da mesma natureza (C.d.C v2) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

que diverge porque é a série harmónica.

(b) A série converge, por ser da mesma natureza (C.d.C v2) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

que converge porque é uma série de Dirichlet com $s = 2 > 1$.

(c) A série diverge, pelo C.d.C. v1, porque

$$\frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n} \qquad \forall\, n \geq 3$$

e $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge (série harmónica).

(d) A série diverge, por ser da mesma natureza (C.d.C v2) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(1/2)}},$$

que diverge porque é uma série de Dirichlet com $s = 1/2 \leq 1$.

(e) A série converge, por ser da mesma natureza (C.d.C v2) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

que converge porque é uma série de Dirichlet com $s = 2 > 1$.

(f) A série converge, por ser da mesma natureza (C.d.C v2) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

que converge porque é uma série de Dirichlet com $s = 2 > 1$.

5.

(a) Convergente, pelo Critério de d'Alembert.

(b) Convergente, pelo Critério de d'Alembert.

(c) Convergente, pelo Critério de Cauchy.

(d) Convergente, por qualquer um dos dois critérios.

(e) Convergente, pelo Critério de Cauchy.

(f) Convergente, por qualquer um dos dois critérios.

(g) Convergente, por qualquer um dos dois critérios.

6.

(a) Convergente, pelo Critério de Cauchy ou o Critério de d'Alembert.

(b) Divergente, pelo Critério de d'Alembert.

(c) Convergente, série de Dirichlet com $s = 3/2 > 1$.

(d) Divergente, pelo Critério de d'Alembert.

(e) Divergente, por comparação (C.d.C. v2) com

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n},$$

que diverge porque é uma série de Dirichlet com $s = 1/2 \leq 1$.

(f) Convergente, pelo Critério de Cauchy ou o Critério de d'Alembert.

(g) Divergente, pelo Critério Necessário.

(h) Divergente, pelo Critério Necessário.

(i) Convergente, por comparação (C.d.C. v1 ou v2) com

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4,$$

que converge porque é uma série de Dirichlet com $s = 4 > 1$.

(j) Divergente, pelo Critério Necessário.

(k) Convergente, por comparação (C.d.C. v1 ou v2) com

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n},$$

que converge porque é uma série geométrica com $r = 1/2$.

(l) Convergente, pelo Critério de d'Alembert.

(m) Divergente, por comparação (C.d.C. v2) com

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n},$$

que diverge porque é uma série de Dirichlet com $s = 1/2 \leq 1$.

(n) Divergente, pelo Critério Necessário. item(o) Convergente, por comparação (C.d.C. v1 ou v2) com

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2,$$

que converge porque é uma série de Dirichlet com $s = 2 > 1$. item(p) Convergente, por comparação (C.d.C. v2) com

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3,$$

que converge porque é uma série de Dirichlet com $s = 3 > 1$.

(q) Convergente, pelo Critério de Cauchy ou o Critério de d'Alembert.

(r) Divergente, pelo Critério Necessário.

7

(a) Divergente, pelo Critério Necessário.

(b) Absolutamente convergente, por comparação (C.d.C. v1 ou v2) com

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n},$$

que converge porque é uma série geométrica com $r = 1/2$.

(c) Simplesmente convergente. A série dos módulos diverge, por comparação (C.d.C. v2) com uma série de Dirichlet divergente com $s = 1/2 \leq 1$. A própria série converge, pelo Critério de Leibniz.

(d) Simplesmente convergente. A série dos módulos diverge, porque é uma série de Dirichlet divergente com $s = 1/3 \leq 1$. A própria série converge, pelo Critério de Leibniz.

(e) Divergente, pelo Critério Necessário.

(f) Simplesmente convergente. A série dos módulos diverge, por comparação (C.d.C. v2) com uma série de Dirichlet divergente com $s = 1 \leq 1$. A própria série converge, pelo Critério de Leibniz.

(g) Absolutamente convergente. A série dos módulos é uma série geométrica convergente com $r = 3/4$.

(h) Absolutamente convergente. A série dos módulos converge, pelo Critério de d'Alembert.

(i) Simplesmente convergente. A série dos módulos diverge, por comparação (C.d.C. v1) com uma série de Dirichlet divergente com $s = 1 \leq 1$. A própria série converge, pelo Critério de Leibniz.

(j) Absolutamente convergente. A série dos módulos converge, por comparação (C.d.C. v2) com uma série de Dirichlet convergente com $s = 2 > 1$.

(k) Absolutamente convergente. A série dos módulos converge, por comparação (C.d.C. v1) com uma série de Dirichlet convergente com $s = 2 > 1$.

(l) Simplesmente convergente. A série dos módulos diverge, por comparação (C.d.C. v1) com uma série de Dirichlet divergente com $s = 1 \leq 1$. A própria série converge, pelo Critério de Leibniz.

(k) Absolutamente convergente. A série dos módulos converge, por comparação (C.d.C. v1) com uma série de Dirichlet convergente com $s = 2 > 1$.

8. Nas seguintes respostas I_0 é o intervalo de convergência absoluta, I é o intervalo de convergência (simples ou absoluta), c é o centro da série de potências e R é o raio de convergência.

   (a) $I_0 = I =]-1, 1[$, $c = 0$, $R = 1$.

(b) $I_0 = I =]2-e, 2+e[$, $c = 2$, $R = e$.

(c) $I_0 = I = [-6, -4]$, $c = -5$, $R = 1$.

(d) $I_0 = I =]-2, 4[$, $c = 1$, $R = 3$.

(e) $I_0 =]-1, 1[$, $I = [-1, 1]$, $c = 0$, $R = 1$.

(f) $I_0 =]-2, 8[$, $I = [-2, 8[$, $c = 3$, $R = 5$.

(g) $I_0 = I = [-2/5, 0]$, $c = -1/5$, $R = 1/5$.

(h) $I_0 =]0, 1[$, $I = [0, 1[$, $c = 1/2$, $R = 1/2$.

(i) $I_0 = I =]3, 5[$, $c = 4$, $R = 1$.