# Análise Matemática II

Sucessões e Séries

Exercícios

## 1 Sucessões

1. Mostre que a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com
$$r^n$$
converge sse $-1 < r \leq 1$. Em caso de convergência, determine o limite.

2. Mostre que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{1/n} = 1.$$

3. Estude a natureza das seguintes sucessões (cujo termo geral está indicado). Em caso de convergência, determine o limite.

   (a) $\dfrac{\sqrt{n^2+5}}{n}$

   (b) $\sqrt{n^2+n} - n$

   (c) $(an)^{b/n}$ $(a, b \in \mathbb{R}^+)$

   (d) $(-1)^n$

   (e) $\left(2 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

   (f) $\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$

   (g) $\dfrac{n!}{(n-2)!(n^2+1)}$

   (h) $\dfrac{2^{n+1}+3^n}{2^n+3^{n+1}}$

   (i) $\cos(n\pi) + (-1)^{n+1}$

   (j) $\dfrac{(-1)^n}{n+1}$

   (k) $\left(\dfrac{n}{1+n}\right)^{\frac{1}{n}}$

   (l) $\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$

   (m) $\dfrac{3n^{7/2}+2n^2}{n+4\sqrt{n+n^7}}$

   (n) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$

4. Usando um enquadramento de sucessões, mostre que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0.$$

5. Usando enquadramentos, determine a natureza das seguintes sucessões. Em caso de convergência, calcule o limite.

   (a) $\dfrac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \dfrac{n}{\sqrt{n^4+2}} + \cdots + \dfrac{n}{\sqrt{n^4+2n+1}}$

   (b) $\dfrac{n}{\sqrt{n(n+1)}} + \dfrac{n}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \cdots + \dfrac{n}{\sqrt{(2n-1)2n}}$

   (c) $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

6. Quais das seguintes sucessões são monótonas e/ou limitadas?

   (a) $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$

   (b) $\dfrac{n+1}{n+2}$

   (c) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

   (d) $\dfrac{(-1)^n}{n}$

   (e) $\dfrac{n^2+n}{n+4}$

   (f) $(-1)^n - (-1)^{n+1}$

   (g) $1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$

   (h) $1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

# 2 Séries numéricas

1. Mostra que as seguintes séries são divergentes:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(3+n^2)}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin^2(1/n)}$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$.

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(n)$.

2. Mostre que as seguintes séries são geométricas e determine a sua natureza. Em caso de convergência, determine a soma.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{2-n}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{n+1}}{2^{2n-4}}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=7}^{\infty} \frac{5^{n-4}}{3^{3n-17}}$

3. Mostre que as seguintes séries (com primeiro termo $a_d$) são de Mengoli e determine a sua natureza. Em caso de convergência, determine a soma.

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+6n+8}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n-8}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25n^2+15n-4}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4n}{(n^2-2n+1)(n^2+2n+1)}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} n^2-(n+2)^2$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+4n+1}{(n^2+n)^2}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+3}{n}\right)$

(h) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{n^2+8n+17}}$

4. Determine a natureza das seguinte séries, utilizando uma das versões do Critério de Comparação.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+7n^3+3}{3n^5+8n^2+2}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n}{2n^3+1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1/2}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{n^2}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n^5}+3}$

5. Determine a natureza das seguinte séries, utilizando o Critério de Cauchy ou o Critério de d'Alembert.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!2^n}{n^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n^2}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{n}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n+3}{3^n+2}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{(\sqrt{2})^n}$

6. Determine a natureza das seguintes séries, utilizando um critério à sua escolha:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)2^{n-1}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^n+5}{4n^3+3n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{4^{2n-1}}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^4 2^{-n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2n}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln(4-\tfrac{3}{n})$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3(n+1)}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}\right)^{2}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{3^n n!}$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}-1/2}$

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\sin(\frac{1}{n})$

(o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{1}{n^2})$

(p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$

(q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$

(r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2}{2n^2+1}\right)$

7. Determine a natureza das seguintes séries, indicando se são simplesmente convergente, absolutamente convergente ou divergente.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos(n)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n2^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+4}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{3^n}-\frac{5}{2}^n$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)}{n(n+1)}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{n-1}}{4^n}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!3^n}{(2n)^n}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n)}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2-3n+1}{n^4+5n^2-8}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n)}{n^2}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\ln(n)}{n^4+5n^2+3}$

# 3 Séries de potências

1. Determine o raio e o intervalo de convergência das seguintes séries de potências.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}nx^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(x-2)^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{n(n+1)}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^n+1}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n5^n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(5x+1)^{2n}}{n^2+1}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{n}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)}(x-4)^n$

2. Determine a série de Taylor das seguintes funções com o centro indicado.

   (a) $f(x) = \sin(2x)$ com $c = 0$

   (b) $f(x) = \cos(x)$ com $c = \pi/2$

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ com $c = 0$

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ com $c = 0$

3. Utilizando as séries de MacLaurin que já conhece, determine a série de MacLaurin das seguintes funções.

   (a) $f(x) = 2xe^x$

   (b) $f(x) = \sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

   (c) $f(x) = \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

   (d) $f(x) = e^{x^2}$

   (e) $f(x) = \dfrac{x^2}{9+x^2}$

   (f) $f(x) = \ln(1+2x)$

   (g) $f(x) = \dfrac{x+3}{2-x}$

4. Determine a série de Taylor das seguintes funções com o centro indicado.

   (a) $f(x) = 1/x^2$ com $c = 1$. Sugestão: primitivar $f$ e usar $\frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)}$.

   (b) $f(x) = \arctan(x)$ com $c = 0$

5. Usando séries de Taylor, determine os seguintes limites.

   (a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}$$

   (b)
$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan(x)}{x^2}$$

6. Sejam

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^{2n+1}}{2n+1} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)3^{2n}}.$$

(a) Determine o intervalo de convergência para cada série.

(b) Calcule $f'(1/4)$ e $h'(1)$.

(c) Determine a função $g(x)$, recorrendo à série das derivadas.

7. Determine a soma das seguintes séries, utilizando a série de Taylor de funções conhecidas.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n+1}}{2^n(2n+1)!}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{n}}{n!}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-7)^n\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}$

8. Determine a série de Taylor das seguintes primitivas. Note-se que nenhuma delas tem uma solução em termos de funções elementares.

(a) $\displaystyle\int\frac{\cos(x^3)-1}{x^2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int\frac{\sin(x)}{x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int e^{-x^2/2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int\frac{\ln(x+1)}{x}\,dx$