Física II (LEI) 2025/2026

Dário Passos e José Luís Argain

Regras: atenção à FUC (assiduidade, justificação de faltas (GAE), etc.), conduta em laboratório

Dados e relatórios (1 por grupo de 3 elementos)

- Ter em conta calendarização para entregar!
- Preferencialmente em PDF (para evitar "desformatações" entre PCs)
- Nome do ficheiros REL_EXP#_PL#_G3.pdf, DADOS_EXP#_PL#_G3....
- Secções
  - ❑ **Página de rosto**: nomes, números, nome da experiência, PL#, nome do prof., data
  - ❑ **Introdução**: uma descrição do propósito da experiência e do princípio físico estudado. Não deve exceder meia página
  - ❑ **Material e procedimento**: lista do material e descrição sumária do procedimento. Também não deve exceder meia página (pelo que as duas primeiras secções não deem exceder uma página)
  - ❑ **Apresentação dos dados**: tabela(s) com os resultados
  - ❑ **Análise dos dados**: gráfico(s), regressões e inferência dos parâmetros a determinar a partir do declive da reta, se aplicável.
  - ❑ **Discussão**: comparação do(s) resultado(s) obtido(s) com o(s) valor(es) esperado(s), se aplicável. Justificação de desvios. Sugestões para melhorar a experiência.

Experiências

1) Expansão térmica de Líquidos
2) Calor Específico e Lei de Boyle-Mariote
3) Equivalente térmico do Calor
4) Campo Magnético no exterior de condutores lineares
5) Indução magnética

Relações lineares

$$y = m\,x + b$$

Medições experimentais

Medida (ato único / individual)
Medição (envolve várias medidas e pode requerer o use de estatística ou modelo)

Tipos de Erro

Grosseiros (ex. trocar algarismos ao escrever ou trocar unidades)
Sistemáticos (ex. tomar o início errado de uma escala, offset do instrumento, etc.
Aleatórios (imprevisto, ex. mau contacto, ruido na tensão, tempo de reação, etc.)

Erro de leitura/instrumental: associado à escala do instrumento (analógico ou digital)
Erro observacional: conjunto dos error aleatórios e sistemático

Incerteza da observação Δx: máximo entre error de leitura e observacional

$$X = x \pm \Delta x$$

Erro de observação

Mesurando

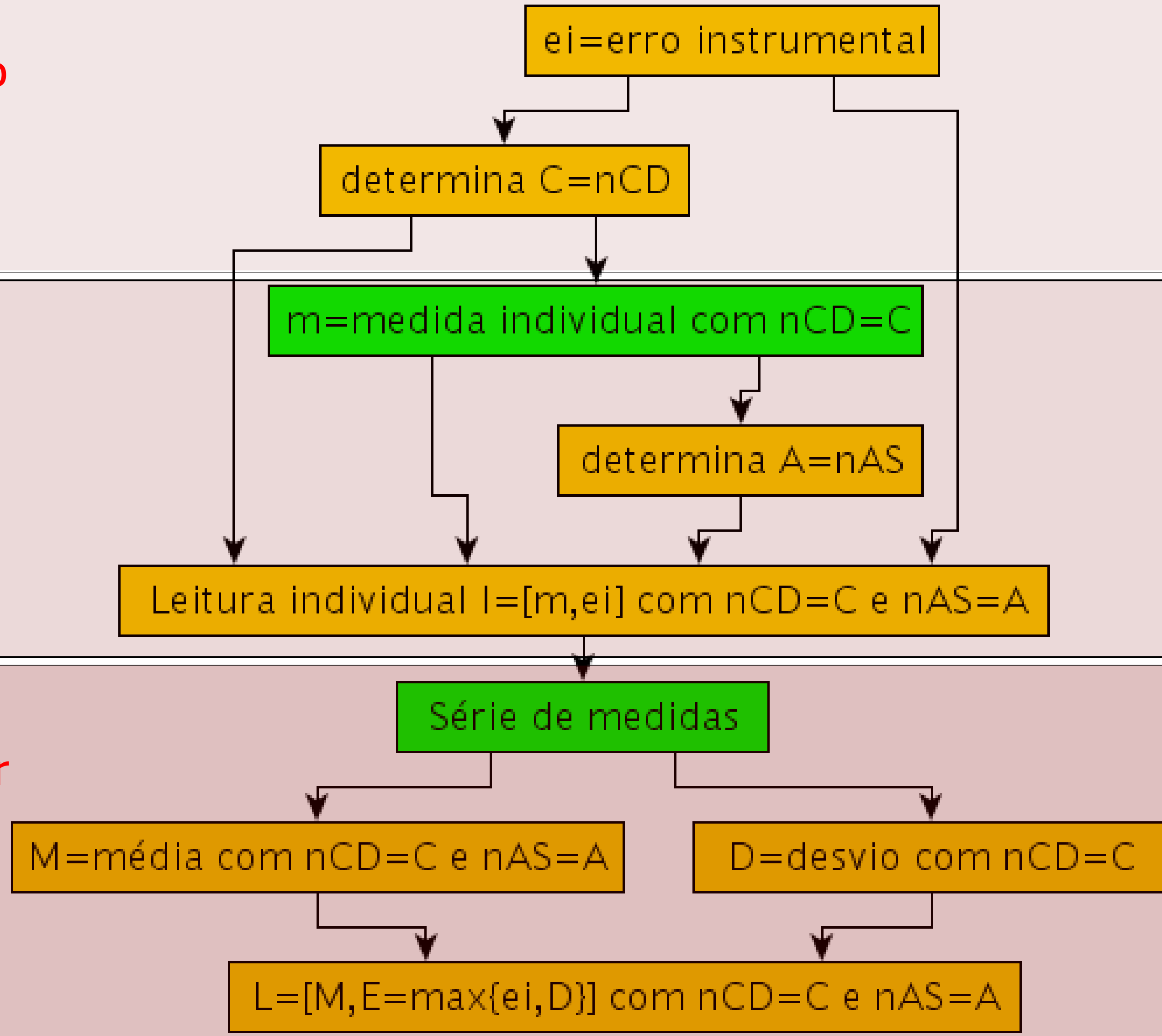
Medida

Esquema Geral

Primeiro passo: determinar o erro instrumental do instrumento de medida que vamos usar

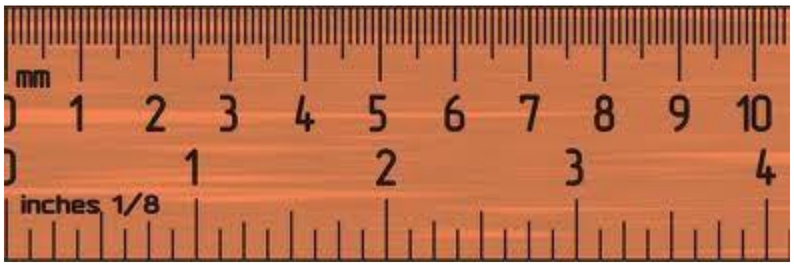
Segundo passo: fazer uma medida individual

Terceiro passo (se aplicável): fazer uma série de medidas, isto é, repetir várias vezes a medida anterior



Passo 1: erro instrumental

ei=erro instrumental



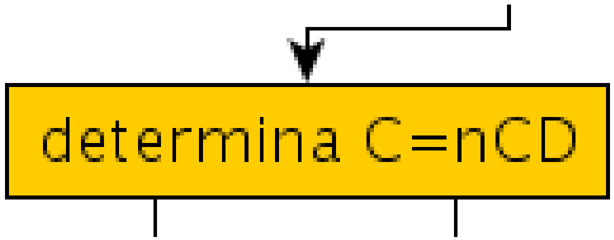
Se a escala é analógica
ei = metade da menor divisão da escala

Ex.: para uma régua milimétrica ei=0.5 mm, pois a menor divisão é 1 mm

Se a escala é digital
ei = menor divisão da escala

Ex.: para um cronómetro digital com 1/100 s tem-se ei=0.01 s pois a menor divisão é 0.01 s

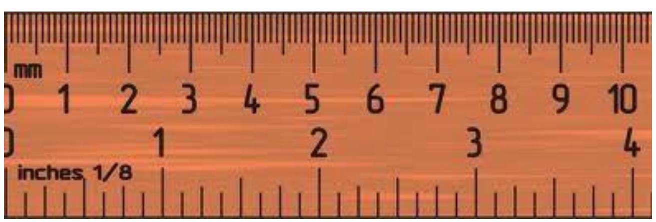
Passo 2: determina o nCD



nCD = "número de casa decimais"

É o erro instrumental que determina o nCD. Como o instrumento de medida usado só nos permite medir até à última casa decimal do ei, não faz sentido pensar que alguma medida possa a vir a ter mais casas decimais.

Por outro lado, qualquer medida que se faça vai corresponder a um múltiplo do erro instrumental.



De novo o exemplo da régua.

ei = 0.5 mm

Quer dizer que todas as medidas se vão exprimir na forma ###.# mm.

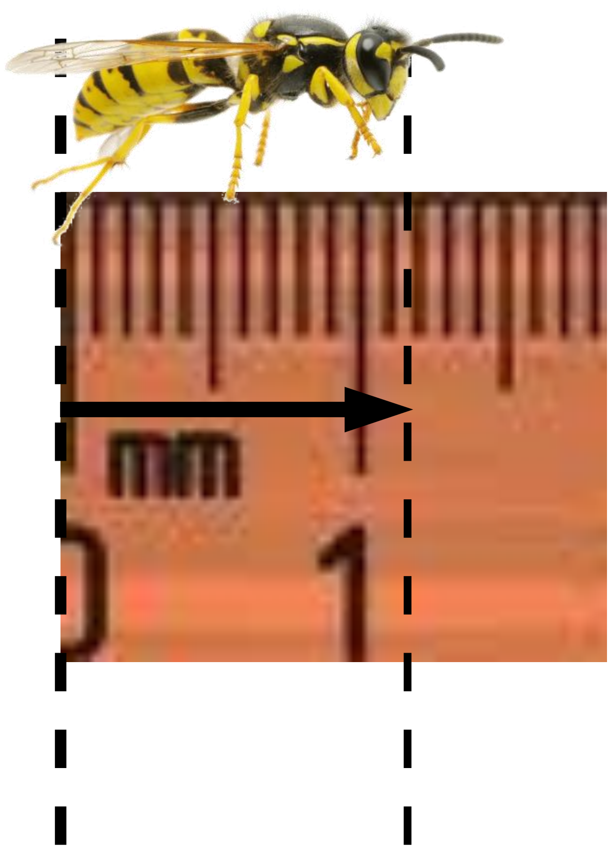
Se mudarmos a unidade para metro, então ei = 0.0005 m e as medidas escrevem- se na forma ###.#### m. <u>Ter em conta as regras para as operações algébricas!</u>

Passo 3: medida individual

m=medida individual com nCD=C

Como já se disse atrás, todas as medidas vão ser expressas com o nCD determinado pelo ei.

Objeto a medir



Neste caso a medida parece estar mais próxima de 12 do que de 11 mm.

Escrevemos então
L=12.0 ± 0.5 mm

1 CD

Neste caso não temos de decidir nada, pois a medida é digital.

Escrevemos directamente
T=353.17 ± 0.01 s

2 CD

Passo 4: determina o nAS

determina A=nAS

nAS = "número de algarismos significativos"

O número de AS é o número de algarismos que têm significado.

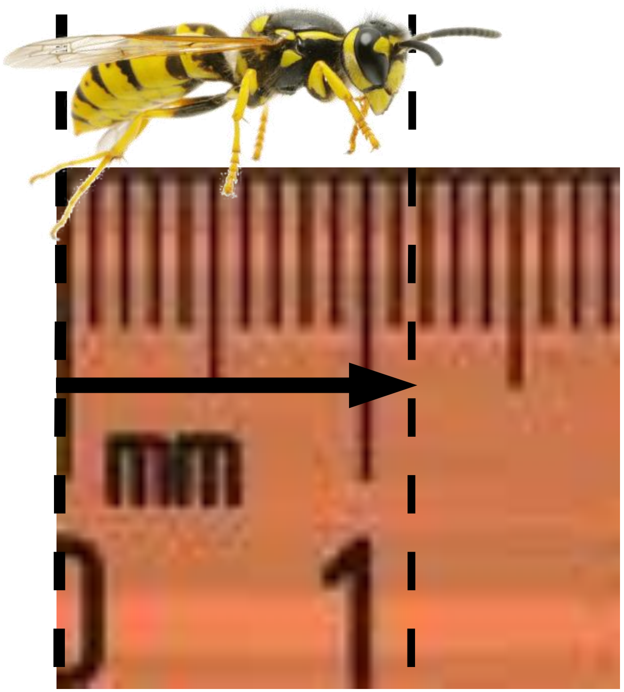
1. Obviamente, zeros à esquerda não contam.
2. Zeros à direita podem também não contar se apenas indicarem ordem de grandeza.
3. O primeiro AS vale por dois se for maior ou igual que 5.

Exemplo	nAS	Comentário
23.256	5	
34	2	
0.0000356	3	Zeros à esquerda não contam
1.0001	5	
6000	1*	*(*Ambíguo)* Zeros à direita <u>sem ponto decimal</u> indicam apenas ordem de grandeza e não contam como AS. Depende de como representamos o número, ex. 6.0×10^3 tem 2, 60.0×10^2 tem 3
6000.	4	O ponto decimal indica que todos os zeros têm significado de medida
2×10^7	1	Na notação exponencial só se contam os AS do pré- factor (é igual a 20 000 000 sem ponto decimal)

Passo 5: leitura individual

Leitura individual I=[m,ei] com nCD=C e nAS=A

Voltemos aos exemplos de há pouco,



L=12.0 ± 0.5 mm

1 CD 3 AS

T=353.17 ± 0.01 s

2 CD 5 AS

M=49.99 ± 0.01 g

2 CD 4 AS

Passo 6: série de medidas

Série de medidas

Podemos fazer apenas uma medida. Mas existem muitas situações em que uma só medida não basta. Por exemplo: medir o tempo que um corpo leva a cair de uma certa altura

Optou-se por fazer uma série de medidas. Os resultados foram, em s

2 CD 3 AS

5.35	5.41	5.55	5.21	5.33	5.96	5.57	5.88	5.62	5.54

A questão que se levanta naturalmente é: qual é o valor mais representativo desta série de medidas? A resposta é: <u>a média</u>.

Seja uma série de medidas $x_1, x_2, \ldots x_N$. O valor médio da série de medidas é

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Média

Neste caso a média da série é 5.5422 s. Usamos este valor?

Passo 7: média e desvio padrão

M=média com nCD=C e nAS=A

Na verdade, a média deve ser representada com o mesmo nAS (3) e nCD (2). Então escrevemos

$$\bar{t} = 5.54 \text{ s}$$

Ficamos então com os dois parâmteros que caracterizam a série de valores:
- a média: 5.54 s
- o desvio: 0.17 s

D=desvio com nCD=C

Para n > 10

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Usamos o desvio padrão da média

Para n < 10

$$\delta = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|x_i - \bar{x}|$$

Usamos o desvio médio

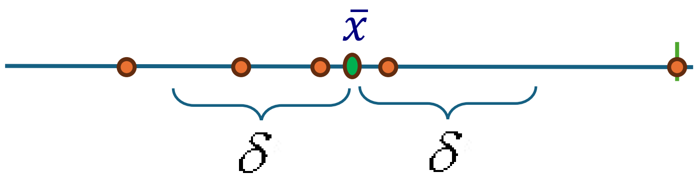
Neste caso, n = 10 logo, obtemos o desvio médio $\delta(t)$= 0.174. Mas temos de reter o nCD. Então

$$\delta(t) = 0.17 \text{ s}$$

Interpretação da incerteza experimental
(para múltiplas observações)

Para n <= 10

$$\boxed{\delta = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|x_i - \bar{x}|}$$



Para n > 10

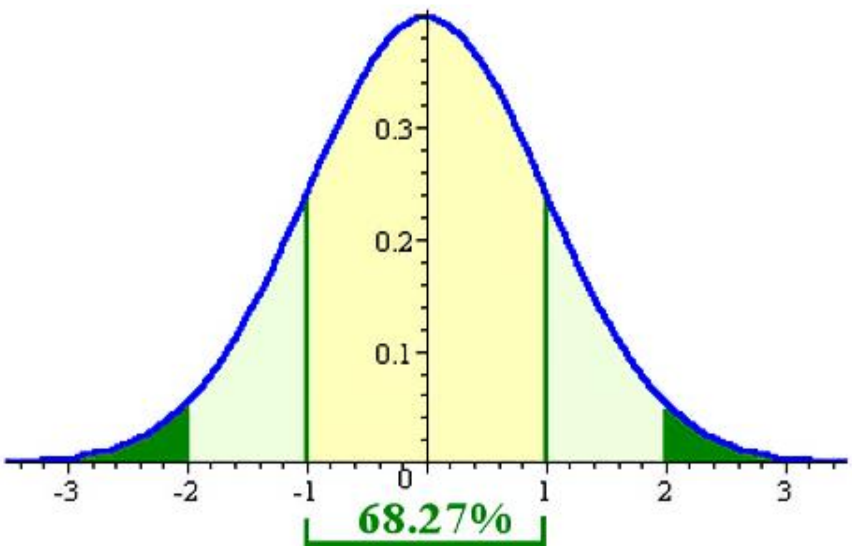
$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}$$

Desvio padrão da média
(erro padrão)

$$\boxed{\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

O desvio padrão da média é usado para o erro de $\bar{x}$

$$\boxed{\bar{x} \pm \sigma_m}$$



O valor de σ representa a dispersão ou intervalo de confiança (assumindo que a distribuição de valores é normal ou gaussiana, **DN** (distribuição teórica dos valores medidos em torno do valor médio). De acordo com a **DN,** σ define um intervalo de confiança de 68%, i.e., 68% de probabilidade as medições estarem no intervalo

$$[\bar{x} - \sigma \,;\, \bar{x} + \sigma\,]$$

Passo 8: valor final

$L=[M, E=\max\{ei, D\}]$ com $nCD=C$ e $nAS=A$

Recordemos então o que determinámos acerca desta série de medidas:

5.35	5.41	5.55	5.21	5.33	5.96	5.57	5.88	5.62	5.54

- Erro instrumental: ei=0.01 s
- Incerteza estatística, dada pelo desvio: $D = \sigma = 0.24$ s
- Média: $\bar{t} = 5.54$ s

$$\underbrace{\max\{ei, D\}=\max\{0.01, 0.24\}=0.24\ \text{s}}$$

Isto quer dizer que devemos escolher o máximo entre o erro instrumental e de medição para representar a incerteza final.

Valor final	$t = 5.54 \pm 0.24$ s

Propagação de erros – I

Suponhamos que medimos o diâmetro de uma esfera. O valor da medição foi

$$d = 3.015 \pm 0.025 \text{ mm} = d_0 \pm \Delta d$$

Queremos agora saber qual é o volume da esfera. Escreveríamos então

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi d^3 = \frac{1}{6}\pi (3.015 \pm 0.025)^3 \, mm^3$$

Como escrever esta expressão na forma $V_0 \pm \Delta V$? Uma forma possível é fazer o seguinte:

$3.015^3 = 27.407028375$
$(3.015+0.025)^3 = 28.094464 = 27.407028375+0.687435625$
$(3.015-0.025)^3 = 26.730899 = 27.407028375 - 0.676129375$

Poderíamos portanto escrever para o volume a seguinte expressão:

$$V = \frac{1}{6}\pi \left(27.40703^{+0.68743}_{-0.67613}\right) = 14.35027^{+0.35994}_{-0.35402} \, mm^3$$

Propagação de erros – II

Mas o procedimento anterior é bastante trabalhoso. Se a incerteza for muito menor do que o valor médio podemos usar uma aproximação baseada na expansão de Taylor:

Vamos recordar a expansão de Taylor em primeira ordem:

$$f(x = x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \Delta x \cdot \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} \equiv f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0) \tag{29}$$

Em particular podemos ter $f(x) \equiv V(d)$, ou seja, a função que vamos considerar é o volume em função do diâmetro. Teríamos então

$$V(d_0 \pm \Delta d) = V(d_0) \pm V'(d_0)\Delta V. \tag{30}$$

No caso da função volume, $V(d) = \pi d^3/6$ temos $V'(d) = \pi d^2/2$ e

$$V(d_0 \pm \Delta d) \approx \frac{\pi}{6}\pi d_0^3 \pm \frac{\pi}{2} d_0^2 \Delta V. \tag{31}$$

Podemos então escrever

valor incerteza

$$V \approx \frac{\pi}{6} 3.015^3 \pm \frac{\pi}{2}(3.015^2 \cdot 0.025) = 14.35027 \pm 0.35697. \tag{32}$$

Propagação de erros – III

Os dois resultados obtidos são muito parecidos. Portanto a forma aproximada dá bons resultados (desde que o valor seja » que a incerteza). Podemos então generalizar o resultado para uma função qualquer.

Seja $x=x_0 \pm \Delta x$ o resultado de uma medida (no exemplo anterior é o diâmetro). Essa medida é depois usada para calcular uma nova grandeza $y = y(x)$ (no exemplo anterior é o volume).

O valor médio de y é dado por

$$\boxed{y_0 = y(x_0)}$$

e a incerteza na grandeza y é dada por

$$\boxed{\Delta y = \left|\frac{dy}{\partial x}\right|_{x=x_0} \Delta x \equiv |y'(x_0)|\,\Delta x}$$

Estes resultados podem ainda ser generalizados a várias medidas. Sejam $x_1=x_{10} \pm \Delta x_1$, $x_2=x_{20} \pm \Delta x_2$, ..., $x_N=x_{N0} \pm \Delta x_N$, o resultado de N medidas (por exemplo, os comprimentos dos três lados de um paralepípedo). Essa medida é depois usada para calcular uma nova grandeza $y = y(x_1,x_2,\ldots,x_N)$ (o seu volume, por exempo). Então o valor médio de y é dado por

$$\boxed{y_0 = y(x_1, x_2, \ldots, x_N)}$$

e a incerteza na grandeza y é dada por

$$\boxed{\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2_{x_1=x_{10}} (\Delta x_1)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2_{x_2=x_{20}} (\Delta x_2)^2 + \ldots \left(\frac{\partial y}{\partial x_N}\right)^2_{x_N=x_{N0}} (\Delta x_N)^2}}$$

Propagação de erros – IV

Expressões gerais para o cálculo do erro propagado de funções frequentemente usadas

	Erro estatístico	Limite superior do erro
$f(x,y)$	$\sigma^2(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma^2(x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma^2(y)$	$\Delta f = \left\lvert \frac{\partial f}{\partial x} \right\rvert \Delta x + \left\lvert \frac{\partial f}{\partial y} \right\rvert \Delta y$
$f = x \pm y$	$\sigma^2(f) = \sigma^2(x) + \sigma^2(y)$	$\Delta f = \Delta x + \Delta y$
$f = x \cdot y$	$\frac{\sigma^2(f)}{f^2} = \frac{\sigma^2(x)}{x^2} + \frac{\sigma^2(y)}{y^2}$	$\frac{\Delta f}{\lvert f \rvert} = \frac{\Delta x}{\lvert x \rvert} + \frac{\Delta y}{\lvert y \rvert}$
$f = \frac{x}{y}$	$\frac{\sigma^2(f)}{f^2} = \frac{\sigma^2(x)}{x^2} + \frac{\sigma^2(y)}{y^2}$	$\frac{\Delta f}{\lvert f \rvert} = \frac{\Delta x}{\lvert x \rvert} + \frac{\Delta y}{\lvert y \rvert}$
$f = x^n$	$\frac{\sigma^2(f)}{f^2} = n^2 \frac{\sigma^2(x)}{x^2}$	$\frac{\Delta f}{\lvert f \rvert} = n \frac{\Delta x}{\lvert x \rvert}$
$f = \text{sen}\ x$	$\sigma^2(f) = \cos^2 x \cdot \sigma^2(x)$	$\Delta f = \lvert \cos x \rvert \Delta y$
$f = p \ln x$	$\sigma^2(f) = p^2 \cdot \frac{\sigma^2(x)}{x^2}$	$\Delta f = \lvert p \rvert \frac{\Delta x}{x}$

As variáveis x e y são afetadas pelas suas respetivas incertezas finais (também denominados erros observacionais) $\sigma(x)$ e $\sigma(y)$.

Retirado de “Física Experimental - Uma Introdução” , M.C. Abreu, L. Matias, L.F. Peralta, Editoral Presença, 1994

AS na propagação de erros

Falta ainda saber quantas CD e AS se devem empregar na escrita de y. Voltemos ao caso do diâmetro da esfera

$$d = 3.015 \pm 0.025 \text{ mm} = d_0 \pm \Delta d$$

3 CD | 4 AS

O último AS é, na verdade, "menos significativo" que os outros:

- É significativo no sentido em que foi obtido a partir de médias de medições de 3 CD e 4 AS
- Mas não é significativo no sentido em que se a incerteza é 25 milésimas não podemos ter a certeza sobre o algarismo das unidades de milésima

Na verdade, os AS são apenas uma simplificação que nos permite rapidamente escrever resultados de medidas sem exagerar ou subestimar a sua precisão. Mas é preciso ter cuidado! Os AS devem sempre ser vistos em relação à incerteza. No caso acima, as nossas regras dizem que nAS = 4. Mas pelo que foi explicado, se calhar é mais razoável escrever que nAS = 3.

Para perceber isto melhor, vamos ver a relação entre AS e precião de uma medida.

AS e precisão da medida

X=1. quer dizer certeza de 1 parte em 1 = 1/1	nAS=1
X=10. quer dizer certeza de 1 parte em 10 = 1/10	nAS=2
X=100. quer dizer certeza de 1 parte em 100 = 1/100	nAS=3
X=1000. quer dizer certeza de 1 parte em 1000 = 1/1000	nAS=4

Precisão relativa $\sim 1/10^{(nAS-1)}$

No caso de d = 3.015 ± 0.025, temos precisão de 0.025/3.015 ~ 1/121 ~ 1/100

Portanto d = 3.015 ± 0.025 é mais correctamente representada por 3AS para fazer cálculos rápidos de propagação de erros.

d = 3.015 ± 0.025 mm → Representação da medida isolada. Dá mais informação sobre a medida. Mantemos 4 AS, mas uma leitura atenta mostra que na verdade são só 3

d = 3.01 ± 0.03 mm → Representação da medida para efeitos de propagação de erros. A incerteza fica apenas com 1 AS, o que garante que o valor fica com os reais 3 AS.

Regra para os AS na propagação de erros

Tendo então o cuidado de verificar o nAS invocados nas parcelas (os x_i), o nAS do resultado $y=y(x_1,\ldots x_N)$ é dado pelo nAS da parcela menos precisa.

No caso do exemplo, só há um factor com 3 AS. Então

d = 3.01 ± 0.03 mm **3 AS**

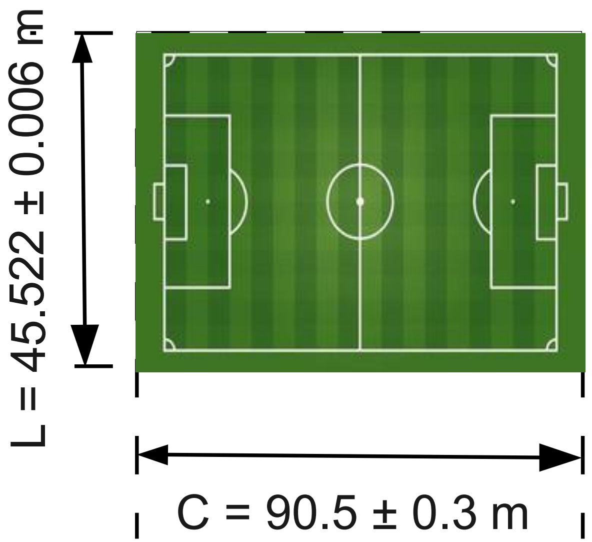
$V = 14.35027 \pm 0.35697\ mm^3$ → **$V = 14.3 \pm 0.3 mm^3$** **3 AS**

Note-se que:

- escrever 3.01 indica uma precisão relativa de 0.01/3.01 = 1/301.
- escrever 14.3 indica uma precisão relativa de 0.1/14.3 = 1/143. Precisão relativa menor
- escrever 14.35 indica uma precisão relativa de 0.01/14.35 = 1/1435. Precisão relativa maior

A regra que agora se deu corresponde ao bom-senso de que a precisão relativa do resultado deve ser da ordem de grandeza da parcela menos precisa. Isso é satisfeito para 14.3 mas não para 14.35

Exemplo final



O **c**omprimento e a **l**argura deste campo de futebol foram medidos com instrumentos diferentes, o que originou incertezas diferentes para **C** e **L**. Qual a área e qual a incerteza?

$$
\begin{aligned}
A &= CL \Rightarrow \Delta A = \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial C}\right)^2 (\Delta C)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial L}\right)^2 (\Delta L)^2} \Rightarrow \\
\Delta A &= \sqrt{L^2 (\Delta C)^2 + C^2 (\Delta L)^2} \Rightarrow \\
\Delta A &= A\sqrt{\left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2}
\end{aligned}
$$

$A = 90.5 \times 45.522 = 4119.741\ \text{m}^2$

$\Delta A = 4119.741 \times [(0.3/90.5)^2+(0.006/45.522)^2]^{1/2} = 13.667390847\ \text{m}^2$

nAS(C)=3; nAS(L)=5, portanto

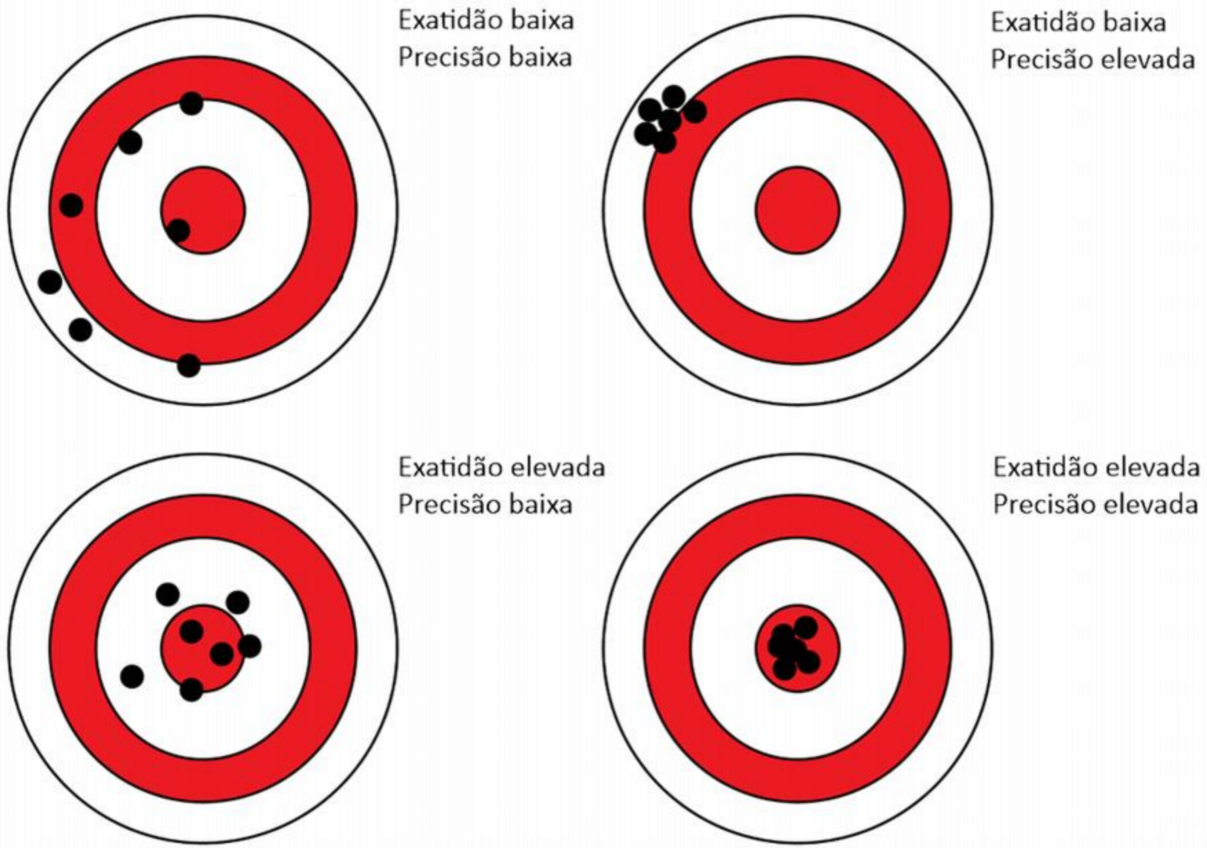
É melhor escrever com 3 AS

A=4119 ± 14 m² $\Rightarrow$ **A=(4.12 ± 0.01) × 10³ m²**

Precisão vs. Exatidão

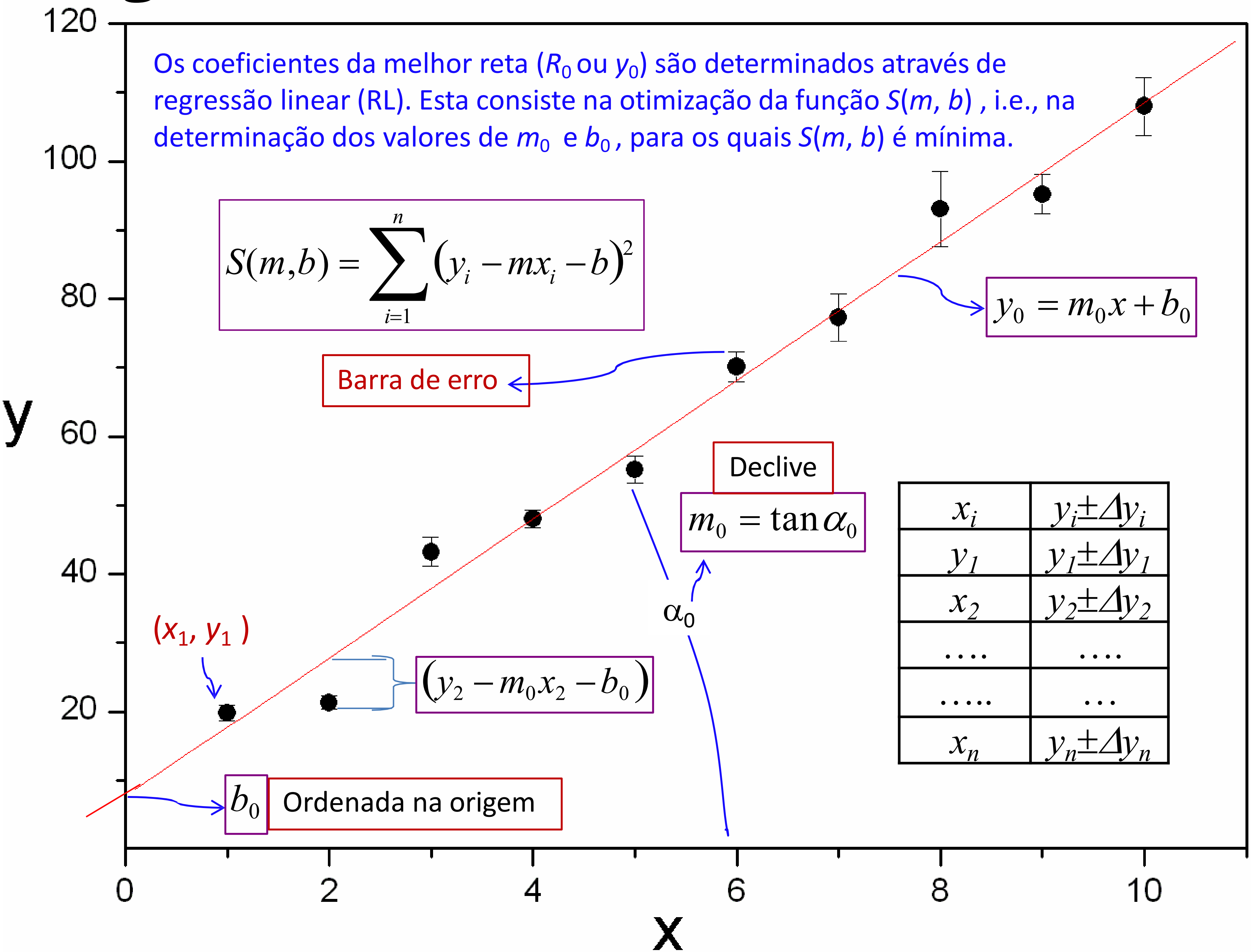
Exatidão: é uma medida do quão perto fica o resultado da medição em relação ao valor real

Precisão: é uma medida do quão fidedignos são os resultados das medições sem fazer referência ao valor real. A precisão mede também a reprodutibilidade das medições.



Bevington & Robinson,"Data reduction and error analysis for the physical sciences", 2nd Ed. 1992 McGraw-Hill

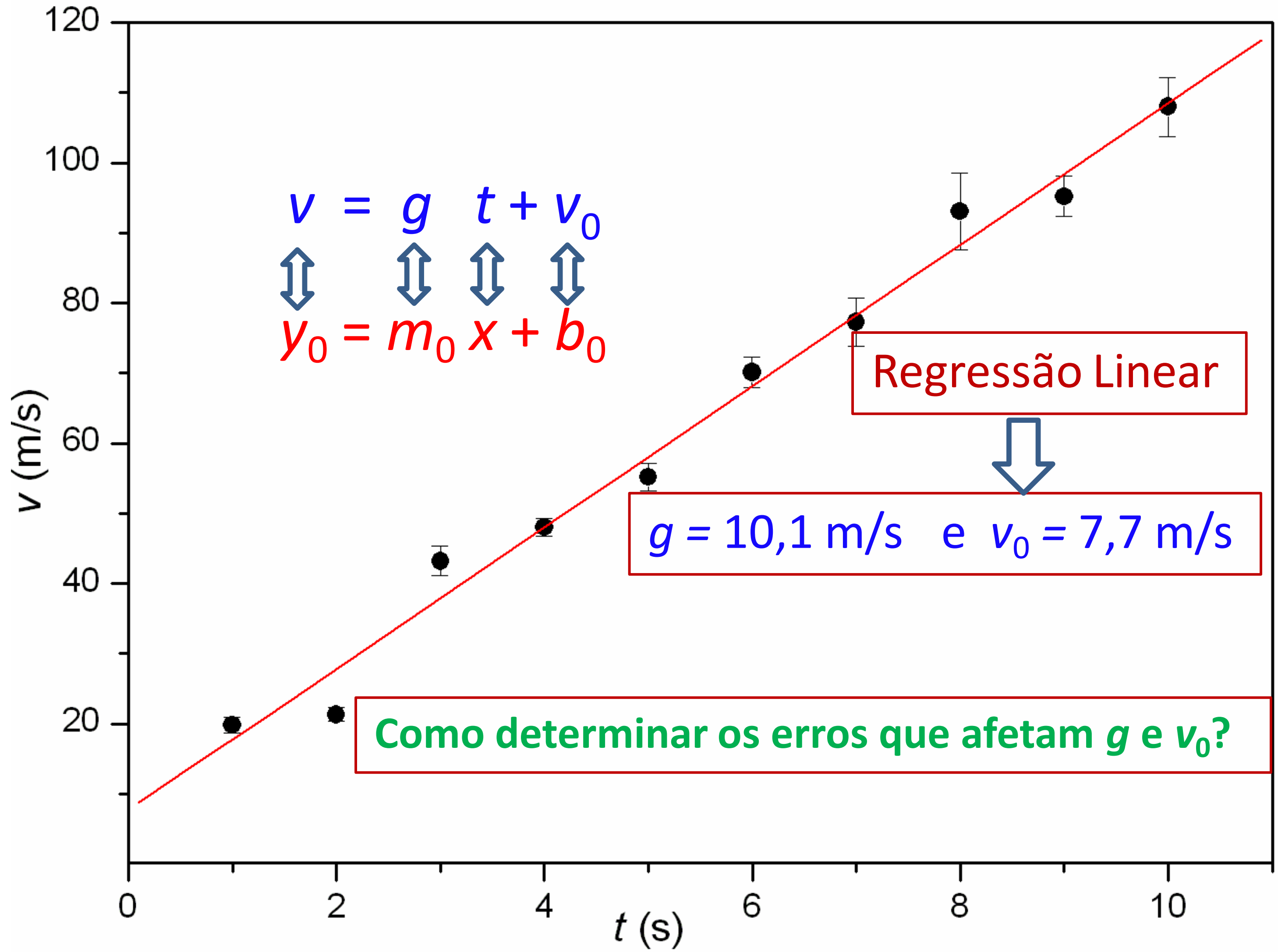
Regressão linear (a reta ótima)



x_i	$y_i \pm \Delta y_i$
y_1	$y_1 \pm \Delta y_1$
x_2	$y_2 \pm \Delta y_2$
....	....
.....	...
x_n	$y_n \pm \Delta y_n$

Regressão linear (exemplo)

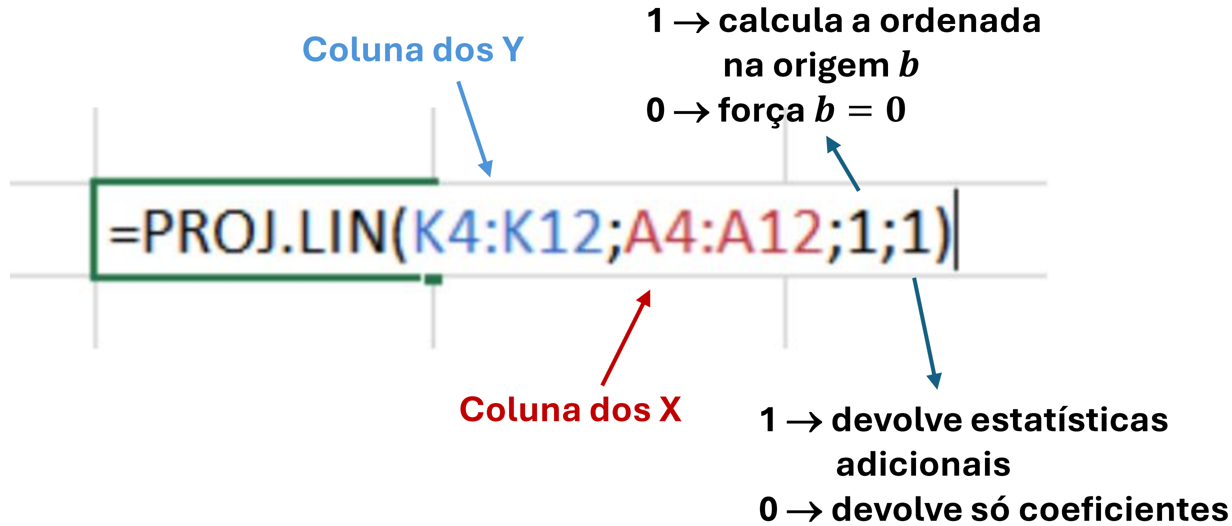
Veja-se o exemplo do movimento de um corpo lançado verticalmente para baixo, com velocidade inicial constante v_0. Considere que a velocidade do corpo é medida 10 vezes em cada um dos tempos t=1, 2, 3 …., 10 s, sendo por isso afetada por um certo erro observacional Δv. Uma vez construído o gráfico, constata-se que v depende linearmente de t. De facto, sabe-se que a equação que governa este movimento é $v=gt+v_0$. Neste caso, determinar m_0 e b_0, através de RL, equivale a determinar a aceleração gravítica g e a velocidade inicial v_0.



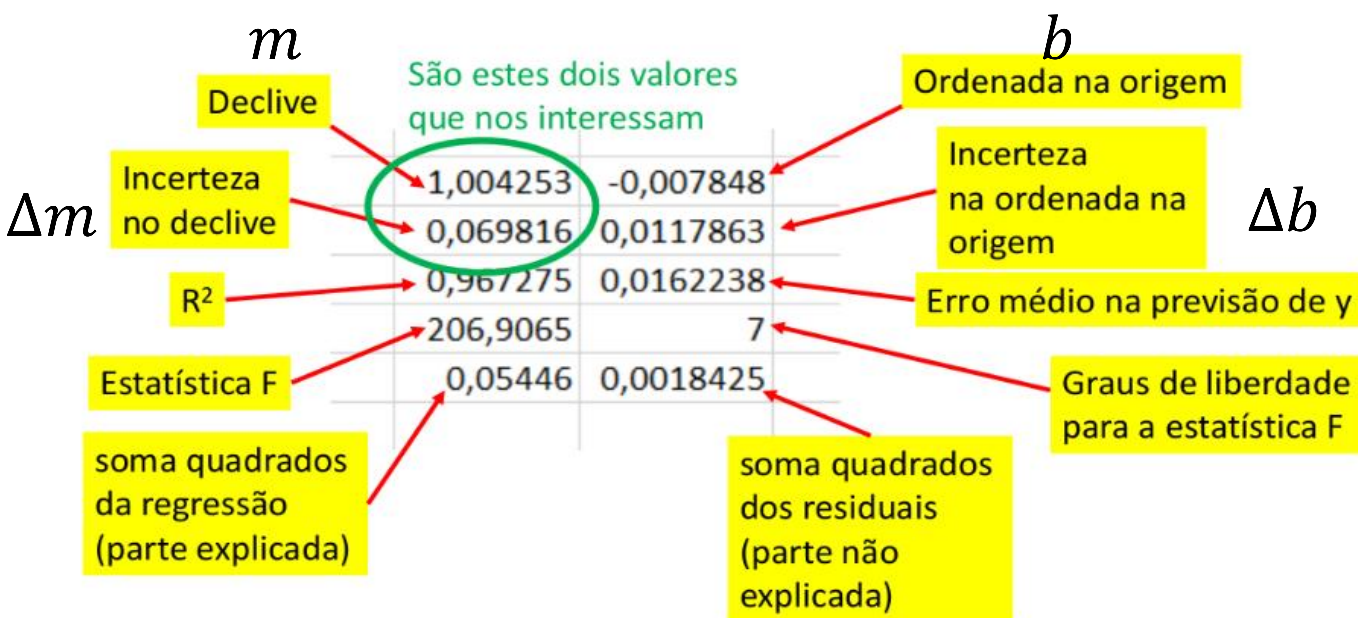
t_i (s)	$v_i \pm \Delta v_i$ (m/s)
1	19,8±1,1
2	21,3±1,0
3	43,2±2,1
4	48,0±1,3
5	55,2±2,0
6	70,1±2,2
7	77,3±3,4
8	93,1±5,5
9	95,2±2,9
10	108,0±4,2

Regressão linear no MS Excel

Ajuste da regressão linear usando mo método dos mínimos quadrados

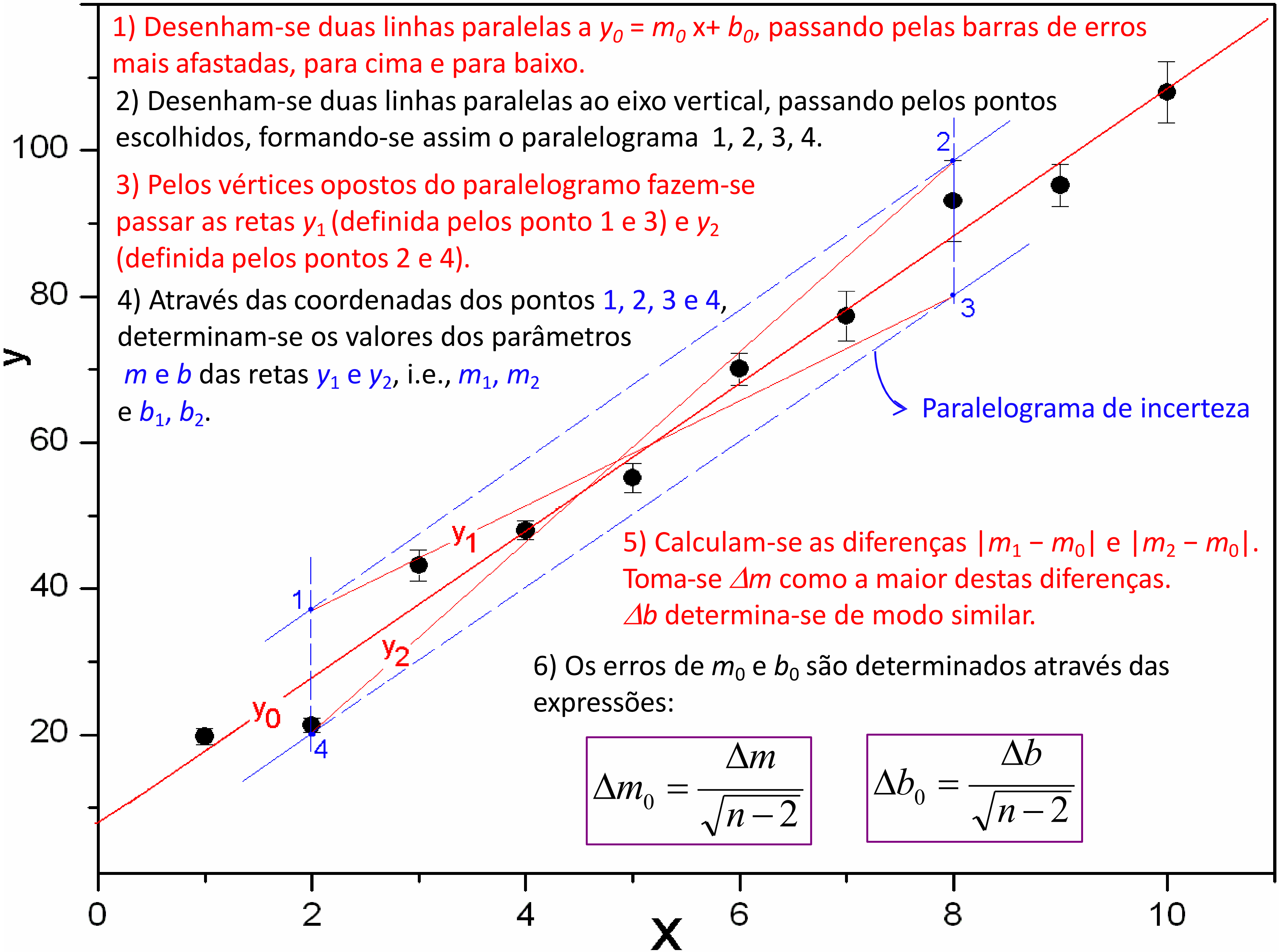


Resultados



Slides extra

Regressão linear. Estimando graficamente os erros de m_0 e b_0



1) Desenham-se duas linhas paralelas a $y_0 = m_0 x + b_0$, passando pelas barras de erros mais afastadas, para cima e para baixo.

2) Desenham-se duas linhas paralelas ao eixo vertical, passando pelos pontos escolhidos, formando-se assim o paralelograma 1, 2, 3, 4.

3) Pelos vértices opostos do paralelogramo fazem-se passar as retas y_1 (definida pelos ponto 1 e 3) e y_2 (definida pelos pontos 2 e 4).

4) Através das coordenadas dos pontos 1, 2, 3 e 4, determinam-se os valores dos parâmetros m e b das retas y_1 e y_2, i.e., m_1, m_2 e b_1, b_2.

5) Calculam-se as diferenças $|m_1 - m_0|$ e $|m_2 - m_0|$. Toma-se Δm como a maior destas diferenças. Δb determina-se de modo similar.

6) Os erros de m_0 e b_0 são determinados através das expressões:

$$\boxed{\Delta m_0 = \frac{\Delta m}{\sqrt{n-2}}} \qquad \boxed{\Delta b_0 = \frac{\Delta b}{\sqrt{n-2}}}$$

Regressão linear. Estimando graficamente o erro de m_0 quando $b_0 \approx 0$