AM II, LEI + BE, T: Regra da Cadeia e Aplicações

Marco Mackaaij

FCT, Universidade do Algarve

Regra da Cadeia para funções duma variável: revisão

Teorema

Seja $f = f(x)\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *diferenciável em* $x_0 \in D_f^\circ$ *e, por sua vez,* $x = x(t)\colon I \subseteq \mathbb{R} \to D_f$ *diferenciável em* $t_0 \in I^\circ$*, onde* $x(t_0) = x_0$*. Então a função composta* $g(t) = f(x(t))$ *é diferenciável em* t_0 *e*

$$g'(t_0) = f'(x_0)x'(t_0).$$

Exemplo

Sejam $f(x) = x^2$ e $x = \sin(t)$.

- Neste caso, $g(t) = \sin^2(t)$.
- De facto:

$$\begin{aligned} g'(t) &= f'(\sin(t))(\sin(t))' \\ &= 2x|_{x=\sin(t)} \cos(t) \\ &= 2\sin(t)\cos(t). \end{aligned}$$

- Sejam $t_0 = \pi/2$ e $x_0 = \sin(\pi/2) = 1$. Então

$$\begin{aligned} g'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2x|_{x=1} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2 \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Regra da Cadeia 1

Seja $f = f(x, y)\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em $(x_0, y_0) \in D_f^\circ$.

Teorema

Caso

1. $x = x(t), y = y(t)\colon I \subseteq \mathbb{R} \to D_f$ *sejam ambas funções duma outra variável* t*;*
2. $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$ *para um dado* $t_0 \in I^\circ$*;*
3. x *e* y *sejam diferenciáveis em* t_0*,*

a função composta $g(t) := f(x(t), y(t))$ *é diferenciável em* t_0 *e a sua derivada satisfaz*

$$g'(t_0) = f'_x(x_0, y_0)x'(t_0) + f'_y(x_0, y_0)y'(t_0).$$

Exemplo

Sejam $f(x,y) = x^2y$, $x(t) = e^t$, $y(t) = \ln(t)$.

- Neste caso $g(t) = f(e^t, \ln(t)) = e^{2t}\ln(t)$.
- Por um lado,

$$g'(t) = (e^{2t})'\ln(t) + e^{2t}(\ln(t))' = 2e^{2t}\ln(t) + \frac{e^{2t}}{t}.$$

- Por outro lado,

$$\begin{aligned} f'_x(e^t, \ln(t))(e^t)' + f'_y(e^t, \ln(t))(ln(t))' &= \\ 2xy|_{(e^t,\ln(t))}e^t + x^2|_{(e^t,\ln(t))}\frac{1}{t} &= \\ 2e^t\ln(t)e^t + \frac{e^{2t}}{t} &= \\ 2e^{2t}\ln(t) + \frac{e^{2t}}{t}. \end{aligned}$$

Regra da Cadeia 2

Seja $f = f(x, y)\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em $(x_0, y_0) \in D_f^\circ$.

Teorema

Caso

1. $x = x(s, t), y = y(s, t)\colon R \subseteq \mathbb{R}^2 \to D_f$ *sejam ambas funções dum par de novas variáveis* (s, t)*;*
2. $(x(s_0, t_0), y(s_0, t_0)) = (x_0, y_0)$ *para um dado* $(s_0, t_0) \in R^\circ$*;*
3. x *e* y *sejam diferenciáveis em* (s_0, t_0)*,*

a função composta $g(s, t) := f(x(s, t), y(s, t))$ *é diferenciável em* (s_0, t_0) *e as suas derivadas parciais satisfazem*

$$\begin{aligned} g'_s(s_0, t_0) &= f'_x(x_0, y_0)x'_s(s_0, t_0) + f'_y(x_0, y_0)y'_s(s_0, t_0); \\ g'_t(s_0, t_0) &= f'_x(x_0, y_0)x'_t(s_0, t_0) + f'_y(x_0, y_0)y'_t(s_0, t_0). \end{aligned}$$

Exemplo

Sejam $f(x,y) = x^2 + y^2$, $x(s,t) = s\cos(t)$, $y(s,t) = s\sin(t)$.

- Neste caso

$$\begin{aligned} g(s,t) &= s^2\cos^2(t) + s^2\sin^2(t) \\ &= s^2(\cos^2(t) + \sin^2(t)) \\ &= s^2. \end{aligned}$$

- Por um lado,

$$g'_s(s,t) = (s^2)'_s = 2s \quad \text{e} \quad g'_t(s,t) = (s^2)'_t = 0.$$

Exemplo

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
f'_x(s\cos(t), s\sin(t))(s\cos(t))'_s + f'_y(s\cos(t), s\sin(t))(s\sin(t))'_s &= \\
2x|_{(s\cos(t), s\sin(t))}\cos(t) + 2y|_{(s\cos(t), s\sin(t))}\sin(t) &= \\
2s\cos^2(t) + 2s\sin^2(t) &= \\
2s(\cos^2(t) + \sin^2(t)) &= \\
2s.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'_x(s\cos(t), s\sin(t))(s\cos(t))'_t + f'_y(s\cos(t), s\sin(t))(s\sin(t))'_t &= \\
2x|_{(s\cos(t), s\sin(t))}(-s\sin(t)) + 2y|_{(s\cos(t), s\sin(t))}s\cos(t) &= \\
-2s^2\cos(t)\sin(t) + 2s^2\sin(t)\cos(t) &= \\
2s^2(-\cancel{\cos(t)\sin(t)} + \cancel{\sin(t)\cos(t)}) &= \\
0.
\end{aligned}$$

O gradiente

Sejam $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a,b) \in D_f^\circ$.

Definição

Caso exista, o **gradiente** *de f em (a,b) é o vetor*

$$\nabla f(a,b) := \big(f'_x(a,b), f'_y(a,b)\big) \in \mathbb{R}^2.$$

Variando o ponto (a,b), o gradiente define uma **função vetorial**

$$\nabla f = (f'_x, f'_y)\colon D_{\nabla f} \to \mathbb{R}^2.$$

Exemplo

Sejam $f(x,y) = 2x^2y - 3x^2y^2 + 4x$ e $(a,b) = (1,2)$.

- $f'_x(x,y) = 4xy - 6xy^2 + 4$ e $f'_y(x,y) = 2x^2 - 6x^2y$, logo

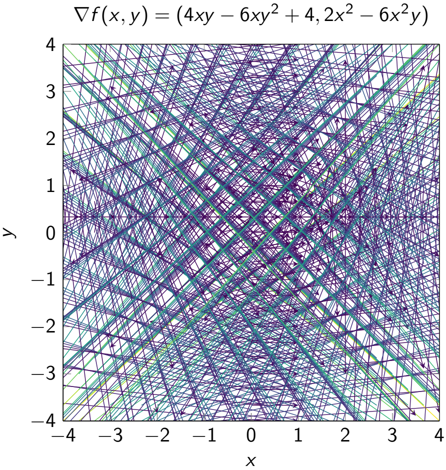
$$\boxed{\nabla f(x,y) = (4xy - 6xy^2 + 4, 2x^2 - 6x^2y).}$$

- No ponto $(1,2)$, obtém-se

$$\begin{aligned} \nabla f(1,2) &= (4 \cdot 1 \cdot 2 - 6 \cdot 1 \cdot 2^2 + 4, 2 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1^2 \cdot 2) \\ &= (8 - 24 + 4, 2 - 12) \\ &= (-12, -10). \end{aligned}$$

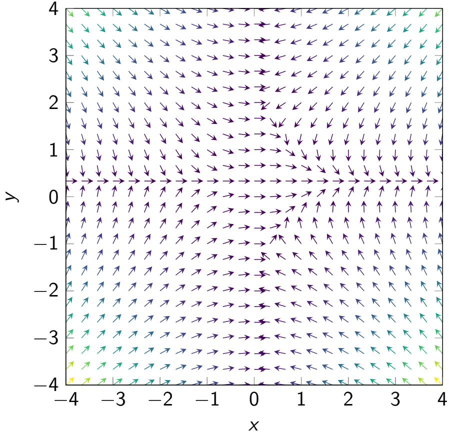
$$\boxed{\nabla f(1,2) = (-12, -10).}$$

Representação gráfica do gradiente



Representação gráfica do gradiente normalizado

$$\frac{\nabla f(x,y)}{\|\nabla f(x,y)\|} = \frac{(4xy - 6xy^2 + 4, 2x^2 - 6x^2y)}{\|(4xy - 6xy^2 + 4, 2x^2 - 6x^2y)\|}$$



Domínios

- Nem sempre $D_f = D_{\nabla f}$.

Exemplo

Seja $f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. *Note-se que*

$$\boxed{D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\right\}.}$$

É fácil de ver que

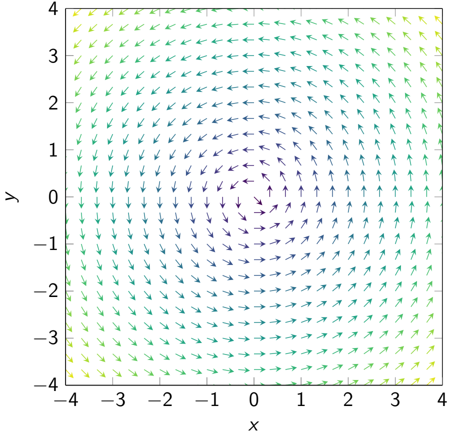
$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

Logo

$$\boxed{D_{\nabla f} = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}.}$$

Representação gráfica do gradiente normalizado

$$\frac{\nabla f(x,y)}{\|\nabla f(x,y)\|} = \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$



Derivadas direcionais

Dados:

- uma função $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$;
- um ponto $(a, b) \in D_f^\circ$;
- um **vetor unitário** $\vec{v} = (v, w) \in \mathbb{R}^2$ $(\|\vec{v}\| = \sqrt{v^2 + w^2} = 1)$.

Definição

Caso exista, a **derivada direcional** *de f em (a, b) ao longo de $\vec{v}$ é*

$$f'_{\vec{v}}(a, b) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv, b + tw) - f(a, b)}{t}.$$

Formulação alternativa

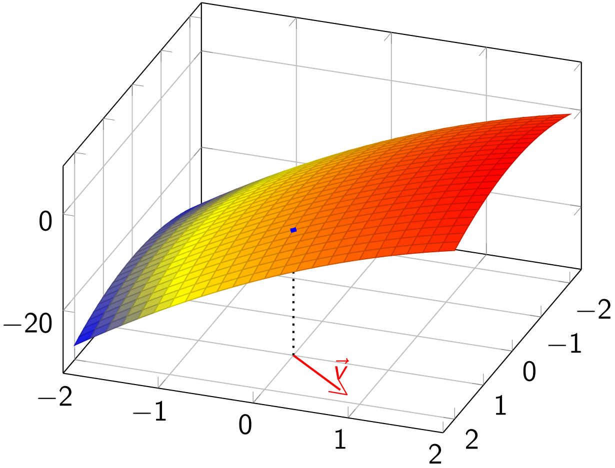
Seja $g(t) := f(a+tv, b+tw)$. Então

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{t\to 0} \frac{g(t)-g(0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv, b+tw)-f(a,b)}{t} \\ &= f'_{\vec{v}}(a,b). \end{aligned}$$

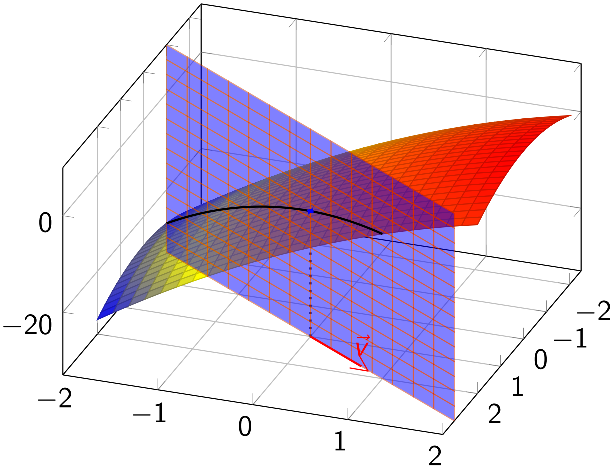
Logo

$$\boxed{g'(0) = f'_{\vec{v}}(a,b)}$$

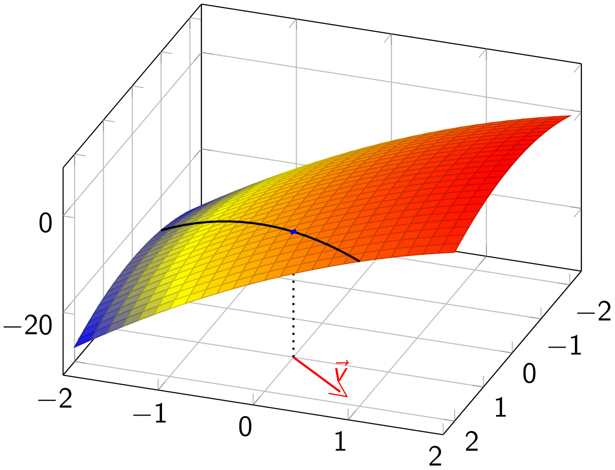
Interpretação geométrica: $(a, b) \in D_f$ e $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ $(\|\vec{v}\| = 1)$



Interpretação geométrica: plano vertical paralelo a $\vec{v}$



Interpretação geométrica: $g(t) = f(a + tv, b + tw)$



Animação!

A seguinte animação mostra as derivadas direcionais de

$$f(x, y) = 3\frac{\sin(x)\sin(y)}{xy}$$

no ponto $(1, 1)$ em todas as direções:

▸ derivadas direcionais

Relação do gradiente com as derivadas direcionais

Proposição

Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *diferenciável em* $(a, b) \in D_f^\circ$. *Para todo o* $\vec{v} = (v, w) \in \mathbb{R}^2$ *unitário,* $f'_{\vec{v}}(a, b)$ *existe e satisfaz*

$$f'_{\vec{v}}(a, b) = \nabla f(a, b) \cdot (v, w) := f'_x(a, b)v + f'_y(a, b)w.$$

AVISO: Esta proposição é falsa para funções não-diferenciáveis!

Demonstração

Proof.

Seja $g(t) := f(a+tv, b+tw)$. Graças à Regra da Cadeia,

$$\begin{aligned} f'_{\vec{v}}(a,b) &:= g'(0) \\ &= f'_x(a,b)(a+tv)'|_{t=0} + f'_y(a,b)(b+tw)'_{t=0} \\ &= f'_x(a,b)v + f'_y(a,b)w. \end{aligned}$$

□

Exemplo

Determinemos a derivada direcional de $f(x, y) = x^2 - xy - 2y^2$ em $(1, 2)$ ao longo do vetor unitário na direção de $(1, 2)$ para $(3, 4)$.

- $f'_x(x, y) = 2x - y$, $f'_y(x, y) = -x - 4y$. Logo

$$\begin{aligned}\nabla f(1,2) &= (2x - y, -x - 4y)|_{(x,y)=(1,2)} \\ &= (2 \cdot 1 - 2, -1 - 4 \cdot 2) \\ &= (0, -9).\end{aligned}$$

$$\boxed{\nabla f(1,2) = (0, -9).}$$

Exemplo

- O vetor unitário na direção de $(1,2)$ para $(3,4)$ é

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{(3,4)-(1,2)}{\|(3,4)-(1,2)\|} \\ &= \frac{(2,2)}{\sqrt{2^2+2^2}} \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{8}}, \frac{2}{\sqrt{8}}\right) \qquad \left(\frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right).\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).}$$

Exemplo

Dos slides anteriores: $\nabla f(1,2) = (0,-9)$ e $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

- Pela Proposição:

$$
\begin{aligned}
f'_{\vec{v}}(1,2) &= (0,-9) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 9 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= -\frac{9\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{f'_{\vec{v}}(1,2) = -\frac{9\sqrt{2}}{2}.}
$$

Relação com o plano tangente: revisão

- Qualquer plano $V \subset \mathbb{R}^3$ que contenha $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ é definido por uma equação do tipo:

$$n_1(x-a) + n_2(y-b) + n_3(z-c) = 0,$$

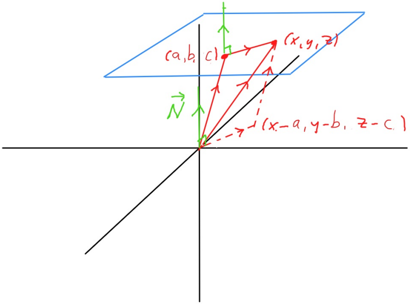
onde $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{R}$ são constantes.

- Em termos do produto interno euclidiano:

$$(n_1, n_2, n_3) \cdot (x-a, y-b, z-c) = 0.$$

- Para qualquer $(x, y, z) \in V$, o vetor $(x-a, y-b, z-c)$ é paralelo a V. Logo $\vec{N} = (n_1, n_2, n_3)$ é perpendicular a V, ou seja, é um **vetor normal**.

Relação com o plano tangente: revisão



Relação com o plano tangente: revisão

- A equação do plano tangente $T_f(a, b)$:

$$z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) \quad \Leftrightarrow$$
$$f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) - (z - f(a, b)) = 0.$$

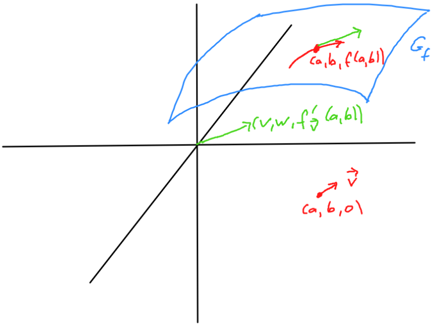
  Logo $\vec{N} = (f'_x(a, b), f'_y(a, b), -1)$ neste caso.

- Para todo o $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} (u, v, w) \parallel T_f(a, b) \quad &\Leftrightarrow \\ (u, v, w) \cdot (f'_x(a, b), f'_y(a, b), -1) = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ uf'_x(a, b) + vf'_y(a, b) - w = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ w = f'_x(a, b)u + f'_y(a, b)v. & \end{aligned}$$

Relação com o plano tangente

Seja $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em $(a,b) \in D_f^\circ$. Para qualquer vetor unitário $\vec{v} = (v,w) \in \mathbb{R}^2$, o vetor $(v, w, f'_{\vec{v}}(a,b)) \in \mathbb{R}^3$ é paralelo à reta tangente a G_f no ponto $(a, b, f(a,b))$ e na direção de $\vec{v}$.



Relação com o plano tangente

Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em $(a, b) \in D_f^\circ$.

Corolário

Para todo o vetor unitário $\vec{v} = (v, w) \in \mathbb{R}^2$, *verifica-se*

$$\big(v, w, f'_{\vec{v}}(a, b)\big) \parallel T_f(a, b).$$

Em particular, todos os vetores $\big(v, w, f'_{\vec{v}}(a, b)\big)$ são coplanares!

Proof.

$$\big(v, w, f'_{\vec{v}}(a, b)\big) \parallel T_f(a, b) \quad \Leftrightarrow$$

$$f'_{\vec{v}}(a, b) = f'_x(a, b)v + f'_y(a, b)w.$$

$\square$

Exercícios

Exercício extra

Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2 + x^2y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Calcule $\nabla f(0,0)$.

b) Calcule $f'_{\vec{v}}(0,0)$ para todo o vetor unitário $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$.

c) Verifique se f é diferenciável em $(0,0)$.

Soluções: exercício extra

- Pela definição:

$$
\begin{aligned}
f'_x(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0 \\
f'_y(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\nabla f(0,0) = (0,0).}
$$

Soluções: exercício extra

- Seja $\vec{v} = (v, w)$ um vetor unitário qualquer. Então

$$\begin{aligned} f'_{\vec{v}}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(tv, tw) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3vw^2+t^3v^2w}{t^2v^2+t^2w^2} - 0}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^3}(vw^2 + v^2w)}{\cancel{t^3}(v^2 + w^2)} \qquad (v^2 + w^2 = 1) \\ &= vw^2 + v^2w. \end{aligned}$$

$$\boxed{f'_{\vec{v}}(0,0) = vw^2 + v^2w.}$$

Soluções: exercício extra

- Se f fosse diferenciável em $(0,0)$, devia verificar-se

$$f'_{\vec{v}}(0,0) = f'_x(0,0)v + f'_y(0,0)w$$

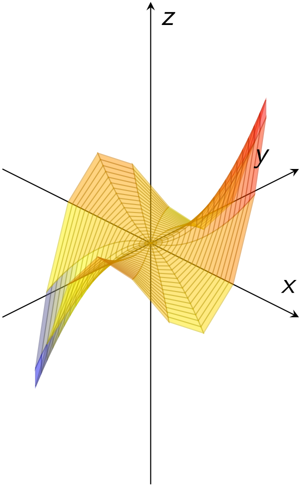
para **todo** o vetor unitário $\vec{v} = (v, w) \in \mathbb{R}^2$.

Mas isso é falso em geral:

$$\begin{aligned} f'_{\vec{v}}(0,0) = f'_x(0,0)v + f'_y(0,0)w \quad &\Leftrightarrow \\ vw^2 + v^2w = 0 \cdot v + 0 \cdot w \quad &\Leftrightarrow \\ vw^2 + v^2w = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ vw(v+w) = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ v = 0 \ \vee \ w = 0 \ \vee \ v = -w. \end{aligned}$$

$$\boxed{f \text{ não é diferenciável em } (0,0).}$$

Soluções: exercício extra



Interpretação geométrica do gradiente

Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em $(a, b) \in D_f^\circ$.

Corolário

Para todo o vetor unitário $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$-\|\nabla f(a, b)\| \leq f'_{\vec{v}}(a, b) \leq \|\nabla f(a, b)\|.$$

Além disso,

$f'_{\vec{v}}(a, b) = \pm\|\nabla f(a, b)\|$ *sse* $\vec{v}$ *aponta na direção de* $\pm\nabla f(a, b)$.

Se $\nabla f(a, b) = 0$, *então* $f'_{\vec{v}}(a, b) = 0$ *para todo o* $\vec{v}$, *i.e.* $T_f(a, b)$ *é horizontal.*

Demonstração

Proof.

Seja θ é o ângulo entre $\nabla f(a,b)$ e $\vec{v} = (v,w)$. Então

$$\begin{aligned} f'_{\vec{v}}(a,b) &= \nabla f(a,b) \cdot (v,w) \\ &= \|\nabla f(a,b)\| \, \|(v,w)\| \cos(\theta) \quad (\|(v,w)\| = 1) \\ &= \|\nabla f(a,b)\| \cos(\theta). \end{aligned}$$

Como $-1 \le \cos(\theta) \le 1$,

$$-\|\nabla f(a,b)\| \le f'_{\vec{v}}(a,b) \le \|\nabla f(a,b)\|$$

$$f'_{\vec{v}}(a,b) = \pm\|\nabla f(a,b)\| \;\Leftrightarrow\; \theta = 0, \pi$$

Se $\nabla f(a,b) = 0$, então $f'_{\vec{v}}(a,b) = 0$ por enquadramento. $\square$

Animação!

Vejam mais uma vez o gradiente (em verde):

©John F. Putz

derivadas direcionais

Exercícios

Exercício extra

Seja $f(x,y) = xe^y$. Qual é o declive direcional máximo de f no ponto $(2,0)$?

Soluções: exercício extra

O declive direcional máximo de f no ponto $(2,0)$ é igual a $\|\nabla f(2,0)\|$.

- $$\begin{aligned}\nabla f(2,0) &= \left((xe^y)'_x\big|_{(x,y)=(2,0)}, (xe^y)'_y\big|_{(x,y)=(2,0)}\right) \\ &= \left(e^y\big|_{(x,y)=(2,0)}, xe^y\big|_{(x,y)=(2,0)}\right) \\ &= \left(e^0, 2\cdot e^0\right) \\ &= (1,2).\end{aligned}$$

$$\boxed{\|\nabla f(2,0)\| = \|(1,2)\| = \sqrt{5}.}$$

Plano tangente a uma superfície

- Nem todas as superfícies $S \subset \mathbb{R}^3$ são gráficos de funções de duas variáveis. Por exemplo, a esfera definida pela equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

não é um gráfico.

- Quando se tenta escrever z como função de x, y, obtém-se:

$$z = \pm\sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

Portanto, cada hemisfério é um gráfico:

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \ \text{(Norte)}; \quad z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2} \ \text{(Sul)},$$

mas a esfera inteira não é um gráfico.

Plano tangente a uma superfície

- Em geral, S é o gráfico duma função de x, y sse qualquer reta vertical interseta S no máximo num ponto.
- Mesmo que S satisfaça esta última condição, poderá ser difícil escrever z como função de x, y na prática.
- Também pode haver casos em que x é uma função de y, z, ou y uma função de x, z.
- Felizmente não precisamos de estudar estas questões a fundo para determinarmos a equação do plano tangente a uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ num dado ponto $(a, b, c) \in S$, denotado por $T_S(a, b, c)$.

Plano tangente a uma superfície

- Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície definida por uma equação do tipo

$$F(x, y, z) = 0,$$

onde F é uma função diferenciável. Por exemplo, a esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0.$$

- A equação de $T_S(a, b, c)$ é:

$$\boxed{F'_x(a, b, c)(x - a) + F'_y(a, b, c)(y - b) + F'_z(a, b, c)(z - c) = 0.}$$

Plano tangente a uma superfície

- Lembrem-se que o gradiente de F em (a, b, c) é o vetor:

$$\nabla F(a,b,c) = \left(F'_x(a,b,c), F'_y(a,b,c), F'_z(a,b,c)\right) \in \mathbb{R}^3.$$

- Portanto, a equação de $T_S(a, b, c)$ é equivalente a:

$$\nabla F(a,b,c) \cdot (x-a, y-b, z-c) = 0.$$

Ou seja, $\nabla F(a, b, c) \perp T_S(a, b, c)$.

O plano tangente superfície

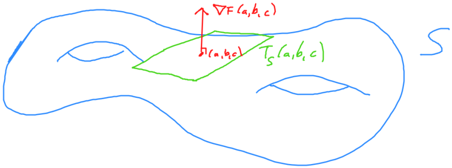
- Seja $(x(t), y(t), z(t)) \colon]-1,1[\to S$ diferenciável e tal que $(x(0), y(0), z(0)) = (a, b, c)$.
- Então $(x'(0), y'(0), z'(0))$ é um vetor paralelo a $T_S(a, b, c)$.
- Note-se que

$$G(t) := F(x(t), y(t), z(t)) = 0,$$

para todo o $t \in]-1,1[$. Por isso $G'(0) = 0$.
- Pela Regra da Cadeia:

$$\begin{aligned} G'(0) = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ F'_x(a,b,c)x'(0) + F'_y(a,b,c)y'(0) + F'_z(a,b,c)z'(0) = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ \nabla F(a,b,c) \cdot (x'(0), y'(0), z'(0)) = 0 \end{aligned}$$

O plano tangente a uma superfície



O plano tangente a uma superfície

- Considere o exemplo:

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4\right\}.$$

Então $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$ e por isso

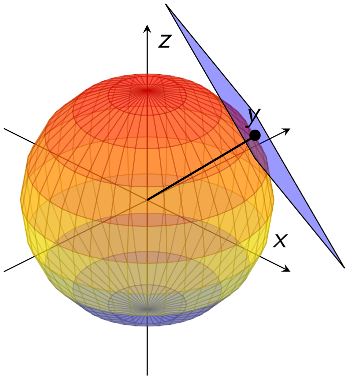
$$\nabla F(x, y, z) = (2x, 2y, 2z).$$

- Para todo o $(a, b, c) \in S$, a equação de $T_S(a, b, c)$ é

$$\begin{gathered} 2a(x-a) + 2b(y-b) + 2c(z-c) = 0 \quad \Leftrightarrow \\ a(x-a) + b(y-b) + c(z-c) = 0. \end{gathered}$$

Em particular, o vetor (a, b, c) é um vetor normal de S.

O plano tangente a uma superfície



O plano tangente a um gráfico

- Caso $S = G_f$, onde $f = f(x, y)$ é uma função diferenciável,

$$T_{G_f}(a, b, f(a, b)) = T_f(a, b).$$

- A equação que define G_f é igual a

$$f(x, y) - z = 0.$$

Portanto, $F(x, y, z) = f(x, y) - z$.

- Logo a equação que define $T_{G_f}(a, b, f(a, b))$ é igual a

$$\begin{aligned} F'_x(a, b, f(a, b))(x - a) + F'_y(a, b, f(a, b))(y - b) + F'_z(a, b, f(a, b))(z - f(a, b)) = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) - (z - f(a, b)) = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b). & \end{aligned}$$

FIM