AM II, LEI + BE, T: Domínios, gráficos e curvas de nível

Marco Mackaaij

FCT, Universidade do Algarve

Section outline

Funções reais de várias variáveis reais

Definição

Uma **função real de** n **variáveis reais** $f: D \to E$ *consiste num* **domínio** $D \subseteq \mathbb{R}^n$*, num* **espaço de chegada** $E \subseteq \mathbb{R}$ *e uma* **relação** f *entre* D *e* E *que a cada elemento* $(x_1, \ldots, x_n) \in D$ *associa um e um só elemento* $f(x_1, \ldots, x_n) \in E$*.*

Para $n = 2, 3$ usamos a notação $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

- $D = \mathbb{R}^2$, $E = \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2y - 3xy + 3$ (**polinómio**).

Funções reais de várias variáveis reais

Definição

Uma **função real de** n **variáveis reais** $f\colon D \to E$ *consiste num* **domínio** $D \subseteq \mathbb{R}^n$, *num* **espaço de chegada** $E \subseteq \mathbb{R}$ *e uma* **relação** f *entre* D *e* E *que a cada elemento* $(x_1, \ldots, x_n) \in D$ *associa um e um só elemento* $f(x_1, \ldots, x_n) \in E$.

Para $n = 2, 3$ usamos a notação $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

- $D = \mathbb{R}^2$, $E = \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2y - 3xy + 3$ (**polinómio**).

$$f(1, 2) = 1^2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot 2 + 3 = -1$$

$$f(-1, 3) = (-1)^2 \cdot 3 - 3 \cdot (-1) \cdot 3 + 3 = 15.$$

Funções reais de várias variáveis reais

- $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, $E = \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{x^3 - 2x^2y + 3}{x^2 + y^2}$ **(função racional)**

Funções reais de várias variáveis reais

- $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, $E = \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{x^3 - 2x^2y + 3}{x^2 + y^2}$ **(função racional)**

$$f(1,0) = \frac{1^3 - 2 \cdot 1^2 \cdot 0 + 3}{1^2 + 0^2} = 4$$

$$\lightning \quad f(0,0) = \frac{0^3 - 2 \cdot 0^2 \cdot 0 + 3}{0^2 + 0^2} = \frac{3}{\color{red}{0}} \quad \lightning$$

Funções reais de várias variáveis reais

- $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz > 0\}$, $E = \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \ln(xyz)$ **(função composta)**

Funções reais de várias variáveis reais

- $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz > 0\}$, $E = \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \ln(xyz)$ **(função composta)**

$$f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 6\right) = \ln\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6\right) = \ln(1) = 0$$

$$f(e,e,1) = \ln(e \cdot e \cdot 1) = \ln(e^2) = 2$$

$$\lightning \quad f(1,-1,1) = \ln(1 \cdot (-1) \cdot 1) = \ln(-1) \quad \lightning$$

Domínio e contradomínio naturais

Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ uma expressão analítica qualquer.

Definição

1. *O* **domínio natural** *de f:*

$$D_f := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) \textit{ faz sentido}\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Domínio e contradomínio naturais

Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ uma expressão analítica qualquer.

Definição

1. *O* **domínio natural** *de f:*

$$D_f := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) \textit{ faz sentido}\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

2. *O* **contradomínio natural** *de f:*

$$D_f' := \{f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R} \colon (x_1, \ldots, x_n) \in D_f\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Domínio e contradomínio naturais

Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ uma expressão analítica qualquer.

Definição

1. *O* **domínio natural** *de f:*

$$D_f := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) \text{ faz sentido}\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

2. *O* **contradomínio natural** *de f:*

$$D'_f := \{f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R} \colon (x_1, \ldots, x_n) \in D_f\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Mais adiante vamos por vezes ter de limitar o domínio e o contradomínio de f, mas por enquanto não. Por agora assumimos que $D = D_f$ (**o domínio de** f) e $E = \mathbb{R}$ (e não nos preocupamos com o contradomínio).

Domínio natural

- Seja

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x+y-1}{x+y-3}}.$$

Domínio natural

- Seja

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x+y-1}{x+y-3}}.$$

Então

$$D_f \quad = \quad \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x+y-1}{x+y-3} \geq 0 \wedge x+y-3 \neq 0\right\}$$

Domínio natural

- Seja

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x+y-1}{x+y-3}}.$$

Então

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x+y-1}{x+y-3} \geq 0 \ \wedge \ x+y-3 \neq 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y-1 \geq 0 \ \wedge \ x+y-3 > 0\right\} \end{aligned}$$

Domínio natural

- Seja

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x+y-1}{x+y-3}}.$$

Então

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x+y-1}{x+y-3} \geq 0 \wedge x+y-3 \neq 0\right\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y-1 \geq 0 \wedge x+y-3 > 0\} \\ &\quad \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y-1 \leq 0 \wedge x+y-3 < 0\} \end{aligned}$$

Domínio natural

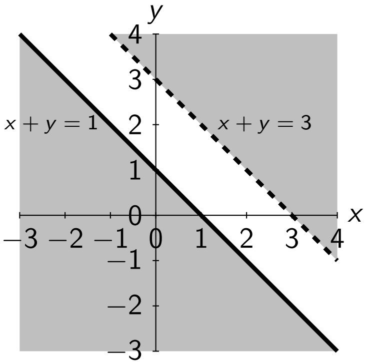
- Seja

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x+y-1}{x+y-3}}.$$

Então

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x+y-1}{x+y-3} \geq 0 \wedge x+y-3 \neq 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y-1 \geq 0 \wedge x+y-3 > 0\right\} \\ &\quad \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y-1 \leq 0 \wedge x+y-3 < 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y-3 > 0 \vee x+y-1 \leq 0\right\}. \end{aligned}$$

Domínio natural



Section outline

Gráficos: definição

Seja $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ uma função de n variáveis, i.e. $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definição

O **gráfico de** f*:*

$$G_f := \left\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1, \ldots, x_n) \in D_f \wedge x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)\right\}.$$

Gráficos: definição

Seja $f: D_f \to \mathbb{R}$ uma função de n variáveis, i.e. $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definição

O **gráfico de** f*:*

$$G_f := \left\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1, \ldots, x_n) \in D_f \wedge x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)\right\}.$$

- $n = 1$: $G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$. **(curva)**

Gráficos: definição

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função de n variáveis, i.e. $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definição

O **gráfico de** f*:*

$$G_f := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1, \ldots, x_n) \in D_f \wedge x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

- $n = 1$: $G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$. **(curva)**
- $n = 2$: $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$. **(superfície)**

Gráficos: definição

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função de n variáveis, i.e. $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$.

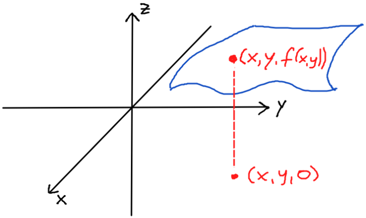
Definição

O **gráfico de** f*:*

$$G_f := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1, \ldots, x_n) \in D_f \wedge x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

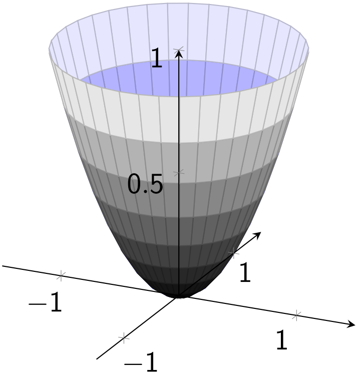
- $n = 1$: $G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$. **(curva)**
- $n = 2$: $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$. **(superfície)**
- $n \geq 3$: G_f é impossível de desenhar.

Limites trajetoriais



Exemplo 1: parabolóide

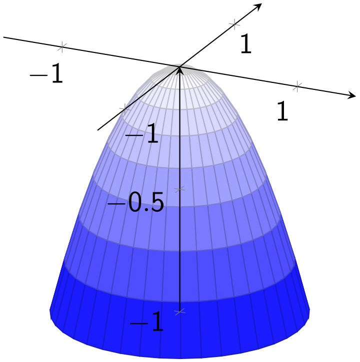
O gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$:



$$\boxed{z = x^2 + y^2}$$

Exemplo 2: parabolóide

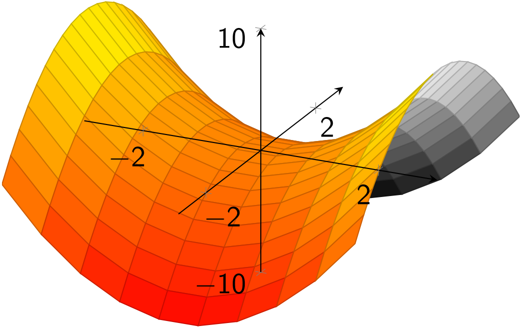
O gráfico de $f(x,y) = -x^2 - y^2$:



$$\boxed{z = -x^2 - y^2}$$

Exemplo 3: sela

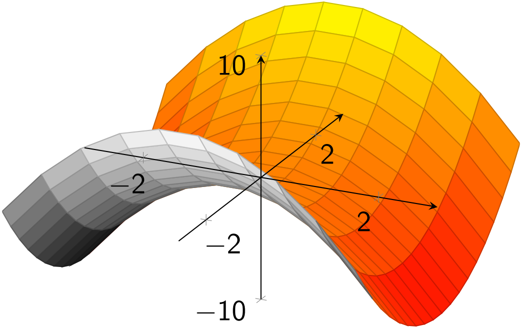
O gráfico de $f(x, y) = x^2 - y^2$:



$$\boxed{z = x^2 - y^2}$$

Exemplo 3: sela

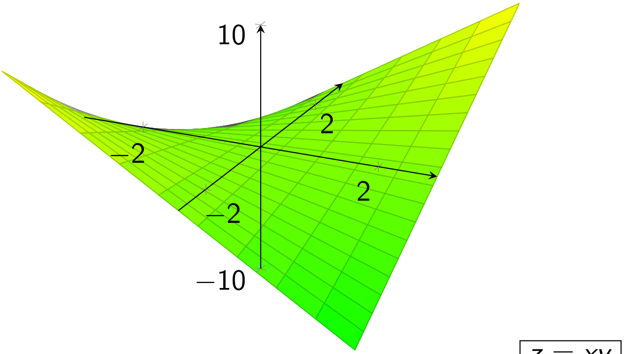
O gráfico de $f(x,y) = -x^2 + y^2$:



$\boxed{z = -x^2 + y^2}$

Exemplo 4: sem nome

O gráfico de $f(x, y) = xy$:



Section outline

Curvas de nível: definição

Seja $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis, i.e. $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$.

Definição

Seja $c \in \mathbb{R}$ uma constante. A **curva de nível** c*:*

$$C_c(f) := \{(x, y) \in D_f \mid f(x, y) = c\}.$$

Portanto, $C_c(f)$ é a interseção de G_f com o plano horizontal $z = c$.

Exemplo

Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Exemplo

Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$.

- Para todo o $c \in \mathbb{R}$, a curva de nível c é dada pela equação

$$x^2 + y^2 = c.$$

Exemplo

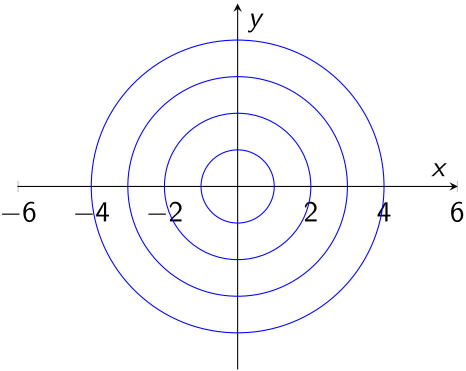
Seja $f(x,y) = x^2 + y^2$.

- Para todo o $c \in \mathbb{R}$, a curva de nível c é dada pela equação

$$x^2 + y^2 = c.$$

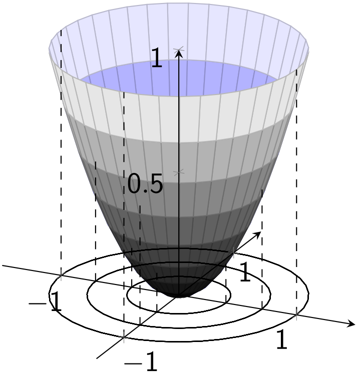
- $$C_c(f) = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } c < 0; \\ \{(0,0)\}, & \text{se } c = 0; \\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = c\}, & \text{se } c > 0. \end{cases}$$

Exemplo



$$\boxed{x^2 + y^2 = c}$$

Exemplo



$$\boxed{z = x^2 + y^2}$$

Animação!

Seja

$$f(x,y) = -\frac{xy}{e^{x^2+y^2}}.$$

Na primeira animação vê-se um plano horizontal a subir e a descer, intersetando o gráfico G_f.

▸ curvas de nível

Animação!

Seja

$$f(x,y) = -\frac{xy}{e^{x^2+y^2}}.$$

Na primeira animação vê-se um plano horizontal a subir e a descer, intersetando o gráfico G_f.

©John F. Putz

curvas de nível

Na segunda animação vêem-se as curvas de interseção de alguns planos horizontais com o gráfico G_f. As curvas de nível de f corresponderiam à projeção destas curvas sobre o plano-xy.

©John F. Putz

curvas de nível

Animação!

Seja

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6} - \frac{z^2}{8}.$$

É impossível mostrar o gráfico $G_f \subset \mathbb{R}^4$, mas é possível mostrar as **superfícies de nível** de f, definidas por $f(x,y,z) = c$, onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante. Na animação vê-se a evolução das superfícies de nível de f quando o valor de c varia.

©John F. Putz

▸ superfícies de nível