Análise Matemática II

LEI + BE

---

1. Cálculo integral

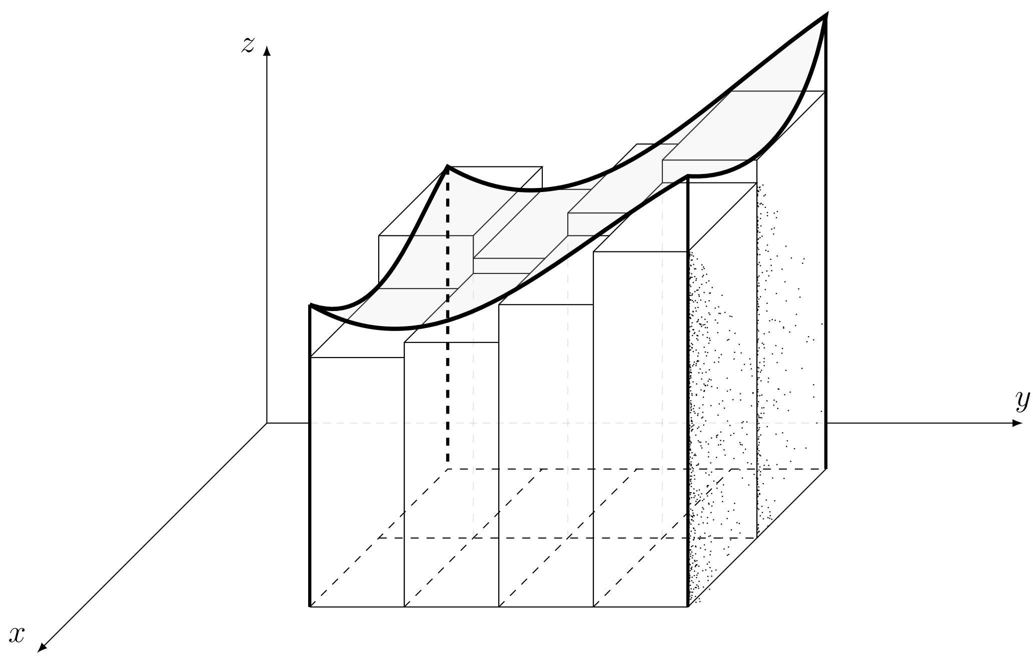
1.1. **Integrais duplos.** Vamos primeiro ver a definição de integrais duplos, que generaliza a dos integrais de Análise Matemática I.

Seja $f\colon R \to \mathbb{R}$ uma função contínua, onde $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ é um retângulo fechado. Por um teorema que omitimos nestes apontamentos, a continuidade de f implica que a função tem um máximo e um mínimo em R.

A ideia que subjaz à definição de integral duplo é uma generalização óbvia da ideia que subjaz à definição de integral simples. Para explicarmos essa ideia, suponhamos neste parágrafo (e apenas nele) que $f(x, y) \geq 0$ para todo o $(x, y) \in R$. Então, o valor do integral duplo de f sobre R, denotado por

$$\iint_R f\, dA,$$

deve ser igual ao volume da região tridimensional em $\mathbb{R}^3$ delimitada pelos planos $x = a, x = b, y = c, y = d, z = 0$ e o gráfico de f (ver figura). Para calcular esse volume apoxima-se a região por paralelepípedos, cujo volume é igual à àrea da base vezes altura, como sabem.



Quantos mais paralelepípedos, melhor a aproximação. "O limite" destas aproximações é exatamente o volume pretendido. Só que não se trata dum verdadeiro limite, pelo menos não no sentido que vocês conhecem, por isso a definição de integral duplo não menciona nenhum limite explicitamente.

Definição 1.1.1. *Uma* partição *P de R consiste em duas sequências finitas de números reais*

$$a = x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_m = b \quad e \quad c = y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \cdots \leq y_n = d.$$

Para todos os $1 \leq i \leq m-1$ e $1 \leq j \leq n-1$, seja

$$R_{ij} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \subseteq R$$

o subretângulo indicado. Seja A_{ij} a sua área:

$$A_{ij} := \text{Área}(R_{ij}) = (y_{j+1} - y_j)(x_{i+1} - x_i).$$

Como a restrição de f a R_{ij} também é contínua, esta também tem um máximo e um mínimo:

$$M_{ij}(f) := \sup_{R_{ij}}(f) \quad \text{e} \quad m_{ij}(f) := \inf_{R_{ij}}(f).$$

Deste modo podemos definir duas somas finitas, a *soma inferior* e a *soma superior*:

$$\begin{aligned} s(f,P) &:= \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} m_{ij}(f)A_{ij}, \\ S(f,P) &:= \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} M_{ij}(f)A_{ij}. \end{aligned}$$

Para toda a partição P de R, verifica-se

$$s(f,P) \leq S(f,P)$$

obviamente. Como as somas inferiores crescem e as somas superiores descrescem quando refinamos a partição, existe o seguinte resultado mais forte:

$$s(f,P) \leq S(f,P')$$

para todas as partições P e P' de R.

O seguinte teorema é o primeiro resultado fundamental acerca de integrais duplos, cuja demonstração é omitida destes apontamentos.

Teorema 1.1.2. *Seja $f\colon R \to \mathbb{R}$ uma função contínua, onde $R = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$. Então, existe um único número real, chamado o* integral duplo de f sobre R *e denotado por*

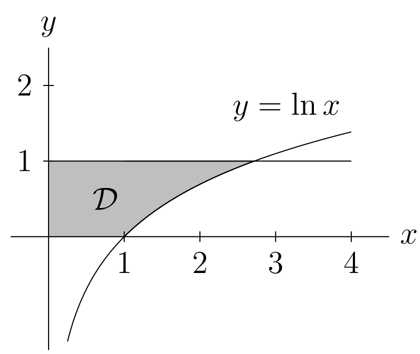
$$\iint_R f\, dA,$$

tal que

$$s(f,P) \leq \iint_R f\, dA \leq S(f,P')$$

para todas as partições P, P' *de* R.

Este teorema pode ser generalizado para funções contínuas com domínios D cuja fronteira é constituída por um número finito de curvas diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$, por exemplo



E ainda podemos generalizar o Teorema 1.1.2 para funções f que são contínuas em D, excepto nos pontos pertencentes a um número finito de curvas diferenciáveis em D. Para todas estas funções f e todos estes domínios de integração D, existe o integral duplo de f sobre D, denotado por

$$\iint_D f\, dA$$

Os integrais duplos possuem as seguintes propriedades:

Proposição 1.1.3. *Sejam* f, g *e* D *como acima indicados, e seja* $k \in \mathbb{R}$ *uma constante.*

(1) (Adição, subtração e multiplicação escalar)

$$\iint_D f \pm g\, dA = \iint_D f\, dA \pm \iint_D g\, dA \quad e \quad \iint_D kf\, dA = k \iint_D f\, dA;$$

(2) se $f(x,y) = 0$*, excepto em pontos pertencentes a um número finito de curvas diferenciáveis contidas em* D*, então*

$$\iint_D f\, dA = 0;$$

(3) se $f(x,y) \leq g(x,y)$ *para todo o* $(x,y) \in D$*, então*

$$\iint_D f\,dA \leq \iint_D g\,dA;$$

(4) sendo $|\cdot|$ *o módulo, verifica-se*

$$\left|\iint_D f\,dA\right| \leq \iint_D |f|\,dA;$$

(5) se $D = D_1 \cup D_2$*, e* $D_1 \cap D_2$ *é a reunião dum número finito de curvas diferenciáveis, então*

$$\iint_D f\,dA = \iint_{D_1} f\,dA + \iint_{D_2} f\,dA.$$

Observação 1.1.4. *O volume dum sólido é igual à área da base vezes altura, por isso*

$$\iint_D dA = \text{Área}(D),$$

porque neste caso a altura é dada pela função constante $f \equiv 1$*.*

Portanto, integrais duplos também podem servir para calcular áreas.

1.2. **Integrais repetidos.** Na secção anterior definimos integrais duplos, mas falta explicarmos como calculá-los. Para esse fim precisamos de integrais repetidos.

Definição 1.2.1. *Seja* $f\colon R \to \mathbb{R}$ *uma função contínua, onde* $R = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$*. Existem dois* integrais repetidos *de* f *sobre* R*:*

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx := \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx$$

e

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy := \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy.$$

O valor dos integrais repetidos calcula-se em dois passos, integrando uma variável de cada vez. Para cada variável, esta integração parcial é efetuada como em Análise Matemática I.

Exemplo 1.2.2. *Sejam* $f(x,y) = xy^2$ *e* $R = [1,2] \times [-3,4]$*. Então*

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \int_{-3}^4 x^2 y \, dy \, dx &= \int_1^2 \left[\int_{-3}^4 x^2 y \, dy \right] dx \\
&= \int_1^2 \left[x^2 \frac{y^2}{2} \bigg|_{y=-3}^{y=4} \right] dx \\
&= \int_1^2 \frac{7x^2}{2} \, dx \\
&= \frac{7x^3}{6} \bigg|_{x=1}^{x=2} \\
&= \frac{49}{6}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^4 \int_1^2 x^2 y \, dx \, dy &= \int_{-3}^4 \left[\int_1^2 x^2 y \, dx \right] dy \\
&= \int_{-3}^4 \left[\frac{x^3}{3} y \bigg|_{x=1}^{x=2} \right] dy \\
&= \int_{-3}^4 \frac{7y}{3} \, dy \\
&= \frac{7y^2}{6} \bigg|_{y=-3}^{y=4} \\
&= \frac{49}{6}.
\end{aligned}$$

Como vêem, o resultado é igual. Isso não é por acaso, como vamos ver.

Teorema 1.2.3. *Seja* $f \colon R \to \mathbb{R}$ *uma função contínua, onde* $R = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$*. Então*

$$\iint_R f \, dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y) \, dy \, dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y) \, dx \, dy.$$

Podemos generalizar os integrais repetidos e o Teorema 1.2.3 para domínios de integração não-retangulares. Sejam $g_1, g_2 \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ duas funções diferenciáveis (duma variável) tais que

$$g_1(x) \leq g_2(x)$$

para todo o $x \in [a,b]$, e suponhamos que

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \, g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \right\}. \tag{1}$$

Definição 1.2.4. *O* integral repetido *de f sobre D é definido por*

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx := \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx.$$

Teorema 1.2.5. *Seja $f\colon D \to \mathbb{R}$ uma função contínua, com domínio D como em* (1)*. Então*

$$\iint_D f\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

De forma análoga, sejam $h_1, h_2\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ duas funções diferenciáveis (duma variável) tais que

$$h_1(y) \le h_2(y)$$

para todo o $y \in [c,d]$, e suponhamos que

$$D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid h_1(y) \le x \le h_2(y),\, c \le y \le d\right\}. \tag{2}$$

Definição 1.2.6. *O* integral repetido *de f sobre D é definido por*

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy := \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\right] dy.$$

Teorema 1.2.7. *Seja $f\colon D \to \mathbb{R}$ uma função contínua, com domínio D como em* (2)*. Então*

$$\iint_D f\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Quando D pode ser descrito das duas maneiras, como em (1) e em (2), os Teoremas 1.2.5 e 1.2.7 implicam que os dois integrais repetidos têm o mesmo valor, porque ambos são iguais ao integral duplo, cuja definição é independente da maneira como se descreve D. Para ilustrar os dois teoremas e este facto, damos o seguinte exemplo:

Exemplo 1.2.8. *Sejam $f(x,y) = y$ e*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\, x^2 \le y \le x\right\}.$$

Pelo Teorema 1.2.5:

$$\begin{aligned}
\iint_D y\,dA &= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} y\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \Big|_{y=x^2}^{y=x} \right] dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2}\,dx \\
&= \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10} \right] \Big|_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{1}{15}.
\end{aligned}$$

Alternativamente, é possível descrever D como

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x \leq \sqrt{y},\ 0 \leq y \leq 1 \right\}.$$

Pelo Teorema 1.2.7:

$$\begin{aligned}
\iint_D y\,dA &= \int_0^1 \int_{y}^{\sqrt{y}} y\,dx\,dy \\
&= \int_0^1 \left[xy \Big|_{x=y}^{x=\sqrt{y}} \right] dy \\
&= \int_0^1 y^{\frac{3}{2}} - y^2\,dx \\
&= \left[\frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{y^3}{3} \right] \Big|_{y=0}^{y=1} \\
&= \frac{1}{15}.
\end{aligned}$$

Vê-se de facto que os dois integrais repetidos têm o mesmo valor.

Pela última propriedade dos integrais duplos na Proposição 1.1.3, podemos generalizar os Teoremas 1.2.5 e 1.2.7 para domínios de integração que são reuniões de domínios como em (1) e (2), cuja intersecção é formada por curvas diferenciáveis ou retas. Vejamos um exemplo:

Exemplo 1.2.9. *Seja D a região em $\mathbb{R}^2$ delimitada pelas rectas $y = 0$, $y = x$ e $y = 2 - x$. Reparem que*

$$x = 2 - x \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Por isso, podemos descrever D da seguinte forma alternativa:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq x\} \\ \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2,\, 0 \leq y \leq 2-x\}.$$

Seja $f\colon D \to \mathrm{R}$ uma função contínua arbitrária. Então

$$\iint_D f\,dA = \int_0^1 \int_0^x f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x,y)\,dy\,dx.$$

Reparem que também é válido descrever D como

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x \leq 2-y,\, 0 \leq y \leq 2\}.$$

Portanto, o integral duplo de f sobre D também satisfaz

$$\iint_D f\,dA = \int_0^2 \int_y^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy.$$

1.3. **Mudança de variáveis.** Em Análise Matemática I vocês estudaram integração por substituição. Sejam $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $g\colon [c,d] \to [a,b]$ uma função bijetiva de classe C^1, tal que $g(c) = a$ e $g(d) = b$. Então $x = g(t)$ corresponde a uma mudança de variável, e a seguinte fórmula estabelece a relação entre os integrais em x e em t:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)\,dt.$$

Também existe uma fórmula para mudanças de variáveis em integrais duplos. Sejam $D, E \subset \mathbb{R}^2$ duas regiões limitadas e $T(u,v) = (g(u,v), h(u,v))\colon E \to D$ uma transformação bijetiva de classe C^1. Relembramos que o *jacobiano* de T é o determinante da sua *matriz jacobiana*:

$$J_T := \begin{pmatrix} g'_u & g'_v \\ h'_u & h'_v \end{pmatrix}.$$

Então $(x,y) = (g(u,v), h(u,v))$ corresponde a uma mudança de variáveis, e a seguinte fórmula estabelece a relação entre os integrais duplos em (x,y) e em (u,v):

Teorema 1.3.1 (Mudança de variáveis em integrais duplos)**.**

$$\iint_D f(x,y)\,dA(x,y) = \iint_E f(g(u,v), h(u,v))\,|\det J_T(u,v)|\;dA(u,v).$$

Estudemos duas mudanças de variáveis em mais pormenor, as *transformações lineares* e a mudança para *coordenadas polares*.

Definição 1.3.2 (Transformações lineares)**.** *Sejam* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *tais que* $ad - bc \neq 0$*. A* transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *é definida por*

$$T(u, v) = (au + bv, cu + dv).$$

Observação 1.3.3. *A matriz jacobiana de* T *é igual a*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

logo o jacobiano é igual a $ad - bc$*.*

Assumimos sempre que $ad - bc \neq 0$, para garantir o seguinte resultado:

Lema 1.3.4. *A transformação linear* T *na Definição 1.3.2 é bijetiva.*

Proof. A inversa de T é definida por

$$T^{-1}(x, y) = \left(\frac{dx - by}{ad - bc}, \frac{-cx + ay}{ad - bc} \right).$$

□

Vejamos o exemplo duma transformação linear de variáveis num integral duplo.

Exemplo 1.3.5. *Consideremos o integral duplo*

$$\iint_D e^{x+y}\, dA(x, y),$$

onde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$*.*

Reparem que $|x| + |y| = 1$ *sse* $x + y = \pm 1$ *ou* $x - y = \pm 1$*. Portanto, pode-se definir a transformação inversa* $T^{-1}\colon D \to E$*:*

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y, \end{cases}$$

onde

$$E = \{(u, v) \mid -1 \leq u, v \leq 1\}.$$

Então, a transformação linear T *é definida por*

$$\begin{cases} x = \dfrac{u + v}{2} \\[2ex] y = \dfrac{u - v}{2} \end{cases}$$

e tem jacobiano igual a $-1/2$*.*

Pelo Teorema 1.3.1, obtém-se

$$\iint_D e^{x+y}\,dA(x,y) = \iint_E e^u \cdot \frac{1}{2}\,dA(u,v) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e^u \cdot \frac{1}{2}\,du\,dv,$$

que é fácil de calcular:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[e^u\Big|_{u=-1}^{u=1}\right]dv = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e - e^{-1}\,dv = e - e^{-1}.$$

Outra mudança de variáveis muito utilizada é a mudança para coordenadas polares, que se faz através da tranformação

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \end{cases}$$

onde $\rho \in \mathbb{R}_0^+$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. O jacobiano é fácil de calcular:

$$\det\begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} = \rho,$$

pela fórmula fundamental de trigonometria.

Exemplo 1.3.6. *Consideremos o integral duplo*

$$\iint_D (4 - x^2 - y^2)\,dA(x,y),$$

onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Como D é um círculo com raio 2, obtém-se:

$$E = \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \rho \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}.$$

Note se que $x^x + y^2 = \rho^2$, *pela fórmula fundamental de trigonometria, por isso*

$$\iint_D 4 - x^2 - y^2\,dA(x,y) = \iint_E (4-\rho^2)\rho\,dA(\rho,\theta) = \int_0^2\int_0^{2\pi} 4\rho - \rho^3\,d\rho\,d\theta.$$

Este integral repetido é fácil de calcular:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}\int_0^2 4\rho - \rho^3\,d\rho\,d\theta &= \int_0^{2\pi}\left[2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\Big|_{\rho=0}^{\rho=2}\right]d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 4\,d\theta \\ &= 8\pi. \end{aligned}$$

1.4. **Integrais triplos.** Generalizando os resultados acima para três variáveis, definem-se de forma óbvia os chamados *integrais triplos*:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV,$$

onde D é uma região limitada em $\mathbb{R}^3$.

Tambén neste caso podemos calcular integrais triplos sobre domínios regulares através de integrais repetidos. No seguinte teorema assumimos que todas as funções envolvidas na definição de D são de classe C^1 e que f é contínua.

Teorema 1.4.1. *Suponhamos que D é definida pelas desigualdades*

$$a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x),\ h_1(x,y) \le z \le h_2(x,y).$$

Então

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

Existem resultados análogos quando D é regular relativamente às outras variáveis.

Exemplo 1.4.2. *(1) Seja $f(x,y,z) = xy + xyz$, e calculemos o integral triplo de f sobre o cubo unitário $[0,1]^3$. Pelo Teorema 1.4.1, sabemos que*

$$\iiint_{[0,1]^3} xy + xyz\,dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 xy + xyz\,dz\,dy\,dx,$$

que podemos calcular da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 xy + xyz\,dz\,dy\,dx &= \int_0^1 \int_0^1 \left[xyz + xy\frac{z^2}{2}\Big|_{z=0}^{z=1} \right] dy\,dx \\
&= \frac{3}{2}\int_0^1 \int_0^1 xy\,dy\,dx \\
&= \frac{3}{2}\int_0^1 \left[x\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=1} \right] dx \\
&= \frac{3}{4}\int_0^1 x\,dx \\
&= \frac{3}{4}\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

(2) *Seja $f(x,y,z)=1$, e suponhamos que D é a região tridimensional definida pelas desigualdades*

$$-1 \leq x \leq 1,\ 3x^2 \leq z \leq 4-x^2,\ 0 \leq y \leq 6-z.$$

Pelo Teorema 1.4.1, sabemos que

$$\iiint_D dV = \int_{-1}^{1}\int_{3x^2}^{4-x^2}\int_0^{6-z} dy\,dz\,dx,$$

que podemos calcular da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\int_{3x^2}^{4-x^2}\int_0^{6-z} dy\,dz\,dx &= \int_{-1}^{1}\int_{3x^2}^{4-x^2}\left[y\Big|_{y=0}^{y=6-z}\right] dz\,dx \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{3x^2}^{4-x^2} 6-z\,dz\,dx \\
&= \int_{-1}^{1}\left[6z-\frac{z^2}{2}\Big|_{z=3x^2}^{z=4-x^2}\right] dx \\
&= \int_{-1}^{1} 4x^4-20x^2+16\,dx \\
&= \frac{4}{5}x^5-\frac{20}{3}x^3+16x\Big|_{x=-1}^{x=1} \\
&= \frac{304}{15}.
\end{aligned}$$

Neste último exemplo $f \equiv 1$, o que nos permite interpretar geometricamente o integral triplo como o volume de D.

Observação 1.4.3. *Generalizando a Observação 1.1.4:*

$$\iiint_D dV = \mathrm{Vol}(D).$$

1.5. **Mudanças de variáveis.** Analogamente ao caso de duas variáveis, sejam $D, E \subset \mathbb{R}^3$ duas regiões limitadas e

$$T(u,v,w) = (g(u,v,w), h(u,v,w), j(u,v,w))\colon E \to D$$

uma transformação bijetiva de classe C^1. O *jacobiano* de T é o determinante da sua *matriz jacobiana*:

$$J_T = \begin{pmatrix} g'_u & g'_v & g'_w \\ h'_u & h'_v & h'_w \\ j'_u & j'_v & j'_w. \end{pmatrix}.$$

Então $(x,y,z) = (g(u,v,w), h(u,v,w), j(u,v,w))$ corresponde a uma mudança de variáveis, e a seguinte fórmula estabelece a relação entre os integrais triplos em (x,y,z) e em (u,v,w):

Teorema 1.5.1 (Mudança de variáveis em integrais triplos)**.**

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dA(x,y,z) =$$
$$\iiint_E f(g(u,v,w),h(u,v,w),j(u,v,w))\,|\det J_T(u,v,w)|\;dA(u,v,w).$$

Estudemos duas mudanças de variáveis em mais pormenor, as mudanças para *coordenadas cilíndricas* e para *coordenadas esféricas*.

Definição 1.5.2. *A mudança para* coordenadas cilíndricas *é definida por*

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta, \\ y &= \rho\sin\theta, \\ z &= z, \end{aligned}$$

onde $\rho \in \mathbb{R}_0^+$*,* $\theta \in [0,2\pi]$ *e* $z \in \mathbb{R}$*. O jacobiano é igual a*

$$\det\begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho.$$

Pelo Teorema 1.5.1, obtém-se (por exemplo)

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \iiint_E f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho\,dz\,d\rho\,d\theta.$$

Exemplo 1.5.3. *Consideremos o integral triplo*

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{2+x^2+y^2} dz\,dy\,dx.$$

Em coordenadas cilíndricas, este integral repetido fica igual a

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^{2+\rho^2} \rho\,dz\,d\rho\,d\theta = \frac{5\pi}{8}.$$

Este último integral triplo é fácil de calcular, por isso demos logo a resposta.

Definição 1.5.4. *A mudança para* coordenadas esféricas *é definida por*

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta\sin\phi, \\ y &= \rho\sin\theta\sin\phi, \\ z &= \rho\cos\phi, \end{aligned}$$

onde $\rho \in \mathbb{R}_0^+$*,* $\theta \in [0, 2\pi]$ *e* $\phi \in [0, \pi]$*. O jacobiano é igual a*

$$\det \begin{pmatrix} \cos\theta \sin\phi & -\rho \sin\theta \sin\phi & \rho\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\sin\phi & \rho\sin\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -\rho\sin\phi \end{pmatrix} = -\rho^2 \sin\phi.$$

Pelo Teorema 1.5.1, obtém-se (por exemplo)

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$\iiint_E f(\rho\cos\theta\sin\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\phi)\rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi.$$

Exemplo 1.5.5. *Calculemos o volume duma esfera* S_r^2 *de raio* $r \geq 0$*. Usando coordenadas esféricas, o volume do hemisfério norte de* S_r^2 *é igual a*

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{r} \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi = \frac{2\pi r^3}{3}.$$

Por isso

$$\mathrm{Vol}(S_r^2) = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Como no exemplo anterior, omitimos o cálculo do integral triplo, que é simples.

1.6. **Exercícios.**

(1) Calcula o valor dos seguintes integrais duplos:

(a)
$$\int_0^1 \int_0^2 (x + y)\, dy\, dx$$
.

(b)
$$\int_1^2 \int_0^4 (x^2 - 2y^2)\, dx\, dy$$
.

(c)
$$\int_0^{\pi/2} \int_0^1 (y\cos(x))\, dy\, dx$$
.

(d)
$$\int_0^4 \int_1^{\sqrt{x}} 2ye^{-x}\, dy\, dx$$
.

(e)
$$\int_0^1 \int_0^x \sqrt{1 - x^2}\, dy\, dx$$
.

(f)
$$\int_1^3 \int_0^y \frac{4}{x^2 + y^2}\, dx\, dy$$
.

(2) Esboça graficamente o domínio de integração do integral duplo

$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 dx\, dy.$$

Escreve o integral invertendo a ordem de integração. Calcula os valores dos dois integrais duplos, provando que, de facto, se obtém o mesmo resultado.

(3) Esboça o domínio de integração dos seguintes integrais duplos, altera a ordem de integração e verifica que as duas ordens dão o mesmo resultado.

(a)
$$\int_0^1 \int_x^1 dy\, dx$$
.

(b)
$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx\, dy$$
.

(c)
$$\int_0^2 \int_0^x dy\, dx + \int_2^4 \int_0^{4-x} dy\, dx.$$

(d)
$$\int_0^1 \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\, dx\, dy.$$

(e)
$$\int_{-4}^3 \int_{x^2-9}^{-x+3} 3\, dy\, dx.$$

(f)
$$\int_{-6}^2 \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} x\, dx\, dy.$$

(4) Seja
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x-2| + |y-2| \leq 1\right\}.$$
Calcula
$$\iint_D \ln(x+y)\, dA,$$
utilizando a mudança de variáveis
$$\begin{cases} x &= \dfrac{u+v}{2} \\ y &= \dfrac{u-v}{2} \end{cases}.$$

(5) Seja
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq xy \leq 5, 1 \leq x \leq 5\right\}.$$
Calcula
$$\iint_D \frac{x}{1+x^2y^2}\, dA,$$
utilizando a mudança de variáveis
$$\begin{cases} x &= u \\ y &= \dfrac{v}{u} \end{cases}.$$

(6) Seja

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq x^2 + y^2 \leq 5\right\}.$$

Utilizando coordenadas polares, calcula

$$\iint\limits_D x^2 + y^2 \, dA.$$

(7) Utilizando coordenadas polares, calcula os seguintes integrais duplos

(a)

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (4 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} \, dx \, dy$$

(b)

$$\iint\limits_D \frac{\cos(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dA,$$

onde

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{\pi^2}{36} \leq x^2 + y^2 \leq \pi^2, y \geq 0, x \leq 0\right\}.$$

(8) Utilizando integração dupla, determina a área da região delimitada pelos gráficos das seguintes funções, $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \cos(x)$, para $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$.

(9) Determina a área da região representada pelas seguintes condições:

$$y \leq 4x - x^2, x \geq 0, y \geq -3x + 6.$$

(10) Calcula a área da região delimitada por:

(a) $x + \sqrt{y} = 2, x = 0, y = 0.$

(b) $y = x\sqrt{x}, y = 2x.$

(c) $2x - 3y = 0, x + y = 5, y = 0.$

(d) $y = 4 - x^2, y = x + 2.$

(11) Calcula o volume do sólido limitado pelo plano-xy e pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - 2y^2$.

(12) Calcula o volume do sólido limitado inferiormente pelo plano $z = 1/2$ e superiormente pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$.

(13) Esboça a região sólida R em $\mathbb{R}^3$ e calcula o seu volume utilizando integrais duplos:

(a) $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leq z \leq \frac{y}{2}, 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2\}.$

(b) $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leq z \leq 6 - 2y, 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2\}.$

(c) $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leq z \leq 12 - 2x - 3y, x \geq 0, y \geq 0\}.$

(d) $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leq z \leq \sqrt{9-x^2-y^2}\}$.
(e) $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leq z \leq 1-x^2-y^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$.

(14) Utiliza coordenadas polares para calcular o volume do sólido limitado superiormente pelo hemisfério $z = \sqrt{16-x^2-y^2}$ e inferiormente pelo disco definido por $x^2+y^2 \leq 4$.

(15) Calcula o volume do sólido que se encontra sobre o círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ no primeiro quadrante e é delimitado superiormente pelo plano $z = 2-x-y$.

(16) Calcula o valor dos seguintes integrais triplos:

(a)
$$\int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 (x+y+z)\, dx\, dy\, dz.$$

(b)
$$\int_1^4 \int_1^{e^2} \int_0^{1/xz} \ln(z)\, dy\, dz\, dx.$$

(c)
$$\int_0^9 \int_0^{y/3} \int_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} z\, dz\, dx\, dy.$$

(d)
$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} x\, dz\, dy\, dx.$$

(17) Utilizando coordenas esféricas, calcula os seguintes integrais

(a)
$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} xy\, dz\, dy\, dx.$$

(b)
$$\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2z+y^2z+z^3)\, dz\, dx\, dy.$$

(18) Utilizando integrais triplos calcula o volume dos sólidos limitados pelas seguintes condições:
(a) $z = 4-x^2, y = 4-x^2$, no primeiro octante.
(b) $z = 9-x^3, y = -x^2+2, y = 0, z = 0, x \geq 0$.
(c) $z = 2-y, z = 4-y^2, x = 0, x = 3, y = 0$.
(d) $z = x, y = x+2, y = x^2$, no primeiro octante.

(19) Usando coordenas cilíndricas, calcula o volume de um cilindro com raio $r > 0$ e altura $h > 0$, utilizando integrais triplos.

(20) Usando coordenadas cilíndricas, calcula o volume do cone dado por $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1$.

(21) Calcula, após mudança para coordenadas cilíndricas, o valor de
$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2-1}^{2-x} dz\, dy\, dx$$

e interpreta a resposta em termos geométricos.

(22) Usando coordenadas esféricas, calcula o volume do sólido definido por

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq 1 + z^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 5, z \geq 0\right\}.$$

(23) Usando coordenadas esféricas, calcula o volume do sólido limitado inferiormente por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e superiormente por $x^2 + y^2 + z^2 = 32$.

(24) Seja $0 < a < 1$ arbitrário. Calcula o integral triplo da função

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

sobre a região dada por

$$a \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$