Análise Matemática II

Cálculo Diferencial

Exercícios

1 Domínios, curvas de nível e gráficos

1. Determina e desenha (caso f tenha 2 variáveis) D_f, onde:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$;

   (b) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$;

   (c) $f(x,y) = \ln\left(\left(1-x^2\right)y\right)$;

   (d) $f(x,y) = \dfrac{\ln(2y-x^2)+\sqrt{8-x^2-y^2}}{(x^2-1)(y^2+1)}$;

   (e) $f(x,y,z) = \ln\left(\dfrac{x+y}{z}\right)$;

   (f) $f(x,y,z) = \sqrt{\sin(x^2+y^2+z^2)}$.

2. Desenhe as curvas de nível e tente desenhar o gráfico da função f, onde:

   (a) $f(x,y) = x+y$;

   (b) $f(x,y) = x^2-y^2$;

   (c) $f(x,y) = 1-|x|-|y|$;

   (d) $f(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$.

2 Limites e continuidade

3. Verifique a existência dos seguintes limites:

   (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-4y}{7x+6y}$;

   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$;

   (c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

   (d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{xy}\right)$;

   (e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

4. Verifique se as seguintes funções são contínuas na origem:

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^3+3y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^3+y^6} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

3 Derivadas parciais, diferenciabilidade e plano tangente

5. Calcule as derivadas parciais das seguintes funções:

   (a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$;

   (b) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$;

   (c) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$;

   (d) $f(x,y) = x^y$;

   (e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0); \end{cases}$

   (f) $f(x,y,z) = \ln(xy+z)$;

   (g) $f(x,y,z) = x^3yz + e^{x+yz}$;

6. Seja $f(x,y) = (x^2+y^2)^{2/3}$. Mostre que

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x}{3(x^2+y^2)^{1/3}}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}.$$

7. Verifique a diferenciabilidade das seguintes funções:

   (a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$;

(b) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$;

(c) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$;

(d) $f(x,y) = x^y$;

(e) $f(x,y,z) = \ln(xy+z)$;

(f) $f(x,y,z) = x^3yz + e^{x+yz}$;

8. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y^2}{x^4+y^4}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Mostre que f é descontínua em $(0,0)$.

(b) Prove que $f'_x(0,0)$ e $f'_y(0,0)$ existem.

(c) O que conclui acerca da diferenciabilidade de f em $(0,0)$?

9. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0); \end{cases}$

(a) Verifique se f é contínuo em $(0,0)$.

(b) Verifique se f'_x e f'_y são contínuas em $(0,0)$.

(c) Verifique se f é diferenciável em $(0,0)$.

10. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+2y^4}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua em $(0,0)$.

(b) Calcule $f'_x(0,0)$ e $f'_y(0,0)$.

(c) Verifique se f é diferenciável em $(0,0)$.

11. Determine a equação do plano tangente

(a) ao hiperbolóide de equação $z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 12$, no ponto $(1,-1,4)$;

(b) à esfera de equação $x^2+y^2+z^2 = 4$ no ponto $(1,\sqrt{2},1)$.

4 Regra da Cadeia e aplicações

12. Usando a Regra da Cadeia, calcule $g'(t_0)$, onde $g(t) = f(x(t),y(t))$:

(a) $f(x,y) = 3x+4y$, $x = t^2$, $y = 2t$, $t_0 = 1$;

(b) $f(x,y) = \dfrac{x}{y^2+1}$, $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

13. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

    (a) Calcule $g(3)$ e $g'(3)$, onde $g(t) = f(t^3 - 5t, 11t - 1)$ tal que $f(12,32) = 0$, $f'_x(12,32) = -3$ e $f'_y(12,32) = 2$.

    (b) Calcule $g(0)$ e $g'(0)$, onde $g(t) = f(\sin(t), \cos(t))$ tal que $f(0,1) = 50$, $f'_x(0,1) = 10$ e $f'_y(0,1) = -7$.

14. Usando a Regra da Cadeia, calcule $g'_s(s_0,t_0)$ e $g'_t(s_0,t_0)$, onde $g(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$:

    (a) $f(x,y) = x^2y$, $x = s - t$, $y = 2s + 4t$, $(s_0,t_0) = (1,0)$;

    (b) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$, $x = t$, $y = st^2$, $(s_0,t_0) = (1,1)$.

15. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

    (a) Calcule $g(0,0)$, $g'_s(0,0)$ e $g'_t(0,0)$, onde $g(s,t) = f(t\sin(s), s\sin(t))$ tal que $f(0,0) = 4$, $f'_x(0,0) = 10$ e $f'_y(0,0) = 2$.

    (b) Calcule $g'_s(0,2)$ e $g'_t(0,2)$, onde $g(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$ com $x(s,t) = st^2$ e $y(s,t) = te^s$ e tal que $f'_x(0,2) = 10$ e $f'_y(0,2) = -5$.

16. Determine a derivada direcional de

    (a) $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$, no ponto $(1,1)$, ao longo do vetor unitário na direção da bissetriz do primeiro ângulo coordenado;

    (b) $f(x,y) = x^3 + xy$ em qualquer ponto de $\mathbb{R}^2$ e ao longo do vetor unitário que faz um ângulo de $\pi/3$ com o eixo-x no plano-xy.

17. Utilizando o gradiente, determine

    (a) qual é a direção de maior/menor crescimento de f no ponto $(2,1)$, onde $f(x,y) = -x^2y + xy^2 + xy$;

    (b) quais são os vetores unitários $\vec{v}$ tais que $f'_{\vec{v}}(3,1) = 0$, onde $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy - 7x$.

18. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

    (a) Determine $f_{\vec{v}}(0,0)$ para todo o vetor unitário $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$.

    (b) Verifique se f é diferenciável em $(0,0)$.

19. Determine

    (a) a equação do plano tangente à superfície S de equação $x^2 - 2y^2 + z^2 = 3$ no ponto $(-1,1,2)$;

(b) os pontos do hiperbolóide S de equação $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 16$ em que o plano tangente é paralelo ao plano V de equação $4x - 2y + 4z = 5$;

(c) os pontos do parabolóide S de equação $z = 4x^2 + 9y^2$ em que a reta normal é paralela à reta ℓ que passa pelos pontos $P = (-2, 4, 3)$ e $Q = (5, -1, 2)$.

5 Derivadas de ordem superior, extremos e pontos de sela

20. Determine a matriz hessiana das seguintes funções:

    (a) $f(x, y) = x^4 - 4x^2y^2 + y^5$;

    (b) $f(x, y) = \sin(xy)$;

    (c) $f(x, y) = \ln(x^2 + y)$;

    (d) $f(x, y, z) = ye^x + x\ln(z)$.

21. Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

    (a) Prove que $f''_{xy}(0, 0) = -1$ e $f''_{yx}(0, 0) = +1$;

    (b) O que é que se pode concluir acerca de f'_x e f'_y?

22. Determine os extremos locais e os pontos de sela das seguintes funções:

    (a) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$;

    (b) $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$;

    (c) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$;

    (d) $f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$.

23. Uma empresa quer encomendar caixas de ângulos direitos para embalar os seus produtos. Cada caixa deve ter um volume de $0,5$ litros. O preço de cada caixa depende apenas da área total dos seus lados. Para minimizar o preço da encomenda, quais devem ser o comprimento, a largura e a altura de cada caixa?