Resolução F1 AMII CEI+BE

2024/25

1 Trata-se duma Série de Mengoli.

$$n^2-9n+20=0 \Leftrightarrow n=4 \vee n=5$$

Logo, $\dfrac{1}{n^2-9n+20} = \dfrac{a}{n-4} + \dfrac{b}{n-5}$.

Falta determinar os valores de a e b:

$$\frac{1}{n^2-9n+20} = \frac{a}{n-4} + \frac{b}{n-5} \Leftrightarrow$$

$$1 = a(n-5) + b(n-4) \Leftrightarrow$$

$$1 = (a+b)n - (5a+4b) \Leftrightarrow$$

$$a+b=0 \wedge 5a+4b=-1 \Leftrightarrow$$

$$b=-a \wedge a=-1 \Leftrightarrow$$

$$a=-1 \wedge b=1$$

$$\boxed{\frac{1}{n^2-9n+20} = \frac{1}{n-5} - \frac{1}{n-4}}$$

Série de Mengoli c/ $b_n = \dfrac{1}{n-5} \wedge t=1$.

Cont. de 1)

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-5} = 0,$$ logo a série de Mengoli converge.

Soma: $S = b_6 - 1 \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$

$$= \frac{1}{6-5} - 1 \cdot 0$$

$$= 1.$$

2a) Esta série diverge, porque não satisfaz o Crit. Necessário:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-2)!(n^2+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot(n-1)\cdot\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}\,(n^2+1)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{n^2+1} = 1 \neq 0.$$

2b) Vamos mostrar que esta série é simplesmente convergente:

Cont. de 2b) Série dos módulos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n}+n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n}+n^2}.$$

C.d.C. v2: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{n}{\sqrt{n}+n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{\sqrt{n}+n^2} =$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n^{3/2}}+1} = 1.$$

Como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (s. harmónica), a série

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n}+n^2}$ também diverge.

Podemos aplicar o Teorema de Leibniz:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n}+n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}}+n} = 0.$ ✓

ii) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}+x^2}$. $f'(x) = \dfrac{-x^2+\frac{\sqrt{x}}{2}}{(\sqrt{x}+x^2)^2} < 0$

quand. $x>0$. Portanto $\left(\dfrac{n}{\sqrt{n}+n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ é

monotonamente decrescente. ✓

~~Plt~~ Portanto: a série alternada

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n}{\sqrt{n}+n^2}$ é simplesmente conv.

2 c) C. d. Q.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}} =$$

$$\frac{((n+1)!)^2 \; (2n)!}{(n!)^2 \; (2n+2)!} =$$

$$\frac{(n+1)^2 \cdot \cancel{(n!)^2} \; \cancel{(2n)!}}{\cancel{(n!)^2} \cdot (2n+2) \cdot (2n+1) \cdot \cancel{(2n)!}} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} =$$

$$\frac{n^2 + 2n + 1}{4n^2 + 6n + 2} .$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} = \frac{1}{4} < 1$$

Conclusão: a série é convergente.

2 d) C.d.R.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{2n+3}}{3^{2n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2^{2n+3}}}{\sqrt[n]{3^{2n-1}}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{2n+3}{n}}}{3^{\frac{2n-1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\left(2+\frac{3}{n}\right)}}{3^{\left(2-\frac{1}{n}\right)}} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9} <$$

Conclusão: a série converge.

---

3) $X+3=0 \Leftrightarrow X=-3$. $\boxed{c=-3}$

C.d.R: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n n}{4^n}(x+3)^n\right|} =$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{4^n}} \cdot \sqrt[n]{|x+3|^n} =$$

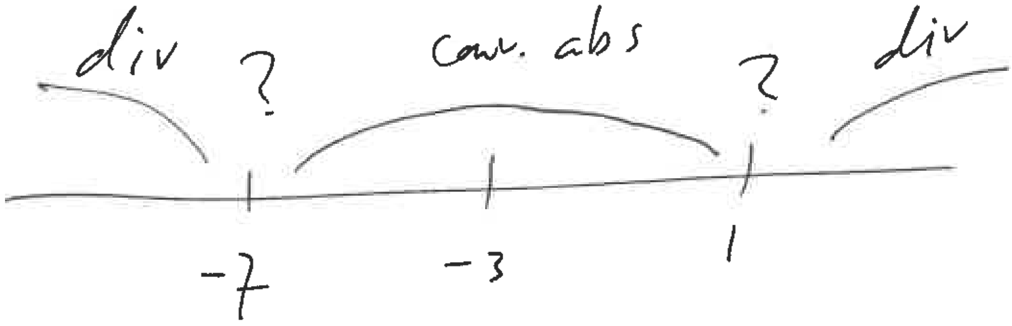
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{4} |x+3| = \frac{|x+3|}{4}.$$

$$\frac{|x+3|}{4} < 1 \Leftrightarrow |x+3| < 4 \Leftrightarrow$$

$$-4 < x+3 < 4 \Leftrightarrow -7 < x < 1$$

$\boxed{R=4}$

(Cont. de 3)



$\underline{X=1}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}(x+3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cancel{4^n}}\cancel{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$

Esta série diverge, porque não satisfaz o Crit. Nec: $\lim_{n\to\infty}(-1)^n \neq 0$. (porque o limite <u>não</u> existe).

$X=-7$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}(x+3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}(-4)^n =$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cancel{4^n}}\cdot(-1)^n\cdot\cancel{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$.

Esta série diverge, porque não satisfaz o Crit. Nec: $\lim_{n\to\infty} 1 \neq 0$.

<u>Conclusão</u>: $c=-3$, $R=4$, $I_0 = I =]-7,1[$