Capítulo 1

Introdução

1.1 Corpo dos números reais

O conjunto $\mathbb{N}$ denota o conjunto de todos os **números naturais**, *i.e.*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Denotamos por $\mathbb{Z}$ o conjunto dos **números inteiros**,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\},$$

ou, usando uma escrita abreviada,

$$\mathbb{Z} = \{\text{inteiros}\}.$$

O conjunto $\mathbb{Q}$ contém todos os números inteiros, bem como todas as fracções, positivas ou negativas. Usando uma escrita abreviada, podemos escrever

$$\mathbb{Q} = \{\text{inteiros}\} \cup \{\text{fraccões}\}.$$

Por fim, o conjunto dos **números reais** $\mathbb{R}$ contém todo os números racionais e irracionais,

$$\mathbb{R} = \{\text{racionais}\} \cup \{\text{irracionais}\}.$$

Todos os conjuntos mencionados acima têm cardinalidade infinita, mas como facilmente observamos o conjunto $\mathbb{Z}$ tem praticamente o dobro dos elementos do conjunto $\mathbb{N}$. Por outro lado, e tal como é apresentado, podemos enumerar os elementos de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, e, por isso, dizemos que são **conjuntos contáveis**. O facto de podermos enumerar os elementos de um conjunto infinito contável significa que os elementos desse conjunto estão numa correspondência biunívoca com os números naturais. Por este motivo, o conjunto $\mathbb{Q}$ também é contável. Por sua vez, como não é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos de $\mathbb{R}$ e o conjunto dos naturais, dizemos, por isso, que $\mathbb{R}$ é um conjunto infinito não contável.

Por vezes, há necessidade de restringir (ou estender) os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$. Os subconjuntos com mais interesse prático são:

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots, \dots\}, \qquad \mathbb{N}_p = \{p, p+1, p+2, \dots, \dots\}, \quad p \in \mathbb{Z};$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{Z}^- = \{\ldots, -2, -1\}\,, \qquad \mathbb{Z}_p^- = \{\ldots, -2, -1, \ldots, p\}\,, \quad p \in \mathbb{N}_0;\\
&\mathbb{Q}^+ = \{\text{racionais positivos}\}\,, \qquad \mathbb{Q}_0^+ = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\};\\
&\mathbb{Q}^- = \{\text{racionais negativos}\}\,, \qquad \mathbb{Q}_0^- = \mathbb{Q}^- \cup \{0\};\\
&\mathbb{R}^+ = \{\text{reais positivos}\}\,, \qquad \mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\};\\
&\mathbb{R}^- = \{\text{reais negativos}\}\,, \qquad \mathbb{R}_0^- = \mathbb{R}^- \cup \{0\}.
\end{aligned}
$$

Sobre o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, definem-se as operações de **adição**,

$$(x, y) \longmapsto x + y,$$

e **multiplicação**,

$$(x, y) \longmapsto x \times y.$$

Convém não confundir a designação das operações de adição e multiplicação com os resultados obtidos pela sua aplicação: **soma** e **produto**, respetivamente. Por vezes, podemos denotar a multiplicação $x \times y$ por $x \cdot y$. E, sempre que não houver risco de confusão, denotaremos este produto apenas xy. A seguir, enunciamos os axiomas que definem o corpo dos números reais.

Axioma 1.1.1. (Corpo) Dados $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, temos:

(1) **Comutativa**: $a + b = b + a, \quad ab = ba$;

(2) **Associativa**: $a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a(bc) = (ab)c$;

(3) **Distributiva**: $a(b + c) = ab + ac$;

(4) **Existência de elemento neutro**: Existem dois reais únicos $x,\ y \in \mathbb{R}$ tais que $x + a = a$ e $ya = a$, e denotamos $x = 0$, $y = 1$;

(5) **Existência de simétrico**: Para qualquer real a, existe um único outro real x tal que $a + x = 0$, e denotamos $x = -a$;

(6) **Existência de inverso**: Se $a \neq 0$, então existe um único real $x \neq 0$ tal que $ax = 1$, e denotamos $x = a^{-1} := \frac{1}{a}$.

Resulta dos axiomas anteriores que:

- $a \times 0 = 0 \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$;
- $a + b = a + c \Rightarrow b = c$;
- $ab = ac \wedge a \neq 0 \Rightarrow b = c$;
- $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ (ou $a = 0 \wedge b = 0$).

A última desta propriedades, designamos por **Lei de anulamento do produto**.

Resulta de (2) e (4)-(5) que o par $(\mathbb{R}, +)$ é um grupo, ou que $\mathbb{R}$ é um grupo para a soma. E, devido a (1), dizemos que $(\mathbb{R}, +)$ é um grupo comutativo, ou abeliano (grupo de Abel[1]). Do mesmo modo,

[1] Niels Henrik Abel (1802-1829), matemático norueguês natural de Finnöy (agora Stavanger).

(1)-(2), (4) e (6) permitem-nos dizer que $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$, isto é, o conjunto de todos os reais, excepto o 0, é um grupo comutativo (para a multiplicação). No caso de (1)-(6) se verificarem, dizemos que $(\mathbb{R},+,\cdot)$ é um corpo. Observando (4)-(6), definimos as operação simétrica e inversa da adição e produto por

$$a-b := a+(-b), \qquad \frac{a}{b} := b^{-1}a,$$

respectivamente. Estas operações são designadas por **subtracção** e **divisão**. Usando a noção de quociente, definimos um **número racional** por

$$\frac{m}{n} = n^{-1}m,$$

onde m e n são inteiros primos entre si. Os números racionais $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ podem ser somados e multiplicados da forma seguinte:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

No eixo numérico existe uma ordenação natural da forma seguinte. Para quaisquer dois números reais $x,\ y\in\mathbb{R}$, se x está à esquerda de y, escrevemos

$$x<y.$$

Além disso, escreveremos $x\le y$ para indicar que $x<y$ ou $x=y$. Se x é distinto de y, escrevemos $x\neq y$. Se x não estiver à esquerda de y e $x\neq y$, então escreveremos

$$x>y.$$

De igual modo, escreveremos $x\ge y$ para indicar que $x>y$ ou $x=y$. Com a ordenação natural estabelecida acima, dizemos que $(\mathbb{R},+,\cdot)$ é um corpo ordenado.

Proposição 1.1.1. Sejam $a,\ b,\ c$ números reais. Então:

(1) **Transitividade**: Se $a<b$ e $b<c$, então $a<c$;

(2) **Tricotomia**: Dos três casos possíveis, ocorre somente um: $a=b$, $a<b$, $b<a$;

(3) **Monotonia da adição**: Se $a<b$, então $a+c<b+c$;

(4) **Monotonia do produto**: Se $a<b$, então $ac<bc$ se $0<c$, e $bc<ac$ se $c<0$.

Demonstração: (1) Se $a<b$ e $b<c$, então $0<b-a$, $0<c-b$. Daqui $0<(b-a)+(c-b)$. Como $(b-a)+(c-b)=c-a$, segue que $0<c-a$, e portanto $a<c$.

(2) Se $a,\ b\in\mathbb{R}$, da ordenação natural do eixo numérico, ou $a-b=0$, ou $a-b<0$, ou $-(a-b)<0$. Se $a-b=0$, então $a=b$. Se $a-b<0$, então $a<b$, e se $-(a-b)<0$, vale $0<a-b$ e, por conseguinte, $b<a$.

(3) Se $a<b$, então $a-b<0$. Sendo 0 o elemento neutro da adição, $0=c+(-c)$. Então temos $a+c+(-c)-b<0$, ou seja, $a+c-(b+c)<0$ e portanto $a+c<b+c$.

(4) Sendo $a<b$, segue que $a-b<0$. Se $0<c$, então $(a-b)c<0$, ou seja, $ac-bc<0$, e portanto $ac<bc$. Se for $c<0$, então $0<-c$ e portanto $(a-b)(-c)<0$. Isto significa que $bc-ac<0$, e assim $bc<ac$. $\square$

Os subconjuntos de $\mathbb{R}$ podem ser discretos ou contínuos. Por exemplo, o subconjunto dos naturais é discreto, embora com cardinalidade infinita, e representa-se, como vimos, por

$$\{1, 2, 3, \dots\}\,.$$

Os subconjuntos contínuos representam-se habitualmente por intervalos ou por reuniões destes. Por exemplo, $[a, b]$ representa o subconjunto de todos os números reais compreendidos entre a e b, isto é

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}\,. \tag{1.1.1}$$

Os números a e b são designados por limite inferior e superior, respectivamente, do intervalo. A notação fechada sobre os limites a e b indica que o intervalo contém estes números e, por isso, se designa de intervalo fechado. A notação (a, b) indica que o intervalo é aberto, ou seja, que os limites inferior e superior do intervalo não fazem parte do conjunto considerado, isto é,

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}\,. \tag{1.1.2}$$

Por vezes, os intervalos podem ser fechados num limite e abertos noutro. Por exemplo,

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}\,,$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}\,.$$

Muitos autores utilizam o parêntesis recto aberto sobre o limite a ou b para indicar que o intervalo é aberto nesse limite do intervalo. Com esta notação, os intervalos (a, b), $[a, b)$ e $(a, b]$ anteriores escrevem-se na forma $]a, b[$, $[a, b[$ e $]a, b]$, respectivamente.

A proposição seguinte é muito importante para percebermos que o eixo numérico se pode segmentar indefinidamente por números racionais.

Proposição 1.1.2. Entre quaisquer dois números racionais existe sempre outro número racional.

Demonstração: Sejam $r,\ s$ dois números racionais distintos tais que $r < s$. Escrevamos $r = \frac{a}{b}$ e $s = \frac{c}{d}$. Seja $t = \frac{1}{2}(r + s)$. Claramente $t = \frac{ad+bc}{2bd}$ é racional. Como $\frac{1}{2}s > \frac{1}{2}r$, então

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2}(r+s) = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}s > \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r = r, \\ t &= \frac{1}{2}(r+s) = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}s < \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s = s, \end{aligned}$$

o que prova o pretendido. □

A generalização da proposição seguinte permite-nos afirmar que as raízes não exactas de números reais são números irracionais.

Proposição 1.1.3. $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Demonstração: Suponhamos, com vista a um absurdo, que $\sqrt{2}$ é um número racional. Ou seja, digamos que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, onde m e n são inteiros primos entre si. Então $2 = \frac{m^2}{n^2}$, isto é, $m^2 = 2n^2$. Como $2n^2$ é um número par, então m^2 também é um número par, pelo que m seria um número par. Pelo mesmo raciocínio, também n seria um número par. Desta forma, m e n não seriam primos entre si, já que seria possível reduzir a fracção $\frac{m}{n}$. □

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Diz-se que b é um **majorante** de A, se $a \leq b$ para todo $a \in A$. Se $b \leq a$ para todo $a \in A$, diz-se que b é um **minorante** de A. Em cada um dos casos, dizemos que A é majorado ou minorado. Se A for majorado e minorado, dizemos que A é um **conjunto limitado**. Por vezes, podemos usar as designações de limite superior e limite inferior para majorante e minorante. Ao menor dos majorantes de A chamamos **supremo** e, no caso deste pertencer a A, dizemos que é o **máximo**. Por sua vez, ao maior dos minorantes de A chamamos **ínfimo** e, no caso de pertencer a A, dizemos que é o **mínimo**.

O facto do conjunto dos números reais se poder representar num eixo numérico é uma propriedade tão importante que a podemos enunciar como um axioma.

Axioma 1.1.2. (Completude) Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$. Se A é majorado, então A tem supremo.

Usando este axioma, podemos mostrar que se A for minorado, então A tem um ínfimo. Alguns dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ não são limitados superiormente, nem inferiormente, como mostra a proposição seguinte.

Proposição 1.1.4. O conjunto $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente.

Demonstração: Raciocinando por contradição, suponhamos que $\mathbb{N}$ era limitado superiormente. Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, então, pelo Axioma 1.1.2, $\mathbb{N}$ teria um supremo, digamos b. Assim, teríamos $n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$, sendo b o menor real nestas condições. Deste modo, $b - 1$ não podia ser um majorante de $\mathbb{N}$. Portanto, existiria algum natural k com $b - 1 < k$. Mas então $b < k + 1$, o que contraria o facto de b ser um majorante de $\mathbb{N}$. □

Introduzimos agora uma propriedade que perpassa por muito do raciocínio matemático sem nos darmos conta. Diz-se que um corpo ordenado X tem a **Propriedade Arquimediana**, se

$$\forall\, x,\; y \in X \;\exists\, n \in \mathbb{Z} \;:\; nx > y.$$

Proposição 1.1.5. O corpo dos números reais $\mathbb{R}$ tem a propriedade Arquimediana.

Demonstração: Como $x > 0$, a afirmação de que existe um inteiro n tal que $nx > y$ é equivalente a encontrar um n tal que $n > \frac{y}{x}$. Mas, se não houver tal n, então $n < \frac{y}{x}$ para todos os inteiros n. Ou seja, $\frac{y}{x}$ seria um limite superior para o conjunto dos números inteiros, o que contradiz a Proposição 1.1.4. □

A demonstração da proposição seguinte deixamos como exercício.

Proposição 1.1.6. Sejam a um número irracional e r um número racional. Então:

(1) $a + r$ é irracional;

(2) Se $r \neq 0$, então ar é irracional.

Na proposição seguinte vemos, agora, que o eixo numérico também se pode segmentar indefinidamente por números irracionais.

Proposição 1.1.7. Entre quaisquer dois números reais existe sempre um número irracional.

Demonstração: Sejam a e b dois números reais com $a < b$. Usando a Proposição 1.1.5, podemos escolher um inteiro positivo n tal que $n > \frac{\sqrt{2}}{b-a}$. Se a é racional, então $a + \frac{\sqrt{2}}{n}$ é irracional e

$$a + \frac{\sqrt{2}}{n} < a + \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{b-a}} = b.$$

Se a é irracional, então $a + \frac{1}{n}$ é irracional e

$$a + \frac{1}{n} < a + \frac{\sqrt{2}}{n} < a + \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{b-a}} = b. \qquad \square$$

Observe-se que a proposição anterior nos permite dizer que entre dois racionais existe sempre um irracional, assim como entre dois irracionais existe sempre um terceiro irracional. Isto quer dizer que existem muitos mais irracionais do que racionais.

1.2 Valor absoluto

No conjunto dos números reais, definimos o **módulo**, ou **valor absoluto**, de um número como sendo a distância desse número à origem. Na definição seguinte definimos este conceito analiticamente.

Definição 1.2.1. Seja $x \in \mathbb{R}$. Definimos o módulo, ou valor absoluto, de x do modo seguinte:

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0\,. \end{cases}$$

Uma forma equivalente de definir o módulo de um número é:

$$|x| = \max\{-x, x\}\,.$$

Na proposição seguinte, estabelecemos as primeiras propriedades do módulo, as quais se provam a partir da definição anterior.

Proposição 1.2.1. Seja $a \geq 0$ um número real. Temos:

(1) $|x| = a \Leftrightarrow x = -a \vee x = a \Leftrightarrow x = \pm a$. Em particular, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(2) $|x| \leq a \Leftrightarrow x \geq -a \wedge x \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$;

(3) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \vee x \geq a$.

Demonstração: Nesta demonstração iremos usar a definição equivalente de módulo de x como sendo o máximo entre $-x$ e x.

(1) $|x| = a \Leftrightarrow \max\{-x, x\} = a \Leftrightarrow -x = a \ \vee \ x = a \Leftrightarrow x = \pm a$. Em particular, se $a = 0$, então $|x| = 0 \Leftrightarrow \max\{-x, x\} = 0 \Leftrightarrow -x = 0 \ \vee \ x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(2) $|x| \leq a \Leftrightarrow \max\{-x, x\} \leq a \Leftrightarrow -x \leq a \ \wedge \ x \leq a \Leftrightarrow x \geq -a \ \wedge \ x \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.

(3) $|x| \geq a \Leftrightarrow \max\{-x, x\} \geq a \Leftrightarrow -x \geq a \ \vee \ x \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \ \vee \ x \geq a$.

Também poderíamos ter usado a Definição 1.2.1, mas, neste caso, as justificações seriam mais envolventes. □

As duas últimas propriedades da proposição anterior, são, ainda, válidas no caso de desigualdades estritas, ou seja,

$$|x| < a \Leftrightarrow x > -a \wedge x < a \Leftrightarrow -a < x < a$$

e

$$|x| > a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a\,.$$

Na proposição seguinte estabelecem-se algumas propriedades algébricas do módulo.

Proposição 1.2.2. Sejam $x\,,\ y \in \mathbb{R}$. Temos:

(1) $|xy| = |x|\,|y|$;

(2) Se $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$;

(3) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Demonstração: (1) Se $x > 0$ e $y > 0$, ou $x < 0$ e $y < 0$, então $xy > 0$ e $|xy| = xy = |x||y|$ ou $|xy| = xy = (-x) \times (-y) = |x||y|$. Se $x > 0$ e $y < 0$, ou $x < 0$ e $y > 0$, então $xy < 0$ e $|xy| = -xy = |x||y|$, ou $|xy| = -xy = x \times (-y) = |x||y|$. No caso particular de $x = 0$ ou $y = 0$, então $|xy| = 0 = 0 \times y = |x||y|$ ou $|xy| = 0 = x \times 0 = |x||y|$.

(2) Usando a alínea anterior e sabendo que $y \neq 0$, temos

$$|x| = \left|y\frac{x}{y}\right| = |y|\left|\frac{x}{y}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

(3) Da Definição 1.2.1, sai que $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$. Somando estas duas inequações, obtemos $-\left(|x| + |y|\right) \leq x + y \leq |x| + |y|$, e da Proposição 1.2.1:(3) sai que $|x + y| \leq \big||x| + |y|\big| = |x| + |y|$. □

A última propriedade da proposição anterior, designa-se por **desigualdade triangular**, porque, quando generalizada a dimensões superiores, afirma que o comprimento de um lado qualquer de um triângulo é menor ou igual do que a soma dos comprimentos dos outros dois.

Directamente relacionada com o valor absoluto de um número, está a noção de distância desse número à origem do eixo numérico. Mais geralmente, podemos dizer que a distância entre dois números $x,\ y \in \mathbb{R}$ é dada por $|x-y|$. À aplicação $d : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$d(x,y) = |x-y|, \qquad x,\ y \in \mathbb{R} \tag{1.2.3}$$

designamos por **métrica euclidiana**. Deixamos ao cuidado do leitor provar a proposição seguinte, onde se estabelecem as propriedades principais de d.

Proposição 1.2.3. Sejam $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$.

(1) $d(x,x) = 0$;

(2) **Positividade**: Se $x \neq y$, então $d(x,y) > 0$;

(3) **Simetria**: $d(x,y) = d(y,x)$;

(4) **Desigualdade triangular**: $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

1.3 Representação decimal de números reais

Vamos designar por **dízima** à representação de qualquer número real na forma decimal. No que se segue, usamos a notação "."para separar a parte inteira de um número da sua parte não inteira. Por exemplo $\frac{3}{2}$ na forma decimal corresponde à dízima finita 1.5, enquanto $\frac{1}{3}$ corresponde à dízima infinita periódica $0.33333\ldots$, e $\sqrt{2}$ à dízima infinita não periódica $1.414213562\ldots$. No caso das dízimas infinitas periódicas, iremos usar a notação 0.(3) para indicar que o período é 3, ou $21.57(324) = 21.57324324324\ldots$ se o período é 324. Sempre que exista perigo de confusão na separação entre a parte inteira e a parte decimal de um número real, usaremos a vírgula ",". Poder-se-á recorrer a outra simbologia, como o ponto e vírgula ";", sempre que tal se revele necessário.

Recordemos os resultado seguintes que já deverão ser conhecidos de anos anteriores.

Proposição 1.3.1. Seja x um número real.

(1) Se $x \neq 1$, então $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

(2) Se $|x| < 1$, então $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$.

A **representação decimal** $a_0.a_1a_2a_3\cdots$ (na base 10), onde a_0 é um número inteiro, $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ são algarismos (inteiros de 0 a 9), é um número real escrito na forma

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots\ . \tag{1.3.4}$$

Proposição 1.3.2. Todo o número real x tem uma representação decimal na forma (1.3.4).

Demonstração: Todo o real x está compreendido entre dois inteiros consecutivos, digamos a_0 e a_0+1, de modo que $a_0 \leq x < a_0+1$. Dividamos o intervalo $[a_0, a_0+1]$ em 10 intervalos iguais. Claramente, x está contido num desses subintervalos. Assim, podemos encontrar um inteiro a_1 entre 0 e 9, inclusive, de modo que

$$a_0 + \frac{a_1}{10} \leq x < a_0 + \frac{a_1+1}{10}.$$

De modo análogo, dividimos o intervalo $\left[a_0 + \frac{a_1}{10}, a_0 + \frac{a_1+1}{10}\right]$ em 10 intervalos iguais. Assim, x está contido num desses subintervalos, e podemos encontrar um inteiro a_2, novamente entre 0 e 9, de modo que

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2+1}{10^2}.$$

Continuando este procedimento, obtemos a soma

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_n}{10^n},$$

que, á medida que o número de parcelas aumentar, irá ficar cada vez mais próximo de x. Portanto,

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots .$$

Isto é o que entendemos por representação decimal de x: $x = a_0.a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$. $\square$

Exemplo 1.3.1. Mostrar que $\sqrt{3} \simeq 1.732$.

Resolução: Se $x = \sqrt{3}$, então $x^2 = 3$, e assim $1^2 < x^2 < 2^2$. Logo $1 < x < 2$, pelo que $a_0 = 1$. A seguir, temos $1.7^2 = 2.89 < x^2 < 3.24 = 1.74^2$, pelo que $1.73 < x < 1.74$, e temos $a_1 = 7$. De modo análogo, $1.73^2 = 2.9929 < x^2 < 3.0276 = 1.74^2$, e então $1.73 < x < 1.74$, e $a_2 = 3$. Prosseguindo, como $1.731^2 = 2.996361 < x^2 < 3.003288 = 1.732^2$, temos $1.731 < x < 1.732$, e, portanto, $a_3 = 1$. Observe-se que $1.7319^2 = 2.99947761 < x^2 < 3.003288 = 1.732^2$. Deste modo, temos $1.7319 < x < 1.732$, pelo que podemos dizer que $x \simeq 1.732$.

Proposição 1.3.3. Se um número real x tem duas representações distintas (na base 10), digamos

$$a_0.a_1a_2a_3\ldots, \qquad b_0, b_1b_2b_3\ldots,$$

então uma dessas representações termina em 999 e a outra 000.

Demonstração: Seja k a posição mais à esquerda onde $a_k \neq b_k$, $k \in \mathbb{Z}_0^+$. Então $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $\ldots$, $a_{k-1} = b_{k-1}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $a_k > b_k$. Assim, $a_k \geq b_k + 1$. Como $x = a_0.a_1a_2\cdots = b_0.b_1b_2\ldots$, temos $a_0.a_1a_2\ldots a_k000\cdots \leq a_0.a_1a_2\cdots = x = b_0.b_1b_2\cdots \leq b_0.b_1b_2\ldots b_k999\ldots$. Ou seja,

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}\ldots\frac{a_k}{10^k} \leq x \leq b_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \cdots + \frac{b_k}{10^k} + 9\left(\frac{1}{10^{k+1}} + \frac{1}{10^{k+2}} + \ldots\right).$$

Daqui e da Proposição 1.3.1 resulta que

$$a_k \leq b_k + 9\left(\frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \dots\right) = b_k + 1 \leq a_k.$$

Portanto $a_k = b_k + 1$, pelo que

$$x = a_0.a_1a_2a_3 \dots a_{k-1}a_k000 = b_0.b_1b_2 \dots b_{k-1}(a_k - 1)999,$$

o que conclui a demonstração. $\square$

Proposição 1.3.4. Um número real é racional se e só se a sua representação na forma decimal for uma dízima finita ou infinita periódica.

Demonstração: Consideremos apenas o caso da dízima infinita periódica, já que o caso da dízima finita é imediato.

Seja então $x = \frac{m}{n}$ um número racional, onde m e n são primos entre si. Façamos a divisão seguinte de modo a termos quocientes e restos:

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{lcll}
m & = & q_0 n + r_0, & 0 \leq r_0 < n, \\
10r_0 & = & q_1 n + r_1, & 0 \leq r_1 < n, \\
10r_1 & = & q_2 n + r_2, & 0 \leq r_2 < n, \\
\vdots & & & \\
\end{array}\right. \\
\left.\begin{array}{lcll}
10r_{k-1} & = & q_k n + r_k, & 0 \leq r_k < n, \\
10r_k & = & q_{k+1} n + r_{k+1}, & 0 \leq r_{k+1} < n, \\
\vdots & & &
\end{array}\right\} l
\end{array}\right\} \leq n-1$$

$$\left.\begin{array}{lcll}
10r_{k+l-1} & = & q_{k+l} n + r_{k+l}, & 0 \leq r_{k+l} < n, \\
10r_{k+l} & = & q_{k+l+1} n + r_{k+l+1}, & 0 \leq r_{k+l+1} < n, \\
\vdots & & &
\end{array}\right\} l$$

Como os restos do quociente por n podem ser somente $0, 1, 2, \dots, n-1$, os restos devem repetir-se periodicamente. Assim $q_{k+l+1} = q_{k+1}$, $q_{k+l+2} = q_{k+2}$, $\dots$, ou seja, $q_{a+il} = q_a$ para $a \geq k+1$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{m}{n} &= q_0 q_1 q_2 \cdots q_k \underbrace{q_{k+1}q_{k+2}\cdots q_{k+l}}_{l}\underbrace{q_{k+l+1}q_{k+l+2}\cdots q_{k+2l}}_{l}\cdots \\
&= q_0 q_1 q_2 \cdots q_k \underbrace{q_{k+1}q_{k+2}\cdots q_{k+l}}_{l}\underbrace{q_{k+1}q_{k+2}\cdots q_{k+l}}_{l}\cdots \\
&= q_0 q_1 q_2 \cdots q_k (q_{k+1}q_{k+2}\cdots q_{k+l}).
\end{aligned}$$

É claro que $1 \leq l \leq n$. Além disso, se $n \geq 2$, então $l \leq n-1$. De facto, se um dos restos r_i for zero, então todos os restos seguintes são zero. Logo $l = 1$. Caso contrário, todos os r_i restantes são não nulos. Portanto, $l \leq n-1$.

Reciprocamente, suponhamos que é dado um número real x cuja representação decimal é dada por $x = a_0.a_1a_2 \dots a_k(q_1q_2 \dots q_l)$. Então

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots \frac{a_k}{10^k} + r,$$

com

$$\begin{aligned} r =& \frac{1}{10^k}\left(\frac{q_1}{10}+\cdots+\frac{q_l}{10^l}\right)+\frac{1}{10^{k+l}}\left(\frac{q_1}{10}+\cdots+\frac{q_l}{10^l}\right)+\frac{1}{10^{k+2l}}\left(\frac{q_1}{10}+\cdots+\frac{q_l}{10^l}\right)+\cdots \\ =& \frac{1}{10^k}\left(\frac{q_1}{10}+\cdots+\frac{q_l}{10^l}\right)\frac{10^l}{10^l-1}, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

Exemplo 1.3.2. Mostrar que $1.6(18) = \frac{89}{55}$.

Resolução: Procedendo como na demonstração da proposição anterior, temos

$$\begin{aligned} 1.6(18) =& 1+\frac{6}{10}+\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}+\frac{8}{10^2}\right)+\frac{1}{10^3}\left(\frac{1}{10}+\frac{8}{10^2}\right)+\frac{1}{10^5}\left(\frac{1}{10}+\frac{8}{10^2}\right)+\cdots \\ =& 1+\frac{6}{10}+\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}+\frac{8}{10^2}\right)\left(1+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\cdots\right) \\ =& 1+\frac{6}{10}+\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}+\frac{8}{10^2}\right)\frac{100}{99} = 1+\frac{6}{10}+\frac{1}{99}+\frac{8}{990}=\frac{1602}{990}=\frac{89}{55}. \end{aligned}$$

□

1.4 Representação não decimal de números reais

Se $b \in \mathbb{N}$ é tal que $b \geq 2$, então b pode ser base de um sistema de numeração que utiliza b algarismos,

$$\mathcal{B} = \{0, \ldots, b-1\}, \qquad \#\mathcal{B} = b.$$

A base de um sistema de numeração é, pois, a quantidade de algarismos disponíveis nesse mesmo sistema de numeração. Aos elementos da base chamamos dígitos. No caso específico da base decimal, designamos por algarismos. No entanto, na maioria das situações práticas, acabamos também por chamar algarismos aos dígitos de qualquer base, notando que se trata de um abuso de linguagem. Para bases com cardinalidade inferior à base decimal, podemos usar os algarismos desta base. No entanto, para bases com cardinalidade superior, é necessário acrescentar dígitos à base decimal para definirmos o nosso sistema de contagem. O mais natural, é usar símbolos do alfabeto (latino) em letras maiúsculas,

$$A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ H,\ I,\ J,\ K,\ L,\ M,\ N,\ O,\ P,\ Q,\ R,\ S,\ T,\ U,\ V,\ W,\ X,\ Y,\ Z\,,$$

e, se necessário, complementado pelos símbolos desse mesmo alfabeto em letras minúsculas,

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h,\ i,\ j,\ k,\ l,\ m,\ n,\ o,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t,\ u,\ v,\ w,\ x,\ y,\ z\,.$$

Exemplo 1.4.1. Algumas das bases mais usadas são:

(a) Base 2: $\mathcal{B} = \{0, 1\}$, $\#\mathcal{B} = 2$;

(b) Base 10: $\mathcal{B} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $\#\mathcal{B} = 10$;

(c) Base 16: $\mathcal{B} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$, $\#\mathcal{B} = 16$;

(d) Base 60: $\mathcal{B} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, a, b, c, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x\}$, $\#\mathcal{B} = 60$;

Os sistemas de numeração correspondentes às bases 2, 10, 16 e 60 do exemplo anterior, são designados por binário, decimal, hexadecimal e sexagesimal, respectivamente.

Proposição 1.4.1. Todo o número real x tem uma representação na base

$$\mathcal{B} = \{0, \dots, b-1\}, \quad \text{com } b \geq 2,$$

na forma

$$\begin{aligned} x =& a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots \\ =& a_n \times b^n + a_{n-1} \times b^{n-1} + \cdots + a_1 \times b^1 + a_0 \times b^0 + a_{-1} \times b^{-1} + a_{-2} \times b^{-2} + \cdots, \end{aligned}$$

onde $a_n,\ a_{n-1},\ \dots,\ a_1,\ a_0,\ a_{-1},\ a_{-2},\ \dots \in \mathcal{B}$.

Demonstração: Este resultado generaliza a Proposição 1.3.2 a qualquer base $\mathcal{B} = \{0, \dots, b-1\}$, com $b \geq 2$. □

Sempre que não haja risco de confusão, a representação referida na proposição anterior pode ser escrita de modo mais simples na forma

$$x = a_n \times b^n + a_{n-1} \times b^{n-1} + \cdots + a_1 \times b + a_0 + a_{-1} \times b^{-1} + a_{-2} \times b^{-2} + \cdots.$$

Se o número real for uma dízima finita com, digamos m casas na parte não inteira, então a sua escrita na base $\mathcal{B}$ referida é a seguinte,

$$\begin{aligned} x =& a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots a_{-(m-1)} a_{-m} \\ =& a_n \times b^n + a_{n-1} \times b^{n-1} + \cdots + a_1 \times b^1 + a_0 \times b^0 + a_{-1} \times b^{-1} + a_{-2} \times b^{-2} + \cdots + \\ & a_{-(m-1)} \times b^{-(m-1)} + a_{-m} \times b^{-m}, \end{aligned}$$

onde $a_n,\ a_{n-1},\ \dots,\ a_1,\ a_0,\ a_{-1},\ a_{-2},\ \dots,\ a_{-(m-1)},\ a_{-m} \in \mathcal{B}$.

Exemplo 1.4.2.

$$103.04_{(5)} = 1 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 3 \times 5^0 + 0 \times 5^{-1} + 4 \times 5^{-2}.$$

1.4.1 Mudança de um inteiro x na base 10 para uma base $b \neq 10$

Consideremos um inteiro escrito na base 10 por

$$x = a_n \dots a_1 a_0, \qquad a_n,\ \dots,\ a_1,\ a_0 \in \{0, 1, \dots, 9\}, \qquad a_n \neq 0$$

e uma base

$$\mathcal{B} = \{0, \ldots, b-1\}, \qquad \#\mathcal{B} = b,$$

com $b \in \mathbb{N}_2$, mas tal que $b \neq 10$.

- Se $x < b$, então

$$x_{(10)} = x_{(b)}.$$

- Se $x \geq b$, dividimos x por b e escrevemos

$$x = Q_1 \times b + b_0.$$

  - Se $Q_1 < b$, então $b_1 = Q_1$ e escrevemos

$$x_{(10)} = b_1 b_{0(b)}.$$

  - Se $Q_1 \geq b$, dividimos Q_1 por b e escrevemos

$$x_{(10)} = (Q_2 \times b + b_1) \times b + b_0.$$

    - Se $Q_2 < b$, então $b_2 = Q_2$ e escrevemos

$$\begin{aligned} x_{(10)} =& (Q_2 \times b + b_1) \times b + b_0 = (b_2 \times b + b_1) \times b + b_0 \\ =& b_2 b_1 b_{0(b)}. \end{aligned}$$

    - Se $Q_2 \geq b$, dividimos Q_2 por b e escrevemos

$$x_{(10)} = \big[\,(Q_3 \times b + b_2) \times b + b_1\big] \times b + b_0$$

    - Repetimos o procedimento, digamos n vezes ($n > 2$), até obtermos um quociente $Q_n < b$ para o procedimento parar. Neste caso, $b_n = Q_n$ e escrevemos

$$\begin{aligned} x_{(10)} =& \Big(\Big\{\big[\,(Q_n \times b + b_{n-1}) \times b + b_n\big] \times b + \cdots\Big\} \times b + b_1\Big) \times b + b_0 \\ =& b_n \times b^n + b_{n-1} \times b^{n-1} + \cdots + b_1 \times b^1 + b_0 \times b^0 \\ =& b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_{0(b)}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.4.3. Mostrar que:

(a) $5_{(10)} = 5_{(8)}$; (b) $83_{(10)} = 1010011_{(2)}$; (c) $62477_{(10)} = F40D_{(16)}$.

Resolução: (a) Como $5 < b = 8$, é imediato que $5_{(10)} = 5_{(8)}$;

(b) Dividindo 83 e os sucessivos quocientes por 2, até se atingir um quociente inferior a 2, temos:

$$\begin{aligned}
83_{(10)} =&41 \times 2 + 1\\
=&(20 \times 2 + 1) \times 2 + 1\\
=&\big[(10 \times 2 + 0) \times 2 + 1\big] \times 2 + 1\\
=&\big\{\big[(5 \times 2 + 0) \times 2 + 0\big] \times 2 + 1\big\} \times 2 + 1\\
=&\Big(\big\{\big[(2 \times 2 + 1) \times 2 + 0\big] \times 2 + 0\big\} \times 2 + 1\Big) \times 2 + 1\\
=&\Big[\Big(\big\{\big[(1 \times 2 + 0) \times 2 + 1\big] \times 2 + 0\big\} \times 2 + 0\Big) \times 2 + 1\Big] \times 2 + 1\\
=&1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0\\
=&1010011_{(2)}.
\end{aligned}$$

(c) Neste caso, está subentendido que a base 16 é

$$\mathcal{B}_{(16)} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}.$$

⋮

A mudança de uma outra base para a base 10 é bastante mais fácil, bastando para tal fazer a representação do número em termos das potências dessa base e fazer os cálculos na base 10.

Exemplo 1.4.4. Mostre que $1010011_{(2)} = 83_{(10)}$.

Resolução: De facto, temos

$$\begin{aligned}
1010011_{(2)} =&1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0\\
=&83_{(10)}.
\end{aligned}$$

1.4.2 Mudança de um não inteiro $x \in (0, 1)$ na base 10 para uma base $b \neq 10$

Seja $x \in \mathbb{R}$ (escrito na base 10) tal que

$$0 < x < 1$$

e uma base

$$\mathcal{B} = \{0, \dots, b-1\}, \qquad \#\mathcal{B} = b,$$

com $b \in \mathbb{N}_2$, mas tal que $b \neq 10$. Suponhamos que

$$x_{(10)} = 0, a_{-1}a_{-2}\dots a_{-m(10)}$$

Pretendemos encontrar $b_{-1},\ b_{-2},\ \dots b_{-m} \in \mathcal{B}$ tal que

$$x_{(10)} = 0, b_{-1}b_{-2}\dots b_{-n}.$$

Observe-se que m pode perfeitamente ser distinto de n. Neste momento ainda não sabemos quais são os dígitos $b_{-1},\ b_{-2},\ \dots b_{-m} \in \mathcal{B}$, mas no que se segue vamos usar a representação $x_{(10)} = 0, b_{-1}b_{-2}\dots b_{-n}$ por facilidade de escrita no procedimento seguinte.

- Multiplicando x por b e subtraindo a parte inteira ao resultado obtido, temos

$$\begin{aligned} b \times x =& b \times 0, b_{-1} b_{-2} \ldots b_{-n} = b \times \left(b_{-1} \times b^{-1} + b_{-2} \times b^{-2} + b_{-3} \times b^{-3} + \cdots + b_{-n} \times b^{-n}\right) \\ =& b_{-1} + b_{-2} \times b^{-1} + b_{-3} \times b^{-2} + \cdots b_{-n} \times b^{-n+1} \end{aligned}$$

  Daqui tiramos o valor de b_{-1} e fixamos a diferença $D_1 = b_{-2} \times b^{-1} + b_{-3} \times b^{-2} + \cdots b_{-n} \times b^{-n+1}$.

- A seguir, multiplicamos D_1 por b e subtraímos a parte inteira ao resultado obtido, tendo

$$\begin{aligned} b \times D_1 =& b \times \left(b_{-2} \times b^{-1} + b_{-3} \times b^{-2} + \cdots b_{-n} \times b^{-n+1}\right) \\ =& b_{-2} + b_{-3} \times b^{-1} + \cdots b_{-n} \times b^{-n+2} \end{aligned}$$

  Tiramos agora o valor de b_{-2} e fixamos a diferença $D_2 = b_{-3} \times b^{-1} + \cdots b_{-n} \times b^{-n+2}$.

- Prosseguimos desta forma até se obter D_n para algum $n \geq 1$ ou até se fixar um número predeterminado de casas "decimais", quer seja uma dízima finita ou infinita.

O processo anterior garante-nos sempre que as sucessivas diferenças $D_1,\ D_2,\ \ldots,\ D_n \in (0,1)$, quando escritas na base decimal. Por exemplo para D_1, no caso de dízima finita, conseguimos mostrar que

$$\begin{aligned} 0 < D_1 =& b_{-2} \times b^{-1} + b_{-3} \times b^{-2} + b_{-4} \times b^{-3} + \cdots b_{-n} \times b^{-n+1} \\ \leq& (b-1) \times b^{-1} + (b-1) \times b^{-2} + (b-1) \times b^{-3} + \cdots (b-1) \times b^{-n+1} \\ =& 1 - b^{-1} + b^{-1} - b^{-2} + b^{-2} - b^{-3} + \cdots + b^{-n} - b^{-(n-1)} + b^{-(n-1)} - b^{-n} \\ =& 1 - b^{-n} = 1 - \left(\frac{1}{b}\right)^n < 1. \end{aligned}$$

No caso de dízima infinita, temos

$$\begin{aligned} 0 < D_1 =& b_{-2} \times b^{-1} + b_{-3} \times b^{-2} + b_{-4} \times b^{-3} + \cdots b_{-n} \times b^{-n+1} + \cdots \\ \leq& (b-1) \times b^{-1} + (b-1) \times b^{-2} + (b-1) \times b^{-3} + \cdots (b-1) \times b^{-n+1} + \cdots \\ =& (b-1) b^{-1} \left[1 + \frac{1}{b} + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \cdots \left(\frac{1}{b}\right)^{n-2} + \cdots\right] \\ =& \frac{b-1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{b-1}{b} \frac{1}{1 - \frac{1}{b}} = 1. \end{aligned}$$

Exemplo 1.4.5. Mostrar que:

(a) $0.8125_{(10)} = 0.1101_{(2)}$; (b) $0.84326_{(10)} = 0.D7DFE32A06_{(16)}$.

Resolução: (a) Multiplicando $0,8125$ por 2 e subtraindo a parte inteira ao resultado obtido, temos

$$\begin{aligned}
0.8125 \times 2 = 1.625 \quad &\Rightarrow \quad a_{-1} = 1, \quad D_1 = 0.625,\\
0.625 \times 2 = 1.25 \quad &\Rightarrow \quad a_{-2} = 1, \quad D_2 = 0.25,\\
0.25 \times 2 = 0.5 \quad &\Rightarrow \quad a_{-3} = 0, \quad D_3 = 0.5,\\
0.5 \times 2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad a_{-4} = 1, \quad D_4 = 1.
\end{aligned}$$

Então $0.8125_{(10)} = 0.1101_{(2)}$.

(b) Neste caso, está subentendido que a base 16 é

$$\mathcal{B}_{(16)} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}.$$

Multiplicando 0.8125 por 16 e subtraindo a parte inteira ao resultado obtido, temos

$$\begin{aligned}
0.84326 \times 16 = 13.49216 \quad &\Rightarrow \quad a_{-1} = 13 = D, \quad D_1 = 0.49216,\\
0.49216 \times 16 = 7.87456 \quad &\Rightarrow \quad a_{-2} = 7, \quad D_2 = 0.87456,\\
0.87456 \times 16 = 13.99296 \quad &\Rightarrow \quad a_{-3} = 13 = D, \quad D_3 = 0.99296,\\
0.99296 \times 16 = 15.88736 \quad &\Rightarrow \quad a_{-4} = 15 = F, \quad D_4 = 0.88736,\\
0.88736 \times 16 = 14.19776 \quad &\Rightarrow \quad a_{-5} = 14 = E, \quad D_5 = 0.19776,\\
0.19776 \times 16 = 3.16416 \quad &\Rightarrow \quad a_{-6} = 3, \quad D_6 = 0.16416.
\end{aligned}$$

Uma aproximação até à sexta casa decimal, permite escrever $0.84326_{(10)} \simeq 0.D7DFE3_{(16)}$. No entanto, se continuarmos o processo até à décima casa decimal, temos

$$\begin{aligned}
0.16416 \times 16 = 2.62656 \quad &\Rightarrow \quad a_{-7} = 2, \quad D_7 = 0.62656,\\
0.62656 \times 16 = 10.02496 \quad &\Rightarrow \quad a_{-8} = 10 = A, \quad D_8 = 0.02496,\\
0.02496 \times 16 = 0.39936 \quad &\Rightarrow \quad a_{-9} = 0, \quad D_9 = 0.39936,\\
6.38976 \times 16 = 6.38976 \quad &\Rightarrow \quad a_{-10} = 6, \quad D_{10} = 0.38976,
\end{aligned}$$

pelo que $0.84326_{(10)} \simeq 0.D7DFE32A06_{(16)}$.

1.4.3 Mudança de um real numa base $b \neq 10$ para a base 10

A mudança de um número, escrito numa outra base $b \neq 10$, para a base 10, é bastante mais fácil. Para tal, basta fazer a representação do número em termos das potências dessa outra base e realizar os cálculos na base 10.

Exemplo 1.4.6. Mostrar que:

(a) $1010011_{(2)} = 83_{(10)}$;

(b) $F40D_{(16)} = 62477_{(10)}$;

(c) $0.1101_{(2)} = 0.8125_{(10)}$;

(d) $0.D7DFE3_{(16)} \simeq 0.84326_{(10)}$.

Resolução: Fazendo a representação do número em termos das potências da base indicada, e depois fazendo os cálculos na base 10, temos:

(a) $1010011_{(2)} = 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 83_{(10)}$;

(b) $F40D_{(16)} = F \times 16^3 + 4 \times 16^2 + 0 \times 16^1 + D \times 16^0 =$
$15 \times 16^3 + 4 \times 16^2 + 0 \times 16^1 + 14 \times 16^0 = 62477_{(10)}$;

(c) $0.1101_{(2)} = 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} = 0.8125_{(10)}$;

(d) $0.D7DFE3_{(16)} = D \times 16^5 + 7 \times 16^4 + D \times 16^3 + F \times 16^2 + E \times 16^1 + 3 \times 16^0 =$
$13 \times 16^5 + 7 \times 16^4 + 13 \times 16^3 + 15 \times 16^2 + 14 \times 16^1 + 3 \times 16^0 =$
$0.8432598993_{(10)} \simeq 0.84326_{(10)}$.