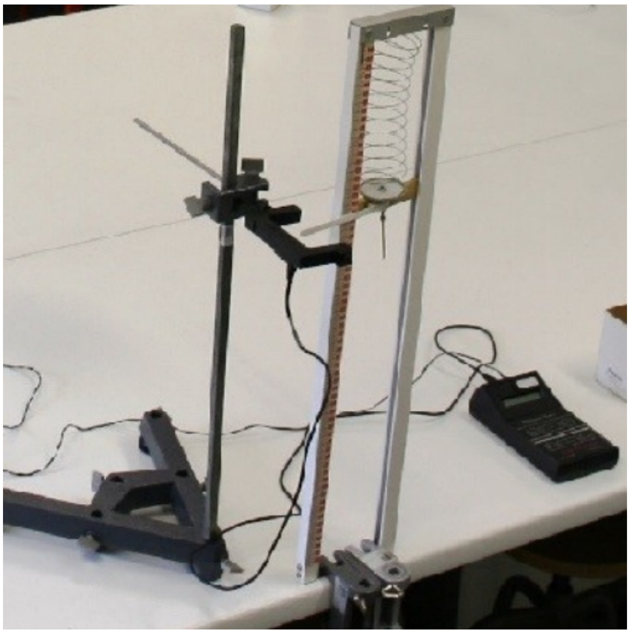
Pêndulo Elástico

Guia de Laboratório para cursos de Ciências Exactas e Engenharia

José Mariano
Departamento de Física, FCT
Universidade do Algarve
jmariano@ualg.pt



1 Objectivo

Pretende-se com este trabalho prático determinar a constante elástica de uma mola utilizando dois métodos diferentes: o método estático e o método dinâmico.

2 Fundamento Teórico

A figura 1 mostra uma mola de comprimento l_0, suspensa por uma das suas extremidades. Quando, na outra extremidade, se suspende um corpo de massa m, a mola passa a ter um comprimento l e dá origem a uma força aplicada sobre o corpo, a *força elástica* (F_m) que se opõe à sua elongação, sendo dada por:

$$F_m = -k\Delta l. \tag{1}$$

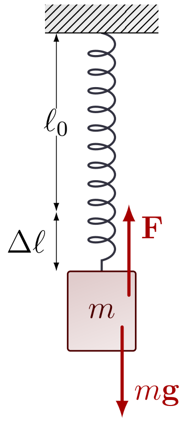


Figura 1: Sistema massa-mola em equilíbrio.

em que $\Delta l = l - l_0$ é a elongação da mola e k é a *constante elástica* da mola, cujas unidades, no S.I, são N/m. k depende unicamente do material de que a mola é feita e da sua forma e dimensões. O sinal negativo na expressão 1 indica que F_m tem sentido contrário a Δl. Está relação é válida apenas para elongações não muito elevadas.

A constante elástica pode ser determinada através de dois métodos distintos: o *método estático*, aplicável quando o sistema mola-massa está em equilíbrio estático, e o *método dinâmico*, quando o sistema está em movimento.

2.1 Método estático

Quando o sistema se encontra na posição de equilíbrio, o peso do corpo (P) é totalmente compensado pela força elástica (F_m), i.e,

$$P = F_m \Rightarrow k_e \Delta l = mg, \tag{2}$$

Em que k_e representa a constante elástica da mola determinada pelo método estático. Esta equação pode ser escrita como

$$\Delta l = \frac{g}{k_e} m. \tag{3}$$

A expressão anterior mostra que o deslocamento Δl está relacionado linearmente com m, através do fator g/k_e. Comparando a equação anterior com a equação geral de uma recta, $y = ax + b$, conclui-se que a representação gráfica da eq. 3, isto é, Δl em função de m, assume a forma de uma recta de declive g/k_e e ordenada na origem zero.

2.2 Método dinâmico

Se o sistema mola-massa for desviado da posição de equilíbrio, deslocando, por exemplo, a massa ligeiramente para baixo, quando a massa é largada, ela vai realizar um movimento de vai-vem em torno da posição de equilíbrio (Fig. 2). Esse movimento, designado *movimento harmónico simples*, é descrito pela equação

$$y(t) = A \cos(\omega t - \phi) \tag{4}$$

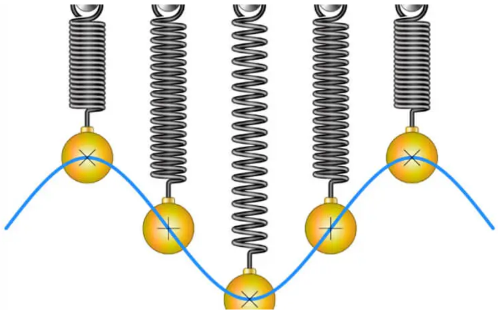


Figura 2: Movimento de oscilação de uma mola, onde se evidencia a variação sinusoidal da elongação.

em que $y(t)$ é a posição vertical da massa, que varia ao longo do tempo[1]. Nesta equação, ω é a *frequência angular* de oscilação do sistema, que se relaciona com o *período* T, que é o tempo necessário para a massa completar uma oscilação, por:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

É possível mostrar que, num sistema deste tipo, o período de oscilação T é dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k_d}}\sqrt{m} \tag{5}$$

A expressão anterior mostra que o período T está relacionado linearmente com $\sqrt{m}$ através do fator $2\pi/\sqrt{k_d}$. É este facto que permite determinar a constante elástica (”dinâmica”), k_d, quando o sistema se encontra em oscilação. De facto, traçando-se um gráfico de T em função de $\sqrt{m}$, a expressão anterior permite afirmar que se irá obter uma recta com declive $a = 2\pi/\sqrt{k_d}$ e ordenada na origem nula.

A expressão 5 deve ser corrigida, atendendo-se ao seguinte: quando o sistema é colocado em movimento, o que oscila é a massa m, mas também o dispositivo de fixação das massas, cuja massa (m_f=27 g) tem que ser levada em consideração, para que se obtenham valores mais exactos. É igualmente necessário tomar em consideração a massa da própria mola (m_m=18 g), que contribui para o seu próprio movimento de oscilação. Para incluir o efeito de m_m, assume-se que, quando uma mola oscila, todos os pontos ao longo do comprimento da mola se deslocam linearmente em relação ao seu ponto de equilíbrio. Pode-se provar analiticamente que a massa da mola afeta T mediante uma massa efetiva igual a $m_m/3$. Assim sendo, a massa a utilizar na Eq. 5 deve ser

$$m_t = m + m_f + \frac{m_m}{3}$$

escrevendo-se a Eq. 5 agora

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k_d}}\sqrt{m_t} = \frac{2\pi}{\sqrt{k_d}}\sqrt{m + m_f + \frac{m_m}{3}} \tag{6}$$

Deve-se notar que, uma vez que a mola apenas possui um único valor de k, idealmente os coeficientes k_e e k_d determinados experimentalmente devem ser iguais. No entanto, na prática, isto é dificilmente realizável, já que os métodos usados são bastante diferentes.

[1] Na realidade, o movimento da mola é amortecido, isto é, a sua amplitude diminui com o tempo e o período varia. No entanto, admite-se que o primeiro período medido é razoávelmente proximo do valor teório de T.

3 Material utilizado

Calha vertical com mola incorporada, massas, relógio electrónico, detector fotoelétrico, régua graduada com cursores, fios de ligação.

4 Procedimento experimental

Não se esqueça de anotar as incertezas de leitura associados às escalas da régua, da balança e do relógio.

4.1 Método estático

1. Registe a posição de equilíbrio da mola, na ausência de massas (l_0);
2. Pendure uma massa de m=20 g, tendo o cuidado de determinar o seu valor na balança. Meça a nova posição de equilíbrio (l). Registe l e m;
3. Repita o procedimento para mais 7 massas, aumentando m, 20 g de cada vez.

4.2 Método dinâmico

1. Pendure uma massa de m =30 g na mola, após sua pesagem. Coloque o sistema em movimento, deslocando ligeiramente a massa da sua posição de equilíbrio.
2. Meça o período do movimento, T, 10 vezes, realizando lançamentos independentes;
3. Repita o procedimento anterior para mais quatro massas, aumentando m, 30 g de cada vez.

5 Análise dos resultados

5.1 Método estático

1. Calcule $\Delta l = l - l_0$;
2. Trace no Excel um gráfico de Δl em função de m, incluíndo as barras de erro;
3. Ajuste uma recta ao gráfico de modo a calcular a e b e as respetivas incertezas $u(a)$ e $u(b)$;
4. A partir da informação obtida na alínea anterior, calcule o valor da constante elástica da mola (Eq. 3), considerando $g = 9,79907$ m/s^2, e estime a sua incerteza $u(k_e)$ (ver apêndice);
5. Comente.

5.2 Método dinâmico

1. Para cada valor de m, calcule $\sqrt{m_t}$, o período médio ($\overline{T}$), e a respetiva incerteza $u(\overline{T})$;
2. Construa no computador um gráfico de $\overline{T}$ em função de $\sqrt{m_t}$, incluíndo as barras de erro;
3. Ajuste uma reta ao gráfico, de modo a calcular a e b e as respetivas incertezas $u(a)$ e $u(b)$;
4. A partir da informação obtida na alínea anterior, calcule o valor de k_d (Eq. 6) e estime a respectiva incerteza $u(k_d)$ usando a expressão no apêndice;
5. Determine o erro relativo de k_d, em relação ao valor de k_e, através da expressão

$$\epsilon = \frac{|k_d - k_e|}{k_e} 100\%$$

6. Comente.

A Cálculos das incertezas

A.1 Incerteza de $\sqrt{m_t}$

$$\sqrt{m_t} \Rightarrow u(\sqrt{m_t}) = \frac{u(m)}{2\sqrt{(m_t)^3}}$$

A.2 Incerteza de k_e

$$k_e = \frac{g}{a} \Rightarrow u(k_e) = g\frac{u(a)}{a^2}$$

onde se considerou, para a obtenção da expressão, que g é um valor exacto (sem incerteza).

A.3 Incerteza de k_d

$$k_d = \frac{4\pi^2}{a^2} \Rightarrow u(k_d) = 8\pi^2\frac{u(a)}{a^3}. \tag{7}$$

Referências

[1] José Mariano, *Fundamentos de Análise de Dados*, Departamento de Física, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade do Algarve.