

## Ficha de exercícios nº5: Interpolação polinomial

1. Considere a função  $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ .
  - (a) Determine o polinómio de Taylor de grau 3, em torno de  $a = 0$ , da função  $f$ ;
  - (b) Usando (a), calcule um valor aproximado de  $f(0.05)$ ;
  - (c) Determine um majorante para o erro (Fórmula de Taylor) cometido na aproximação calculada em (b);
  - (d) Determine um majorante para o erro absoluto cometido na aproximação calculada em (b) e compare o resultado com o obtido em (c).
2. Considere a função  $f(x) = \ln(1+x)$ .
  - (a) Determine o polinómio de Taylor de grau 4, em torno de  $a = 0$ , da função  $f$ ;
  - (b) Usando (a), calcule um valor aproximado de  $\ln(1.1)$ ;
  - (c) Determine um majorante para o erro (Fórmula de Taylor) cometido na aproximação calculada em (b);
  - (d) Determine um majorante para o erro absoluto cometido na aproximação calculada em (b) e compare este resultado com o que foi obtido em (c).
3. Determine o grau mínimo  $n$  do polinómio de Taylor das funções indicadas, em torno de  $a = 1$ , de modo a se poder calcular um valor aproximado de  $f(1.25)$  com erro inferior a  $10^{-8}$ :
  - (a)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ;
  - (b)  $f(x) = \ln(x)$ .
4. Considere a tabela seguinte referente a uma função  $y = f(x)$ :

|     |    |    |    |    |    |
|-----|----|----|----|----|----|
| $x$ | 1  | 3  | 4  | 7  | 8  |
| $y$ | 25 | 38 | 45 | 40 | 58 |

Determine um valor aproximado para  $y = f(7.4)$ , usando:

- (a) interpolação de Lagrange linear;
  - (b) interpolação de Lagrange quadrática;
  - (c) interpolação de Lagrange com quatro pontos da tabela;
5. Utilize o exercício anterior para extrapolar um valor de  $y$  para  $x = 8.2$ .
  6. Considere uma função  $f$  para a qual são dados os valores seguintes:

$$\begin{aligned} f(2.0) &= 0.5103757, & f(2.2) &= 0.5207843, & f(2.4) &= 0.5104147, \\ f(2.6) &= 0.4813306, & f(2.8) &= 0.4359160. \end{aligned}$$

Usando interpolação de Lagrange, calcule valores aproximados de  $f(2.5)$  com polinómios de grau:

- (a)  $n = 1$ ;                      (b)  $n = 2$ ;                      (c)  $n = 3$ ;                      (d)  $n = 4$ .

Em cada uma das alíneas anteriores, determine um majorante para o erro cometido.

7. Considere os valores seguintes:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(0.30) &= 0.29552, & \operatorname{sen}(0.32) &= 0.31457, & \operatorname{sen}(0.33) &= 0.32404, \\ \operatorname{sen}(0.35) &= 0.34290\end{aligned}$$

- (a) Determine um polinómio de Lagrange que interpole os quatro pontos;  
 (b) Calcule um valor aproximado de  $\operatorname{sen}(0.34)$  usando (a);  
 (c) Determine um majorante para o erro cometido em (b);  
 (d) Usando (a), calcule um valor aproximado para a extrapolação de  $y = \operatorname{sen}(x)$  em  $x = 0.29$ ;  
 (e) Calcule os erros absolutos cometidos nas aproximações calculadas em (b) e (d).
8. Considere a função  $f(x) = 3^x$  e os valores de abcissa  $x_0 = -2$ ,  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 1$ ,  $x_4 = 2$ .
- (a) Usando o Método de Neville, determine o polinómio interpolador destes cinco pontos;  
 (b) Usando (a), calcule um valor aproximado de  $\sqrt{3}$   
 (c) Determine um majorante para o erro cometido em (b);  
 (d) Determine um majorante para o erro absoluto cometido em (b).
9. Considere a função  $f(x) = x^2 e^x \cos(x)$  e os valores de abcissa  $x_0 = -1.0$ ,  $x_1 = -0.9$ ,  $x_2 = -0.8$ ,  $x_3 = -0.7$ ,  $x_4 = -0.6$ .
- (a) Usando o Método de Neville, determine o polinómio interpolador destes cinco pontos;  
 (b) Usando (a), calcule um valor aproximado de  $f(-0.78)$ ;  
 (c) Determine um majorante para o erro cometido em (b);  
 (d) Determine um majorante para o erro absoluto cometido em (b).
10. Resolva o exercício anterior, considerando, agora, os valores de abcissa ordenados de forma crescente em função da sua distância a  $x = -0.78$ .
11. Considere a tabela seguinte referente a uma função  $y = f(x)$ :

|     |      |      |     |     |     |      |
|-----|------|------|-----|-----|-----|------|
| $x$ | -1   | 0    | 1   | 3   | 4   | 6    |
| $y$ | -108 | -100 | -92 | 116 | 412 | 1628 |

Usando o Método de Newton das diferenças divididas, determine o polinómio interpolador dos pontos tabelados.

12. Considere a tabela seguinte referente a uma função  $y = f(x)$ :

|     |      |      |      |      |      |      |
|-----|------|------|------|------|------|------|
| $x$ | 0    | 1    | 3    | 4    | 7    | 9    |
| $y$ | 0.00 | 1.00 | 1.73 | 2.00 | 2.65 | 3.00 |

- (a) Usando o Método de Newton das diferenças divididas, determine o polinômio interpolador dos pontos tabelados;
  - (b) Usando (a), calcule um valor aproximado de  $f(4.4)$ ;
  - (c) Sabendo que  $f(x) = \sqrt{x}$ , determine um majorante para o erro absoluto da aproximação encontrada em (b);
13. Resolva o exercício anterior, considerando, agora, os valores de abcissa ordenados de forma crescente em função da sua distância a  $x = 4.4$ .