AM II, LEI + BE, TP: Limites e continuidade

Marco Mackaaij

FCT, Universidade do Algarve

Enquadramento

- Para provar que um dado limite **existe**:

Proposição

Suponhamos que $f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y)$ *para todo o* $(x,y) \in D$. *Então*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = L \quad \Longrightarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L.$$

Limites trajetoriais

- Para provar que um dado limite **não existe**:

Proposição

Suponhamos que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L.$$

Então, para toda a curva $C \subset \mathbb{R}^2$ *que termine em* (a,b)*, tem-se*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in C}} f(x,y) = L.$$

O módulo

Definição

$$|a| = \begin{cases} a, & se \;\; a \geq 0 \\ -a, & se \;\; a \leq 0. \end{cases}$$

- $|a \pm b| \leq |a| + |b|$;
- $|ab| = |a|\,|b|$;
- $|a^n| = |a|^n$;
- $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

Desigualdades úteis

- $x^2, y^2 \geq 0$:

$$\begin{aligned} x^2 &\leq x^2 + y^2; \\ y^2 &\leq x^2 + y^2. \end{aligned}$$

- $|x| = \sqrt{x^2}$, $|y| = \sqrt{y^2}$:

$$\begin{aligned} |x| &\leq \sqrt{x^2 + y^2}; \\ |y| &\leq \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Exercícios: Limites

- Verifique a existência dos seguintes limites:

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-4y}{7x+6y}$;
2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$;
3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;
4. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{xy}\right)$;
5. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Soluções: exercício 1

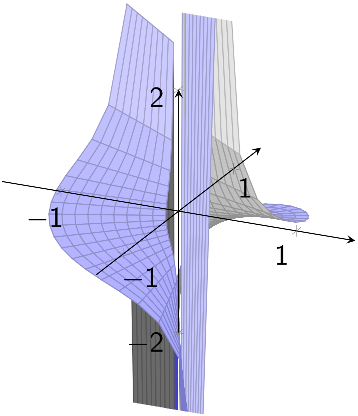
O limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-4y}{7x+6y}$ não existe.

- Consideremos a curva $C_k : y = kx$, para uma constante $k \in \mathbb{R}$ arbitrária. Então

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C_k}} \frac{x-4y}{7x+6y} = \lim_{x\to 0} \frac{x-4kx}{7x+6kx} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-4k)\cancel{x}}{(7+6k)\cancel{x}} = \frac{1-4k}{7+6k}.$$

Como se vê, para cada $k \in \mathbb{R}$ o limite trajetorial tem um valor diferente. Logo, o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-4y}{7x+6y}$ não existe.

Soluções: exercício 1



$$z = \frac{x - 4y}{7x + 6y}$$

Soluções: exercício 2

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ **não** existe.

- Basta indicar duas curvas que terminem em $(0,0)$, denotadas por C_1 e C_2, tais que

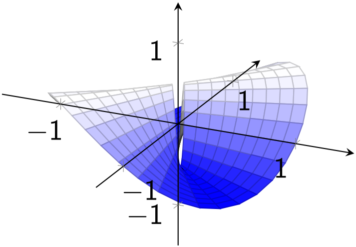
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C_1}} \frac{xy}{x^2+y^2} \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C_2}} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

- Consideremos $C_1: x=y$ e $C_2: x=-y$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=y}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\to0} \frac{\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} = \lim_{x\to0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=-y}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to0} \frac{-x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\to0} -\frac{\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} = \lim_{x\to0} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Soluções: exercício 2



$$\boxed{z = \frac{xy}{x^2 + y^2}}$$

Soluções: exercício 3

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

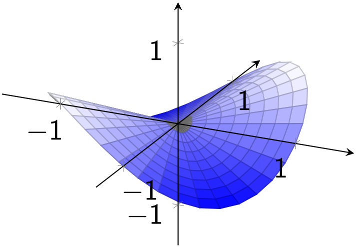
- Basta notar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$ e

$$0 \leq \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \sqrt{x^2+y^2}. \qquad (*)$$

Usando $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ e $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$:

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|x|\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Soluções: exercício 3



$$\boxed{z = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}}$$

Soluções: exercício 4

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)\sin\left(\frac{1}{xy}\right) = 0.$$

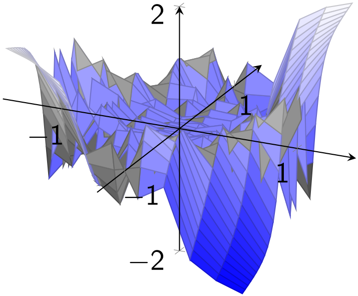
- Basta notar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 = 0$ e

$$0 \le \left|\left(x^2+y^2\right)\sin\left(\frac{1}{xy}\right)\right| \le x^2+y^2. \qquad (*)$$

Pela desigualdade $\left|\sin\left(\frac{1}{xy}\right)\right| \le 1$:

$$\left|\left(x^2+y^2\right)\sin\left(\frac{1}{xy}\right)\right| = \left|x^2+y^2\right|\left|\sin\left(\frac{1}{xy}\right)\right| \le x^2+y^2.$$

Soluções: exercício 4



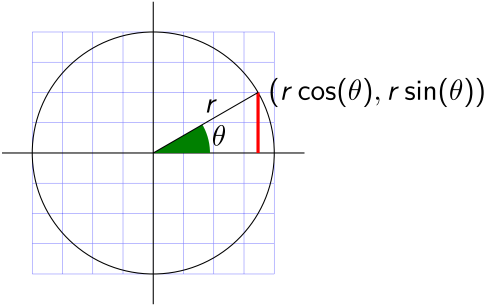
$$z = \left(x^2 + y^2\right) \sin\left(\frac{1}{xy}\right)$$

Soluções: exercício 5

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}-1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1.$$

- Consideremos **coordenadas polares**:

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta), \qquad r \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi]$$



Soluções: exercício 5

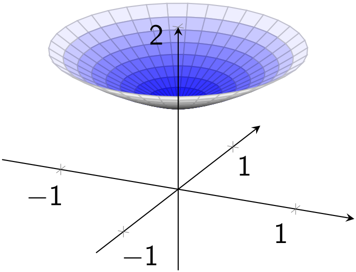
- A equação duma circunferência com raio r:

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (r\cos(\theta))^2+(r\sin(\theta))^2 \\ &= r^2(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)) \\ &= r^2. \end{aligned}$$

- Usando $\sqrt{x^2+y^2}=r$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}-1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0}\frac{e^r-1}{r} = 1.$$

Soluções: exercício 5



$$\boxed{z = \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}} - 1}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

Continuidade

Definição

A função f diz-se **contínua em $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$** *se*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

Se $D_f \subseteq \mathrm{Der}(D_f)$ e f for contínua em todo o $(a,b) \in D_f$, a função f diz-se **contínua**.

Exercícios: Continuidade

- Verifique se as seguintes funções são contínuas na origem:

1. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^3 + 3y^3}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
2. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^3 + y^6} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
3. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
4. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Soluções: exercício 1

f é contínua em $(0,0)$, porque $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4x^3+3y^3}{x^2+y^2} = 0$.

- Basta notar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$ e

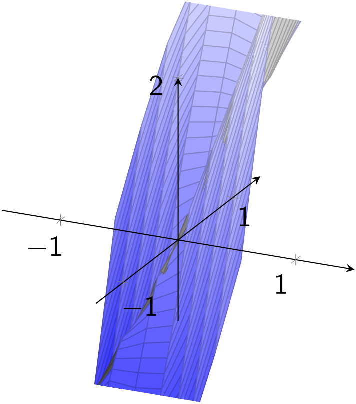
$$0 \leq \left| \frac{4x^3+3y^3}{x^2+y^2} \right| \leq 7\sqrt{x^2+y^2}. \qquad (*)$$

Usando $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ e $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$:

$$\left| \frac{4x^3+3y^3}{x^2+y^2} \right| = \frac{|4x^3+3y^3|}{x^2+y^2} \leq \frac{4|x|^3+3|y|^3}{x^2+y^2} \leq$$

$$\frac{7(\sqrt{x^2+y^2})^3}{x^2+y^2} = \frac{7(\sqrt{x^2+y^2})^3}{(\sqrt{x^2+y^2})^2} = 7\sqrt{x^2+y^2}.$$

Soluções: exercício 1



$$z = \frac{4x^3 + 3y^3}{x^2 + y^2}$$

Soluções: exercício 2

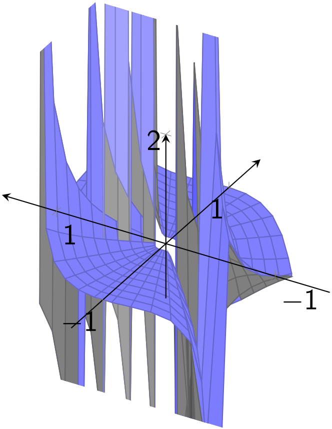
f é descontínua em $(0,0)$, porque $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^3+y^6}$ **não** existe.

- Basta indicar uma curva C que termine em $(0,0)$ tal que o limite trajetorial correspondente não exista. Seja $C: x = y^2$. Então

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}} \frac{xy^3}{x^3+y^6} = \lim_{y\to 0} \frac{y^5}{y^6+y^6} = \lim_{y\to 0} \frac{y^5}{2y^6} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{2y},$$

que não existe.

Soluções: exercício 2



$$z = \frac{xy^3}{x^3 + y^6}$$

Soluções: exercício 3

f é contínua em $(0,0)$, porque $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

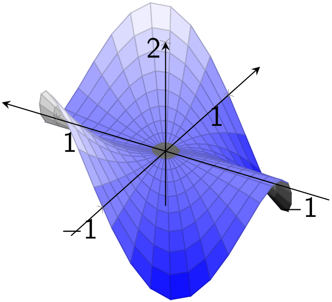
- Basta notar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = 0$ e

$$0 \le \left|\frac{4x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le 4x^2. \qquad (*)$$

Usando $|y| \le \sqrt{x^2+y^2}$:

$$\left|\frac{4x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{4x^2|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{4x^2\cancel{\sqrt{x^2+y^2}}}{\cancel{\sqrt{x^2+y^2}}} = 4x^2.$$

Soluções: exercício 3



$$z = \frac{4x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

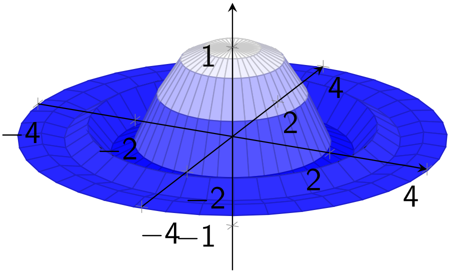
Soluções: exercício 4

f é descontínua em $(0,0)$, porque $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$ mas $f(0,0) = 0$.

- Mudemos para coordenadas polares: $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$. Como $x^2+y^2 = r^2$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{\sin(r^2)}{r^2} = 1.$$

Soluções: exercício 4



$$z = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

FIM