AM II, LEI + BE, TP: Derivadas parciais, diferenciabilidade e plano tangente

Marco Mackaaij

FCT, Universidade do Algarve

Derivadas parciais

Sejam $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a,b) \in D_f^\circ$.

Definição (Derivadas parciais)

- *A* **derivada parcial de** f **em ordem a** x *no ponto* (a,b) *é definida por*

$$f'_x(a,b) := \lim_{x\to a} \frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}.$$

- *A* **derivada parcial de** f **em ordem a** y *no ponto* (a,b) *é definida por*

$$f'_y(a,b) := \lim_{y\to b} \frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}.$$

Exemplo

Exemplo

Por exemplo,

$$x'_x = 1, \quad x'_y = 0, \quad y'_x = 0, \quad y'_y = 1.$$

Exemplos

1.

$$\begin{aligned}
(xy^2e^{x+y^2})'_x &= (xy^2)'_x e^{x+y^2} + xy^2(e^{x+y^2})'_x \\
&= y^2e^{x+y^2} + xy^2e^{x+y^2}(x+y^2)'_x \\
&= y^2e^{x+y^2} + xy^2e^{x+y^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(xy^2e^{x+y^2})'_y &= (xy^2)'_y e^{x+y^2} + xy^2(e^{x+y^2})'_y \\
&= 2xye^{x+y^2} + xy^2e^{x+y^2}(x+y^2)'_y \\
&= 2xye^{x+y^2} + 2xy^3e^{x+y^2}.
\end{aligned}$$

Exemplo

- Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Neste caso somos obrigados a calcular $f'_x(0,0)$ e $f'_y(0,0)$ pela definição, porque precisamos de ambos os ramos de f:

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x\cdot 0}{x^2+0^2} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0;$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{0\cdot y}{0^2+y^2} - 0}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0.$$

Exercícios

1. Calcule as derivadas parciais das seguintes funções:
   a. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$;
   b. $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$;
   c. $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$;
   d. $f(x,y) = x^y$;
   e. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0); \end{cases}$
   f. $f(x,y,z) = \ln(xy + z)$;
   g. $f(x,y,z) = x^3yz + e^{x+yz}$;

Soluções

a. Tabela de derivadas: $(u^n)' = nu^{n-1}u'$.

$$\begin{aligned}\left(x^3+y^3-3xy\right)'_x &= \left(x^3\right)'_x + \left(y^3\right)'_x - 3\,(xy)'_x \\ &= 3x^2-3y;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(x^3+y^3-3xy\right)'_y &= \left(x^3\right)'_y + \left(y^3\right)'_y - 3\,(xy)'_y \\ &= 3y^2-3x.\end{aligned}$$

Obs.: $f(x,y) = f(y,x)$ e $f'_y(x,y) = f'_x(y,x)$.

Soluções

Seja $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$(x,y) \in D_f \;\Leftrightarrow\; (y,x) \in D_f.$$

Definição

A função f diz-se

- **simétrica** *se* $f(y,x) = f(x,y)$;
- **antisimétrica** *se* $f(y,x) = -f(x,y)$.

Soluções

Lema

- *Se f for simétrica, então* $f'_y(x,y) = f'_x(y,x)$.
- *Se f for antisimétrica, então* $f'_y(x,y) = -f'_x(y,x)$.

Demonstração: Suponhamos que $f(x,y) = \pm f(y,x)$. Então

$$\begin{aligned} f'_y(x,y) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x,y+t) - f(x,y)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\pm f(y+t,x) - (\pm f(y,x))}{t} \\ &= \pm \lim_{t\to 0} \frac{f(y+t,x) - f(y,x)}{t} \\ &= \pm f'_x(y,x). \end{aligned}$$

Soluções

- b) Tabela de derivadas: $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}.$

$$\left(\frac{x}{y}\right)'_x = x'_x \cdot \frac{1}{y} = 1 \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y};$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)'_y = x\left(\frac{1}{y}\right)'_y = x \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2}.$$

Soluções

c

$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)'_x = \frac{(x+y)'_x(x-y)-(x+y)(x-y)'_x}{(x-y)^2}$$
$$= \frac{1\cdot(x-y)-(x+y)\cdot 1}{(x-y)^2}$$
$$= \frac{\cancel{x}-y-\cancel{x}-y}{(x-y)^2}$$
$$= \frac{-2y}{(x-y)^2};$$

Soluções

- Do slide anterior:

$$\boxed{\left(\frac{x+y}{x-y}\right)'_x = -\frac{2y}{(x-y)^2}.}$$

A função f é antisimétrica:

- $(x,y) \in D_f \;\Leftrightarrow\; x \neq y \;\Leftrightarrow\; y \neq x \;\Leftrightarrow\; (y,x) \in D_f$;
- $$f(y,x) = \frac{y+x}{y-x} = \frac{x+y}{-(x-y)} = -\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = -f(x,y).$$

Portanto,

$$f'_y(x,y) = -f'_x(y,x) = \frac{2x}{(y-x)^2} = \frac{2x}{(x-y)^2}.$$

Soluções

d) Tabelas de derivadas: $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ e $(a^u)' = \ln(a)a^u u'$.

$$
\begin{aligned}
(x^y)'_x &= yx^{y-1}; \\
(x^y)'_y &= \ln(x)x^y.
\end{aligned}
$$

Obs.: O domínio de $(x^y)'_y$ é $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$.

Soluções

e

- A função f é definida por ramos:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

  Por isso, devemos calcular f'_x e f'_y em $(x,y) \neq (0,0)$ e em $(x,y) = (0,0)$ separadamente.

- A função f é antisimétrica: $D_f = \mathbb{R}^2$ e $f(y,x) = -f(x,y)$. Logo

$$f'_y(x,y) = -f'_x(y,x).$$

Soluções

- e) O caso $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\left(\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}\right)'_x = \frac{\left(x^3 - y^3\right)'_x \left(x^2 + y^2\right) - \left(x^3 - y^3\right)\left(x^2 + y^2\right)'_x}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{3x^2\left(x^2 + y^2\right) - \left(x^3 - y^3\right)(2x)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{3x^4 + 3x^2y^2 - 2x^4 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2};$$

Soluções

- (e) Do slide anterior:

$$\boxed{\left(\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}.}$$

A função f é antisimétrica, logo $f'_y(x,y) = -f'_x(y,x)$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right)'_y &= -\left(\frac{y^4+3x^2y^2+2x^3y}{(x^2+y^2)^2}\right)\\ &= \frac{-y^4-3x^2y^2-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

Soluções

- e O caso $(x, y) = (0, 0)$:

$$\begin{aligned}
f'_x(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3-0^3}{x^2+0^2} - 0}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} \\
&= 1;
\end{aligned}$$

A função f é antisimétrica, logo $f'_y(0,0) = -f'_x(0,0) = -1$.

Soluções

- e) Tal como f, f'_x e f'_y também têm dois ramos:

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 1, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$f'_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-y^4 - 3x^2y^2 - 2x^3y}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ -1, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Soluções

- (f) Tabela de derivadas: $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$.

$$
\begin{aligned}
(\ln(xy+z))'_x &= \frac{(xy+z)'_x}{xy+z} = \frac{y}{xy+z};\\
(\ln(xy+z))'_y &= \frac{(xy+z)'_y}{xy+z} = \frac{x}{xy+z};\\
(\ln(xy+z))'_z &= \frac{(xy+z)'_z}{xy+z} = \frac{1}{xy+z}.
\end{aligned}
$$

Obs.: $f'_y(x,y,z) = f'_x(y,x,z)$, porque f é simétrica em x e y.

Soluções

- g Tabela de derivadas: $(e^u)' = e^u u'$.

$$
\begin{aligned}
\left(x^3yz + e^{x+yz}\right)'_x &= 3x^2yz + e^{x+yz}(x+yz)'_x \\
&= 3x^2yz + e^{x+yz};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(x^3yz + e^{x+yz}\right)'_y &= x^3z + e^{x+yz}(x+yz)'_y \\
&= x^3z + e^{x+yz}z;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(x^3yz + e^{x+yz}\right)'_z &= x^3y + e^{x+yz}(x+yz)'_z \\
&= x^3y + e^{x+yz}y.
\end{aligned}
$$

Obs.: $f'_z(x,y,z) = f'_y(x,z,y)$, porque f é simétrica em y e z.

Exercícios

2. Seja $f(x,y) = (x^2+y^2)^{2/3}$. Mostre que

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x}{3(x^2+y^2)^{1/3}}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}.$$

Soluções

2. Seja $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{2/3}$.
   - Note-se que $D_f = \mathbb{R}^2$.
   - Calculemos f'_x: (Tabela de derivadas: $(u^n)' = nu^{n-1}u'$)

$$\begin{aligned}
\left(\left(x^2+y^2\right)^{2/3}\right)'_x &= \frac{2}{3}\left(x^2+y^2\right)^{-1/3}\left(x^2+y^2\right)'_x \\
&= \frac{2}{3}\left(x^2+y^2\right)^{-1/3}(2x) \\
&= \frac{4x}{3\left(x^2+y^2\right)^{1/3}}
\end{aligned}$$

para todo o $(x,y) \neq (0,0)$.

Soluções

2. Seja $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{2/3}$.
    - Temos de calcular $f_x'(0,0)$ separadamente, pela definição:

$$
\begin{aligned}
f_x'(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(x^2+0^2)^{2/3}-0}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^{4/3}}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} x^{1/3} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Soluções

8. A função f, definida por $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{2/3}$, tem apenas um ramo, mas f'_x tem dois:

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} \dfrac{4x}{3(x^2 + y^2)^{1/3}}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Diferenciabilidade

Lema

A função f é diferenciável em (a, b) se e só se

1. $f'_x(a, b)$ *e* $f'_y(a, b)$ *existirem;*
2. $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)-\left[f(a,b)+f'_x(a,b)(x-a)+f'_y(a,b)(y-b)\right]}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0.$$

Diferenciabilidade implica continuidade

Proposição

Se $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *for diferenciável num dado ponto* $(a, b) \in D_f^\circ$*, então* f *também é contínua em* (a, b)*.*

Critério de diferenciabilidade

Teorema

Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $(a,b) \in D_f^\circ$. *Suponhamos que* f'_x *e* f'_y

1. *existem numa vizinhança de* (a,b)*;*
2. *são contínuas em* (a,b)*.*

Então f *é diferenciável em* (a,b)*.*

Obs.: A condição em 2 é suficiente mas não é necessária: existem funções diferenciáveis que não satisfazem essa condição.

Exercícios

1. Verifique a diferenciabilidade das seguintes funções:
   a. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy;$
   b. $f(x,y) = \dfrac{x}{y};$
   c. $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y};$
   d. $f(x,y) = x^y;$
   e. $f(x,y,z) = \ln(xy+z);$
   f. $f(x,y,z) = x^3yz + e^{x+yz};$

Soluções:

a. Seja $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

$$\boxed{\left(f'_x(x,y), f'_y(x,y)\right) = \left(3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x\right).}$$

A função é f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, porque f'_x e f'_y existem e são contínuas em $\mathbb{R}^2$.

b. Seja $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$.

$$\boxed{\left(f'_x(x,y), f'_y(x,y)\right) = \left(\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2}\right).}$$

A função é f é diferenciável em $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\right\}$, porque f'_x e f'_y existem e são contínuas em $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\right\}$.

Soluções

- Seja $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$.

$$\boxed{\left(f'_x(x,y), f'_y(x,y)\right) = \left(\frac{-2y}{(x-y)^2}, \frac{2x}{(x-y)^2}\right).}$$

A função é f é diferenciável em $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\right\}$, porque f'_x e f'_y existem e são contínuas em $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\right\}$.

Soluções

- (d) Seja $f(x, y) = x^y$.

$$\boxed{\left(f'_x(x, y), f'_y(x, y)\right) = \left(yx^{y-1}, \ln(x)x^y\right).}$$

A função é f é diferenciável em $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\right\}$, porque f'_x e f'_y existem e são contínuas em $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\right\}$. (*)

Para se ver que x^{y-1} é contínuo, note-se que

$$x^{y-1} = e^{\ln(x^{y-1})} = e^{(y-1)\ln(x)}.$$

Soluções

- (e) Seja $f(x,y,z) = \ln(xy+z)$.

$$\boxed{\begin{array}{c}(f'_x(x,y,z), f'_y(x,y,z), f'_z(x,y,z)) = \\ \left(\dfrac{y}{xy+z}, \dfrac{x}{xy+z}, \dfrac{1}{xy+z}\right).\end{array}}$$

A função f é diferenciável em $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy+z>0\}$, porque todas as suas derivadas parciais existem e são contínuas em $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy+z>0\}$.

Soluções

- Seja $f(x,y,z) = x^3yz + e^{x+yz}$.

$$\boxed{\begin{aligned} &\left(f'_x(x,y,z), f'_y(x,y,z), f'_z(x,y,z)\right) = \\ &\left(3x^2yz + e^{x+yz}, x^3z + e^{x+yz}z, x^3y + e^{x+yz}y\right). \end{aligned}}$$

A função f é diferenciável em $\mathbb{R}^3$, porque todas as suas derivadas parciais existem e são contínuas em $\mathbb{R}^3$.

Exercícios

2. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y^2}{x^4+y^4}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   a. Mostre que f é descontínua em $(0,0)$.
   b. Prove que $f'_x(0,0)$ e $f'_y(0,0)$ existem.
   c. O que conclui acerca da diferenciabilidade de f em $(0,0)$?

Soluções

a) Vamos provar que f é descontínua em $(0,0)$:
- Considere o limite trajetorial para a reta $y = kx$, onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{3x^2y^2}{x^4+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2(kx)^2}{x^4+(kx)^4} = \lim_{x\to 0} \frac{3k^2\cancel{x^4}}{(1+k^4)\cancel{x^4}} = \frac{3k^2}{1+k^4}.$$

Este limite depende do valor de k, logo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe. Portanto, f é descontínua em $(0,0)$.

Soluções

- (b) Vamos mostrar que $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, pela definição:
  - $$\begin{aligned} f'_x(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3x^2\cdot 0^2}{x^4+0^4} - 0}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^5} \\ &= 0. \end{aligned}$$
  - A função f é simétrica, logo $f'_y(0,0) = f'_x(0,0) = 0$.
- (c) Apesar de $f'_x(0,0)$ e $f'_y(0,0)$ existirem, f **não** é diferenciável em $(0,0)$, porque é descontínua em $(0,0)$.

Exercícios

3. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0); \end{cases}$$
   1. Verifique se f é contínuo em $(0,0)$.
   2. Verifique se f'_x e f'_y são contínuas em $(0,0)$.
   3. Verifique se f é diferenciável em $(0,0)$.

Soluções

Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) f é contínuo em $(0,0)$, porque $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = 0$.

Considere o enquadramento:

$$0 \leq \left| \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq |x| + |y| \quad (*)$$

Soluções

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}\right| &\leq \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2 + y^2} \\
&= \frac{|x|x^2 + |y|y^2}{x^2 + y^2} \\
&\leq \frac{|x|\cancel{(x^2 + y^2)} + |y|\cancel{(x^2 + y^2)}}{\cancel{x^2 + y^2}} \\
&= |x| + |y|.
\end{aligned}
$$

Soluções

b) Recorde-se que

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 1, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$f'_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-y^4 - 3x^2y^2 - 2x^3y}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ -1, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Soluções

- b) f'_x e f'_y são descontínuas em $(0,0)$, porque $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y)$ e $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_y(x,y)$ não existem:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4}=1,$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^4}=0.$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{-y^4-3x^2y^2-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^4}=0,$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{-y^4-3x^2y^2-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}=\lim_{y\to 0}\frac{-y^4}{y^4}=-1.$$

Soluções

- c f **não** é diferenciável em $(0,0)$, porque

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \left[f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y\right]}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

não existe. (*)

Soluções

- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \left[f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y\right]}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} - [0 + x - y]}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3 - (x-y)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} =$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-xy^2 + x^2y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Este limite **não** existe. (*)

Soluções

- O seguinte limite trajetorial não existe.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=-x}} \frac{-xy^2+x^2y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2x^3}{2x^2\sqrt{2x^2}} =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}.$$

Exercícios

4. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+2y^4}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   a. Mostre que f é contínua em $(0,0)$.
   b. Calcule $f'_x(0,0)$ e $f'_y(0,0)$.
   c. Verifique se f é diferenciável em $(0,0)$.

Soluções

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+2y^4}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Repare-se que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+2y^4}{x^2+y^2} = 0.$$

Este último limite pode-se mostrar por enquadramento:

$$0 \leq \left| \frac{x^4+2y^4}{x^2+y^2} \right| \leq x^2+2y^2, \qquad (*)$$

usando que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2+2y^2 = 0$.

Soluções

Usando $x^2, y^2 \leq x^2 + y^2$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \left|\frac{x^4+2y^4}{x^2+y^2}\right| &= \frac{x^4+2y^4}{x^2+y^2} \\ &= \frac{x^4}{x^2+y^2} + \frac{2y^4}{x^2+y^2} \\ &\leq \frac{x^4}{x^2} + \frac{2y^4}{y^2} \\ &= x^2 + 2y^2. \end{aligned}$$

Soluções

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+2y^4}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

b. Vamos calcular $f'_x(0,0)$:

$$\begin{aligned} f'_x(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^4+2\cdot 0^4}{t^2+0^2} - 0}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{t^3} \\ &= \lim_{t\to 0} t \\ &= 0. \end{aligned}$$

Soluções

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+2y^4}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

b. Vamos calcular $f'_y(0,0)$:

$$\begin{aligned} f'_y(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0^4+2t^4}{0^2+t^2} - 0}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{2t^4}{t^3} \\ &= \lim_{t\to 0} 2t \\ &= 0. \end{aligned}$$

Soluções

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+2y^4}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$\nabla f(0,0) = (0,0).$$

- f é diferenciável em $(0,0)$, porque

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - (f(0,0) + f_x'(0,0)x + f_y'(0,0)y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0. \qquad (*)$$

Soluções

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-(f(0,0)+f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^4+2y^4}{x^2+y^2}-(0+0\cdot x+0\cdot y)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+2y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0. \qquad (*)$$

Soluções

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+2y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0.$$

Por enquadramento:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x^4+2y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right| &= \frac{x^4+2y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\
&= \frac{x^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{2y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\
&\leq \frac{x^4}{|x|^3} + \frac{2y^4}{|y|^3} \\
&= \frac{|x|^4}{|x|^3} + \frac{2|y|^4}{|y|^3} \\
&= |x| + 2|y|.
\end{aligned}$$

A equação do plano tangente

Seja $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $(a, b) \in D_f^\circ$.

Definição

O **plano tangente** *ao gráfico G_f no ponto $(a, b, f(a, b))$, denotado por $T_f(a, b)$, é o plano em $\mathbb{R}^3$ formado pelos pontos (x, y, z) que satisfazem:*

$$z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b).$$

Exercícios

1. Determine a equação do plano tangente ao hiperbolóide dado por $z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 12$, no ponto $(1, -1, 4)$.

2. Determine a equação do plano tangente à esfera dada por $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ no ponto $(1, \sqrt{2}, 1)$.

Soluções

1. O plano tangente a $z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 12$ no ponto $(1, -1, 4)$:
   - $$\begin{aligned} z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 12 \quad &\Leftrightarrow \\ z^2 = 2x^2 + 2y^2 + 12 \quad &\Leftrightarrow \\ z = \pm\sqrt{2x^2 + 2y^2 + 12}. \end{aligned}$$
   - Como a 3ª coordenada de $(1, -1, 4)$ é positiva, consideremos:
     $$f(x, y) = \sqrt{2x^2 + 2y^2 + 12}.$$

Soluções

1. Consideremos $f(x,y) = \sqrt{2x^2 + 2y^2 + 12}$ e $(a,b) = (1,-1)$.
   - $f(1,-1) = 4$.
   - $f'_x(x,y) = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2 + 2y^2 + 12}}$, $f'_y(x,y) = \dfrac{2y}{\sqrt{2x^2 + 2y^2 + 12}}$.
   - $f'_x(1,-1) = \dfrac{1}{2}$, $f'_y(1,-1) = -\dfrac{1}{2}$.
   - A equação de $T_f(1,-1)$ é

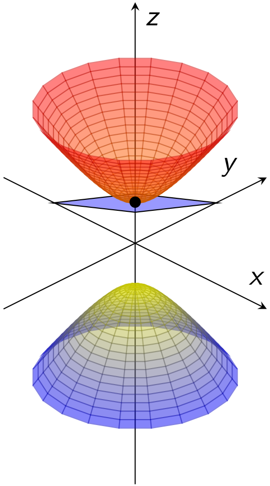
$$\begin{aligned} z = f(1,-1) + f'_x(1,-1)(x-1) + f'_y(1,-1)(y-(-1)) &\quad \Leftrightarrow \\ z = 4 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y+1) &\quad \Leftrightarrow \\ z = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 3. & \end{aligned}$$

Soluções

1.

$$\boxed{T_f(1,-1) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 3\right\}}$$

Soluções



Soluções

2. O plano tangente a $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ no ponto $(1, \sqrt{2}, 1)$:
   -
   $$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 = 4 &\quad \Leftrightarrow \\ z^2 = 4 - x^2 - y^2 &\quad \Leftrightarrow \\ z = \pm\sqrt{4 - x^2 - y^2}. \end{aligned}$$
   - Como a 3ª coordenada de $(1, \sqrt{2}, 1)$ é positiva, consideremos:
   $$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

Soluções

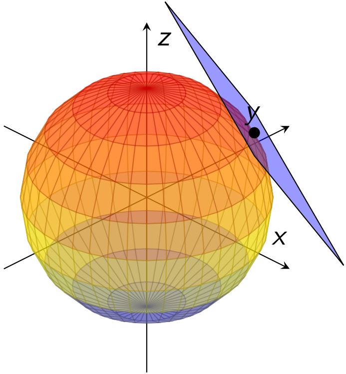
9. Consideremos $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ e $(a,b) = (1, \sqrt{2})$.
   - $f(1, \sqrt{2}) = 1$.
   - $f'_x(x,y) = -\dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$, $f'_y(x,y) = -\dfrac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$.
   - $f'_x(1, \sqrt{2}) = -1$, $f'_y(1, \sqrt{2}) = -\sqrt{2}$.
   - A equação de $T_f(1, \sqrt{2})$ é

$$\begin{aligned} z = f(1,\sqrt{2}) + f'_x(1,\sqrt{2})(x-1) + f'_y(1,\sqrt{2})(y - \sqrt{2}) \quad &\Leftrightarrow \\ z = 1 - (x-1) - \sqrt{2}(y - \sqrt{2}) \quad &\Leftrightarrow \\ z = -x - \sqrt{2}y + 4. \quad & \end{aligned}$$

Soluções

9. $$\boxed{T_f(1,\sqrt{2}) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -x - \sqrt{2}y + 4\right\}}$$

Soluções



FIM