AM II, LEI + BE: Domínios, gráficos e curvas de nível

Marco Mackaaij

FCT, Universidade do Algarve

Revisão: domínios

Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ uma expressão analítica qualquer.

Definição

O **domínio (natural)** *de f:*

$$D_f := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) \text{ está definida}\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

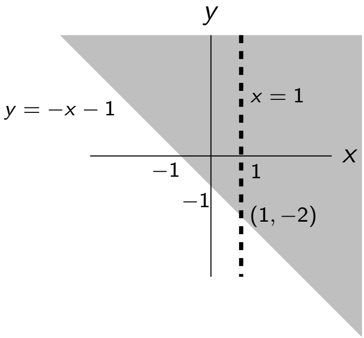
Exercícios: domínios

1. Determina e desenha (caso f tenha 2 variáveis) D_f, onde:
   a. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$;
   b. $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$;
   c. $f(x,y) = \ln\left(\left(1-x^2\right)y\right)$;
   d. $f(x,y) = \dfrac{\ln(2y-x^2)+\sqrt{8-x^2-y^2}}{(x^2-1)(y^2+1)}$;
   e. $f(x,y,z) = \ln\left(\dfrac{x+y}{z}\right)$;
   f. $f(x,y,z) = \sqrt{\sin(x^2+y^2+z^2)}$.

Solução: 1a

Seja $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$. Então:

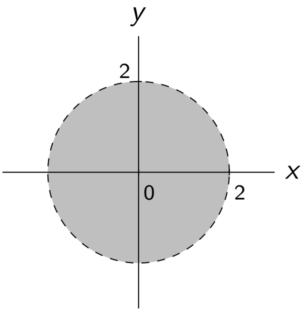
$$\begin{aligned} D_f &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y+1 \geq 0 \ \wedge \ x-1 \neq 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq -x-1 \ \wedge \ x \neq 1\right\}. \end{aligned}$$



Solução: 1b

Seja $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$. Então:

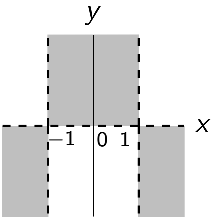
$$\begin{aligned} D_f &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 - x^2 - y^2 > 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\right\}. \end{aligned}$$



Solução: 1c

Seja $f(x,y) = \ln\left(\left(1-x^2\right)y\right)$. Então:

$$\begin{aligned}
D_f &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (1-x^2)y > 0\right\} \\
&= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (1-x^2>0 \wedge y>0) \vee (1-x^2<0 \wedge y<0)\right\} \\
&= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x^2<1 \wedge y>0) \vee (x^2>1 \wedge y<0)\right\} \\
&= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1<x<1 \wedge y>0\right\} \cup \\
&\quad\ \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x<-1 \vee x>1) \wedge y<0\right\}.
\end{aligned}$$



Solução: 1d

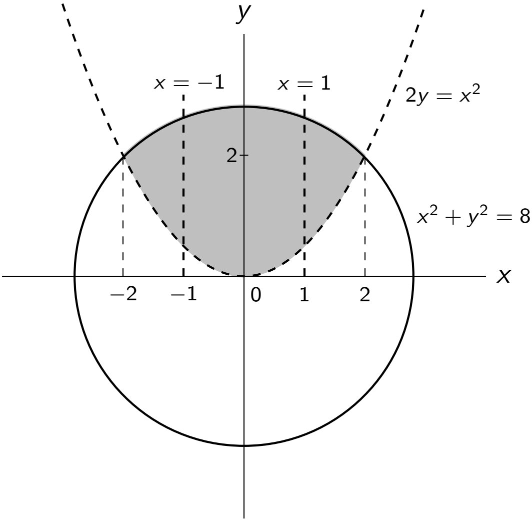
Seja $f(x,y) = \dfrac{\ln(2y - x^2) + \sqrt{8 - x^2 - y^2}}{(x^2-1)(y^2+1)}$. Então:

$$\begin{aligned} D_f &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2y - x^2 > 0 \wedge 8 - x^2 - y^2 \geq 0 \wedge x^2 \neq 1\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \frac{x^2}{2} \wedge x^2 + y^2 \leq 8 \wedge x \neq \pm 1\right\} \end{aligned}$$

Interseção da parábola $2y = x^2$ e da circunferência $x^2 + y^2 = 8$:

$$\begin{aligned} 2y = x^2 \wedge x^2 + y^2 = 8 \quad &\Leftrightarrow \quad 2y = x^2 \wedge 2y + y^2 = 8 \\ &\Leftrightarrow \quad 2y = x^2 \wedge y^2 + 2y - 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x,y) = (-2,2) \vee (x,y) = (2,2). \end{aligned}$$

Solução: 1d



Resolução: 1e

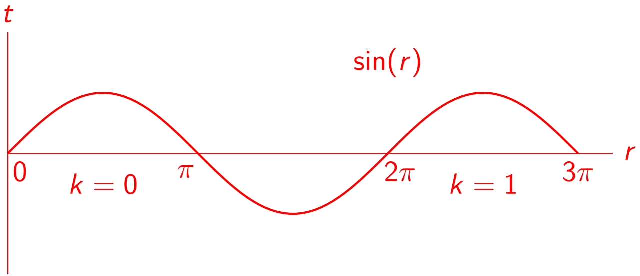
Seja $f(x,y,z) = \ln\left(\dfrac{x+y}{z}\right)$. Então:

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x+y}{z} > 0 \ \wedge \ z \neq 0\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+y > 0 \ \wedge \ z > 0) \ \vee \ (x+y < 0 \ \wedge \ z < 0)\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y > -x \ \wedge \ z > 0) \ \vee \ (y < -x \ \wedge \ z < 0)\right\}. \end{aligned}$$

Resolução: 1f

Seja $f(x,y,z) = \sqrt{\sin(x^2+y^2+z^2)}$. Então:

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sin(x^2+y^2+z^2) \geq 0\right\} \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2k\pi \leq x^2+y^2+z^2 \leq (2k+1)\pi\right\}. \end{aligned}$$



Revisão: gráficos e curvas de nível

Seja $f: D_f \to \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis, i.e. $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$.

Definição

1. *O* **gráfico de** f*:*

$$G_f := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D_f \wedge z = f(x, y)\right\}.$$

2. *A* **curva de nível** c **de** f*, onde* $c \in \mathbb{R}$ *é uma constante:*

$$C_c(f) := \{(x, y) \in D_f \mid c = f(x, y)\}.$$

Exercícios: gráficos e curvas de nível

Exercício 2 (p.5):

Desenhe as curvas de nível e tente desenhar o gráfico da função f, onde:

(2a)

$$f(x, y) = x + y;$$

(2b)

$$f(x, y) = x^2 - y^2;$$

(2d)

$$f(x, y) = 1 - |x| - |y|;$$

(2f)

$$f(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}.$$

Resoluções: (2a)

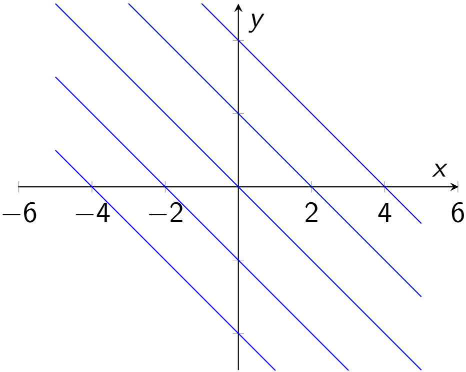
Seja $f(x, y) = x + y$.

- Para todo o $c \in \mathbb{R}$, a curva de nível c é dada pela equação

$$x + y = c \iff y = -x + c.$$

Resoluções: (2a)

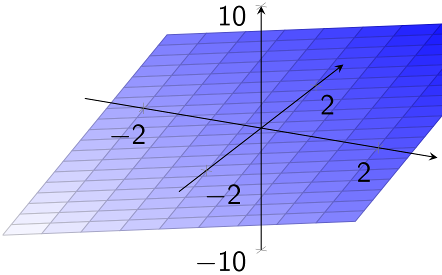
- $$C_c(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = c\}.$$



$\boxed{x + y = c}$

Resoluções: (2a)

O gráfico:



$$\boxed{z = x + y}$$

Resoluções: (2b)

Seja $f(x, y) = x^2 - y^2$.

- Para todo o $c \in \mathbb{R}$, a curva de nível c é dada pela equação

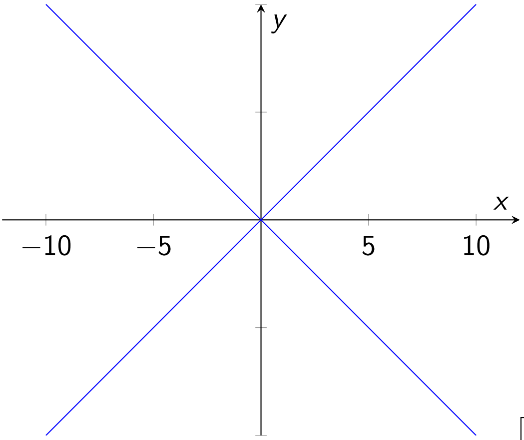
$$x^2 - y^2 = c.$$

-

$$C_c(f) = \begin{cases} \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \pm y\right\}, & \text{se } c = 0; \\ \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \pm\sqrt{y^2 + c}\right\}, & \text{se } c > 0; \\ \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \pm\sqrt{x^2 - c}\right\}, & \text{se } c < 0. \end{cases}$$

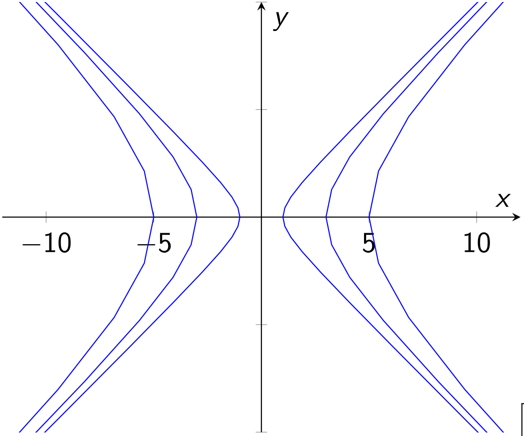
$$(x^2 - y^2 = c \;\Leftrightarrow\; x^2 = y^2 + c \;\Leftrightarrow\; y^2 = x^2 - c.)$$

Resoluções: (2b)



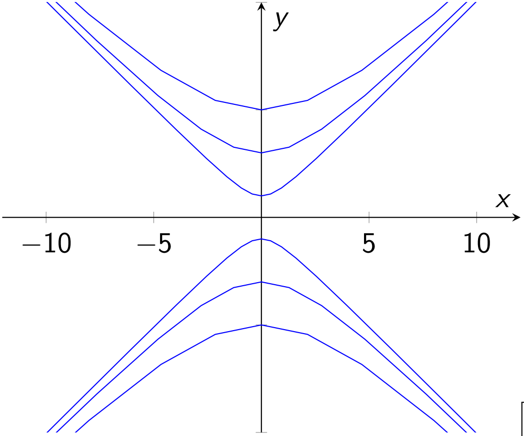
$$\boxed{c = 0 : x = \pm y}$$

Resoluções: (2b)



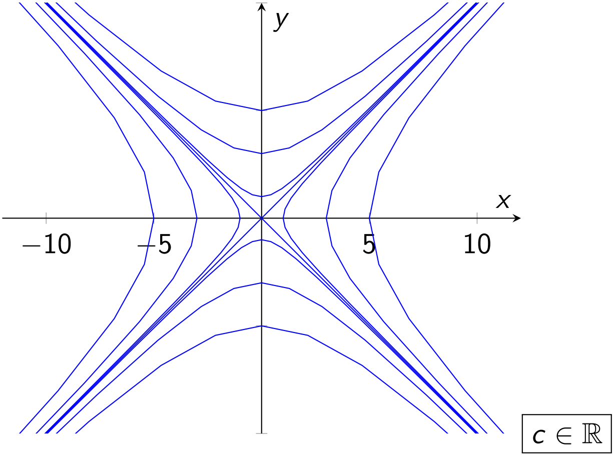
$$\boxed{c > 0 : x = \pm\sqrt{y^2 + c}}$$

Resoluções: (2b)



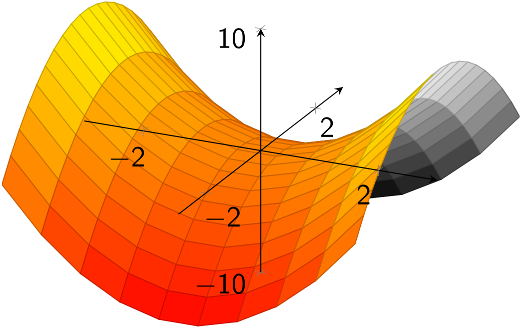
$$\boxed{c < 0 : y = \pm\sqrt{x^2 - c}}$$

Resoluções: (2b)



Resoluções: (2b)

O gráfico:



$$\boxed{z = x^2 - y^2}$$

Resoluções: (2d)

Seja $f(x,y) = 1 - |x| - |y|$.

- Para todo o $c \in \mathbb{R}$, a curva de nível c é dada pela equação

$$1 - |x| - |y| = c \Leftrightarrow |x| + |y| = 1 - c.$$

- $$C_c(f) = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } c > 1; \\ \{(0,0)\}, & \text{se } c = 1; \\ R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4 & \text{se } c < 1. \end{cases}$$

Resoluções: (2d), caso $c < 1$

- No primeiro quadrante (R_1):

$$|x| + |y| = 1 - c \Leftrightarrow x + y = 1 - c.$$

- No segundo quadrante (R_2):

$$|x| + |y| = 1 - c \Leftrightarrow -x + y = 1 - c.$$

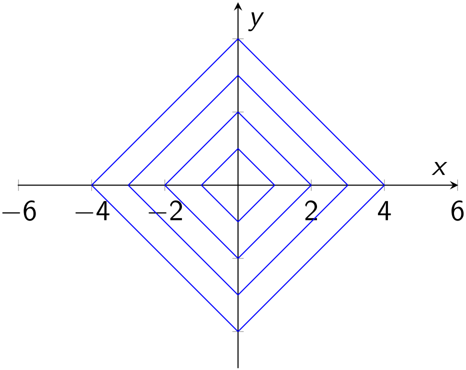
- No terceiro quadrante (R_3):

$$|x| + |y| = 1 - c \Leftrightarrow -x - y = 1 - c.$$

- No quarto quadrante (R_4):

$$|x| + |y| = 1 - c \Leftrightarrow x - y = 1 - c.$$

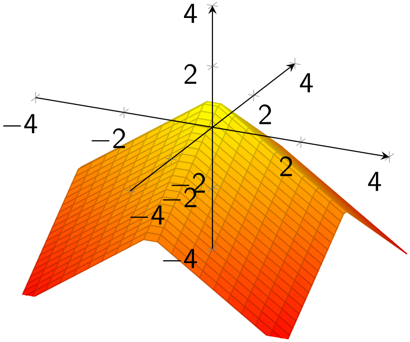
Resoluções: (2d)



$$\boxed{c = 1 - |x| - |y|}$$

Resoluções: (2d)

O gráfico:



$$\boxed{z = 1 - |x| - |y|}$$

Resoluções: (2f)

Seja $f(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$. Note-se que $D_f = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

- Para todo o $c \in \mathbb{R}$, a curva de nível c é dada pela equação

$$\frac{2x}{x^2+y^2} = c.$$

- Para $c = 0$, verifica-se

$$\frac{2x}{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y \neq 0.$$

- Para todo o $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $(x,y) \neq (0,0)$, verifica-se

$$\frac{2x}{x^2+y^2} = c \;\Leftrightarrow\; \left(x - \frac{1}{c}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{c^2}. \qquad (*)$$

Resoluções: (2f)

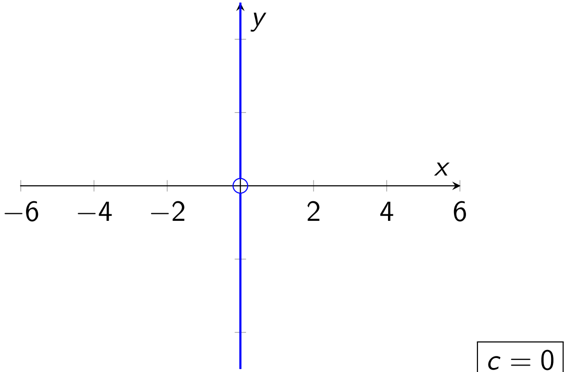
- Completar o quadrado:

$$\begin{aligned}
\left(x - \frac{1}{c}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{c^2} \quad &\Leftrightarrow \\
x^2 - \frac{2}{c}x + \frac{1}{c^2} + y^2 = \frac{1}{c^2} \quad &\Leftrightarrow \\
x^2 - \frac{2}{c}x + y^2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \\
x^2 + y^2 = \frac{2}{c}x \quad &\Leftrightarrow \\
\frac{2x}{x^2 + y^2} = c. &
\end{aligned}$$

Resoluções: (2f)

Para $c = 0$:

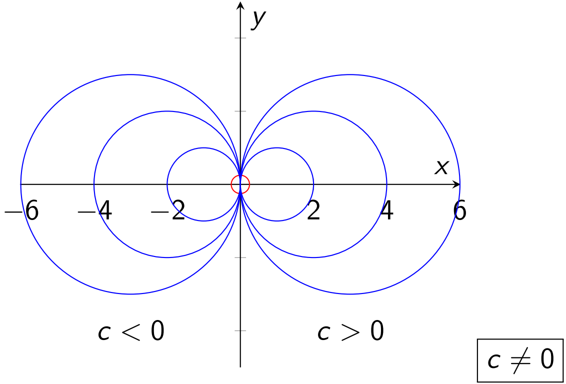
- $$C_0(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \wedge y \neq 0\right\}.$$



Resoluções: (2f)

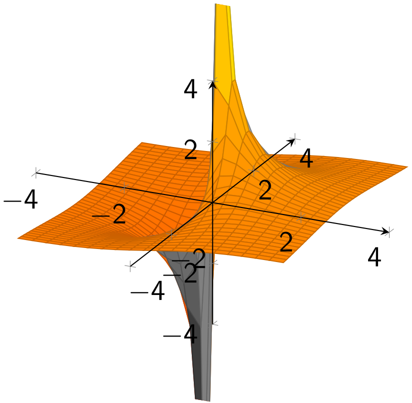
Para $c \neq 0$:

- $$C_c(f) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \mid \left(x - \frac{1}{c}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{c^2} \right\}.$$



Resoluções: (2f)

O gráfico:



$$\boxed{z = \frac{2x}{x^2 + y^2}}$$

FIM