AM II, LEI + BE: Séries de potências

Marco Mackaaij

FCT, Universidade do Algarve

Section outline

Séries de potências

- Em geral, há **séries de funções** $\sum_{n=d}^{\infty} f_n(x)$. Mas nestas aulas só vamos estudar um caso particular.

Definição

Chama-se **série de potências** *a uma série de funções do tipo*

$$\sum_{n=d}^{\infty} a_n(x-c)^{p_n}$$

onde c é uma constante (chamada **o centro***), $(a_n)_{n=d}^{\infty}$ é uma sucessão e $p_n := p(n)$, onde $p\colon \mathbb{N}_{\geq d} \to \mathbb{N}_0$ é uma função estritamente crescente.*

Exemplo

Exemplo

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-1)^{n-1} = \qquad (a_n = n^n, c = 1, p_n = n-1).$$

2. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \left(a_n = \frac{1}{n!}, c = 0, p_n = n\right).$$

3. $$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+5)^{2n}}{n} \qquad \left(a_n = \frac{(-1)^n}{n}, c = -5, p_n = 2n\right).$$

Intervalo de convergência

Seja $\sum_{n=d}^{\infty} a_n(x-c)^{p_n}$ uma série de potências arbitrária. Para $x = c$, a série converge absolutamente:

$$\sum_{n=d}^{\infty} |a_n||(c-c)|^{p_n} \begin{cases} |a_d| & \text{se } p_d = 0, \\ 0 & \text{se } p_d > 0, \end{cases}$$

porque $p_n > p_d$ para todo o $n > d$.

Intervalos de convergência e de convergência absoluta

Definição

$$I := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=d}^{\infty} a_n (x-c)^{p_n} \textit{ converge} \right\}$$

$$I_0 := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=d}^{\infty} a_n (x-c)^{p_n} \textit{ converge absolutamente} \right\}.$$

Intervalos de convergência e de convergência absoluta

Definição

$$I := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=d}^{\infty} a_n (x-c)^{p_n} \text{ converge} \right\}$$

$$I_0 := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=d}^{\infty} a_n (x-c)^{p_n} \text{ converge absolutamente} \right\}.$$

Observação

Por definição, verifica-se sempre

$$I_0 \subseteq I.$$

Intervalos de convergência e de convergência absoluta

Proposição

Existe um $R \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ (**raio de convergência**) *tal que* I_0 *seja igual a*

$$]c - R, c + R[\text{ ou } [c - R, c + R].$$

e I *seja igual a*

$$]c - R, c + R[, [c - R, c + R], [c - R, c + R[\text{ ou }]c - R, c + R].$$

Demonstração

- Sem perda de generalidade, podemos supor que $d = 1$ e $p_n \geq n$ para todo o $n \geq 1$.

Demonstração

- Sem perda de generalidade, podemos supor que $d = 1$ e $p_n \geq n$ para todo o $n \geq 1$.
- Primeiro vamos mostrar o seguinte: se a série convergir para $x = c + s$, para um certo $s \neq 0$, então ela converge absolutamente para $x \in]c - |s|, c + |s|[$.

Demonstração

- Sem perda de generalidade, podemos supor que $d = 1$ e $p_n \geq n$ para todo o $n \geq 1$.
- Primeiro vamos mostrar o seguinte: se a série convergir para $x = c + s$, para um certo $s \neq 0$, então ela converge absolutamente para $x \in]c - |s|, c + |s|[$.
- Quando $x = c + s$, a série é igual a

$$\sum_{n=d}^{\infty} a_n((\cancel{c} + s) - \cancel{c})^{p_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n s^{p_n}.$$

Demonstração

- Sem perda de generalidade, podemos supor que $d = 1$ e $p_n \geq n$ para todo o $n \geq 1$.
- Primeiro vamos mostrar o seguinte: se a série convergir para $x = c + s$, para um certo $s \neq 0$, então ela converge absolutamente para $x \in]c - |s|, c + |s|[$.
- Quando $x = c + s$, a série é igual a

$$\sum_{n=d}^{\infty} a_n((\cancel{c} + s) - \cancel{c})^{p_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n s^{p_n}.$$

Por isso, convergência para $x = c + s$ implica que $\lim_{n\to\infty} a_n s^{p_n} = 0$ pelo Critério Necessário. Em particular, existe $N \geq 1$ tal que $|a_n s^{p_n}| < 1$ para todo o $n \geq N$.

Demonstração

- Então, para todos os $n \geq N, x \in]c - |s|, c + |s|[$:

$$|a_n(x-c)^{p_n}| = |a_n s^{p_n}| \left|\frac{x-c}{s}\right|^{p_n} \leq \left|\frac{x-c}{s}\right|^{p_n} \leq \left|\frac{x-c}{s}\right|^{n},$$

porque $p_n \geq n$ e

$$\left|\frac{x-c}{s}\right| < 1.$$

Demonstração

- Então, para todos os $n \geq N, x \in]c-|s|, c+|s|[$:

$$|a_n(x-c)^{p_n}| = |a_n s^{p_n}| \left|\frac{x-c}{s}\right|^{p_n} \leq \left|\frac{x-c}{s}\right|^{p_n} \leq \left|\frac{x-c}{s}\right|^{n},$$

porque $p_n \geq n$ e

$$\left|\frac{x-c}{s}\right| < 1.$$

- Para todo o $x \in]c-|s|, c+|s|[$ fixo, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x-c}{s}\right|^{n}$$

é geométrica com $|r| < 1$, logo converge.

Demonstração

- Então, para todos os $n \geq N, x \in]c-|s|, c+|s|[$:

$$|a_n(x-c)^{p_n}| = |a_n s^{p_n}| \left|\frac{x-c}{s}\right|^{p_n} \leq \left|\frac{x-c}{s}\right|^{p_n} \leq \left|\frac{x-c}{s}\right|^{n},$$

porque $p_n \geq n$ e

$$\left|\frac{x-c}{s}\right| < 1.$$

- Para todo o $x \in]c-|s|, c+|s|[$ fixo, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x-c}{s}\right|^{n}$$

é geométrica com $|r| < 1$, logo converge.
- Pelo C.d.C. v1, a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-c)^{p_n}$ converge absolutamente $\forall\, x \in]c-|s|, c+|s|[$.

Demonstração

- O intervalo I_0 é simétrico em torno de c, isto é, a série converge absolutamente para $x = c + s$ sse converge absolutamente para $x = c - s$, porque

$$|a_n s^{p_n}| = |a_n(-s)^{p_n}|$$

para todo o $n \geq d$.

Demonstração

- Se $I = \mathbb{R}$, os argumentos acima mostram que $I_0 = \mathbb{R}$.

Demonstração

- Se $I = \mathbb{R}$, os argumentos acima mostram que $I_0 = \mathbb{R}$.
- Se $I \neq \mathbb{R}$, os argumentos acima mostram que I é limitado.

Demonstração

- Se $I = \mathbb{R}$, os argumentos acima mostram que $I_0 = \mathbb{R}$.
- Se $I \neq \mathbb{R}$, os argumentos acima mostram que I é limitado.
- Seja $R := \sup(I) - c \geq 0$. Então, os argumentos acima implicam que I_0 é igual a

$$]c - R, c + R[\quad \text{ou} \quad [c - R, c + R]$$

e I é igual a

$$]c - R, c + R[, [c - R, c + R[,]c - R, c + R] \text{ ou } [c - R, c + R].$$

Método para determinar I e I_0

- Para determinar R usa-se o Critério de Cauchy ou o Critério de d'Alembert.

Método para determinar I e I_0

- Para determinar R usa-se o Critério de Cauchy ou o Critério de d'Alembert.

Exemplo

Considere a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-1)^{n-1}.$$

Então $R = 0$ *e* $I = I_0 = \{1\}$.

- O limite do Critério de Cauchy dá

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n^n(x-1)^{n-1}|} = \lim_{n\to\infty} n|x-1|^{1-1/n} = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 1 \\ +\infty & \text{se } x \neq 1 \end{cases}$$

Exemplo

Exemplo

Considere a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Então $R = +\infty$ *e* $I = I_0 = \mathbb{R}$.

- O limite do Critério de d'Alembert dá

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}/(n+1)!}{|x|^n/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo

Exemplo

Considere a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+5)^{2n}}{n}.$$

Então $R=1$, $I_0=]-6,-4[$ *e* $I=[-6,-4]$.

- O limite do Critério de Cauchy dá

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(-1)^n\frac{(x+5)^{2n}}{n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x+5)^2}{\sqrt[n]{n}}=(x+5)^2.$$

Exemplo

- Note-se que

$$(x+5)^2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x+5 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-6, -4[.$$

Exemplo

- Note-se que

$$(x+5)^2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x+5 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-6,-4[.$$

- Portanto, a série converge absolutamente quando $x \in]-6,-4[$ e diverge quando $x < -6$ ou $x > -4$.

Exemplo

- Note-se que

$$(x+5)^2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x+5 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-6,-4[.$$

- Portanto, a série converge absolutamente quando $x \in]-6,-4[$ e diverge quando $x < -6$ ou $x > -4$.
- Quando $x = -6$ ou $x = -4$, a série é igual a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

que é simplesmente convergente, como já sabemos.

Exemplo

- Note-se que

$$(x+5)^2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x+5 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-6,-4[.$$

- Portanto, a série converge absolutamente quando $x \in]-6,-4[$ e diverge quando $x < -6$ ou $x > -4$.
- Quando $x = -6$ ou $x = -4$, a série é igual a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

que é simplesmente convergente, como já sabemos.
- Portanto, $R = 1$, $I_0 =]-6,-4[$, $I = [-6,-4]$ $\quad (I_0 \subsetneqq I)$.

Funções reais analíticas

- A soma duma série de potências convergente depende de $x \in I$:

$$\sum_{n=d}^{\infty} a_n(x-c)^{p_n} =: f(x) \quad \text{para todo o } x \in I.$$

Funções reais analíticas

- A soma duma série de potências convergente depende de $x \in I$:

$$\sum_{n=d}^{\infty} a_n (x-c)^{p_n} =: f(x) \quad \text{para todo o } x \in I.$$

- $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função real com domínio igual a I.

Funções reais analíticas

- A soma duma série de potências convergente depende de $x \in I$:

$$\sum_{n=d}^{\infty} a_n(x-c)^{p_n} =: f(x) \quad \text{para todo o } x \in I.$$

- $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função real com domínio igual a I.
- Por exemplo, mais adiante veremos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} = \ln(x), \quad \forall\, x \in]0,2].$$

Funções reais analíticas

- Quando $R > 0$, diz-se que f é **uma função real analítica** em I e à série de potências chama-se a **série de Taylor** de f.

Funções reais analíticas

- Quando $R > 0$, diz-se que f é **uma função real analítica** em I e à série de potências chama-se a **série de Taylor** de f.
- Dados $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $c \in D_f$, veremos como determinar se existe um intervalo $I \subseteq D_f$, centrado em c, onde a função f é real analítica e como determinar a sua série de Taylor tal que

$$\sum_{n=d}^{\infty} a_n (x-c)^{p_n} = f(x), \quad \forall\, x \in I.$$

Section outline

Introdução

- Já vimos que a soma duma série de potências convergente é uma função.

Introdução

- Já vimos que a soma duma série de potências convergente é uma função.
- Nesta secção vamos ver o recíproco: como se pode associar a uma função uma série de potências, a chamada **série de Taylor**.

Introdução

- Já vimos que a soma duma série de potências convergente é uma função.
- Nesta secção vamos ver o recíproco: como se pode associar a uma função uma série de potências, a chamada **série de Taylor**.
- Note-se que as somas parciais duma série de potências são polinómios. Portanto, uma função real analítica pode ser aproximada por polinómios de graus cada vez mais altos.

Introdução

- Já vimos que a soma duma série de potências convergente é uma função.
- Nesta secção vamos ver o recíproco: como se pode associar a uma função uma série de potências, a chamada **série de Taylor**.
- Note-se que as somas parciais duma série de potências são polinómios. Portanto, uma função real analítica pode ser aproximada por polinómios de graus cada vez mais altos.
- O Teorema de Taylor permite-nos ver se uma função é real analítica e em que intervalo do seu domínio.

Polinómios de Taylor

Proposição

Seja $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$ $(a_m \neq 0)$*. Para todo o* $x \in \mathbb{R}$*, verifica-se*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m.$$

Polinómios de Taylor

Proposição

Seja $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m$ $(a_m \neq 0)$. *Para todo o* $x \in \mathbb{R}$, *verifica-se*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m.$$

Demonstração: A fórmula na proposição é uma consequência de:

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} n!a_n & \text{se } 0 \leq n \leq m; \\ 0 & \text{se } n > m \end{cases}.$$

Exemplo

- Seja $f(x) = 1 + 2x - 3x^2 + 7x^3$.

Exemplo

- Seja $f(x) = 1 + 2x - 3x^2 + 7x^3$.
- Então

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - 6x + 21x^2 \\ f''(x) &= -6 + 42x \\ f'''(x) &= 42 \\ f^{(n)}(x) &= 0 \quad (n > 3) \end{aligned}$$

Exemplo

- Seja $f(x) = 1 + 2x - 3x^2 + 7x^3$.
- Então

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 2 - 6x + 21x^2 \\
f''(x) &= -6 + 42x \\
f'''(x) &= 42 \\
f^{(n)}(x) &= 0 \quad (n > 3)
\end{aligned}
$$

- Logo

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 1 = 0! \cdot 1 \\
f'(0) &= 2 = 1! \cdot 2 \\
f''(0) &= -6 = 2! \cdot (-3) \\
f'''(0) &= 42 = 3! \cdot 7
\end{aligned}
$$

O caso $c \neq 0$

Corolário

Seja $f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_m(x-c)^m$ $(a_m \neq 0)$*. Para todo o* $x \in \mathbb{R}$ *verifica-se*

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(m)}(c)}{m!}(x-c)^m.$$

Séries de Taylor

Definição

Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função suave (infinitamente diferenciável) e* $c \in I^\circ$. *A* **série de Taylor** *associada a* f *e centrada em* c *é a série de potências* $T = T(f, c)$ *dada por*

$$T(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n.$$

Polinómios de Taylor

Para todo o $m \in \mathbb{N}_0$, o **polinómio de Taylor de ordem** m é a soma parcial de ordem $m+1$ (cujo grau é igual a m):

$$T_m(x) := \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Observação

No caso particular $c = 0$, os polinómios e as séries de Taylor também são conhecidos como **os polinómios e as séries de MacLaurin**.

Exemplo

Exemplo

Sejam f um polinómio de grau m e $c = 0$. Então

$$T(x) = T_m(x) = f(x),$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$, porque $f^{(n)} = 0$ para todo o $n > m$.

Exemplo

Exemplo

Para $f(x) = e^x$ *e* $c = 0$, *obtém-se*

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^x)^{(n)}|_{x=0}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Exemplo

Exemplo

Para $f(x) = e^x$ e $c = 0$, obtém-se

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^x)^{(n)}|_{x=0}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

- Isto é uma consequência de $(e^x)^{(n)}|_{x=0} = e^x|_{x=0} = e^0 = 1$.

Exemplo

Exemplo

Para $f(x) = e^x$ *e* $c = 0$, *obtém-se*

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^x)^{(n)}|_{x=0}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

- Isto é uma consequência de $(e^x)^{(n)}|_{x=0} = e^x|_{x=0} = e^0 = 1$.
- Pelo Critério de d'Alembert, $R = +\infty$ e $I = I_0 = \mathbb{R}$. Mais adiante veremos que para todo o $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Exemplo

Exemplo

Para $f(x) = \ln(x)$ *e* $c = 1$*, obtém-se*

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}.$$

Exemplo

Exemplo

Para $f(x) = \ln(x)$ *e* $c = 1$, *obtém-se*

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}.$$

- Isto é uma consequência de

$$\frac{\ln^{(n)}(1)}{n!} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n n!}\Big|_{x=1} = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

Exemplo

Exemplo

Para $f(x) = \ln(x)$ *e* $c = 1$*, obtém-se*

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}.$$

- Isto é uma consequência de

$$\frac{\ln^{(n)}(1)}{n!} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n n!}\Big|_{x=1} = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

- Pelos Critérios de Cauchy e de Leibniz, $I_0 =]0,2[$ e $I =]0,2]$. Mais adiante veremos que para todo o $x \in]0,2]$:

$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$$

Exemplo

Exemplo

Para $f(x) = \sin(x)$ *e* $c = 0$, *obtém-se*

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Exemplo

Exemplo

Para $f(x) = \sin(x)$ *e* $c = 0$, *obtém-se*

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

- Isto é uma consequência de $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$ e

$$\sin^{(m)}(x) = \begin{cases} (-1)^n \sin(x), & \text{se } m = 2n \\ (-1)^n \cos(x), & \text{se } m = 2n+1. \end{cases}$$

Exemplo

Exemplo

Para $f(x) = \sin(x)$ *e* $c = 0$*, obtém-se*

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

- Isto é uma consequência de $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$ e

$$\sin^{(m)}(x) = \begin{cases} (-1)^n \sin(x), & \text{se } m = 2n \\ (-1)^n \cos(x), & \text{se } m = 2n+1. \end{cases}$$

- Pelo Critério de d'Alembert, $I = I_0 = \mathbb{R}$. Mais adiante veremos que para todo o $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Observação

Observação

Mudando o valor de c, a série de Taylor também muda, embora a função f seja a mesma. Por exemplo, se $c = \pi/2$, obtemos

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x - \frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n)!},$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Aproximações polinomiais

Proposição

Se f for uma função m vezes diferenciável em c, verifica-se

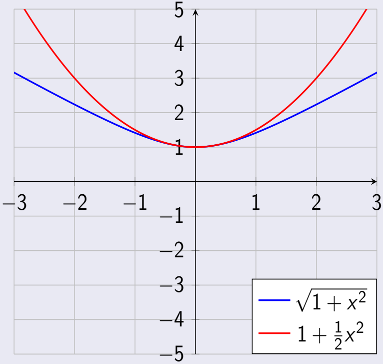
$$\begin{aligned} f(c) &= T_m(c) \\ f'(c) &= T'_m(c) \\ f''(c) &= T''_m(c) \\ &\vdots \\ f^{(m)}(c) &= T_m^{(m)}(c), \end{aligned}$$

onde $T_m(x) = T_m(f,c)(x)$.

Aproximações polinomiais

Exemplo

Seja $f(x) = \sqrt{1+x^2}$. *Então* $T_2(x) = 1 + \dfrac{1}{2}x^2$.



O Resto

Definição

O **resto de ordem** *m é a função $R_m = R_m(f, c)$ dada por*

$$R_m(x) := f(x) - T_m(x)$$

para $x \in I$, onde $T_m = T_m(f, c)$.

O Resto

Definição

O **resto de ordem** *m é a função $R_m = R_m(f, c)$ dada por*

$$R_m(x) := f(x) - T_m(x)$$

para $x \in I$, onde $T_m = T_m(f, c)$.

- Por definição,

$$T(x) = f(x) \Leftrightarrow \lim_{m \to \infty} T_m(x) = f(x).$$

O Resto

Definição

O **resto de ordem** *m é a função $R_m = R_m(f, c)$ dada por*

$$R_m(x) := f(x) - T_m(x)$$

para $x \in I$, onde $T_m = T_m(f, c)$.

- Por definição,

$$T(x) = f(x) \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty} T_m(x) = f(x).$$

- Portanto

$$T(x) = f(x) \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty} R_m(x) = 0.$$

O Teorema do Resto

Teorema (Forma de Lagrange)

Para todo o $m \in \mathbb{N}_0$, *existe* $z = z_m \in]\min(c,x), \max(c,x)[$ *tal que*

$$R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(z)(x-c)^{m+1}}{(m+1)!}.$$

O Teorema do Resto

Teorema (Forma de Lagrange)

Para todo o $m \in \mathbb{N}_0$, *existe* $z = z_m \in]\min(c,x), \max(c,x)[$ *tal que*

$$R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(z)(x-c)^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Note-se que

$$]\min(c,x), \max(c,x)[= \begin{cases}]c,x[& \text{se } c < x; \\ ]x,c[& \text{se } c > x. \end{cases}$$

Exemplo

Sejam $f(x) = e^x$ e $c = 0$.

Exemplo

Sejam $f(x) = e^x$ e $c = 0$.

- $\forall m \in \mathbb{N}_0, \forall x \in \mathbb{R}$ existe $z = z_m \in]\min(0,x), \max(0,x)[$ t.q.

$$R_m(x) = \frac{e^z x^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Exemplo

Sejam $f(x) = e^x$ e $c = 0$.

- $\forall m \in \mathbb{N}_0, \forall x \in \mathbb{R}$ existe $z = z_m \in]\min(0,x), \max(0,x)[$ t.q.

$$R_m(x) = \frac{e^z x^{m+1}}{(m+1)!}.$$

- $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{m\to\infty} R_m(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{e^z x^{m+1}}{(m+1)!} = 0,$$

porque

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^z x^{m+1}}{(m+1)!}$$

converge (Crit. de d'Alembert) e satisfaz o Crit. Necessário.

Exemplo

- Conclusão:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo

Sejam $f(x) = \ln(x)$ e $c = 1$.

Exemplo

Sejam $f(x) = \ln(x)$ e $c = 1$.

- $\forall m \in \mathbb{N}, \forall x > 0$ existe $z = z_m \in]\min(1,x), \max(1,x)[$ t.q.

$$R_m(x) = (-1)^m \frac{(x-1)^{m+1}}{(m+1)z^{m+1}}.$$

Exemplo

Sejam $f(x) = \ln(x)$ e $c = 1$.

- $\forall m \in \mathbb{N}, \forall x > 0$ existe $z = z_m \in]\min(1,x), \max(1,x)[$ t.q.

$$R_m(x) = (-1)^m \frac{(x-1)^{m+1}}{(m+1)z^{m+1}}.$$

- Note-se que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{(x-1)^{m+1}}{(m+1)z^{m+1}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]1/2, 2],$$

porque para esses valores de x

$$0 \leq \frac{x-1}{z} \leq 1,$$

logo

$$0 \leq \frac{(x-1)^{m+1}}{(m+1)z^{m+1}} \leq \frac{1}{m+1}.$$

Exemplo

- Conclusão:

$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$$

para todo o $x \in]1/2, 2]$.

Exemplo

- Conclusão:
$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$$
para todo o $x \in]1/2, 2]$.
- Usando outros argumentos, mostraremos mais adiante que este resultado é válido para todo o $x \in]0, 2]$.

Exemplo

Sejam $f(x) = \sin(x)$ e $c = 0$.

Exemplo

Sejam $f(x) = \sin(x)$ e $c = 0$.

- $\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$ existe $z = z_m \in]\min(0,x), \max(0,x)[$ t.q.

$$R_{2m+1}(x) = \frac{(-1)^{m+1}\cos(z)x^{2m+3}}{(2m+3)!}.$$

Exemplo

Sejam $f(x) = \sin(x)$ e $c = 0$.

- $\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$ existe $z = z_m \in]\min(0,x), \max(0,x)[$ t.q.

$$R_{2m+1}(x) = \frac{(-1)^{m+1}\cos(z)x^{2m+3}}{(2m+3)!}.$$

- $\cos(z) \in [-1, 1]$, logo

$$\left|\frac{(-1)^{m+1}\cos(z)x^{2m+3}}{(2m+3)!}\right| \leq \frac{|x|^{2m+3}}{(2m+3)!}.$$

Exemplo

Sejam $f(x) = \sin(x)$ e $c = 0$.

- $\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$ existe $z = z_m \in]\min(0,x), \max(0,x)[$ t.q.

$$R_{2m+1}(x) = \frac{(-1)^{m+1}\cos(z)x^{2m+3}}{(2m+3)!}.$$

- $\cos(z) \in [-1, 1]$, logo

$$\left|\frac{(-1)^{m+1}\cos(z)x^{2m+3}}{(2m+3)!}\right| \leq \frac{|x|^{2m+3}}{(2m+3)!}.$$

- Pelo Crit. de d'Alembert e o Crit. Necessário:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{|x|^{2m+3}}{(2m+3)!} = 0$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$, logo $\lim_{m\to\infty} R_{2m+1}(x) = 0$ por enquadramento.

Exemplo

- Conclusão:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Uma função suave que não é real analítica

Exemplo

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & se\ x \neq 0; \\ 0 & se\ x = 0. \end{cases}$$

é suave em $x = 0$*, mas não é real analítica nesse ponto.*

- É fácil de ver que

$$f'(x) := \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Uma função suave mas não-analítica

- Do mesmo modo prova-se que

$$\left(e^{-1/x^2}\right)^{(n)} = \begin{cases} P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

onde P_n é um polinómio.

Uma função suave mas não-analítica

- Do mesmo modo prova-se que

$$\left(e^{-1/x^2}\right)^{(n)} = \begin{cases} P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

  onde P_n é um polinómio.
- Como $f^{(n)}(0) = 0$ para todo o $n \geq 0$, obtém-se

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Uma função suave mas não-analítica

- Do mesmo modo prova-se que

$$\left(e^{-1/x^2}\right)^{(n)} = \begin{cases} P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

  onde P_n é um polinómio.

- Como $f^{(n)}(0) = 0$ para todo o $n \geq 0$, obtém-se

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Conclusão: f é suave mas **não** é real analítica em $x = 0$, porque $T(x) = 0$ mas $f(x) \neq 0$ quando $x \neq 0$.

Derivar e primitivar séries de potências

Teorema

Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, $\forall x \in]c-R, c+R[$, *onde* $R > 0$.

1. *Para todo o* $x \in]c-R, c+R[$*:*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}.$$

2. *Para todo o* $x \in]c-R, c+R[$*:*

$$\int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x-c)^{n+1}}{n+1} + C.$$

Teorema de Abel

Teorema (Teorema de Abel)

Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, $\forall x \in]c-R, c+R[$, *onde* $R > 0$.

1. *Se* $\sum_{n=0} a_n R^n$ *convergir, então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = \lim_{x \to (c+R)^-} f(x).$$

2. *Se* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n$ *convergir, então*

$$\sum_{n=0} a_n(-R)^n = \lim_{x \to (c-R)^+} f(x).$$

Exemplo

Exemplo

Vamos provar que para todo o $x \in]-1,1]$*:*

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Exemplo

Exemplo

Vamos provar que para todo o $x \in]-1,1]$*:*

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

- Em primeiro lugar:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Exemplo

Exemplo

Vamos provar que para todo o $x \in]-1, 1]$*:*

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

- Em primeiro lugar:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

- Pelo critério das séries geométricas (com $r = -x$), $\forall x \in]-1, 1[$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

Exemplo

- Primitivando termo a termo, vê-se que $\forall x \in]-1,1[$,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Exemplo

- Primitivando termo a termo, vê-se que $\forall x \in]-1,1[$,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

- A série de potências converge simplesmente em $x = 1$ (série harmónica alternada). Portanto, pelo Teorema de Abel:

$$\ln(2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}.$$

Exemplo

- Primitivando termo a termo, vê-se que $\forall x \in]-1,1[$,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

- A série de potências converge simplesmente em $x = 1$ (série harmónica alternada). Portanto, pelo Teorema de Abel:

$$\ln(2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}.$$

- Repare-se que a série de potências diverge em $x = -1$ (série harmónica). Isto é consistente com o facto de -1 não pertencer ao domínio de $\ln(1+x)$.

FIM