Ficha de exercícios nº 4: Sistemas de equações lineares

1. Considere o sistema de equações lineares seguinte, escrito em função do parâmetro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + \alpha x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 - \alpha x_3 = 3 \\ \alpha x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

   (a) Transforme a matriz ampliada associada ao sistema numa matriz na forma de escada e discuta a resolubilidade do sistema em função do parâmetro α;

   (b) No caso de $\alpha = 2$, utilize (a) para resolver o sistema, condensando a matriz ampliada associada;

   (c) Utilize (a) para resolver o sistema no caso de $\alpha = -1$, condensando a matriz ampliada associada;

   (d) Usando a Regra de Cramer resolva o sistema no caso de $\alpha = 2$.

2. Considere os sistemas de equações lineares seguintes:

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases} \qquad \text{(B)} \quad \begin{cases} 10x_1 - x_2 = 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 7 \\ -2x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

   (a) Calcule o determinante da matriz simples associada a cada sistema;

   (b) Para cada sistema, calcule as duas primeiras iterações usando o método iterativo de Jacobi, admitindo $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (0, 0, 0)$;

   (c) Para as iterações determinadas em (a), calcule a tolerância absoluta nas normas vectoriais $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$.

   (d) Para as iterações determinadas em (a), calcule a tolerância relativa nas normas vectoriais $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$.

3. Considere os sistemas de equações lineares do exercício anterior.

   (a) Para cada sistema, calcule as duas primeiras iterações usando o método iterativo de Gauss-Seidel, admitindo $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (0, 0, 0)$;

   (b) Para as iterações determinadas em (a), calcule a tolerância absoluta nas normas vectoriais $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$.

   (c) Para as iterações determinadas em (a), calcule a tolerância relativa nas normas vectoriais $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$.

4. Considere os sistemas de equações lineares seguintes:

$$\text{(A)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 10x_3 = -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 = -11 \\ 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25 \end{cases} \qquad \text{(B)} \begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 = -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 = -11 \end{cases}$$

   (a) Calcule o determinante da matriz simples associada a cada sistema.

(b) Para cada sistema, calcule uma solução aproximada usando o método iterativo de Jacobi com tolerância absoluta (na norma $\| \cdot \|_\infty$) $\varepsilon_a = 10^{-2}$ e um máximo de $n = 10$ iterações, admitindo $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0) = (0, 0, 0, 0)$.

(c) Para cada sistema, calcule uma solução aproximada usando o método iterativo de Gauss-Seidel com tolerância absoluta (na norma $\| \cdot \|_\infty$) $\varepsilon_a = 10^{-2}$ e um máximo de $n = 10$ iterações, admitindo $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0) = (0, 0, 0, 0)$.

(d) Relativamente a cada uma das matrizes simples dos sistemas, verifique se são diagonalmente dominantes e se, em função disso, se pode justificar o sucedido em (a) e (b).