AM II, LEI + BE, T: Derivadas parciais de ordem superior e aplicações

Marco Mackaaij

FCT, Universidade do Algarve

DPOS

- Tal como as derivadas normais de ordem superior, as derivadas parciais de ordem superior definem-se recursivamente (caso existam).

Exemplo

$$\begin{array}{rclclcl}
(x^2y^3)''_{xx} & = & ((x^2y^3)'_x)'_x & = & (2xy^3)'_x & = & 2y^3; \\
(x^2y^3)''_{xy} & = & ((x^2y^3)'_x)'_y & = & (2xy^3)'_y & = & 6xy^2; \\
(x^2y^3)''_{yx} & = & ((x^2y^3)'_y)'_x & = & (3x^2y^2)'_x & = & 6xy^2; \\
(x^2y^3)''_{yy} & = & ((x^2y^3)'_y)'_y & = & (3x^2y^2)'_y & = & 6x^2y.
\end{array}$$

Matriz hessiana

Tal como as derivadas parciais duma função f formam um vetor, chamado gradiente:

$$\nabla f(x,y) = \left(f'_x(x,y), f'_y(x,y)\right),$$

as derivadas parciais de segunda ordem formam uma matriz, chamada **matriz hessiana**:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{yx}(x,y) \\ f''_{xy}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{pmatrix}.$$

O determinante desta matriz chama-se o **hessiano**:

$$h_f(x,y) = \det(H_f(x,y)) = f''_{xx}(x,y)f''_{yy}(x,y) - f''_{yx}(x,y)f''_{xy}(x,y).$$

Exemplo

Seja $f(x,y) = x^2y^3$. Então

$$\nabla f(x,y) = \left(2xy^3, 3x^2y^2\right),$$

e

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} (2xy^3)'_x & (3x^2y^2)'_x \\ (2xy^3)'_y & (3x^2y^2)'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y^3 & 6xy^2 \\ 6xy^2 & 6x^2y \end{pmatrix}.$$

Logo

$$\begin{aligned} h_f(x,y) &= 2y^3 \cdot 6x^2y - (6xy^2)^2 \\ &= 12x^2y^4 - 36x^2y^4 \\ &= -24x^2y^4. \end{aligned}$$

Teorema de Schwarz

Sejam $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a,b) \in D_f^\circ$. Suponhamos que $B_\epsilon(a,b) \subseteq D_f$ para um certo $\epsilon > 0$.

Teorema

Se todas as derivadas parciais de f de ordem ≤ 2 existirem em $B_\epsilon(a,b)$ e forem contínuas em (a,b), então

$$f''_{xy}(a,b) = f''_{yx}(a,b).$$

Ou seja, $H_f(a,b)$ é uma matriz **simétrica***.*

Obs.: A demonstração, omitida nestes slides, utiliza o Teorema de Lagrange (AM I) e a Regra da Cadeia.

Generalização

Sejam $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $(a,b,c) \in D_f^\circ$. Suponhamos que $B_\epsilon(a,b,c) \subseteq D_f$ para um certo $\epsilon > 0$.

Teorema

Se todas as derivadas parciais de f de ordem ≤ 2 existirem em $B_\epsilon(a,b,c)$ e forem contínuas em (a,b,c), então

$$f''_{xy}(a,b,c) = f''_{yx}(a,b,c),\ f''_{xz}(a,b,c) = f''_{zx}(a,b,c),$$
$$f''_{yz}(a,b,c) = f''_{zy}(a,b,c).$$

Ou seja, a matriz hessiana

$$H_f(a,b,c) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(a,b,c) & f''_{xy}(a,b,c) & f''_{xz}(a,b,c) \\ f''_{yx}(a,b,c) & f''_{yy}(a,b,c) & f''_{yz}(a,b,c) \\ f''_{zx}(a,b,c) & f''_{zy}(a,b,c) & f''_{zz}(a,b,c) \end{pmatrix}$$

é simétrica.

Funções de classe C^k

Seja $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Suponhamos que $B \subseteq D_f^\circ$.

Definição

- *A função f diz-se de* **classe $\mathbf{C^k}$** *em B, onde $k \in \mathbb{N}_0$, caso todas as suas derivadas parciais de ordem $\leq k$ existam e sejam contínuas em B. Quando $B = D_f = D_f^\circ$, diz-se que f é de classe C^k simplesmente.*
- *Uma função diz-se de classe* $\mathbf{C^0}$ *se for contínua.*
- *Uma função diz-se de classe* $\mathbf{C^\infty}$ *(ou* **suave***) se for de classe C^k para todo o $k \in \mathbb{N}_0$.*

Funções de classe C^k

Exemplo

1. *Todos os polinómios em duas variáveis são de classe* C^∞*, porque as derivadas parciais dum polinómio são polinómios e todos os polinómios são contínuos.*
2. *Todas as funções racionais são de classe* C^∞*, porque as derivadas parciais duma função racional são funções racionais e todas as funções racionais são contínuas.*

Funções de classe C^k

Seja $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Suponhamos que $B \subseteq D_f^\circ$.

Observação

1. *Uma função de classe C^k em B também é de classe C^m em B para todo o $0 \leq m < k$;*
2. *Toda a função de classe C^1 em B é diferenciável em B;*
3. *Toda a função de classe C^2 em B é diferenciável e satisfaz $f''_{xy} = f''_{yx}$ em B, logo a matriz hessiana é* **simétrica** *em B:*

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{xy}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Extremos de funções de uma variável: revisão

- Seja $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2.
  - Se f tiver um **extremo local** (i.e., um **máximo local** ou um **mínimo local**) num dado ponto $a \in D_f^\circ$, então $f'(a) = 0$ (**ponto estacionário**).
  - A condição $f'(a) = 0$ é necessária mas não é suficiente para que f tenha um extremo em a. (Contra-exemplo: $f(x) = x^3, a = 0$)
- Suponhamos que $f'(a) = 0$ e $]a-\epsilon, a+\epsilon[\subseteq D_f$ para um certo $\epsilon > 0$.
  - Se $f'(x) < 0$ para $x \in]a-\epsilon, a[$ e $f'(x) > 0$ para $x \in]a, a+\epsilon[$, então f tem um **mínimo local** em a.
  - Se $f'(x) > 0$ para $x \in]a-\epsilon, a[$ e $f'(x) < 0$ para $x \in]a, a+\epsilon[$, então f tem um **máximo local** em a.

Extremos de funções de uma variável: revisão

Lema

Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e $a \in D_f^\circ$ um ponto estacionário de f.

- *Se $f''(a) > 0$, então f tem um mínimo local em a.*
- *Se $f''(a) < 0$, então f tem um máximo local em a.*

Demonstração 1: Suponhamos (por exemplo) que $f''(a) > 0$.

1. f'' é contínua: existe $\epsilon > 0$ tal que $]a-\epsilon, a+\epsilon[\subseteq D_f$ e $f''(x) > 0$ para todo o $x \in]a-\epsilon, a+\epsilon[$.
2. Logo, f' é estritamente crescente nesse intervalo.
3. $f'(a) = 0$: $f'(x) < 0$ para todo o $x \in]a-\epsilon, a[$ e $f'(x) > 0$ para todo o $x \in]a, a+\epsilon[$.
4. Conclusão: f tem um mínimo em a.

Extremos de funções de uma variável: revisão

Demonstração 2: Suponhamos (por exemplo) que $f''(a) > 0$.

- 1º passo igual: $f''(x) > 0$ para todo o $x \in]a-\epsilon, a+\epsilon[$.
- Taylor: para todo o $x \in]a-\epsilon, a+\epsilon[$ existe $x_0 \in]a-\epsilon, a+\epsilon[$ tal que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-a)^2.$$

- $f'(a) = 0$ e $f''(x_0) > 0$: para todo o $x \in]a-\epsilon, a+\epsilon[$

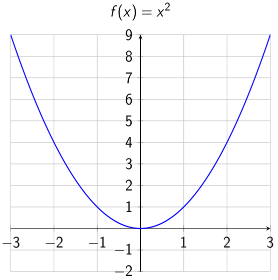
$$f(x) = f(a) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-a)^2 \geq f(a)$$

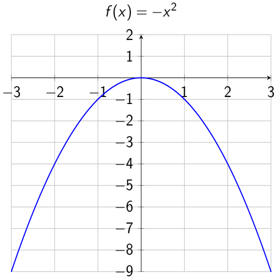
- Conclusão: f tem um mínimo local em a.

Extremos de funções de uma variável: revisão

Exemplo

- *Seja* $f(x) = x^2$. *Então* $f'(x) = 2x = 0$ *sse* $x = 0$. $f''(0) = 2 > 0$, *logo* f *tem um mínimo local em* 0.
- *Seja* $f(x) = -x^2$. *Então* $f'(x) = -2x = 0$ *sse* $x = 0$. $f''(0) = -2 < 0$, *logo* f *tem um máximo local em* 0.





Extremos de funções de duas variáveis

A partir de agora suponhamos sempre que $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2.

Método

- Determinar os pontos estacionários de f, usando ∇f.
- Em cada ponto estacionário determinar se f tem um extremo ou um ponto de sela, usando H_f.

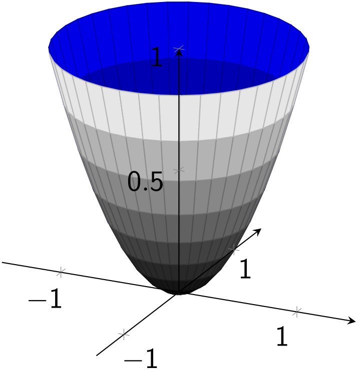
Extremos de funções de duas variáveis

Definição

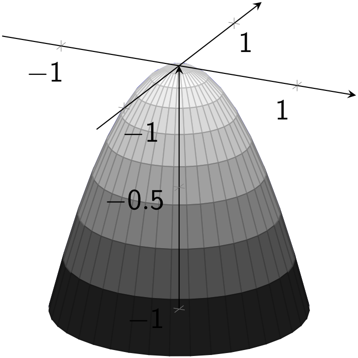
Seja $(a, b) \in D_f^\circ$.

- f *tem um* **máximo local** *em* (a, b) *se* $f(x, y) \leq f(a, b)$ *para todo o* (x, y) *numa vizinhança de* (a, b)*;*
- f *tem um* **mínimo local** *em* (a, b) *se* $f(x, y) \geq f(a, b)$ *para todo o* (x, y) *numa vizinhança de* (a, b)*;*
- *Um* **extremo local** *é um máximo ou um mínimo local;*
- *Caso a desigualdade acima seja estrita para todo o* $(x, y) \neq (a, b)$ *nessa vizinhança, o extremo local diz-se* **isolado**.

Exemplos

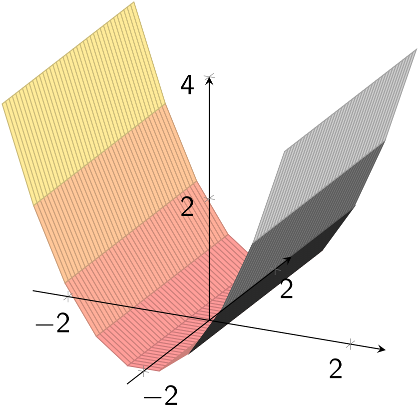


mínimo



máximo

Exemplos



mínimos não-isolados

Pontos estacionários

Seja $(a, b) \in D_f^\circ$.

Definição

O ponto (a, b) *diz-se um* **ponto estacionário** *de* f *se*

$$\nabla f(a, b) = (0, 0).$$

Obs.: Se (a, b) for um ponto estacionário de f, então o plano tangente $T_f(a, b)$ é horizontal.

Pontos estacionários

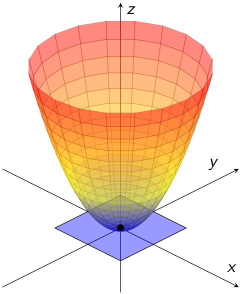
Lema

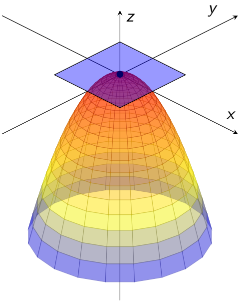
Se f tiver um extremo local em (a, b), então $\nabla f(a, b) = (0, 0)$.

Demonstração: Suponhamos que f tem um extremo local em (a, b).

- Recorde-se que
$$f'_x(a, b) = g'(0),$$
onde $g(t) = f(a + t, b)$.
- g tem um extremo local em 0, portanto $g'(0) = 0$. Logo, $f'_x(a, b) = 0$.
- A prova de que $f'_y(a, b) = 0$ é análoga.
- Conclusão: $\nabla f(a, b) = (f'_x(a, b), f'_y(a, b)) = (0, 0)$.

Exemplo





Formas quadráticas

Seja $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2, $(a, b) \in D_f^\circ$ e $\epsilon > 0$ tal que $B := B_\epsilon(a, b) \subseteq D_f$.

Definição

Para qualquer ponto $(x_0, y_0) \in B$, *define a* **forma quadrática** *por*

$$Q_{x_0,y_0}(x-a, y-b) :=$$

$$f''_{xx}(x_0, y_0)(x-a)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)(x-a)(y-b) + f''_{yy}(x_0, y_0)(y-b)^2.$$

Os coeficientes da forma quadrática são as entradas de matriz hessiana (que é simétrica por hipótese):

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Teorema de Taylor

Funções de classe C^m podem ser aproximadas por polinómios de grau m, os chamados **polinómios de Taylor**. Nestes slides consideramos apenas o caso $m = 2$.

Teorema

Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2 *e* $(a, b) \in D_f^\circ$. *Seja* $\epsilon > 0$ *tal que* $B := B_\epsilon(a, b) \subseteq D_f$. *Para todo o* $(x, y) \in B$, *existe um ponto* (x_0, y_0) *no segmento da reta entre* (a, b) *e* (x, y) *tal que*

$$f(x, y) = f(a, b) + f'_x(a, b)(x-a) + f'_y(a, b)(y-b) + Q_{x_0,y_0}(x-a, y-b).$$

Teorema de Taylor

Demonstração: Seja $(x,y) \in B$ arbitrário mas fixo.

- Define $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$: $\quad g(t) := f(a + t(x-a), b + t(y-b))$.
- Teorema de Taylor de Cálc. Inf. I: existe $t_0 \in]0,1[$ tal que

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(t_0).$$

- $g(0) = f(a,b)$ e $g(1) = f(x,y)$.
- Regra da Cadeia: $g'(0) = f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$;

$$g''(t_0) =$$

$$f''_{xx}(x_0,y_0)(x-a)^2 + 2f''_{xy}(x_0,y_0)(x-a)(y-b) + f''_{yy}(x_0,y_0)(y-b)^2$$

onde $(x_0,y_0) := (a + t_0(x-a), b + t_0(y-b))$.

Determinar os extremos

Teorema

Suponhamos que $(a, b) \in D_f^\circ$ *é um ponto estacionário de* f.

1. *Se* $h_f(a, b) > 0$ *e* $f''_{xx}(a, b) > 0$, *então* f *tem um mínimo local em* (a, b);
2. *Se* $h_f(a, b) > 0$ *e* $f''_{xx}(a, b) < 0$, *então* f *tem um máximo local em* (a, b);

Definição

Suponhamos que $(a, b) \in D_f^\circ$ *é um ponto estacionário de* f.

3. *Se* $h_f(a, b) < 0$, *diz-se que* f *tem um* **ponto de sela** *em* (a, b).

Demonstração

Seja $\epsilon > 0$ tal que $B := B_\epsilon(a,b) \subseteq D_f$.

- $\nabla f(a,b) = (0,0)$: para todo o $(x,y) \in B$ existe $(x_0,y_0) \in B$ tal que

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{2} Q_{x_0,y_0}(x-a, y-b),$$

pelo Teorema de Taylor.

- Como f é de classe C^2, pode-se assumir que:

$$\begin{aligned} Q_{x_0,y_0}(x-a,y-b) > 0 &\quad\Leftrightarrow\quad Q_{a,b}(x-a,y-b) > 0, \\ Q_{x_0,y_0}(x-a,y-b) < 0 &\quad\Leftrightarrow\quad Q_{a,b}(x-a,y-b) < 0. \end{aligned}$$

Demonstração

- Pelo slide anterior, para todo o $(x, y) \in B$:

$$\begin{aligned} f(x,y) > f(a,b) &\Leftrightarrow Q_{a,b}(x-a, y-b) > 0, \\ f(x,y) < f(a,b) &\Leftrightarrow Q_{a,b}(x-a, y-b) < 0. \end{aligned}$$

- Da teoria das formas quadráticas:

$$\begin{aligned} Q_{a.b}(x-a, y-b) > 0 &\Leftrightarrow h_f(a,b) > 0 \wedge f''_{xx}(a,b) > 0, \\ Q_{a.b}(x-a, y-b) < 0 &\Leftrightarrow h_f(a,b) > 0 \wedge f''_{xx}(a,b) < 0. \end{aligned}$$

- Logo:

f tem um mín. loc. em (a, b) sse $h_f(a,b) > 0 \wedge f''_{xx}(a,b) > 0$,
f tem um máx. loc. em (a, b) sse $h_f(a,b) > 0 \wedge f''_{xx}(a,b) < 0$.

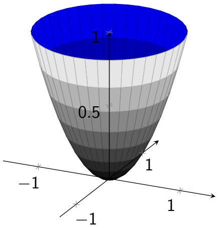
Exemplos

Seja $f(x,y) = x^2 + y^2$. Então

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \;\Leftrightarrow\; (2x,2y) = (0,0) \;\Leftrightarrow\; (x,y) = (0,0).$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} (2x)'_x & (2y)'_x \\ (2x)'_y & (2y)'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$h_f(0,0) = 4 > 0$ e $f''_{xx}(0,0) = 2 > 0$, logo f tem um mínimo local em $(0,0)$.



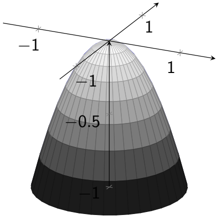
Exemplos

Seja $f(x,y) = -x^2 - y^2$. Então

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (-2x,-2y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0).$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} (-2x)'_x & (-2y)'_x \\ (-2x)'_y & (-2y)'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$h_f(0,0) = 4 > 0$ e $f''_{xx}(0,0) = -2 < 0$, logo f tem um máximo local em $(0,0)$.



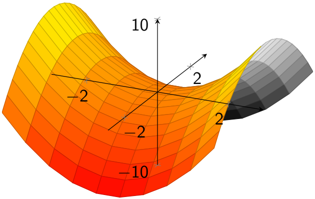
Exemplos

Seja $f(x,y) = x^2 - y^2$. Então

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (2x,-2y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0).$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} (2x)'_x & (-2y)'_x \\ (2x)'_y & (-2y)'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$h_f(0,0) = -4 < 0$, logo f tem um ponto de sela em $(0,0)$.



Exemplos

Seja $f(x,y) = \left(\frac{1}{2} - x^2 + y^2\right) e^{1-x^2-y^2}$.

- Determinemos $\nabla f(x,y)$:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= (-2x)e^{1-x^2-y^2} + \left(\frac{1}{2} - x^2 + y^2\right) e^{1-x^2-y^2}(-2x) \\ &= \left(2x^3 - 2xy^2 - 3x\right) e^{1-x^2-y^2}; \\ f'_y(x,y) &= (2y)e^{1-x^2-y^2} + \left(\frac{1}{2} - x^2 + y^2\right) e^{1-x^2-y^2}(-2y) \\ &= \left(2x^2y - 2y^3 + y\right) e^{1-x^2-y^2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\nabla f(x,y) = \left(2x^3 - 2xy^2 - 3x, 2x^2y - 2y^3 + y\right) e^{1-x^2-y^2}.}$$

Exemplos

$$\boxed{\nabla f(x,y) = \left(2x^3 - 2xy^2 - 3x, 2x^2y - 2y^3 + y\right) e^{1-x^2-y^2}.}$$

- Determinemos os pontos estacionários:

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x(2x^2 - 2y^2 - 3) = 0 \\ y(2x^2 - 2y^2 + 1) = 0. \end{cases}$$

Casos possíveis:

- $x = 0 \;\wedge\; y = 0$: $(0,0)$;
- $x = 0 \;\wedge\; -2y^2 + 1 = 0$: $(0, \frac{\pm 1}{\sqrt{2}})$;
- $y = 0 \;\wedge\; 2x^2 - 3 = 0$: $(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$.

Obs.: O caso $2x^2 - 2y^2 - 3 = 0 \;\wedge\; 2x^2 - 2y^2 + 1 = 0$ não tem solução.

Exemplos

$$\boxed{\nabla f(x,y) = \left(2x^3 - 2xy^2 - 3x, 2x^2y - 2y^3 + y\right) e^{1-x^2-y^2}.}$$

- $$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= \left((6x^2 - 2y^2 - 3) - 2x(2x^3 - 2xy^2 - 3x)\right) e^{1-x^2-y^2} \\ &= \left(-4x^4 + 4x^2y^2 + 12x^2 - 2y^2 - 3\right) e^{1-x^2-y^2}; \\ f''_{xy}(x,y) &= \left(-4xy - 2y(2x^3 - 2xy^2 - 3x)\right) e^{1-x^2-y^2} \\ &= \left(-4x^3y + 4xy^3 + 2xy\right) e^{1-x^2-y^2}; \\ f''_{yy}(x,y) &= \left((2x^2 - 6y^2 + 1) - 2y(2x^2y - 2y^3 + y)\right) e^{1-x^2-y^2} \\ &= \left(-4x^2y^2 + 4y^4 - 8y^2 + 2x^2 + 1\right) e^{1-x^2-y^2}. \end{aligned}$$

Exemplos

- Consideremos a matriz hessiana nos pontos estacionários.
  - f tem um ponto de sela em $(0,0)$:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -3e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}.$$

$h_f(0,0) = -3e^2 < 0.$

  - f tem um máximo local em $(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$:

$$H_f\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{pmatrix} -4e^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -2e^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

$$h_f\left(0, \pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 8e > 0 \text{ e } f''_{xx}\left(0, \pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -4e^{\frac{1}{2}} < 0.$$

Exemplos

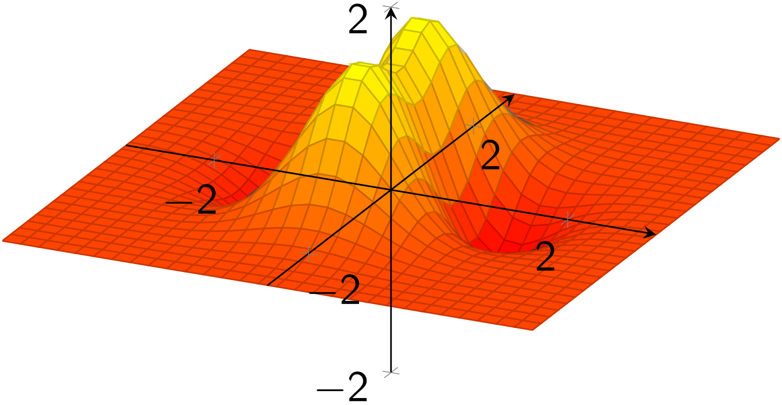
- Consideremos a matriz hessiana nos pontos estacionários.
  - f tem um mínimo local em $(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$:

$$H_f\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right) = \begin{pmatrix} 6e^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 4e^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

$$h_f\left(\pm\sqrt{\tfrac{3}{2}}, 0\right) = 24e^{-1} > 0 \text{ e } f''_{xx}\left(\pm\sqrt{\tfrac{3}{2}}, 0\right) = 6e^{-\frac{1}{2}} > 0.$$

Exemplos

$$\boxed{z = \left(\frac{1}{2} - x^2 + y^2\right) e^{1-x^2-y^2}}$$



Generalização

Sejam $f = f(x, y, z)$ uma função de classe C^2 e $(a, b, c) \in D_f^\circ$.

- (a, b, c) é um ponto estacionário se $\nabla f(a, b, c) = (0, 0, 0)$.
- Pelo Teorema de Schwarz, a matriz hessiana $H_f(a, b, c)$ é simétrica.
- Para $i = 1, 2, 3$, seja Δ_i o determinante da submatriz de $H_f(a, b, c)$ formada pelas primeiras i linhas e colunas. Note-se que $\Delta_3 = h_f(a, b, c)$.

Generalização

Theorem

Seja (a, b, c) *um ponto estacionário de* f *tal que* $h_f(a, b, c) \neq 0$.

a) f *tem um mínimo em* (a, b, c) *se*

$$\Delta_1 > 0 \wedge \Delta_2 > 0 \wedge \Delta_3 > 0.$$

b) f *tem um máximo em* (a, b, c) *se*

$$\Delta_1 < 0 \wedge \Delta_2 > 0 \wedge \Delta_3 < 0.$$

c) f *tem um ponto de sela em* (a, b, c), *caso contrário.*

Exemplo

Seja $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

- $\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$. Logo

$$\nabla f(x,y,z) = (0,0,0) \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0).$$

- A matriz hessiana

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 2 > 0, \Delta_2 = 4 > 0, \Delta_3 = 8 > 0$, logo f tem um mínimo local em $(0,0,0)$.

FIM