CÁLCULO EM DUAS VARIÁVEIS

1. Cálculo diferencial

1.1. **Domínios, gráficos e curvas de nível.** Neste capítulo estudaremos funções de duas variáveis

$$f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

O *maior domínio* de uma expressão analítica f continuamos a denotar por D_f.

Exemplo 1.1.1. *(1) Seja* $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{y-1}$*. Então*

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \wedge y \neq 1\},$$

que é todo o plano $\mathbb{R}^2$ *menos a reta vertical dada por* $x = 0$ *e a reta horizontal dada por* $y = 1$*.*

(2) Seja $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{9-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$*. Então*

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 9\},$$

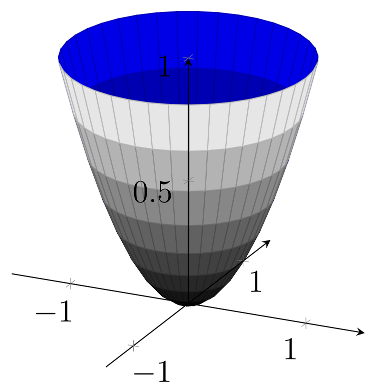
que é a região anelar compreendida entre as circunferências com raio 1 (não incluída) e 3 (incluída).

O gráfico de $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$:

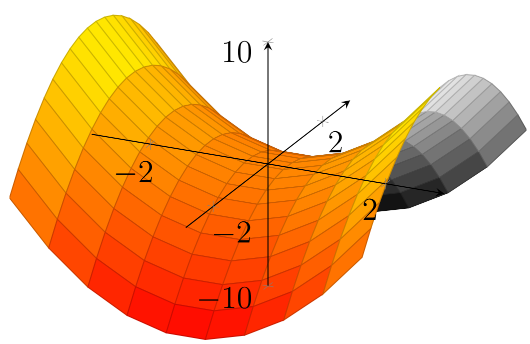
$$G_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y) \ \wedge \ (x,y) \in D\}.$$

Se D for uma região bidimensional e f não for demasiado descontínua, G_f corresponde a uma superfície.

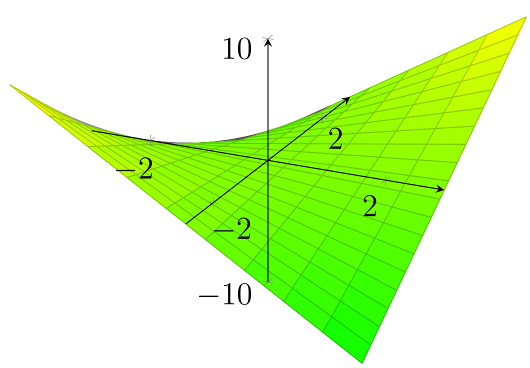
Exemplo 1.1.2. *(1) O gráfico de* $f(x,y) = x^2 + y^2$*:*



(2) O gráfico de $f(x,y) = x^2 - y^2$*:*



(3) O gráfico de $f(x,y) = xy$*:*



Como G_f pode ser difícil de desenhar, podemos tentar visualizar f através de *curvas de nível*.

Definição 1.1.3. *Sejam* $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $c \in \mathbb{R}$. *A* curva de nível c *é a curva em* $\mathbb{R}^2$ *definida por*

$$C_c(f) := \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = c\}.$$

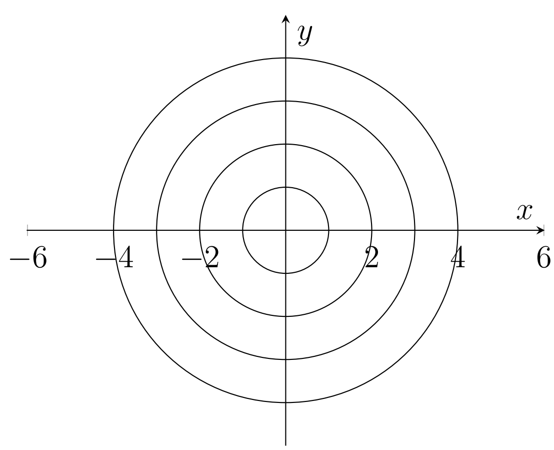
Ou seja, $C_c(f)$ *é a interseção de* G_f *com o plano horizontal dado por* $z = c$.

Observação 1.1.4. *Para certos valores de* $c \in \mathbb{R}$, *a curva de nível* c *pode ser o conjunto vazio.*

Exemplo 1.1.5. *(1) Seja* $f(x, y) = x^2 + y^2$. *Para todo o* $c \in \mathbb{R}$, *a curva de nível* c *é a interseção do parabolóide do Exemplo 1.1.2(1) com o plano horizontal dado por* $z = c$.

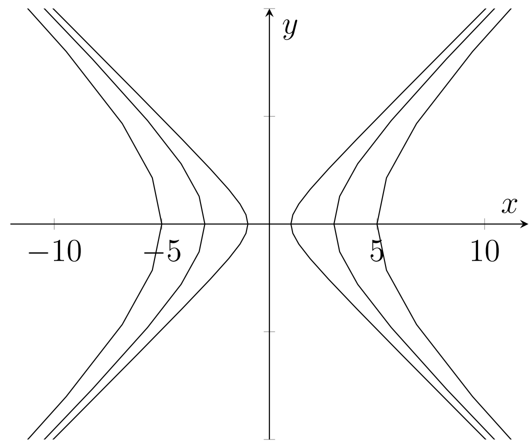
Por isso

$$C_c(f) = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } c < 0; \\ \{(0,0)\}, & \text{se } c = 0; \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = c\}, & \text{se } c > 0. \end{cases}$$



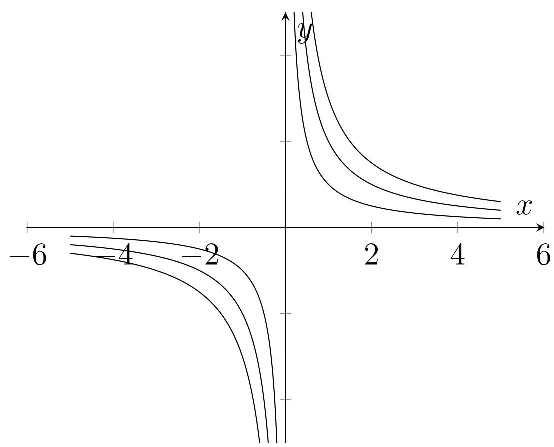
(2) Seja $f(x, y) = x^2 - y^2$. *Neste caso,*

$$C_c(f) = \begin{cases} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \pm y\}, & \text{se } c = 0; \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = c\}, & \text{se } c \neq 0. \end{cases}$$



(3) Seja $f(x,y) = xy$. Neste caso,

$$C_c(f) = \begin{cases} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \ \vee \ y = 0\}, & \textit{se } c = 0; \\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = c/x\}, & \textit{se } c \neq 0. \end{cases}$$



1.2. **Exercícios.**

(1) Determina e desenha o domínio das seguintes funções:

(a) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$.

(b) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$.

(c) $f(x,y) = \arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right) + \sqrt{xy}$.

(d) $f(x,y) = 1 + \sqrt{-(x-y)^2}$.

(e) $f(x,y) = \ln(x+y)$.

(f) $f(x,y) = \dfrac{xy+1}{x^2-y}$.

(g) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$.
(h) $f(x,y)=\sqrt{y\sin(x)}$.
(i) $f(x,y)=\arccos(y-x^2)$.
(j) $f(x,y,z)=\ln(xyz)$.
(k) $f(x,y,z)=\sqrt{\sin(x^2+y^2+z^2)}$.
(l) $f(x,y,z)=\ln\left(\frac{x+y}{z}\right)+xy\sin(z)$.

(2) Desenha as curvas de nível das seguintes funções:
(a) $f(x,y)=x+y$.
(b) $f(x,y)=x^2-y^2$.
(c) $f(x,y)=\sqrt{xy}$.
(d) $f(x,y)=1-|x|-|y|$.
(e) $f(x,y)=\frac{y}{x^2}$.
(f) $f(x,y)=\frac{2x}{x^2+y^2}$.
(g) $f(x,y)=\ln(x^2+y)$.
(h) $f(x,y)=\arcsin(xy)$.

1.3. **Limites e continuidade.** As noções de limite e de continuidade de funções de duas variáveis são mais complicadas do que para funções de uma variável.

Antes de considerarmos limites, devemos recordar que a distância euclidiana entre dois pontos $(a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2$ é igual a

$$\|(a,b)-(c,d)\|=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}.$$

Portanto, para um número real $\delta>0$, o conjunto

$$B_\delta(a,b):=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | \|(x,y)-(a,b)\|<\delta\right\}$$

é o disco aberto com centro em (a,b) e raio δ.

Seja $D\subseteq\mathbb{R}^2$ um subconjunto qualquer. Um ponto $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ diz-se *um ponto de acumulação de* D se

$$B_\delta(a,b)\cap D\backslash\{(a,b)\}\neq\emptyset$$

para todo o $\delta>0$. Ao conjunto de todos os pontos de acumulação de D chama-se *derivado* de D, denotado por D'. Reparem que um ponto de D' não precisa de pertencer a D.

Exemplo 1.3.1. *(1) Seja*

$$D=B_1(0,0)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2<1\}.$$

Neste caso, o derivado é igual a

$$D'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\leq 1\}.$$

(2) Seja
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y > 2\}.$$
Neste caso, o derivado é igual a
$$D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y \geq 2\}.$$

(3) Seja
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 1\}.$$
Neste caso, $D' = D$.

Definição 1.3.2 (Limites)**.** *Sejam $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a, b) \in D'$ e $L \in \mathbb{R}$. Dizemos que*

o limite de f, quando (x, y) tende para (a, b), é igual a L

e escrevemos
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$
se
$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \|(x, y) - (a, b)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - L| < \epsilon,$$
para todo o $(x, y) \in D \backslash \{(a, b)\}$.

Exemplo 1.3.3. *(1) Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$. Vamos provar que*
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0,$$
segundo a Definição 1.3.2.

Seja $\epsilon > 0$ arbitrário mas fixo. Podemos escolher $\delta = \sqrt{\epsilon}$, porque
$$\|(x, y) - (0, 0)| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow |x^2 + y^2| < \delta^2 = \epsilon$$
para todo o $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(2) Seja $f(x, y) = xy$. De novo, vamos provar que
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0,$$
segundo a Definição 1.3.2.

Seja $\epsilon > 0$ arbitrário mas fixo. Temos que indicar $\delta > 0$ tal que
$$\sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow |xy| < \epsilon,$$
para todo o $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Usando $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ e $|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, obtemos a desigualdade
$$|xy| = |x||y| \leq (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = x^2 + y^2.$$
Olhando para o caso anterior, vemos que podemos escolher $\delta = \sqrt{\epsilon}$ de novo.

Em geral, há muitos caminhos em $\mathbb{R}^2$ que levam a (a,b) e o limite de uma função nunca deve depender de nenhum caminho em particular. Como não podemos determinar o limite para todos os caminhos separadamente, precisamos de recorrer a outras estratégias. Podemos, por exemplo, tentar enquadrar $|f(x,y) - L|$ por duas funções que convergem "obviamente" para zero quando (x,y) tende para (a,b), usando desigualdades como as no Exemplo 1.3.3(2).

Provar que o limite de uma função não existe, costuma ser mais fácil: basta encontrar dois caminhos para (a,b) que dêem limites diferentes.

Exemplo 1.3.4. *(1)* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ *não existe, porque*

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 1 \quad e \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = -1.$$

(2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ *não existe. Desta vez*

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = 0.$$

Mas podemos calcular também o limite sobre o caminho $x = y^2$*, o que dá um valor diferente:*

$$\lim_{y\to 0} \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2}.$$

(3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$*, porque*

$$\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{3(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = 3\sqrt{x^2+y^2}.$$

Utilizámos que $x^2 \leq x^2+y^2$ *e* $|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$.

Como para funções de uma variável, a continuidade define-se utilizando limites.

Definição 1.3.5 (Continuidade)**.** *Sejam* $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $(a,b) \in D \cap D'$. *A função* f *diz-se contínua em* (a,b) *se*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

Se $D \subseteq D'$ *e* f *é contínua em todo o* $(a,b) \in D$*, a função* f *diz-se* contínua.

Tal como em Matemática I, as operações aritméticas e a composição de funções contínuas resultam em funções contínuas.

Exemplo 1.3.6. *Todos os polinómios de duas variáveis são contínuos em* $\mathbb{R}^2$ *e todas as funções racionais de duas variáveis, i.e. quocientes de polinómios de duas variáveis, são contínuas no seu domínio.*

1.4. **Exercícios.**

(1) Verifica se os seguintes limites existem:
   (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.
   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.
   (c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$.
   (d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
   (e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy(x-y)}{x^4+y^4}$.
   (f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{xy}\right)$.
   (g) $\lim_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$.
   (h) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x}$.

(2) Verifica se as seguintes funções são contínuas na origem:
   (a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^3+3y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$
   (b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^3+y^6} & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$
   (c) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$
   (d) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{xy} & (x,y)\neq(0,0),\\ 1 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

1.5. **Derivadas, diferenciabilidade e aplicações.** A noção de diferenciabiliade para funções de duas ou mais variáveis é mais complicada do que para funções de uma variável, que vocês estudaram em Análise Matemática I. Antes da sua definição, consideremos as *derivadas parciais*.

Estas só fazem sentido no interior do seu domínio. Seja $D \subseteq \mathbb{R}^2$ um subconjunto qualquer. Um ponto $(a, b) \in D$ diz-se *interior* se existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(a, b) \subseteq D$. Ao conjunto de todos os pontos interiores de D chama-se o *interior* de D, denotado por D°. Reparem que $D^\circ \subseteq D \cap D'$, ou seja, um ponto interior de D pertence a D e é sempre um ponto de acumulação de D.

Exemplo 1.5.1. *(1) Seja*

$$D = B_1(0, 0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}.$$

Neste caso, $D^\circ = D$.

(2) Seja

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y \geq 2\}.$$

Neste caso, o interior é igual a

$$D^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y > 2\}.$$

(3) Seja

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 1\}.$$

Neste caso, $D^\circ = \emptyset$.

Definição 1.5.2 (Derivadas parciais)**.** *Sejam* $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $(a, b) \in D^\circ$. *A* derivada parcial em ordem a x *de* f *no ponto* (a, b) *é definida por*

$$f'_x(a, b) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}.$$

Do mesmo modo, podemos definir a derivada parcial em ordem a y *de* f *no ponto* (a, b) *por*

$$f'_y(a, b) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}.$$

Observação 1.5.3. *A derivada parcial* $f'_x(a, b)$ *é igual à derivada normal* $g'(a)$*, onde* $g(x) := f(x, b)$ *é uma função de uma variável (i.e. como em Análise Matemática I). Do mesmo modo, a derivada parcial* $f'_y(a, b)$ *é igual à derivada normal* $h'(b)$*, onde* $h(x) := f(a, y)$.

Exemplo 1.5.4. *Por exemplo,*

$$x'_x = 1, \quad x'_y = 0, \quad y'_x = 0, \quad y'_y = 1.$$

Por isso, relativamente às operações aritméticas (adição, subtração, multiplicação e divisão), todas as regras para derivadas de funções de uma variável também são válidas para derivadas parciais de funções de várias variáveis.

Exemplo 1.5.5. *(1)* $(xy^2)'_x = y^2$ *e* $(xy^2)'_y = 2xy$.

(2)

$$\begin{aligned}(\sin(xy))'_x &= \cos(xy)(xy)'_x = \cos(xy)y \\ (\sin(xy))'_y &= \cos(xy)(xy)'_y = \cos(xy)x\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(xy^2e^{x+y^2})'_x &= (xy^2)'_x e^{x+y^2} + xy^2(e^{x+y^2})'_x \\ &= y^2e^{x+y^2} + xy^2e^{x+y^2}(x+y^2)'_x \\ &= y^2e^{x+y^2} + xy^2e^{x+y^2}.\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(xy^2e^{x+y^2})'_y &= (xy^2)'_y e^{x+y^2} + xy^2(e^{x+y^2})'_y \\ &= 2xye^{x+y^2} + xy^2e^{x+y^2}(x+y^2)'_y \\ &= 2xye^{x+y^2} + 2xy^3e^{x+y^2}.\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)'_x &= \frac{(x^2-y^2)'_x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)(x^2+y^2)'_x}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

As derivadas parciais são exemplos especiais de derivadas direcionais.

Definição 1.5.6. *Sejam $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a,b) \in D^\circ$. Além disso, seja $\vec{v} := (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ um vector unitário (i.e. $\|\vec{v}\| = 1$). A* derivada direcional *de f ao longo de $\vec{v}$ no ponto (a,b) é definida por*

$$f'_{\vec{v}}(a,b) := \lim_{h\to 0} \frac{f(a+hv_1, b+hv_2) - f(a,b)}{h}.$$

Observação 1.5.7. *Note-se que*

$$f'_x(a,b) = f'_{(1,0)}(a,b) \quad e \quad f'_y(a,b) = f'_{(0,1)}(a,b).$$

Mais adiante explicaremos como calcular as derivadas direcionais sem recorrer à sua definição diretamente.

Em Análise Matemática I, aprenderam que a derivada de uma função f num ponto a corresponde ao declive da reta que é tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a)) \in \mathbb{R}^2$. A existência dessa reta tangente é equivalente à diferenciabilidade de f em a.

Para funções de duas variáveis passa-se uma coisa semelhante. Toda a derivada direcional de f num ponto (a,b) corresponde ao declive de uma reta pertencente ao *plano tangente* de f no ponto $(a,b,f(a,b)) \in \mathbb{R}^3$, caso este exista. A existência do plano tangente a f no ponto $(a,b,f(a,b))$ é equivalente à diferenciabilidade de f em (a,b), que vamos definir a seguir.

Definição 1.5.8 (Diferenciabilidade)**.** *Sejam* $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $(a,b) \in D^\circ$. *A função* f *diz-se* diferenciável *em* (a,b) *se*

(1) as derivadas parciais $f'_x(a,b)$ *e* $f'_y(a,b)$ *existem;*
(2) a seguinte condição adicional está satisfeita:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k) - f(a,b) - f'_x(a,b)h - f'_y(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

A segunda condição na Definição 1.5.8 nem sempre é fácil de verificar na prática, por isso damos só um exemplo simples e a seguir um critério de diferenciabilidade mais prático.

Exemplo 1.5.9. *Seja* $f(x,y) = x$. *Vamos provar que* f *é diferenciável em todo o* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

A primeira condição na Definição 1.5.8 é fácil de verificar, ambas as derivadas parciais existem:

$$f'_x(a,b) = 1, \quad f'_y(a,b) = 0.$$

A segunda condição também não é difícil de verificar neste caso

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f'_x(0,0)h - f'_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h-h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} 0 = 0.$$

Portanto, a função x *é diferenciável em todo o* $\mathbb{R}^2$.

Do mesmo modo prova-se que a função y *é diferenciável em todo o* $\mathbb{R}^2$.

Relativamente às operações aritméticas (adição, subtração, multiplicação e divisão), todas as regras para funções diferenciáveis de uma variável também são válidas para funções diferenciáveis de várias variáveis.

Exemplo 1.5.10. *Todos os polinómios são funções diferenciáveis em* $\mathbb{R}^2$, *porque podem ser obtidos a partir das funções* x *e* y *por operações aritméticas.*

Funções racionais correspondem a quocientes de polinómios (coprimos), logo são diferenciáveis em todo o seu domínio.

Uma consequência simples da Definição 1.5.8 é a seguinte:

Proposição 1.5.11. *Sejam* $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $(a,b) \in D^\circ$. *Se* f *é diferenciável em* (a,b), *também é contínua em* (a,b).

Exemplo 1.5.12. *Seja*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & se\ (x,y) \neq (0,0); \\ \\ 0 & se\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Já vimos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *não existe, logo a função* f *é descontínua em* $(0,0)$. *Pela Proposição 1.5.11, a função* f *não é diferenciável em* $(0,0)$.

Contudo, reparem que ambas as derivadas parciais existem em $(0,0)$*:* $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$. *Como vêem, a existência das derivadas parciais duma função* f *num dado ponto* (a,b) *não garante sequer a continuidade de* f *em* (a,b).

Também existe o seguinte critério de diferenciabilidade:

Teorema 1.5.13. *Sejam* $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $(a,b) \in D^\circ$. *Se as derivadas parciais* f'_x *e* f'_y *existem numa vizinhança de* (a,b) *e se são ambas contínuas em* (a,b), *a função* f *é diferenciável em* (a,b).

É de realçar que as condições do Teorema 1.5.13 são mais restritivas do que as condições da Definição 1.5.8, ou seja, existem funções diferenciáveis num determinado ponto do seu domínio que não satisfazem as condições do Teorema 1.5.13, como se pode ver no próximo exemplo.

Exemplo 1.5.14. *Seja* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & se\ x \neq 0; \\ \\ y^2 \sin\left(\dfrac{1}{y}\right) & se\ x = 0 \wedge y \neq 0; \\ \\ 0 & se\ x = y = 0. \end{cases}$$

Utilizando que

$$\lim_{t\to 0} t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right) = 0,$$

não é difícil de mostrar que f *é diferenciável em* $(0,0)$ *mas que* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *são descontínuas em* $(0,0)$.

Já explicámos que a diferenciabilidade duma função f num dado ponto (a,b) é equivalente à existência do plano tangente a G_f no ponto $(a,b,f(a,b))$, mas qual é a equação desse planto tangente?

Proposição 1.5.15. *Seja $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável num ponto $(a,b) \in D^\circ$. A equação do plano tangente a G_f no ponto $(a,b,f(a,b))$ é*

$$z = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$$

para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Observação 1.5.16. *Escrevendo $h = x - a$ e $k = y - b$, obtém-se*

$$z = f(a,b) + f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k.$$

Podem comparar esta expressão com o numerador da segunda condição da Definição 1.5.8.

Exemplo 1.5.17. *Sejam $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $(a,b) = (0,0)$. Neste caso, $f'_x(x,y) = 2x$ e $f'_y(x,y) = 2y$, por isso $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$. Por isso, a equação do plano tangente que passa por $(0,0,0)$ é*

$$z = 0.$$

Ao mudarmos o ponto para $(a,b) = (1,2)$, o plano tangente também muda, claro. Neste caso, $f'_x(1,2) = 2$ e $f'_y(1,2) = 4$, por isso a equação do plano tangente que passa por $(1,2,5)$ é

$$z = 5 + 2(x-1) + 4(y-2).$$

Em Análise Matemática I estudaram a Regra da Cadeia para derivadas de funções compostas:

$$g'(b) = f'(a)x'(b),$$

onde $g(t) = f(x(t))$, f é uma função de x que é diferenciável em a, e x por sua vez é uma função de t que é diferenciável em a, com $x(b) = a$.

Nesta disciplina, Análise Matemática II, a generalização da Regra da Cadeia admite dois casos diferentes.

Teorema 1.5.18 (Regra da Cadeia)**.** *Seja $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to J \subseteq \mathbb{R}$ uma função diferenciável num dado ponto $(a,b) \in D^\circ$.*

(1) Suponhamos que $h\colon J \to \mathbb{R}$ é uma função (de uma variável!) diferenciável em $d = f(a,b) \in J^\circ$. Então a função composta (de duas variáveis) $g(x,y) = h(f(x,y))$ é diferenciável no ponto (a,b) e

$$\begin{aligned} g'_x(a,b) &= h'(d)f'_x(a,b); \\ g'_y(a,b) &= h'(d)f'_y(a,b). \end{aligned}$$

(2) Suponhamos que $(x,y) = (x(t),y(t))\colon I \subseteq \mathbb{R} \to D$ e que x e y são funções (de uma variável!) diferenciáveis em $c \in I^\circ$,

onde $(x(c), y(c)) = (a, b)$. *Então a função composta* $g(t) = f(x(t), y(t))\colon I \to J$ *é diferenciável no ponto* c *e*

$$g'(c) = f'_x(a,b)x'(c) + f'_y(a,b)y'(c).$$

(3) Suponhamos que $(x, y) = (x(u, v), y(u, v))\colon B \subseteq \mathbb{R}^2 \to D$ *e que* x *e* y *são funções (de duas variáveis!) diferenciáveis em* $(c, d) \in B^\circ$, *onde* $(x(c, d), y(c, d)) = (a, b)$. *Então a função composta* $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))\colon B \to J$ *é diferenciável no ponto* (c, d) *e*

$$\begin{aligned} g'_u(c,d) &= f'_x(a,b)x'_u(c,d) + f'_y(a,b)y'_u(c,d); \\ g'_v(c,d) &= f'_x(a,b)x'_v(c,d) + f'_y(a,b)y'_v(c,d). \end{aligned}$$

Exemplo 1.5.19. *(1) A primeira regra do Teorema 1.5.18 diz que podem usar a tabela das derivadas de Análise Matemática I, substiuindo derivadas normais por derivadas parciais. Por exemplo,*

$$\begin{aligned} \big(\sin(x^2y)\big)'_x &= \cos(x^2y)(x^2y)'_x &= 2xy\cos(x^2y); \\ \big(\sin(x^2y)\big)'_y &= \cos(x^2y)(x^2y)'_y &= x^2\cos(x^2y). \end{aligned}$$

(2) Para a segunda regra do Teorema 1.5.18, vejamos o exemplo com $f(x, y) = x^2y$, $x(t) = e^t$, $y(t) = \ln(t)$, $t = 1$. *Neste caso* $g(t) = f(e^t, \ln(t)) = e^{2t}\ln(t)$. *Usando as regras de Análise Matemática I, obtemos*

$$g'(1) = [(e^{2t})'\ln(t) + e^{2t}(\ln(t))']_{t=1} = 2e^2\ln(1) + \frac{e^2}{1} = e^2.$$

Alternativamente, podemos calcular (reparem que $f'_x(x, y) = 2xy$, $f'_y(x, y) = x^2$, $x'(t) = e^t$, $y'(t) = 1/t$ *e* $(x(1), y(1)) = (e, 0)$*):*

$$f'_x(e,0)e + f'_y(e,0) = 2e \cdot 0 \cdot e + e^2 \cdot 1/1 = e^2.$$

Como se vê, ambas as maneiras levam ao mesmo resultado.

(3) Para a terceira regra do Teorema 1.5.18, vejamos o exemplo com $f(x, y) = x^2 + y^2$, $x(u, v) = u\cos(v)$, $y(u, v) = u\sin(v)$ *e* $(u, v) = (1, 0)$. *Neste caso, obtem-se*

$$g(u,v) = u^2\cos^2(v) + u^2\sin^2(v) = u^2(\cos^2(v) + \sin^2(v)) = u^2.$$

Usando que $(u^2)'_u = 2u$ *e* $(u^2)'_v = 0$, *obtém-se*

$$g'_u(1,0) = 2 \quad e \quad g'_v(1,0) = 0.$$

Alternativamente, usando $f'_x(x, y) = 2x$, $f'_y(x, y) = 2y$, $x'_u(u, v) = \cos(v)$, $x'_v(u, v) = -u\sin(v)$, $y'_u(u, v) = \sin(v)$, $y'_v(u, v) = u\cos(v)$ *e* $(x(1, 0), y(1, 0)) = (1, 0)$, *obtém-se*

$$\begin{aligned} f'_x(1,0)x'_u(1,0) + f'_y(1,0)y'_u(1,0) &= 2\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 0\cdot(-1\cdot 0) &= 2; \\ f'_x(1,0)x'_v(1,0) + f'_y(1,0)y'_v(1,0) &= 2\cdot 1\cdot 0 + 2\cdot 0\cdot(1\cdot 1) &= 0. \end{aligned}$$

Existe uma igualdade importante para derivadas direcionais, que utiliza o *gradiente* de f

$$\nabla f(x, y) := (f'_x(x, y), f'_y(x, y))\colon D^\circ \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2.$$

Proposição 1.5.20. *Sejam* $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável em* $(a, b) \in D^\circ$ *e* $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ *um vetor unitário. A derivada direcional de* f *ao longo de* $\vec{v}$ *em* (a, b) *é igual ao produto interno do gradiente e* $\vec{v}$*:*

$$f'_{\vec{v}}(a, b) = \langle \vec{v}, \nabla f(a, b)\rangle := v_1 f'_x(a, b) + v_2 f'_y(a, b).$$

Corolário 1.5.21. *Nas condições da Proposição 1.5.20,* $\nabla f(a, b)$ *corresponde à direção em* $\mathbb{R}^2$ *em que* $f(x, y)$ *tem declive máximo no ponto* (a, b) *(e* $-\nabla f(a, b)$ *corresponde ao declive mínimo).*

Podemos também definir derivadas parciais de ordem superior, repetindo o processo de derivação parcial.

Definição 1.5.22. *Caso existam, as derivadas parciais da segunda ordem são definidas de forma recursiva:*

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x, y) &:= (f'_x)'_x(x, y); \\ f''_{yy}(x, y) &:= (f'_y)'_y(x, y); \\ f''_{xy}(x, y) &:= (f'_x)'_y(x, y); \\ f''_{yx}(x, y) &:= (f'_y)'_x(x, y). \end{aligned}$$

Exemplo 1.5.23. *Por exemplo,*

$$\begin{aligned} (x^2y^3)''_{xx} &= ((x^2y^3)'_x)'_x = (2xy^3)'_x = 2y^3; \\ (x^2y^3)''_{xy} &= ((x^2y^3)'_x)'_y = (2xy^3)'_y = 6xy^2; \\ (x^2y^3)''_{yx} &= ((x^2y^3)'_y)'_x = (3x^2y^2)'_x = 6xy^2; \\ (x^2y^3)''_{yy} &= ((x^2y^3)'_y)'_y = (3x^2y^2)'_y = 6x^2y. \end{aligned}$$

Teorema 1.5.24 (Schwarz)**.** *Seja* $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função cujas derivadas parciais da segunda ordem são todas contínuas num dado ponto* $(a, b) \in D^\circ$*. Nesse caso, as derivadas parciais cruzadas da segunda ordem são iguais nesse ponto:*

$$f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b).$$

Suponhamos que $D = D^\circ$. Uma função $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cujas derivadas parciais da segunda ordem são todas contínuas diz-se de *classe* C^2. Pelo Teorema 1.5.13, toda a função de classe C^2 é diferenciável.

Vamos ver como determinar os extremos e os pontos de sela.

Definição 1.5.25 (Hessiana)**.** *Suponhamos que $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é de classe C^2 em D° e que $(a,b) \in D^\circ$.*

A matriz Hessiana *de f no ponto (a,b) é definida por*

$$H_f(a,b) := \begin{pmatrix} f''_{xx}(a,b) & f''_{xy}(a,b) \\ f''_{yx}(a,b) & f''_{yy}(a,b) \end{pmatrix}.$$

O Hessiano *$h_f(a,b)$ é o determinante de $H_f(a,b)$:*

$$h_f(a,b) := f''_{xx}(a,b)f''_{yy}(a,b) - (f''_{xy}(a,b))^2,$$

onde foi usado que $f''_{xy}(a,b) = f''_{yx}(a,b)$, pelo Teorema 1.5.24.

O ponto $(a,b) \in D^\circ$ diz-se um *ponto estacionário* de f se

$$f'_x(a,b) = f'_y(a,b) = 0.$$

Reparem que num ponto estacionário todas as derividas direcionais são iguais a zero, pela Proposição 1.5.20. Ou seja, se (a,b) for um ponto estacionário, o plano tangente que passa por $(a,b,f(a,b))$ é horizontal.

Extremos locais definem-se da forma óbvia. Dizemos que f tem um *máximo local* (resp. *mínimo local*) em (a,b) se existe $\epsilon > 0$ tal que $f(x,y) \leq f(a,b)$ (resp. $f(x,y) \geq f(a,b)$) para todo o $(x,y) \in B_\epsilon(a,b)$. Caso a desigualdade seja estrita para todo o $(x,y) \neq (a,b)$ em $B_\epsilon(a,b)$, o extremo local diz-se *isolado*.

Nem todos os pontos estacionários são extremos. Por exemplo, um ponto estacionário (a,b) de f diz-se um *ponto de sela* se existe uma direção em que f tem um mínimo em (a,b) e uma outra direção em que f tem um máximo em (a,b) (ou seja G_f tem a forma de uma sela numa vizinhança de (a,b)).

Teorema 1.5.26 (Extremos)**.** *Suponhamos que $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é de classe C^2 em D° e que $(a,b) \in D^\circ$ é um ponto estacionário de f.*

- *Se $h_f(a,b) > 0$, a função f tem um extremo em (a,b): um máximo se $f''_{xx}(a,b) < 0$ e um mínimo se $f''_{xx}(a,b) > 0$.*
- *Se $h_f(a,b) < 0$, a função f tem um ponto de sela em (a,b).*
- *Se $h_f(a,b) = 0$, não se pode concluir nada com este método.*

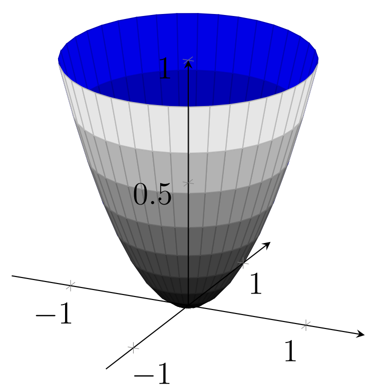
Exemplo 1.5.27. *Vejamos só três exemplos simples, cujos gráficos são fáceis de desenhar.*

(1) *Seja* $f(x,y) = x^2 + y^2$. *As derivadas parciais são* $f'_x(x,y) = 2x$ *e* $f'_y(x,y) = 2y$. *Portanto, existe um único ponto estacionário:* $(0,0)$.

De resto, $f''_{xx}(0,0) = f''_{yy}(0,0) = 2$ *e* $f''_{xy}(0,0) = f''_{yx}(0,0) = 0$. *Portanto*

$$h_f(0,0) = 4 \quad e \quad f''_{xx}(0,0) > 0.$$

Logo f *tem um mínimo em* $(0,0)$.

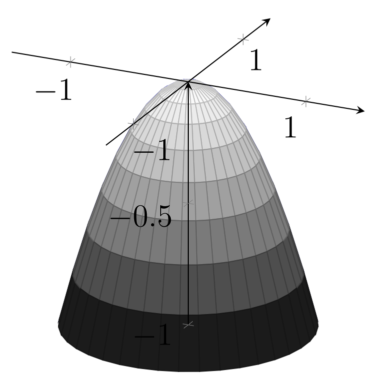


(2) *Seja* $f(x,y) = -x^2 - y^2$. *As derivadas pariciais são* $f'_x(x,y) = -2x$ *e* $f'_y(x,y) = -2y$. *Portanto, existe um único ponto estacionário:* $(0,0)$.

De resto, $f''_{xx}(0,0) = f''_{yy}(0,0) = -2$ *e* $f''_{xy}(0,0) = f''_{yx}(0,0) = 0$. *Portanto*

$$h_f(0,0) = 4 \quad e \quad f''_{xx}(0,0) < 0.$$

Logo f *tem um máximo em* $(0,0)$.

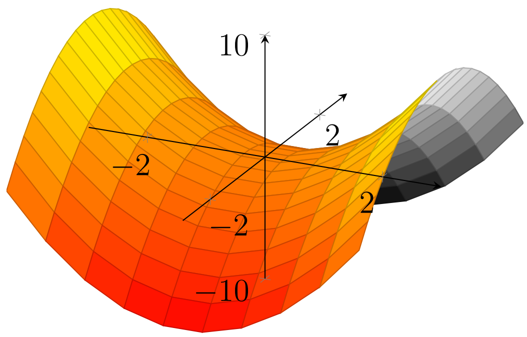


(3) *Seja* $f(x,y) = x^2 - y^2$. *As derivadas parciais são* $f'_x(x,y) = 2x$ *e* $f'_y(x,y) = -2y$. *Portanto, existe um único ponto estacionário:* $(0,0)$.

De resto, $f''_{xx}(0,0) = 2$ *e* $f''_{yy}(0,0) = -2$ *e* $f''_{xy}(0,0) = f''_{yx}(0,0) = 0$. *Portanto*

$$h_f(0,0) = -4.$$

Logo f *tem um ponto de sela em* $(0,0)$.



1.6. **Exercícios.**

(1) Calcula as derivadas parciais das seguintes funções:

(a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

(b) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$.

(c) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$.

(d) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

(e) $f(x,y) = x^y$.

(f) $f(x,y) = \arcsin\left(\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}\right)$

(g) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(h) $f(x,y) = \begin{cases} xy^2 \sin\left(\dfrac{1}{y}\right) & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(i) $f(x,y,z) = z^{xy}$.

(j) $f(x,y,z) = \ln(xy+z)$.

(k) $f(x,y,z) = x^3yz + e^{x+yz}$.

(2) Seja $f(x,y) = (x^2+y^2)^{2/3}$. Mostra que
$$f'_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x}{3(x^2+y^2)^{1/3}} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}.$$

(3) Seja
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
  (a) Mostra que f é descontínua na origem.
  (b) Prova que ambas as derivadas parciais de f existem na origem.

(4) Seja
$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & xy \neq 0, \\ 0 & xy = 0. \end{cases}$$
  (a) Mostra que f é descontínua na origem.
  (b) Prova que ambas as derivadas parciais de f existem na origem.
  (c) Verifica a existência das derivadas parciais em todos os pontos (x,y) que satisfazem $xy = 0$.

(5) Analisa a diferenciabilidade das funções no exercício 1.

(6) Nos casos que se seguem, calcula $g'(t)$, onde $g(t) = f(x(t), y(t))$:
  (a) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$, $x(t) = e^t$, $y(t) = \ln(t)$.
  (b) $f(x,y) = \ln\left(\sin\left(\dfrac{x}{\sqrt{y}}\right)\right)$, $x(t) = 3t^2$, $y(t) = \sqrt{t^2+1}$.
  (c) $f(x,y) = x^2+y^2$, $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$.
  (d) $f(x,y,z) = xyz$, $x(t) = t^2+1$, $y(t) = \ln(t)$, $z(t) = \tan(t)$.
  (e) $f(x,y,z) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $x(t) = a\cos(t)$, $y(t) = a\sin(t)$, $z(t) = b$, $a, b \in \mathbb{R}$.
  (f) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, $x(t) = \cos(t)\sin(t)$, $y(t) = \sin(t)\sin(t)$, $z(t) = \cos(t)$.

(7) Nos casos que se seguem, calcula $g'_u(u,v)$ e $g'_v(u,v)$, onde $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$:
  (a) $f(x,y) = x^2+2y$, $x(u,v) = u\cos(v)$, $y(u,v) = u\sin(v)$.
  (b) $f(x,y) = x^2-y^2$, $x(u,v) = u+v$, $y(u,v) = u-v$.
  (c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $x(u,v) = u^2v^2$, $y(u,v) = 2u-3v$.
  (d) $f(x,y) = x\ln(xy+1)$, $x(u,v) = ue^v$, $y(u,v) = u^2v^3$.

(8) Calcula $h(3)$ e $h'(3)$, onde $h(t) = g(t^3-5t, 11t-1)$ tal que $g(12,32) = 0$, $g'_x(12,32) = -3$ e $g'_y(12,32) = 2$.

(9) Calcula $k(0)$ e $k'(0)$, onde $k(t) = L(\sin(t), \cos(t))$, onde $L(0,1) = 50$, $L'_x(0,1) = 10$ e $L'_y(0,1) = -7$.

(10) Calcula $J'_x(1,1)$ e $J'_y(1,1)$, onde $J(x,y) = \sqrt{K(x,y)}$ tal que $K(1,1) = 9$, $K'_x(1,1) = 25$ e $K'_y(1,1) = 16$.

(11) Calcula $F(0,0)$, $F'_u(0,0)$ e $F'_v(0,0)$, onde $F(u,v) = f(v\sin(u), u\sin(v))$ tal que $f(0,0) = 4$, $f'_x(0,0) = 10$ e $f'_y(0,0) = 2$.

(12) Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f'_x(0,2) = 10$ e $f'_y(0,2) = -5$. Seja $g(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$ com $x(s,t) = st^2$ e $y(s,t) = te^s$. Calcula $g'_s(0,2)$ e $g'_t(0,2)$.

(13) Determina as derivadas direcionais das funções, nos pontos e nas direções que se seguem:
   (a) $f(x,y) = x^2 - xy - 2y^2$, no ponto $(1,2)$, ao longo do vetor que vai deste ponto para $(3,4)$.
   (b) $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$, no ponto $(1,1)$, ao longo da bissetriz do primeiro ângulo coordenado.
   (c) $f(x,y,z) = x^2 - 3yz + 5$, no ponto $(1,1,1)$, na direção em que os ângulos com os eixos são todos iguais.

(14) Calcula o gradiente das funções nos pontos dados:
   (a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, no ponto $(2,1)$
   (b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$, no ponto $(5,3)$.
   (c) $f(x,y,z) = xyz$, no ponto $(1,2,3)$.
   (d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, no ponto $(2,-2,1)$.

(15) Determina a equação do plano tangente a cada uma das superfícies no ponto dado:
   (a) Ao hiperbolóide dado por $z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 12$, no ponto $(1,-1,4)$.
   (b) Ao parabolóide dado por $z = x^2 + y^2 + 3$, no ponto $(2,1,8)$.
   (c) À esfera dada por $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ no ponto $(1, \sqrt{2}, 1)$.

(16) Determina as derivadas parciais de segunda ordem das seguintes funções:
   (a) $f(x,y) = x^2y + y^3$.
   (b) $f(x,y) = (x-y)^2 + 1$.
   (c) $f(x,y) = x^4 - 4x^2y^2 + y^5$.
   (d) $f(x,y) = e^{xy}$.
   (e) $f(x,y) = e^x \arctan(y)$.
   (f) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$.
   (g) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$.
   (h) $f(x,y) = \sin(xy)$.
   (i) $f(x,y) = \sqrt{2xy + y^2}$.
   (j) $f(x,y) = \ln(x^2 + y)$.
   (k) $f(x,y) = \arctan(x + e^y)$.

(l) $f(x,y) = x^y$.
(m) $f(x,y,z) = ye^x + x\ln(z)$.

(17) Considera a função

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Prova que $f''_{xy}(0,0) = -1$ e $f''_{yx}(0,0) = +1$.

(18) Mostra que não existe nenhuma função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que

$$\nabla f(x,y) = (xy^2+1, y^2).$$

(19) Caso exista, determina uma função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que

$$\nabla f(x,y) = (y^3 + 2xy + 3x^2 + 2xy^2, 4y^3 + x^2 + 2x^2y + 3xy^2).$$

(20) Caso exista, determina uma função $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que

$$\nabla f(x,y,z) = (2xy + z^2, x^2 + e^y + 2yz^3, 2xz + \pi\cos(\pi z) + 3y^2z^2).$$

(21) Caso exista, determina uma função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que $f(2,1) = -3$, $\nabla f(2,1) = (2,0)$ e

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(22) Determina e classifica os extremos locais para cada uma das seguintes funções:
(a) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$.
(b) $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$
(c) $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$.
(d) $f(x,y) = 2x^2y^2$.
(e) $f(x,y) = (x-1)^2 - y^2$.
(f) $f(x,y) = (x-1)^2 - (y-3)^2$.
(g) $f(x,y) = \sin(xy)$, para $(x,y) \in [0,\pi] \times [0,1]$.
(h) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
(i) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.
(j) $f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$.

(23) Do plano $4x - 2y + z = 1$ determina o ponto que fica mais perto de $(-2,-1,5)$.

2. Cálculo integral

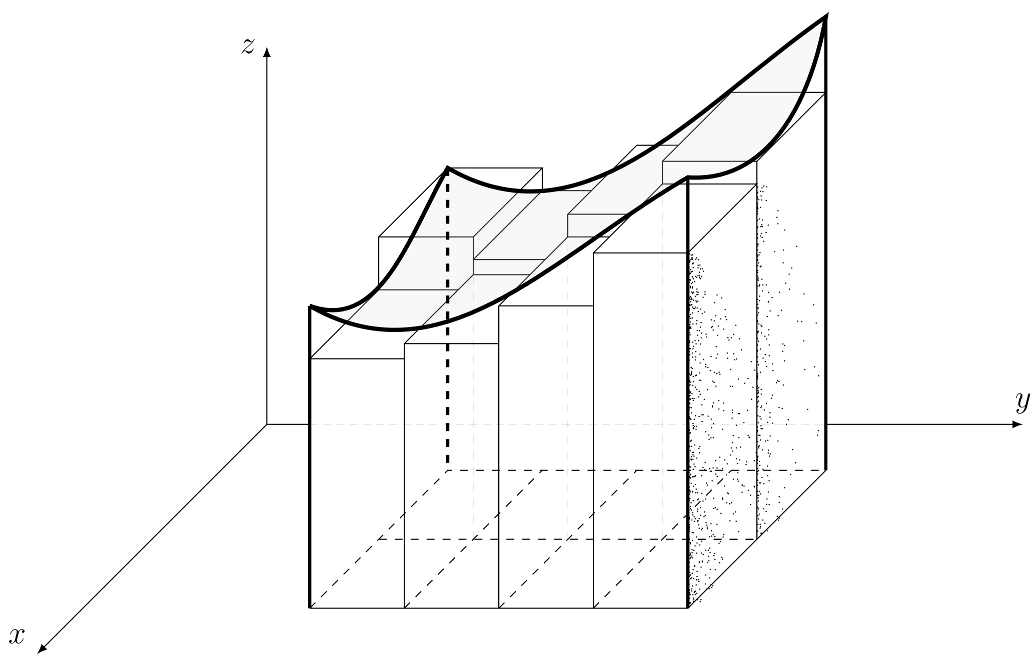
2.1. **Integrais duplos.** Vamos primeiro ver a definição de integrais duplos, que generaliza a dos integrais de Análise Matemática I.

Seja $f\colon R \to \mathbb{R}$ uma função contínua, onde $R = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ é um retângulo fechado. Por um teorema que omitimos nestes apontamentos, a continuidade de f implica que a função tem um máximo e um mínimo em R.

A ideia que subjaz à definição de integral duplo é uma generalização óbvia da ideia que subjaz à definição de integral simples. Para explicarmos essa ideia, suponhamos neste parágrafo (e apenas nele) que $f(x,y) \geq 0$ para todo o $(x,y) \in R$. Então, o valor do integral duplo de f sobre R, denotado por

$$\iint_R f\,dA,$$

deve ser igual ao volume da região tridimensional em $\mathbb{R}^3$ delimitada pelos planos $x = a, x = b, y = c, y = d, z = 0$ e o gráfico de f (ver figura). Para calcular esse volume apoxima-se a região por paralelepípedos, cujo volume é igual à àrea da base vezes altura, como sabem.



Quantos mais paralelepípedos, melhor a aproximação. "O limite" destas aproximações é exatamente o volume pretendido. Só que não se trata dum verdadeiro limite, pelo menos não no sentido que vocês conhecem, por isso a definição de integral duplo não menciona nenhum limite explicitamente.

Definição 2.1.1. *Uma* partição P *de* R *consiste em duas sequências finitas de números reais*

$$a = x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_m = b \quad e \quad c = y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \cdots \leq y_n = d.$$

Para todos os $1 \leq i \leq m-1$ e $1 \leq j \leq n-1$, seja

$$R_{ij} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \subseteq R$$

o subretângulo indicado. Seja A_{ij} a sua área:

$$A_{ij} := \text{Área}(R_{ij}) = (y_{j+1} - y_j)(x_{i+1} - x_i).$$

Como a restrição de f a R_{ij} também é contínua, esta também tem um máximo e um mínimo:

$$M_{ij}(f) := \max_{R_{ij}}(f) \quad \text{e} \quad m_{ij}(f) := \min_{R_{ij}}(f).$$

Deste modo podemos definir duas somas finitas, a *soma inferior* e a *soma superior*:

$$\begin{aligned} s(f,P) &:= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} m_{ij}(f) A_{ij}, \\ S(f,P) &:= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} M_{ij}(f) A_{ij}. \end{aligned}$$

Para toda a partição P de R, verifica-se

$$s(f,P) \leq S(f,P)$$

obviamente. Como as somas inferiores crescem e as somas superiores descrescem quando refinamos a partição, existe o seguinte resultado mais forte:

$$s(f,P) \leq S(f,P')$$

para todas as partições P e P' de R.

O seguinte teorema é o primeiro resultado fundamental acerca de integrais duplos, cuja demonstração é omitida destes apontamentos.

Teorema 2.1.2. *Seja* $f\colon R \to \mathbb{R}$ *uma função contínua, onde* $R = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$. *Então, existe um único número real, chamado o* integral duplo de f sobre R *e denotado por*

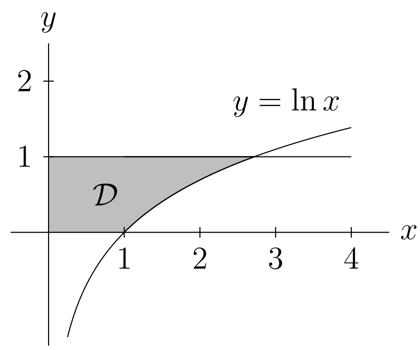
$$\iint_R f \, dA,$$

tal que

$$s(f,P) \leq \iint_R f\,dA \leq S(f,P')$$

para todas as partições P, P' *de* R*.*

Este teorema pode ser generalizado para funções contínuas com domínios D cuja fronteira é constituída por um número finito de curvas diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$, por exemplo



E ainda podemos generalizar o Teorema 2.1.2 para funções f que são contínuas em D, excepto nos pontos pertencentes a um número finito de curvas diferenciáveis em D. Para todas estas funções f e todos estes domínios de integração D, existe o integral duplo de f sobre D, denotado por

$$\iint_D f\,dA$$

Os integrais duplos possuem as seguintes propriedades:

Proposição 2.1.3. *Sejam* f, g *e* D *como acima indicados, e seja* $k \in \mathbb{R}$ *uma constante.*

(1) (Adição, subtração e multiplicação escalar)

$$\iint_D f \pm g\,dA = \iint_D f\,dA \pm \iint_D g\,dA \quad e \quad \iint_D kf\,dA = k\iint_D f\,dA;$$

(2) se $f(x,y)=0$*, excepto em pontos pertencentes a um número finito de curvas diferenciáveis contidas em* D*, então*

$$\iint_D f\,dA = 0;$$

(3) se $f(x,y) \leq g(x,y)$ *para todo o* $(x,y) \in D$*, então*

$$\iint_D f\,dA \leq \iint_D g\,dA;$$

(4) sendo $|\cdot|$ *o módulo, verifica-se*
$$\left|\iint_D f\,dA\right| \leq \iint_D |f|\,dA;$$
(5) se $D = D_1 \cup D_2$*, e* $D_1 \cap D_2$ *é a reunião dum número finito de curvas diferenciáveis, então*
$$\iint_D f\,dA = \iint_{D_1} f\,dA + \iint_{D_2} f\,dA.$$

Observação 2.1.4. *O volume dum sólido é igual à área da base vezes altura, por isso*
$$\iint_D dA = \text{Área}(D),$$
porque neste caso a altura é dada pela função constante $f \equiv 1$*.*

Portanto, integrais duplos também podem servir para calcular áreas.

2.2. **Integrais repetidos.** Na secção anterior definimos integrais duplos, mas falta explicarmos como calculá-los. Para esse fim precisamos de integrais repetidos.

Definição 2.2.1. *Seja* $f\colon R \to \mathbb{R}$ *uma função contínua, onde* $R = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$*. Existem dois* integrais repetidos *de* f *sobre* R*:*
$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx := \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx$$
e
$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy := \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy.$$

O valor dos integrais repetidos calcula-se em dois passos, integrando uma variável de cada vez. Para cada variável, esta integração parcial é efetuada como em Análise Matemática I.

Exemplo 2.2.2. *Sejam* $f(x,y) = xy^2$ *e* $R = [1,2] \times [-3,4]$*. Então*
$$\begin{aligned}
\int_1^2 \int_{-3}^4 x^2 y\,dy\,dx &= \int_1^2 \left[\int_{-3}^4 x^2 y\,dy\right] dx \\
&= \int_1^2 \left[x^2 \frac{y^2}{2}\Big|_{y=-3}^{y=4}\right] dx \\
&= \int_1^2 \frac{7x^2}{2}\,dx \\
&= \frac{7x^3}{6}\Big|_{x=1}^{x=2} \\
&= \frac{49}{6}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{4}\int_{1}^{2} x^2y\,dx\,dy &= \int_{-3}^{4}\left[\int_{1}^{2} x^2y\,dx\right]dy\\ &= \int_{-3}^{4}\left[\frac{x^3}{3}y\Big|_{x=1}^{x=2}\right]dy\\ &= \int_{-3}^{4}\frac{7y}{3}\,dy\\ &= \frac{7y^2}{6}\Big|_{y=-3}^{y=4}\\ &= \frac{49}{6}.\end{aligned}$$

Como vêem, o resultado é igual. Isso não é por acaso, como vamos ver.

Teorema 2.2.3. *Seja* $f\colon R\to\mathbb{R}$ *uma função contínua, onde* $R = [a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2$. *Então*

$$\iint_R f\,dA = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy.$$

Podemos generalizar os integrais repetidos e o Teorema 2.2.3 para domínios de integração não-retangulares. Sejam $g_1, g_2\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ duas funções diferenciáveis (duma variável) tais que

$$g_1(x)\le g_2(x)$$

para todo o $x\in[a,b]$, e suponhamos que

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b,\ g_1(x)\le y\le g_2(x)\right\}. \tag{1}$$

Definição 2.2.4. *O* integral repetido *de* f *sobre* D *é definido por*

$$\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx := \int_a^b\left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right]dx.$$

Teorema 2.2.5. *Seja* $f\colon D\to\mathbb{R}$ *uma função contínua, com domínio* D *como em* (1). *Então*

$$\iint_D f\,dA = \int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

De forma análoga, sejam $h_1, h_2\colon [c,d]\to\mathbb{R}$ duas funções diferenciáveis (duma variável) tais que

$$h_1(y)\le h_2(y)$$

para todo o $y \in [c, d]$, e suponhamos que

$$D := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid h_1(y) \leq x \leq h_2(y),\, c \leq y \leq d\right\}. \tag{2}$$

Definição 2.2.6. *O* integral repetido *de f sobre D é definido por*

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy := \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\right] dy.$$

Teorema 2.2.7. *Seja $f \colon D \to \mathbb{R}$ uma função contínua, com domínio D como em* (2)*. Então*

$$\iint_D f\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Quando D pode ser descrito das duas maneiras, como em (1) e em (2), os Teoremas 2.2.5 e 2.2.7 implicam que os dois integrais repetidos têm o mesmo valor, porque ambos são iguais ao integral duplo, cuja definição é independente da maneira como se descreve D. Para ilustrar os dois teoremas e este facto, damos o seguinte exemplo:

Exemplo 2.2.8. *Sejam $f(x, y) = y$ e*

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\, x^2 \leq y \leq x\right\}.$$

Pelo Teorema 2.2.5:

$$\begin{aligned}
\iint_D y\, dA &= \int_0^1 \int_{x^2}^x y\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\Big|_{y=x^2}^{y=x}\right] dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2}\, dx \\
&= \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10}\right]\Big|_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{1}{15}.
\end{aligned}$$

Alternativamente, é possível descrever D como

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x \leq \sqrt{y},\, 0 \leq y \leq 1\right\}.$$

Pelo Teorema 2.2.7:

$$
\begin{aligned}
\iint_D y\,dA &= \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} y\,dx\,dy \\
&= \int_0^1 \left[xy \Big|_{x=y}^{x=\sqrt{y}} \right] dy \\
&= \int_0^1 y^{\frac{3}{2}} - y^2\,dx \\
&= \left[\frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{y^3}{3} \right] \Big|_{y=0}^{y=1} \\
&= \frac{1}{15}.
\end{aligned}
$$

Vê-se de facto que os dois integrais repetidos têm o mesmo valor.

Pela última propriedade dos integrais duplos na Proposição 2.1.3, podemos generalizar os Teoremas 2.2.5 e 2.2.7 para domínios de integração que são reuniões de domínios como em (1) e (2), cuja intersecção é formada por curvas diferenciáveis ou retas. Vejamos um exemplo:

Exemplo 2.2.9. *Seja D a região em $\mathbb{R}^2$ delimitada pelas rectas $y = 0$, $y = x$ e $y = 2 - x$. Reparem que*

$$x = 2 - x \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Por isso, podemos descrever D da seguinte forma alternativa:

$$
\begin{aligned}
D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le x\} \\
\cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le 2,\, 0 \le y \le 2 - x\}.
\end{aligned}
$$

Seja $f \colon D \to \mathrm{R}$ uma função contínua arbitrária. Então

$$\iint_D f\,dA = \int_0^1 \int_0^x f(x, y)\,dy\,dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x, y)\,dy\,dx.$$

Reparem que também é válido descrever D como

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \le x \le 2 - y,\, 0 \le y \le 2\}.$$

Portanto, o integral duplo de f sobre D também satisfaz

$$\iint_D f\,dA = \int_0^2 \int_y^{2-y} f(x, y)\,dx\,dy.$$

2.3. **Mudança de variáveis.** Em Análise Matemática I vocês estudaram integração por substituição. Sejam $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $g\colon [c,d] \to [a,b]$ uma função bijetiva de classe C^1, tal que $g(c) = a$ e $g(d) = b$. Então $x = g(t)$ corresponde a uma mudança de variável, e a seguinte fórmula estabelece a relação entre os integrais em x e em t:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)\,dt.$$

Também existe uma fórmula para mudanças de variáveis em integrais duplos. Sejam $D, E \subset \mathbb{R}^2$ duas regiões limitadas e $T(u,v) = (g(u,v), h(u,v))\colon E \to D$ uma transformação bijetiva de classe C^1. Relembramos que o *jacobiano* de T é o determinante da sua *matriz jacobiana*:

$$J_T := \begin{pmatrix} g'_u & g'_v \\ h'_u & h'_v \end{pmatrix}.$$

Então $(x,y) = (g(u,v), h(u,v))$ corresponde a uma mudança de variáveis, e a seguinte fórmula estabelece a relação entre os integrais duplos em (x,y) e em (u,v):

Teorema 2.3.1 (Mudança de variáveis em integrais duplos)**.**

$$\iint_D f(x,y)\,dA(x,y) = \iint_E f(g(u,v), h(u,v))\,|\det J_T(u,v)|\;dA(u,v).$$

Estudemos duas mudanças de variáveis em mais pormenor, as *transformações lineares* e a mudança para *coordenadas polares*.

Definição 2.3.2 (Transformações lineares)**.** *Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que $ad - bc \neq 0$. A* transformação linear *$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é definida por*

$$T(u,v) = (au + bv, cu + dv).$$

Observação 2.3.3. *A matriz jacobiana de T é igual a*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

logo o jacobiano é igual a $ad - bc$.

Assumimos sempre que $ad - bc \neq 0$, para garantir o seguinte resultado:

Lema 2.3.4. *A transformação linear T na Definição 2.3.2 é bijetiva.*

Proof. A inversa de T é definida por

$$T^{-1}(x,y) = \left(\frac{dx - by}{ad - bc}, \frac{-cx + ay}{ad - bc}\right).$$

$\square$

Vejamos o exemplo duma transformação linear de variáveis num integral duplo.

Exemplo 2.3.5. *Consideremos o integral duplo*

$$\iint_D e^{x+y}\, dA(x,y),$$

onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$.

Reparem que $|x| + |y| = 1$ *sse* $x + y = \pm 1$ *ou* $x - y = \pm 1$. *Portanto, pode-se definir a transformação inversa* $T^{-1}\colon D \to E$*:*

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y, \end{cases}$$

onde

$$E = \{(u,v) \mid -1 \leq u, v \leq 1\}.$$

Então, a transformação linear T *é definida por*

$$\begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$$

e tem jacobiano igual a $-1/2$.

Pelo Teorema 2.3.1, obtém-se

$$\iint_D e^{x+y}\, dA(x,y) = \iint_E e^u \cdot \frac{1}{2}\, dA(u,v) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e^u \cdot \frac{1}{2}\, du\, dv,$$

que é fácil de calcular:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[e^u \Big|_{u=-1}^{u=1} \right] dv = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e - e^{-1}\, dv = e - e^{-1}.$$

Outra mudança de variáveis muito utilizada é a mudança para coordenadas polares, que se faz através da tranformação

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \end{cases}$$

onde $\rho \in \mathbb{R}_0^+$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. O jacobiano é fácil de calcular:

$$\det\begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} = \rho,$$

pela fórmula fundamental de trigonometria.

Exemplo 2.3.6. *Consideremos o integral duplo*

$$\iint_D (4 - x^2 - y^2)\, dA(x,y),$$

onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Como D *é um círculo com raio 2, obtém-se:*

$$E = \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \rho \leq 2,\, 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}.$$

Note se que $x^x + y^2 = \rho^2$, *pela fórmula fundamental de trigonometria, por isso*

$$\iint_D 4 - x^2 - y^2\, dA(x,y) = \iint_E (4-\rho^2)\rho\, dA(\rho,\theta) = \int_0^2 \int_0^{2\pi} 4\rho - \rho^3\, d\rho\, d\theta.$$

Este integral repetido é fácil de calcular:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^2 4\rho - \rho^3\, d\rho\, d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\Big|_{\rho=0}^{\rho=2}\right] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 4\, d\theta \\
&= 8\pi.
\end{aligned}$$

2.4. **Integrais triplos.** Generalizando os resultados acima para três variáveis, definem-se de forma óbvia os chamados *integrais triplos*:

$$\iiint_D f(x,y,z)\, dV,$$

onde D é uma região limitada em $\mathbb{R}^3$.

Também neste caso podemos calcular integrais triplos sobre domínios regulares através de integrais repetidos. No seguinte teorema assumimos que todas as funções envolvidas na definição de D são de classe C^1 e que f é contínua.

Teorema 2.4.1. *Suponhamos que* D *é definida pelas desigualdades*

$$a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x),\ h_1(x,y) \leq z \leq h_2(x,y).$$

Então

$$\iiint_D f(x,y,z)\, dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx.$$

Existem resultados análogos quando D é regular relativamente às outras variáveis.

Exemplo 2.4.2. *(1) Seja $f(x,y,z) = xy + xyz$, e calculemos o integral triplo de f sobre o cubo unitário $[0,1]^3$. Pelo Teorema 2.4.1, sabemos que*

$$\iiint_{[0,1]^3} xy + xyz\, dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 xy + xyz\, dz\, dy\, dx,$$

que podemos calcular da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 xy + xyz\, dz\, dy\, dx &= \int_0^1 \int_0^1 \left[xyz + xy\frac{z^2}{2}\Big|_{z=0}^{z=1} \right] dy\, dx \\
&= \frac{3}{2} \int_0^1 \int_0^1 xy\, dy\, dx \\
&= \frac{3}{2} \int_0^1 \left[x\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=1} \right] dx \\
&= \frac{3}{4} \int_0^1 x\, dx \\
&= \frac{3}{4} \frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

(2) Seja $f(x,y,z) = 1$, e suponhamos que D é a região tridimensional definida pelas desigualdades

$$-1 \leq x \leq 1,\ 3x^2 \leq z \leq 4 - x^2,\ 0 \leq y \leq 6 - z.$$

Pelo Teorema 2.4.1, sabemos que

$$\iiint_D dV = \int_{-1}^1 \int_{3x^2}^{4-x^2} \int_0^{6-z} dy\, dz\, dx,$$

que podemos calcular da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\int_{3x^2}^{4-x^2}\int_{0}^{6-z} dy\,dz\,dx &= \int_{-1}^{1}\int_{3x^2}^{4-x^2}\left[y\Big|_{y=0}^{y=6-z}\right] dz\,dx \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{3x^2}^{4-x^2} 6-z\,dz\,dx \\
&= \int_{-1}^{1}\left[6z-\frac{z^2}{2}\Big|_{z=3x^2}^{z=4-x^2}\right] dx \\
&= \int_{-1}^{1} 4x^4-20x^2+16\,dx \\
&= \frac{4}{5}x^5-\frac{20}{3}x^3+16x\Big|_{x=-1}^{x=1} \\
&= \frac{304}{15}.
\end{aligned}$$

Neste último exemplo $f \equiv 1$, o que nos permite interpretar geometricamente o integral triplo como o volume de D.

Observação 2.4.3. *Generalizando a Observação 2.1.4:*

$$\iiint_D dV = \mathrm{Vol}(D).$$

2.5. **Mudanças de variáveis.** Analogamente ao caso de duas variáveis, sejam $D, E \subset \mathbb{R}^3$ duas regiões limitadas e

$$T(u,v,w) = (g(u,v,w), h(u,v,w), j(u,v,w)) \colon E \to D$$

uma transformação bijetiva de classe C^1. O *jacobiano* de T é o determinante da sua *matriz jacobiana*:

$$J_T = \begin{pmatrix} g'_u & g'_v & g'_w \\ h'_u & h'_v & h'_w \\ j'_u & j'_v & j'_w. \end{pmatrix}.$$

Então $(x,y,z) = (g(u,v,w), h(u,v,w), j(u,v,w))$ corresponde a uma mudança de variáveis, e a seguinte fórmula estabelece a relação entre os integrais triplos em (x,y,z) e em (u,v,w):

Teorema 2.5.1 (Mudança de variáveis em integrais triplos)**.**

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dA(x,y,z) =$$
$$\iiint_E f(g(u,v,w), h(u,v,w), j(u,v,w))\,|\det J_T(u,v,w)|\;dA(u,v,w).$$

Estudemos duas mudanças de variáveis em mais pormenor, as mudanças para *coordenadas cilíndricas* e para *coordenadas esféricas*.

Definição 2.5.2. *A mudança para* coordenadas cilíndricas *é definida por*

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta, \\ y &= \rho\sin\theta, \\ z &= z, \end{aligned}$$

onde $\rho \in \mathbb{R}_0^+$, $\theta \in [0, 2\pi]$ *e* $z \in \mathbb{R}$. *O jacobiano é igual a*

$$\det\begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho.$$

Pelo Teorema 2.5.1, obtém-se (por exemplo)

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \iiint_E f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho\,dz\,d\rho\,d\theta.$$

Exemplo 2.5.3. *Consideremos o integral triplo*

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{2+x^2+y^2} dz\,dy\,dx.$$

Em coordenadas cilíndricas, este integral repetido fica igual a

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^{2+\rho^2} \rho\,dz\,d\rho\,d\theta = \frac{5\pi}{8}.$$

Este último integral triplo é fácil de calcular, por isso demos logo a resposta.

Definição 2.5.4. *A mudança para* coordenadas esféricas *é definida por*

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta\sin\phi, \\ y &= \rho\sin\theta\sin\phi, \\ z &= \rho\cos\phi, \end{aligned}$$

onde $\rho \in \mathbb{R}_0^+$, $\theta \in [0, 2\pi]$ *e* $\phi \in [0, \pi]$. *O jacobiano é igual a*

$$\det\begin{pmatrix} \cos\theta\sin\phi & -\rho\sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\sin\phi & \rho\sin\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -\rho\sin\phi \end{pmatrix} = -\rho^2\sin\phi.$$

Pelo Teorema 2.5.1, obtém-se (por exemplo)

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$
$$\iiint_E f(\rho\cos\theta\sin\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi.$$

Exemplo 2.5.5. *Calculemos o volume duma esfera S_r^2 de raio $r \geq 0$. Usando coordenadas esféricas, o volume do hemisfério norte de S_r^2 é igual a*

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho^2 \sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi = \frac{2\pi r^3}{3}.$$

Por isso

$$\mathrm{Vol}(S_r^2) = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Como no exemplo anterior, omitimos o cálculo do integral triplo, que é simples.

2.6. **Exercícios.**

(1) Calcula o valor dos seguintes integrais duplos:

(a)
$$\int_0^1 \int_0^2 (x+y)\,dy\,dx$$
.

(b)
$$\int_1^2 \int_0^4 (x^2 - 2y^2)\,dx\,dy$$
.

(c)
$$\int_0^{\pi/2} \int_0^1 (y\cos(x))\,dy\,dx$$
.

(d)
$$\int_0^4 \int_1^{\sqrt{x}} 2ye^{-x}\,dy\,dx$$
.

(e)
$$\int_0^1 \int_0^x \sqrt{1-x^2}\,dy\,dx$$
.

(f)
$$\int_1^3 \int_0^y \frac{4}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$
.

(2) Esboça graficamente o domínio de integração do integral duplo

$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 dx\,dy.$$

Escreve o integral invertendo a ordem de integração. Calcula os valores dos dois integrais duplos, provando que, de facto, se obtém o mesmo resultado.

(3) Esboça o domínio de integração dos seguintes integrais duplos, altera a ordem de integração e verifica que as duas ordens dão o mesmo resultado.

(a)
$$\int_0^1 \int_x^1 dy\, dx$$
.

(b)
$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx\, dy$$
.

(c)
$$\int_0^2 \int_0^x dy\, dx + \int_2^4 \int_0^{4-x} dy\, dx.$$

(d)
$$\int_0^1 \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\, dx\, dy.$$

(e)
$$\int_{-4}^3 \int_{x^2-9}^{-x+3} 3\, dy\, dx.$$

(f)
$$\int_{-6}^2 \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} x\, dx\, dy.$$

(4) Seja
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x-2| + |y-2| \le 1\right\}.$$
Calcula
$$\iint\limits_D \ln(x+y)\, dA,$$
utilizando a mudança de variáveis
$$\begin{cases} x &= \dfrac{u+v}{2} \\ y &= \dfrac{u-v}{2} \end{cases}.$$

(5) Seja
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \le xy \le 5, 1 \le x \le 5\right\}.$$
Calcula
$$\iint\limits_D \frac{x}{1+x^2y^2}\, dA,$$
utilizando a mudança de variáveis
$$\begin{cases} x &= u \\ y &= \dfrac{v}{u} \end{cases}.$$

(6) Seja
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq x^2 + y^2 \leq 5\right\}.$$
Utilizando coordenadas polares, calcula
$$\iint\limits_D x^2 + y^2 \, dA.$$

(7) Utilizando coordenadas polares, calcula os seguintes integrais duplos

(a)
$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (4 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} \, dx \, dy$$

(b)
$$\iint\limits_D \frac{\cos(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dA,$$

onde
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{\pi^2}{36} \leq x^2 + y^2 \leq \pi^2, y \geq 0, x \leq 0\right\}.$$

(8) Utilizando integração dupla, determina a área da região delimitada pelos gráficos das seguintes funções, $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \cos(x)$, para $\dfrac{\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{5\pi}{4}$.

(9) Determina a área da região representada pelas seguintes condições:
$$y \leq 4x - x^2, x \geq 0, y \geq -3x + 6.$$

(10) Calcula a área da região delimitada por:

(a) $x + \sqrt{y} = 2, x = 0, y = 0.$
(b) $y = x\sqrt{x}, y = 2x.$
(c) $2x - 3y = 0, x + y = 5, y = 0.$
(d) $y = 4 - x^2, y = x + 2.$

(11) Calcula o volume do sólido limitado pelo plano-xy e pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - 2y^2$.

(12) Calcula o volume do sólido limitado inferiormente pelo plano $z = 1/2$ e superiormente pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$.

(13) Esboça a região sólida R em $\mathbb{R}^3$ e calcula o seu volume utilizando integrais duplos:

(a) $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leq z \leq \frac{y}{2}, 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2\}.$
(b) $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leq z \leq 6-2y, 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2\}.$
(c) $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leq z \leq 12 - 2x - 3y, x \geq 0, y \geq 0\}.$

(d) $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2}\}$.
(e) $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$.

(14) Utiliza coordenadas polares para calcular o volume do sólido limitado superiormente pelo hemisfério $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ e inferiormente pelo disco definido por $x^2 + y^2 \leq 4$.

(15) Calcula o volume do sólido que se encontra sobre o círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ no primeiro quadrante e é delimitado superiormente pelo plano $z = 2 - x - y$.

(16) Calcula o valor dos seguintes integrais triplos:

(a)
$$\int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 (x + y + z)\, dx\, dy\, dz.$$

(b)
$$\int_1^4 \int_1^{e^2} \int_0^{1/xz} \ln(z)\, dy\, dz\, dx.$$

(c)
$$\int_0^9 \int_0^{y/3} \int_0^{\sqrt{y^2 - 9x^2}} z\, dz\, dx\, dy.$$

(d)
$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} x\, dz\, dy\, dx.$$

(17) Utilizando coordenas esféricas, calcula os seguintes integrais

(a)
$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} xy\, dz\, dy\, dx.$$

(b)
$$\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2 z + y^2 z + z^3)\, dz\, dx\, dy.$$

(18) Utilizando integrais triplos calcula o volume dos sólidos limitados pelas seguintes condições:
(a) $z = 4 - x^2, y = 4 - x^2$, no primeiro octante.
(b) $z = 9 - x^3, y = -x^2 + 2, y = 0, z = 0, x \geq 0$.
(c) $z = 2 - y, z = 4 - y^2, x = 0, x = 3, y = 0$.
(d) $z = x, y = x + 2, y = x^2$, no primeiro octante.

(19) Usando coordenas cilíndricas, calcula o volume de um cilindro com raio $r > 0$ e altura $h > 0$, utilizando integrais triplos.

(20) Usando coordenadas cilíndricas, calcula o volume do cone dado por $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$.

(21) Calcula, após mudança para coordenadas cilíndricas, o valor de
$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2-1}^{2-x} dz\, dy\, dx$$

e interpreta a resposta em termos geométricos.

(22) Usando coordenadas esféricas, calcula o volume do sólido definido por

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq 1 + z^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 5, z \geq 0\right\}.$$

(23) Usando coordenadas esféricas, calcula o volume do sólido limitado inferiormente por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e superiormente por $x^2 + y^2 + z^2 = 32$.

(24) Seja $0 < a < 1$ arbitrário. Calcula o integral triplo da função

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

sobre a região dada por

$$a \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$