Ficha de exercícios nº6: Derivação e integração numéricas

1. Usando a fórmula

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h, \quad \xi \text{ entre } x_0 - h \text{ e } x_0 + h, \quad h \neq 0, \tag{0}$$

mostre que também se tem

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - \frac{f''(\xi)}{2}h, \quad \xi \text{ entre } x_0 - h \text{ e } x_0 + h, \quad h \neq 0.$$

2. Usando a fórmula

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - \frac{f''(\xi)}{2}h, \quad \xi \text{ entre } x_0 - h \text{ e } x_0 + h, \quad h \neq 0,$$

e os dados da tabela seguinte:

x	0.800	0.850	0.880	0.890	0.895	0.898	0.899	0.901	0.902	0.905	0.910	0.920	0.950	1.00
f(x)	0.71736	0.75128	0.77074	0.77707	0.78021	0.78208	0.78270	0.78395	0.78457	0.78643	0.78950	0.79560	0.81342	0.84147

(a) Calcule um valor aproximado de $f'(0.900)$ para as diferentes escolhas de h que se podem fazer com os dados da tabela;

(b) Sabendo que $f(x) = \text{sen}(x)$, calcule o erro absoluto cometido em cada aproximação calculada na alínea anterior.

3. Usando as fórmulas

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\big[-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)\big] + \frac{f'''(\xi)}{3}h^2, \quad \xi \text{ entre } x_0 \text{ e } x_0 + 2h, \tag{1}$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\big[f(x_0+h) - f(x_0-h)\big] - \frac{f'''(\xi)}{6}h^2, \quad \xi \text{ entre } x_0 - h \text{ e } x_0 + h, \tag{2}$$

onde $h \neq 0$, complete as tabelas seguintes:

(a)

x	-0.3	-0.1	0.1	0.3
$f(x)$	-0.20431	-0.08993	0.11007	0.39569
$f'(x)$				

(b)

x	1.1	1.2	1.3	1.4
$f(x)$	0.48603	0.86160	1.59751	3.76155
$f'(x)$				

4. Considere a fórmula seguinte para a derivada de segunda ordem:

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\big[f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)\big] - \frac{f^{(4)}(\xi)}{12}h^2, \tag{3}$$

com ξ entre $x_0 - h$ e $x_0 + h$, $h \neq 0$, e os dados da tabela seguinte:

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	0.9798652	0.9177710	0.8080348	0.6386093	0.3843735

(a) Calcule valores aproximados de $f'(0.4)$ usando as fórmulas (0), (1) e (2), e de $f''(0.4)$ usando a fórmula (3);

(b) Procedendo do mesmo modo, calcule valores aproximados de $f'(0.6)$ e $f''(0.6)$.

5. Considere a função $f(x) = e^{-x}$ e os valores de $f(x)$ em $x = 0.25$, $x = 0.5$, $x = 0.75$.

   (a) Calcule um valor aproximado de $f'(0.5)$ usando as fórmulas (0) e (2);

   (b) Em cada um dos casos da alínea (a), obtenha um majorante para o erro;

   (c) Calcule um valor aproximado de $f''(0.5)$ usando a fórmula (3) e obtenha um majorante para o erro.

6. Para a função $f(x) = e^{-x^2}$, calcule um valor aproximado de $\displaystyle\int_{1.0}^{1.5} f(x)\,dx$:

   (a) usando a Regra dos Trapézios;

   (b) usando a Regra de Simpson;

   (c) Determine majorantes para os módulos dos erros da aproximações calculadas nas alíneas anteriores;

7. Considere a tabela seguinte:

x	1.1	1.3	1.5
$f(x)$	3.0042	3.6693	4.4817

   Calcule um valor aproximado de $\displaystyle\int_{1.1}^{1.5} f(x)\,dx$:

   (a) usando a Regra dos Trapézios Composta:

   (b) usando a Regra de Simpson;

   (c) Sabendo que $f(x) = e^x$, determine majorantes para os erros absolutos cometidos nas aproximações calculadas nas alíneas anteriores.

8. Considere a função $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$. Calcule um valor aproximado de $\displaystyle\int_{0}^{3} f(x)\,dx$:

   (a) usando a Regra dos Trapézios Composta com $n = 4$;

   (b) usando a Regra de Simpson Composta com $n = 4$;

   (c) Determine majorantes para os módulos dos erros cometidos nas aproximações das alíneas anteriores.

   (d) É possível usar a Regra dos Trapézios Composta ou a Regra de Simpson Composta com $n = 5$. Porquê?

9. Para a função $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$, calcule um valor aproximado de $\displaystyle\int_{1}^{3} f(x)\,dx$:

   (a) usando a Fórmula de Newton Cotes Fechada com $n = 3$;

   (b) usando a Fórmula de Newton Cotes Aberta com $n = 2$;

   (c) Determine majorantes para os módulos dos erros cometidos nas aproximações das alíneas anteriores.

10. Considere a tabela seguinte:

x	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
$f(x)$	3.12014	4.42569	6.04241	8.03014	10.46675

Complete a tabela apresentada a seguir com os valores aproximados de $\displaystyle\int_{1.8}^{2.6} f(x)\,dx$ usando as fórmulas de Newton-Cotes fechadas e abertas indicadas.

n	0	1	2	3	4
Fórmulas Fechadas					
Erro					
Fórmulas Abertas					
Erro					

