AM II, LEI + BE: Mudanças de variáveis em integrais duplos

Marco Mackaaij

FCT, Universidade do Algarve

Section outline

Revisão de AMI: integração por substituição

AM I: breve revisão

Teorema (Integração por substituição)

Sejam

- $f = f(x) \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua;*
- $x = x(t) \colon [c, d] \to [a, b]$ *bijetiva de classe* C^1;
- $x(c) = a,\ x(d) = b.$

Então

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_c^d f(x(t))x'(t)\, dt.$$

AM I: breve revisão

Exemplo

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \quad = \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{1-(\sin(t))^2}\right)\cos(t)\,dt$$

AM I: breve revisão

Exemplo

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{1-(\sin(t))^2}\right)\cos(t)\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{(\cos(t))^2}\right)\cos(t)\,dt
\end{aligned}
$$

AM I: breve revisão

Exemplo

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{1-(\sin(t))^2}\right)\cos(t)\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{(\cos(t))^2}\right)\cos(t)\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,dt.\end{aligned}$$

AM I: breve revisão

Exemplo

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{1-(\sin(t))^2}\right)\cos(t)\,dt\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{(\cos(t))^2}\right)\cos(t)\,dt\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,dt.\end{aligned}$$

Obs.: $x(t) = \sin(t) \colon [0, \frac{\pi}{2}] \to [0, 1]$ é bijetivo e de classe C^1.

Observação

Usando

$$dx(t) = x'(t)\,dt,$$

a integração por substituição pode ser escrita da seguinte forma:

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad \int_c^d f(x(t))\,dx(t).$$

AMII: mudanças de variáveis

Mudança de variáveis

Definição (O jacobiano)

Dados:

- *dois subconjuntos* $D, E \subset \mathbb{R}^2$*;*
- *uma* **transformação** $T(s,t) = (x(s,t), y(s,t))\colon E \to D$ *bijetiva e de classe* C^1.

Mudança de variáveis

Definição (O jacobiano)

Dados:

- *dois subconjuntos* $D, E \subset \mathbb{R}^2$*;*
- *uma* **transformação** $T(s,t) = (x(s,t), y(s,t)) \colon E \to D$ *bijetiva e de classe* C^1.

A **matriz jacobiana** *de* T*:*

$$J_T(s,t) := \begin{pmatrix} x'_s(s,t) & x'_t(s,t) \\ y'_s(s,t) & y'_t(s,t) \end{pmatrix}.$$

Mudança de variáveis

Definição (O jacobiano)

Dados:

- *dois subconjuntos* $D, E \subset \mathbb{R}^2$;
- *uma* **transformação** $T(s,t) = (x(s,t), y(s,t))\colon E \to D$ *bijetiva e de classe* C^1.

A **matriz jacobiana** *de* T*:*

$$J_T(s,t) := \begin{pmatrix} x'_s(s,t) & x'_t(s,t) \\ y'_s(s,t) & y'_t(s,t) \end{pmatrix}.$$

O **jacobiano** *de* T *é o determinante de* $J_T(s,t)$.

A mudança inversa

- Seja $T^{-1}(x,y) = (s(x,y), t(x,y))\colon D \to E$ a transformação inversa de T:

$$T(T^{-1}(x,y)) = (x,y) \quad \text{e} \quad T^{-1}(T(s,t)) = (s,t),$$

para todos os $(x,y) \in D$ e $(s,t) \in E$.

A mudança inversa

- Seja $T^{-1}(x,y) = (s(x,y), t(x,y))\colon D \to E$ a transformação inversa de T:

$$T(T^{-1}(x,y)) = (x,y) \quad \text{e} \quad T^{-1}(T(s,t)) = (s,t),$$

para todos os $(x,y) \in D$ e $(s,t) \in E$.

- Pela Regra da Cadeia:

$$J_T(s,t) J_{T^{-1}}(x,y) = I_2,$$

onde I_2 é a matriz identidade de dimensão 2.

A mudança inversa

- Seja $T^{-1}(x,y) = (s(x,y), t(x,y))\colon D \to E$ a transformação inversa de T:

$$T(T^{-1}(x,y)) = (x,y) \quad \text{e} \quad T^{-1}(T(s,t)) = (s,t),$$

para todos os $(x,y) \in D$ e $(s,t) \in E$.

- Pela Regra da Cadeia:

$$J_T(s,t) J_{T^{-1}}(x,y) = I_2,$$

onde I_2 é a matriz identidade de dimensão 2.

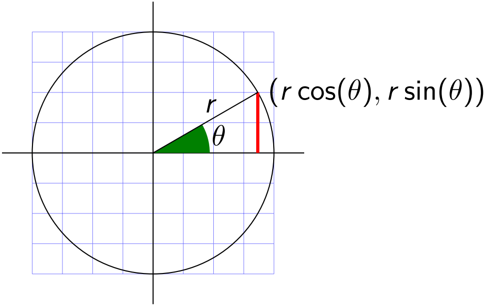
- Em particular:

$$\det\left(J_T(s,t)\right) = \frac{1}{\det\left(J_{T^{-1}}(x,y)\right)}.$$

Exemplo: coordenadas polares

- **Coordenadas polares**:

$$T(r,\theta) := (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = (x,y), \qquad r \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi]$$



$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

Exemplo: coordenadas polares

- A matriz jacobiana ($x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$):

$$J_T(r,\theta) = \begin{pmatrix} (r\cos(\theta))'_r & (r\cos(\theta))'_\theta \\ (r\sin(\theta))'_r & (r\sin(\theta))'_\theta \end{pmatrix}$$

Exemplo: coordenadas polares

- A matriz jacobiana ($x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$):

$$J_T(r,\theta) = \begin{pmatrix} (r\cos(\theta))'_r & (r\cos(\theta))'_\theta \\ (r\sin(\theta))'_r & (r\sin(\theta))'_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Exemplo: coordenadas polares

- A matriz jacobiana ($x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$):

$$J_T(r,\theta) = \begin{pmatrix} (r\cos(\theta))'_r & (r\cos(\theta))'_\theta \\ (r\sin(\theta))'_r & (r\sin(\theta))'_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

- O jacobiano

$$\det\left(J_T(r,\theta)\right) = r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta)$$

Exemplo: coordenadas polares

- A matriz jacobiana ($x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$):

$$J_T(r,\theta) = \begin{pmatrix} (r\cos(\theta))'_r & (r\cos(\theta))'_\theta \\ (r\sin(\theta))'_r & (r\sin(\theta))'_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

- O jacobiano

$$\begin{aligned} \det\left(J_T(r,\theta)\right) &= r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) \\ &= r(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) \end{aligned}$$

Exemplo: coordenadas polares

- A matriz jacobiana ($x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$):

$$J_T(r,\theta) = \begin{pmatrix} (r\cos(\theta))'_r & (r\cos(\theta))'_\theta \\ (r\sin(\theta))'_r & (r\sin(\theta))'_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

- O jacobiano

$$\begin{aligned} \det\left(J_T(r,\theta)\right) &= r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) \\ &= r(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) \\ &= r. \end{aligned}$$

Exemplo: coordenadas polares

- A matriz jacobiana ($x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$):

$$J_T(r,\theta) = \begin{pmatrix} (r\cos(\theta))'_r & (r\cos(\theta))'_\theta \\ (r\sin(\theta))'_r & (r\sin(\theta))'_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

- O jacobiano

$$\begin{aligned} \det\left(J_T(r,\theta)\right) &= r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) \\ &= r(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) \\ &= r. \end{aligned}$$

$$\boxed{\det\left(J_T(r,\theta)\right) = r}$$

Exemplo: coordenadas polares

Lema

A mudança para coordenadas polares é de classe C^1 e define uma bijeção

$$\{(r,\theta) \mid r > 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi\} \leftrightarrow \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}.$$

Exemplo: coordenadas polares

Lema

A mudança para coordenadas polares é de classe C^1 e define uma bijeção

$$\{(r,\theta) \mid r > 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi\} \leftrightarrow \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}.$$

Demonstração: Basta calcular a transformação inversa:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exemplo: coordenadas polares

Lema

A mudança para coordenadas polares é de classe C^1 e define uma bijeção

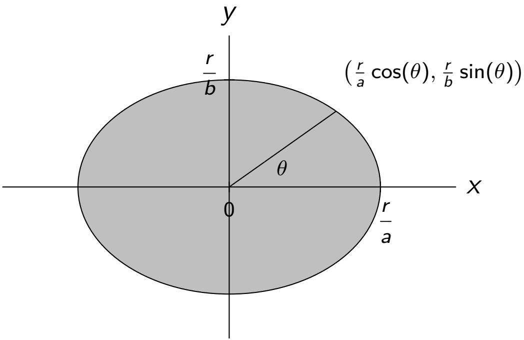
$$\{(r,\theta) \mid r > 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi\} \leftrightarrow \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}.$$

Demonstração: Basta calcular a transformação inversa:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad \theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & \text{se } x > 0 \wedge y \geq 0; \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } x = 0 \wedge y > 0; \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & \text{se } x < 0; \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{se } x = 0 \wedge y < 0; \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi, & \text{se } x > 0 \wedge y < 0. \end{cases}$$

Exemplo: coordenadas elípticas

$$\boxed{a, b > 0,\ \ r \geq 0:\ a^2x^2 + b^2y^2 = r^2.}$$



Exemplo: coordenadas elípticas

- **Coordenadas elípticas** $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$:

$$T(r, \theta) := \left(\frac{r}{a}\cos(\theta), \frac{r}{b}\sin(\theta)\right) = (x, y).$$

Exemplo: coordenadas elípticas

- **Coordenadas elípticas** $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$:

$$T(r, \theta) := \left(\frac{r}{a} \cos(\theta), \frac{r}{b} \sin(\theta) \right) = (x, y).$$

- $$a^2 x^2 + b^2 y^2 = \cancel{a^2} \cdot \frac{r^2}{\cancel{a^2}} \cos^2(\theta) + \cancel{b^2} \cdot \frac{r^2}{\cancel{b^2}} \sin^2(\theta)$$

Exemplo: coordenadas elípticas

- **Coordenadas elípticas** $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$:

$$T(r,\theta) := \left(\frac{r}{a}\cos(\theta), \frac{r}{b}\sin(\theta)\right) = (x,y).$$

- $$\begin{aligned} a^2x^2 + b^2y^2 &= \cancel{a^2} \cdot \frac{r^2}{\cancel{a^2}}\cos^2(\theta) + \cancel{b^2} \cdot \frac{r^2}{\cancel{b^2}}\sin^2(\theta) \\ &= r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) \end{aligned}$$

Exemplo: coordenadas elípticas

- **Coordenadas elípticas** $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$:

$$T(r,\theta) := \left(\frac{r}{a}\cos(\theta), \frac{r}{b}\sin(\theta)\right) = (x,y).$$

-

$$\begin{aligned} a^2x^2 + b^2y^2 &= \cancel{a^2} \cdot \frac{r^2}{\cancel{a^2}} \cos^2(\theta) + \cancel{b^2} \cdot \frac{r^2}{\cancel{b^2}} \sin^2(\theta) \\ &= r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) \\ &= r^2. \end{aligned}$$

Exemplo: coordenadas elípticas

$$\boxed{x = \frac{r}{a}\cos(\theta) \quad \text{e} \quad y = \frac{r}{b}\sin(\theta).}$$

Exemplo: coordenadas elípticas

$$\boxed{x = \frac{r}{a}\cos(\theta) \quad \text{e} \quad y = \frac{r}{b}\sin(\theta).}$$

- A matriz jacobiana:

$$J_T(r,\theta) \quad = \quad \begin{pmatrix} \left(\frac{r}{a}\cos(\theta)\right)'_r & \left(\frac{r}{a}\cos(\theta)\right)'_\theta \\ \left(\frac{r}{b}\sin(\theta)\right)'_r & \left(\frac{r}{b}\sin(\theta)\right)'_\theta \end{pmatrix}$$

Exemplo: coordenadas elípticas

$$\boxed{x = \frac{r}{a}\cos(\theta) \quad \text{e} \quad y = \frac{r}{b}\sin(\theta).}$$

- A matriz jacobiana:

$$\begin{aligned} J_T(r,\theta) &= \begin{pmatrix} \left(\frac{r}{a}\cos(\theta)\right)'_r & \left(\frac{r}{a}\cos(\theta)\right)'_\theta \\ \left(\frac{r}{b}\sin(\theta)\right)'_r & \left(\frac{r}{b}\sin(\theta)\right)'_\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{a}\cos(\theta) & -\frac{r}{a}\sin(\theta) \\ \frac{1}{b}\sin(\theta) & \frac{r}{b}\cos(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemplo: coordenadas elípticas

$$\boxed{x = \frac{r}{a}\cos(\theta) \quad \text{e} \quad y = \frac{r}{b}\sin(\theta).}$$

- A matriz jacobiana:

$$\begin{aligned} J_T(r,\theta) &= \begin{pmatrix} \left(\frac{r}{a}\cos(\theta)\right)'_r & \left(\frac{r}{a}\cos(\theta)\right)'_\theta \\ \left(\frac{r}{b}\sin(\theta)\right)'_r & \left(\frac{r}{b}\sin(\theta)\right)'_\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{a}\cos(\theta) & -\frac{r}{a}\sin(\theta) \\ \frac{1}{b}\sin(\theta) & \frac{r}{b}\cos(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- O jacobiano:

$$\boxed{\det\left(J_T(r,\theta)\right) = \frac{r}{ab}.}$$

Exemplo: transformações lineares

- Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ constantes tais que $ad - bc \neq 0$.

Exemplo: transformações lineares

- Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ constantes tais que $ad - bc \neq 0$.
- A **transformação linear** $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é definida por

$$T(s,t) := (as + bt, cs + dt) = (x, y).$$

Exemplo: transformações lineares

- Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ constantes tais que $ad - bc \neq 0$.
- A **transformação linear** $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é definida por

$$T(s,t) := (as + bt, cs + dt) = (x, y).$$

- A matriz jacobiana:

$$J_T(s,t) = \begin{pmatrix} (as+bt)'_s & (as+bt)'_t \\ (cs+dt)'_s & (cs+dt)'_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Exemplo: transformações lineares

- Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ constantes tais que $ad - bc \neq 0$.
- A **transformação linear** $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é definida por

$$T(s,t) := (as + bt, cs + dt) = (x, y).$$

- A matriz jacobiana:

$$J_T(s,t) = \begin{pmatrix} (as+bt)'_s & (as+bt)'_t \\ (cs+dt)'_s & (cs+dt)'_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

- O jacobiano:

$$\det\left(J_T(s,t)\right) = ad - bc.$$

Exemplo: transformações lineares

Lema

A transformação linear T é bijetiva e de classe C^1.

Exemplo: transformações lineares

Lema

A transformação linear T é bijetiva e de classe C^1.

Demonstração: A inversa de T é definida por

$$T^{-1}(x,y) = \left(\frac{dx - by}{ad - bc}, \frac{-cx + ay}{ad - bc}\right) = (s,t).$$

Exemplo: transformações lineares

Lema

A transformação linear T é bijetiva e de classe C^1.

Demonstração: A inversa de T é definida por

$$T^{-1}(x,y) = \left(\frac{dx - by}{ad - bc}, \frac{-cx + ay}{ad - bc}\right) = (s,t).$$

Obs.:

$$J_{T^{-1}}(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Mudanças de variáveis em integrais duplos

Mudanças de varáveis em integrais duplos

Teorema (Mudança de variáveis em integrais duplos)

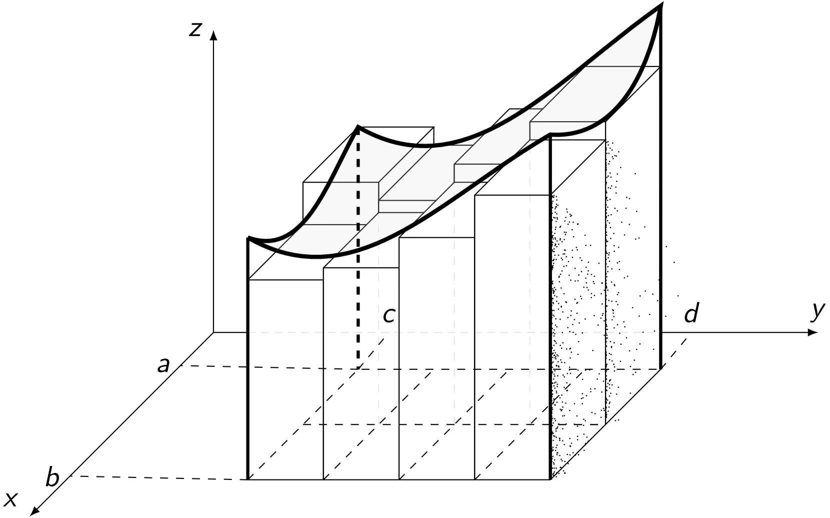
Sejam

- $D, E \subset \mathbb{R}^2$ *limitados e fechados;*
- $T(s,t) = (x(s,t), y(s,t))\colon E \to D$ *bijetiva e de classe* C^1*;*
- $f\colon D \to \mathbb{R}$ *contínua.*

Então

$$\iint_D f(x,y)\, dA(x,y) = \iint_E f(x(s,t), y(s,t))\, |\det J_T(s,t)|\, dA(s,t).$$

Recordar a definição de integrais duplos



Exemplo 1: coordenadas polares

- Consideremos o integral duplo

$$\iint_D (4 - x^2 - y^2)\, dA(x, y),$$

onde $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}$.

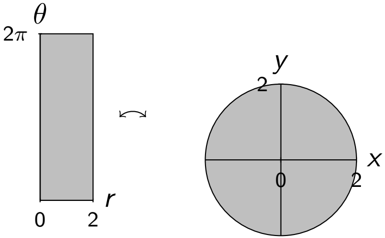
Exemplo 1: coordenadas polares

- Consideremos o integral duplo

$$\iint_D (4 - x^2 - y^2)\, dA(x,y),$$

onde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}$.

- $$E = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq 2,\, 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}.$$



Exemplo 1: coordenadas polares

$$\boxed{E = \left\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq 2,\, 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}.}$$

Exemplo 1: coordenadas polares

$$\boxed{E = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq 2,\, 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}.}$$

- Uma vez que $x^2 + y^2 = r^2$ e $\det\left(J_T(r,\theta)\right) = r$, obtém-se

$$\iint_D 4 - x^2 - y^2 \, dA(x,y) \quad = \quad \iint_E (4 - r^2) r \, dA(r,\theta)$$

Exemplo 1: coordenadas polares

$$\boxed{E = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi\right\}.}$$

- Uma vez que $x^2 + y^2 = r^2$ e $\det\left(J_T(r,\theta)\right) = r$, obtém-se

$$\begin{aligned}\iint_D 4 - x^2 - y^2\, dA(x,y) &= \iint_E (4 - r^2) r\, dA(r,\theta) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 4r - r^3\, dr\, d\theta.\end{aligned}$$

Exemplo 1: coordenadas polares

- Este último integral repetido é fácil de calcular:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 4r - r^3 \, dr \, d\theta \quad = \quad \int_0^{2\pi} \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=2} d\theta$$

Exemplo 1: coordenadas polares

- Este último integral repetido é fácil de calcular:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_0^2 4r - r^3\,dr\,d\theta &= \int_0^{2\pi}\left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=2} d\theta\\ &= \int_0^{2\pi} 2\cdot 2^2 - \frac{2^4}{4}\,d\theta\end{aligned}$$

Exemplo 1: coordenadas polares

- Este último integral repetido é fácil de calcular:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^2 4r - r^3 \, dr \, d\theta &= \int_0^{2\pi}\left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=2} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 2\cdot 2^2 - \frac{2^4}{4} \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 4 \, d\theta
\end{aligned}$$

Exemplo 1: coordenadas polares

- Este último integral repetido é fácil de calcular:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^2 4r - r^3\,dr\,d\theta &= \int_0^{2\pi}\left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=2} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 2\cdot 2^2 - \frac{2^4}{4}\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 4\,d\theta \\
&= [4\theta]_0^{2\pi}
\end{aligned}$$

Exemplo 1: coordenadas polares

- Este último integral repetido é fácil de calcular:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^2 4r - r^3\,dr\,d\theta &= \int_0^{2\pi}\left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=2} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 2\cdot 2^2 - \frac{2^4}{4}\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 4\,d\theta \\
&= [4\theta]_0^{2\pi} \\
&= 4\cdot 2\pi - 4\cdot 0
\end{aligned}
$$

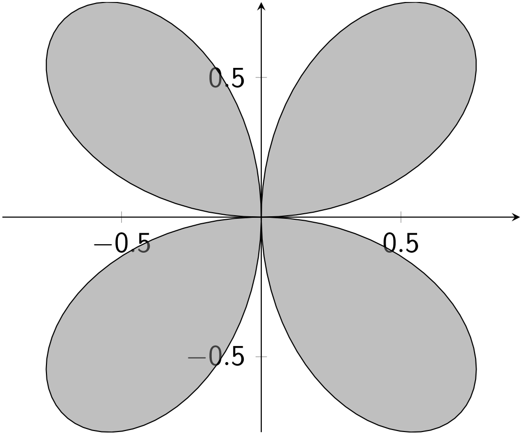
Exemplo 1: coordenadas polares

- Este último integral repetido é fácil de calcular:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^2 4r - r^3\,dr\,d\theta &= \int_0^{2\pi}\left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=2} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 2\cdot 2^2 - \frac{2^4}{4}\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 4\,d\theta \\
&= [4\theta]_0^{2\pi} \\
&= 4\cdot 2\pi - 4\cdot 0 \\
&= 8\pi.
\end{aligned}
$$

Exemplo 2: coordenadas polares

Vamos calcular a área do trevo de quatro folhas, cuja definição no primeiro quadrante é dada pela equação $r = \sin(2\theta)$.



Exemplo 2: coordenadas polares

- Neste caso é mais fácil dar primeiro o domínio de integração no primeiro quadrante em coordenadas polares:

$$E = \left\{ (r, \theta) \in [0, 1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \mid 0 \leq r \leq \sin(2\theta) \right\}.$$

Exemplo 2: coordenadas polares

- Neste caso é mais fácil dar primeiro o domínio de integração no primeiro quadrante em coordenadas polares:

$$E = \left\{ (r, \theta) \in [0,1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \mid 0 \leq r \leq \sin(2\theta) \right\}.$$

- $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$, logo

$$xy = r^2\cos(\theta)\sin(\theta) = r^2\frac{\sin(2\theta)}{2} = (x^2+y^2)\frac{\sin(2\theta)}{2}.$$

Exemplo 2: coordenadas polares

- Neste caso é mais fácil dar primeiro o domínio de integração no primeiro quadrante em coordenadas polares:

$$E = \left\{ (r, \theta) \in [0,1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \mid 0 \leq r \leq \sin(2\theta) \right\}.$$

- $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$, logo

$$xy = r^2 \cos(\theta)\sin(\theta) = r^2 \frac{\sin(2\theta)}{2} = (x^2 + y^2)\frac{\sin(2\theta)}{2}.$$

Por isso,

$$D = \left\{ (x, y) \in [0,1]^2 \mid 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{2xy}{x^2 + y^2} \right\}.$$

Exemplo 2: coordenadas polares

- Neste caso é mais fácil dar primeiro o domínio de integração no primeiro quadrante em coordenadas polares:
$$E = \left\{ (r, \theta) \in [0,1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \mid 0 \leq r \leq \sin(2\theta) \right\}.$$
- $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$, logo
$$xy = r^2 \cos(\theta)\sin(\theta) = r^2 \frac{\sin(2\theta)}{2} = (x^2+y^2)\frac{\sin(2\theta)}{2}.$$
Por isso,
$$D = \left\{ (x,y) \in [0,1]^2 \mid 0 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{2xy}{x^2+y^2} \right\}.$$
-
$$\text{Área}(\text{Trevo}) = 4 \iint_D dA(x,y) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin(2\theta)} r\, dr\, d\theta.$$

Exemplo 2: coordenadas polares

$$\text{Área}(\text{Trevo}) \quad = \quad 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sin(2\theta)} r\,dr\,d\theta$$

Exemplo 2: coordenadas polares

$$\begin{aligned}
\text{Área}(\text{Trevo}) &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sin(2\theta)} r\,dr\,d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=\sin(2\theta)} d\theta
\end{aligned}$$

Exemplo 2: coordenadas polares

$$
\begin{aligned}
\text{Área}(\text{Trevo}) &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sin(2\theta)} r\,dr\,d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=\sin(2\theta)} d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(2\theta)}{2} - \frac{0^2}{2}\,d\theta
\end{aligned}
$$

Exemplo 2: coordenadas polares

$$
\begin{aligned}
\text{Área}(\text{Trevo}) &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sin(2\theta)} r\,dr\,d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=\sin(2\theta)} d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(2\theta)}{2}-\frac{0^2}{2}\,d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos(4\theta)}{4}\,d\theta
\end{aligned}
$$

Exemplo 2: coordenadas polares

$$\begin{aligned}
\text{Área}(\text{Trevo}) &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin(2\theta)} r\,dr\,d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=\sin(2\theta)} d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(2\theta)}{2} - \frac{0^2}{2}\,d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(4\theta)}{4}\,d\theta \\
&= 4\left[\frac{\theta}{4} - \frac{\sin(4\theta)}{16}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

Exemplo 2: coordenadas polares

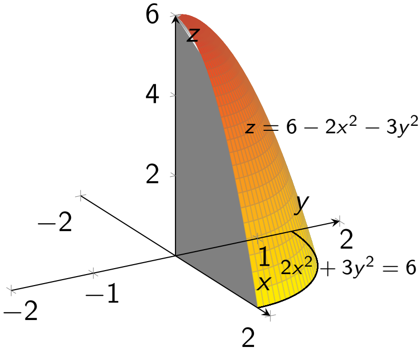
$$
\begin{aligned}
\text{Área}(\text{Trevo}) &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sin(2\theta)} r\,dr\,d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=\sin(2\theta)} d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(2\theta)}{2}-\frac{0^2}{2}\,d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos(4\theta)}{4}\,d\theta \\
&= 4\left[\frac{\theta}{4}-\frac{\sin(4\theta)}{16}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 4\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

Exemplo: coordenadas elípticas

Vamos calcular o volume do sólido R:

$$\boxed{R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq z \leq 6 - 2x^2 - 3y^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}}.$$

$$0 = 6 - 2x^2 - 3y^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$2x^2 + 3y^2 = 6.$$



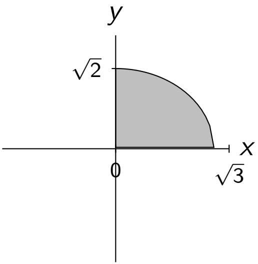
Exemplo: coordenadas elípticas

- Consideremos $z = 0$: $0 = 6 - 2x^2 - 3y^2 \;\Leftrightarrow\; 2x^2 + 3y^2 = 6$:

Exemplo: coordenadas elípticas

- Consideremos $z = 0$: $0 = 6 - 2x^2 - 3y^2 \iff 2x^2 + 3y^2 = 6$:

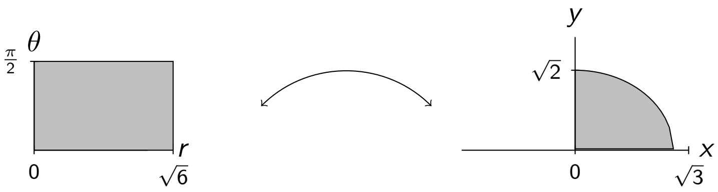
$$D = \left\{ (x, y) \in \left(\mathbb{R}_0^+\right)^2 \mid 0 \leq 2x^2 + 3y^2 \leq 6 \right\}.$$



Exemplo: coordenadas elípticas

- $x = \frac{r}{\sqrt{2}}\cos(\theta),\ y = \frac{r}{\sqrt{3}}\sin(\theta)$ e $x, y \geq 0$:

$$E = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq \sqrt{6},\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}.$$



Exemplo: coordenadas elípticas

$$\boxed{E = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq \sqrt{6},\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}.}$$

Exemplo: coordenadas elípticas

$$\boxed{E = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq \sqrt{6},\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}.}$$

- $x = \frac{r}{\sqrt{3}}\cos(\theta)$, $y = \frac{r}{\sqrt{2}}\sin(\theta)$ e $\det\left(J_T(r,\theta)\right) = \frac{r}{\sqrt{6}}$:

$$\mathrm{Vol}(R) = \iint_D 6 - 2x^2 - 3y^2\, dA(x,y)$$

Exemplo: coordenadas elípticas

$$\boxed{E = \left\{ (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq \sqrt{6},\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}.}$$

- $x = \frac{r}{\sqrt{3}} \cos(\theta)$, $y = \frac{r}{\sqrt{2}} \sin(\theta)$ e $\det\left(J_T(r,\theta)\right) = \frac{r}{\sqrt{6}}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(R) &= \iint_D 6 - 2x^2 - 3y^2 \, dA(x,y) \\ &= \iint_E \left(6 - r^2\right) \frac{r}{\sqrt{6}} \, dA(r,\theta) \end{aligned}$$

Exemplo: coordenadas elípticas

$$\boxed{E = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq \sqrt{6},\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}.}$$

- $x = \frac{r}{\sqrt{3}}\cos(\theta)$, $y = \frac{r}{\sqrt{2}}\sin(\theta)$ e $\det\left(J_T(r,\theta)\right) = \frac{r}{\sqrt{6}}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(R) &= \iint_D 6 - 2x^2 - 3y^2 \, dA(x,y) \\
&= \iint_E \left(6 - r^2\right) \frac{r}{\sqrt{6}} \, dA(r,\theta) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{6}} \left(6 - r^2\right) \frac{r}{\sqrt{6}} \, dr \, d\theta.
\end{aligned}$$

Exemplo: coordenadas elípticas

- Este último integral repetido é fácil de calcular:

$$\mathrm{Vol}(R) \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{6}} \left(6 - r^2\right) \frac{r}{\sqrt{6}} \, dr \, d\theta$$

Exemplo: coordenadas elípticas

- Este último integral repetido é fácil de calcular:

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(R) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{6}} (6 - r^2)\, \frac{r}{\sqrt{6}}\, dr\, d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{6}} 6r - r^3\, dr\, d\theta\end{aligned}$$

Exemplo: coordenadas elípticas

- Este último integral repetido é fácil de calcular:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(R) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{6}} (6 - r^2)\, \frac{r}{\sqrt{6}}\, dr\, d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{6}} 6r - r^3\, dr\, d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[3r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{6}} d\theta
\end{aligned}$$

Exemplo: coordenadas elípticas

- Este último integral repetido é fácil de calcular:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(R) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{6}} (6 - r^2) \frac{r}{\sqrt{6}} \, dr \, d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{6}} 6r - r^3 \, dr \, d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[3r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{6}} \, d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cdot (\sqrt{6})^2 - \frac{(\sqrt{6})^4}{4} - \left(3 \cdot 0^2 - \frac{0^4}{4} \right) \, d\theta
\end{aligned}
$$

Exemplo: coordenadas elípticas

- Este último integral repetido é fácil de calcular:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(R) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{6}} (6 - r^2) \frac{r}{\sqrt{6}} \, dr \, d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{6}} 6r - r^3 \, dr \, d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[3r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{6}} d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cdot (\sqrt{6})^2 - \frac{(\sqrt{6})^4}{4} - \left(3 \cdot 0^2 - \frac{0^4}{4} \right) d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9 \, d\theta
\end{aligned}$$

Exemplo: coordenadas elípticas

- Este último integral repetido é fácil de calcular:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(R) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{6}} (6 - r^2)\, \frac{r}{\sqrt{6}}\, dr\, d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{6}} 6r - r^3\, dr\, d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[3r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=\sqrt{6}} d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cdot (\sqrt{6})^2 - \frac{(\sqrt{6})^4}{4} - \left(3 \cdot 0^2 - \frac{0^4}{4}\right) d\theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9\, d\theta \\
&= \frac{9\pi}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{3}\pi}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Exemplo: transformações lineares

- Consideremos o integral duplo

$$\iint_D e^{x+y}\, dA(x,y),$$

onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$.

Exemplo: transformações lineares

- No primeiro quadrante:

$$|x| + |y| = 1 \Leftrightarrow x + y = 1.$$

Exemplo: transformações lineares

- No primeiro quadrante:

$$|x| + |y| = 1 \Leftrightarrow x + y = 1.$$

- No segundo quadrante:

$$|x| + |y| = 1 \Leftrightarrow -x + y = 1 \Leftrightarrow x - y = -1.$$

Exemplo: transformações lineares

- No primeiro quadrante:

$$|x| + |y| = 1 \Leftrightarrow x + y = 1.$$

- No segundo quadrante:

$$|x| + |y| = 1 \Leftrightarrow -x + y = 1 \Leftrightarrow x - y = -1.$$

- No terceiro quadrante:

$$|x| + |y| = 1 \Leftrightarrow -x - y = 1 \Leftrightarrow x + y = -1.$$

Exemplo: transformações lineares

- No primeiro quadrante:

$$|x| + |y| = 1 \Leftrightarrow x + y = 1.$$

- No segundo quadrante:

$$|x| + |y| = 1 \Leftrightarrow -x + y = 1 \Leftrightarrow x - y = -1.$$

- No terceiro quadrante:

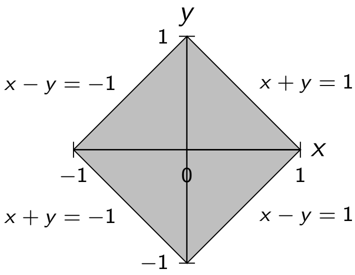
$$|x| + |y| = 1 \Leftrightarrow -x - y = 1 \Leftrightarrow x + y = -1.$$

- No quarto quadrante:

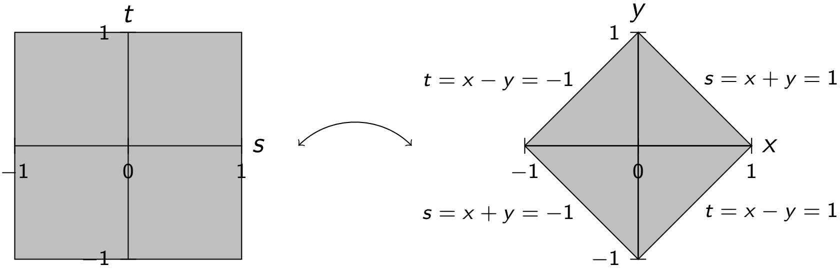
$$|x| + |y| = 1 \Leftrightarrow x - y = 1.$$

Exemplo: transformações lineares

$$\boxed{D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}.}$$



Exemplo: transformações lineares



Exemplo: transformações lineares

- Portanto, pode-se definir $T^{-1}\colon D \to E$:

$$\begin{cases} s = x + y \\ t = x - y, \end{cases} \qquad \leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

onde

$$E = \{(s,t) \mid -1 \leq s, t \leq 1\}.$$

Exemplo: transformações lineares

- Portanto, pode-se definir $T^{-1}\colon D \to E$:

$$\begin{cases} s = x + y \\ t = x - y, \end{cases} \qquad \leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

onde

$$E = \{(s,t) \mid -1 \leq s, t \leq 1\}\,.$$

- Então, T é definida por

$$\begin{cases} x = \dfrac{s+t}{2} \\ y = \dfrac{s-t}{2} \end{cases} \qquad \leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e tem jacobiano igual a $-1/2$.

Exemplo: transformações lineares

- Então

$$\iint_D e^{x+y}\, dA(x,y) = \iint_E e^s \cdot \frac{1}{2}\, dA(s,t)$$

Exemplo: transformações lineares

- Então

$$\begin{aligned}\iint_D e^{x+y}\,dA(x,y) &= \iint_E e^s\cdot\frac{1}{2}\,dA(s,t)\\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e^s\cdot\frac{1}{2}\,ds\,dt.\end{aligned}$$

Exemplo: transformações lineares

- Então

$$\begin{aligned}\iint_D e^{x+y}\, dA(x,y) &= \iint_E e^s \cdot \frac{1}{2}\, dA(s,t)\\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e^s \cdot \frac{1}{2}\, ds\, dt.\end{aligned}$$

- Este integral repetido é fácil de calcular:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e^s \cdot \frac{1}{2}\, ds\, dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left[e^s\right]_{s=-1}^{s=1}\, dt$$

Exemplo: transformações lineares

- Então

$$\begin{aligned}\iint_D e^{x+y}\, dA(x,y) &= \iint_E e^s \cdot \frac{1}{2}\, dA(s,t) \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e^s \cdot \frac{1}{2}\, ds\, dt.\end{aligned}$$

- Este integral repetido é fácil de calcular:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e^s \cdot \frac{1}{2}\, ds\, dt &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} [e^s]_{s=-1}^{s=1}\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e - e^{-1}\, dt\end{aligned}$$

Exemplo: transformações lineares

- Então

$$\begin{aligned}\iint_D e^{x+y}\, dA(x,y) &= \iint_E e^s \cdot \frac{1}{2}\, dA(s,t)\\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e^s \cdot \frac{1}{2}\, ds\, dt.\end{aligned}$$

- Este integral repetido é fácil de calcular:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e^s \cdot \frac{1}{2}\, ds\, dt &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} [e^s]_{s=-1}^{s=1}\ dt\\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e - e^{-1}\, dt\\ &= e - e^{-1}.\end{aligned}$$

Fim de aula

FIM