Análise Matemática II
Exame de Época Normal
LEI, BE
11 de junho de 2025
15h00-18h00

Todos os passos nas suas respostas requerem uma justificação, invocando os resultados explicados nas aulas e/ou apresentando os cálculos relevantes.

1. Mostre que a série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
é convergente e calcule a sua soma. **(2)**

2. Determine se a seguinte série é divergente, simplesmente convergente ou absolutamente convergente:
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^2}{3^n}.$$ **(2)**

3. Determine o centro c, o raio de convergência R, o intervalo de convergência absoluta I_0 e o intervalo de convergência I da seguinte série de potências:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{n+1}.$$ **(3)**

4. Seja
$$f(x,y) = \ln\left(\frac{2x+3y}{2x-3y}\right).$$
Determine e esboce o domínio de f, calculando e indicando todos os pontos de interseção relevantes. **(1)**

5. Seja
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3xy^2+5y^4}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Calcule $f'_x(0,0)$ e $f'_y(0,0)$. **(1)**

(b) Verifique se f é diferenciável em $(0,0)$. **(2)**

6. Seja

$$f(x,y) = 2y^3 - 6xy + 3x^2.$$

(a) Determine os pontos estacionários de f. **(1,5)**.

(b) Classifique os pontos estacionários de f, i.e., determine se nesses pontos ocorrem máximos locais, mínimos locais ou pontos de sela. **(1,5)**.

7. Considere uma função contínua $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qualquer e o integral duplo

$$\mathcal{I} = \int_0^1 \int_0^{x^2+1} f(x,y)\, dy\, dx.$$

(a) Determine e faça o esboço gráfico do domínio de integração D. **(0,75pt)**

(b) Inverta a ordem de integração. (Não é preciso calcular o integral duplo, claro!) **(1,25pt)**

8. Seja

$$R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2x,\ 0 \leq z \leq 8 - 4x - 2y\}.$$

(a) Esboce R, calculando e indicando todos os pontos e retas de interseção relevantes. **(1pt)**

(b) Calcule o volume de R usando integrais duplos. **(1pt)**

9. Seja $R := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$.

(a) Esboce R, calculando e indicando pontos e/ou curvas de interseção relevantes. **(1pt)**

(b) Usando coordenadas cilíndricas, calcule o integral triplo

$$\iiint_R (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} dV. \qquad \textbf{(1)}$$