AMII, LEI + BE, T: Integrais triplos

Marco Mackaaij

FCT, Universidade do Algarve

Section outline

1. Integrais triplos
   - Definição, propriedades elementares e Teorema de Fubini
   - Mudanças de variáveis

Definição, propriedades elementares e Teorema de Fubini

Definição

A definição

- Seja R o **paralelepípedo** definido por

$$R = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] := \\ \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ e \leq z \leq f\right\}.$$

A definição

- Seja R o **paralelepípedo** definido por

$$R = [a,b] \times [c,d] \times [e,f] := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ e \leq z \leq f\right\}.$$

- Seja $f = f(x,y,z)\colon R \to \mathbb{R}$ uma função **limitada**.

A definição

- Seja R o **paralelepípedo** definido por

$$R = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] := \\ \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ e \leq z \leq f\right\}.$$

- Seja $f = f(x, y, z)\colon R \to \mathbb{R}$ uma função **limitada**.
- Seja P uma **partição** de R: $a = x_1 \leq \cdots \leq x_m = b$, $c = y_1 \leq \cdots \leq y_n = d$, $e = z_1 \leq \cdots \leq z_p = f$.

A definição

- Seja R o **paralelepípedo** definido por

$$R = [a,b] \times [c,d] \times [e,f] := \\ \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ e \le z \le f\right\}.$$

- Seja $f = f(x,y,z)\colon R \to \mathbb{R}$ uma função **limitada**.
- Seja P uma **partição** de R: $a = x_1 \le \cdots \le x_m = b$, $c = y_1 \le \cdots \le y_n = d$, $e = z_1 \le \cdots \le z_p = f$.
- Seja $R_{ijk} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}] \subseteq R$.

A definição

- Seja R o **paralelepípedo** definido por

$$R = [a,b] \times [c,d] \times [e,f] :=$$
$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ e \leq z \leq f\right\}.$$

- Seja $f = f(x,y,z) \colon R \to \mathbb{R}$ uma função **limitada**.
- Seja P uma **partição** de R: $a = x_1 \leq \cdots \leq x_m = b$, $c = y_1 \leq \cdots \leq y_n = d$, $e = z_1 \leq \cdots \leq z_p = f$.
- Seja $R_{ijk} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}] \subseteq R$.
- Seja $V_{ijk} := \mathrm{Vol}(R_{ijk}) = (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)(z_{k+1} - z_k)$.

A definição

- Seja R o **paralelepípedo** definido por

$$R = [a,b] \times [c,d] \times [e,f] := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ e \leq z \leq f\right\}.$$

- Seja $f = f(x,y,z)\colon R \to \mathbb{R}$ uma função **limitada**.
- Seja P uma **partição** de R: $a = x_1 \leq \cdots \leq x_m = b$, $c = y_1 \leq \cdots \leq y_n = d$, $e = z_1 \leq \cdots \leq z_p = f$.
- Seja $R_{ijk} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}] \subseteq R$.
- Seja $V_{ijk} := \mathrm{Vol}(R_{ijk}) = (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)(z_{k+1} - z_k)$.
- Sejam $M_{ijk}(f) := \sup_{R_{ijk}}(f)$ e $m_{ijk}(f) := \inf_{R_{ijk}}(f)$.

A definição

- Consideremos a **soma inferior** e a **soma superior**:

$$
\begin{aligned}
s(f,P) &:= \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{p-1} m_{ijk}(f)V_{ijk}, \\
S(f,P) &:= \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{p-1} M_{ijk}(f)V_{ijk}.
\end{aligned}
$$

A definição

- Consideremos a **soma inferior** e a **soma superior**:

$$s(f,P) := \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{p-1} m_{ijk}(f)V_{ijk},$$

$$S(f,P) := \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{p-1} M_{ijk}(f)V_{ijk}.$$

- Para todas as partições P e P' de R:

$$s(f,P) \leq S(f,P').$$

A definição

Definição

A função f diz-se **integrável** *se*

$$\sup_P s(f,P) = \inf_P S(f,P).$$

Nesse caso, diz-se que esse número é igual ao valor do integral triplo de f sobre R, *denotado por*

$$\iiint_R f\,dV.$$

Funções integráveis

Teorema

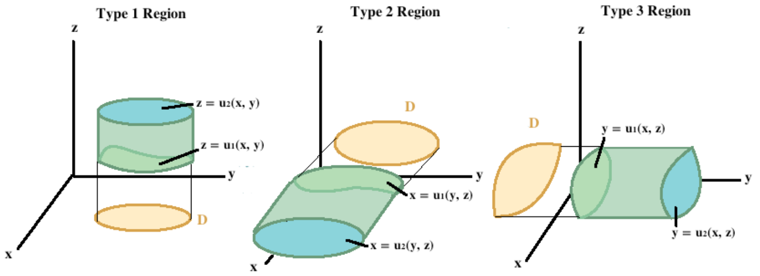
Se $f : R \to \mathbb{R}$ for contínua, então é integrável.

Funções integráveis

Teorema

Se $f : R \to \mathbb{R}$ for contínua, então é integrável.

- Este teorema pode ser generalizado para funções contínuas com domínios R cuja fronteira é constituída por um número finito de superfícies diferenciáveis em $\mathbb{R}^3$:



Definição, propriedades elementares e Teorema de Fubini

Propriedades elementares

Propriedades elementares

Sejam $f, g \colon R \to \mathbb{R}$ integráveis e $k \in \mathbb{R}$ uma constante. Então, existem as seguintes propriedades:

1. $$\iiint_R f \pm g \, dV = \iiint_R f \, dV \pm \iiint_R g \, dV.$$

Propriedades elementares

Sejam $f, g \colon R \to \mathbb{R}$ integráveis e $k \in \mathbb{R}$ uma constante. Então, existem as seguintes propriedades:

1. $$\iiint_R f \pm g \, dV = \iiint_R f \, dV \pm \iiint_R g \, dV.$$

2. $$\iiint_R kf \, dV = k \iiint_R f \, dV.$$

Propriedades elementares

Sejam $f, g\colon R \to \mathbb{R}$ integráveis e $k \in \mathbb{R}$ uma constante. Então, existem as seguintes propriedades:

1. $$\iiint_R f \pm g \, dV = \iiint_R f \, dV \pm \iiint_R g \, dV.$$

2. $$\iiint_R kf \, dV = k \iiint_R f \, dV.$$

3. $$\left| \iiint_R f \, dV \right| \leq \iiint_R |f| \, dV.$$

Propriedades elementares

4. Se $f(x, y, z) = 0$, excepto para (x, y, z) pertencentes a um número finito de superfícies diferenciáveis em R, então

$$\iiint_R f\, dV = 0.$$

Propriedades elementares

4. Se $f(x,y,z) = 0$, excepto para (x,y,z) pertencentes a um número finito de superfícies diferenciáveis em R, então
$$\iiint_R f\, dV = 0.$$

5. Se $f(x,y,z) \leq g(x,y,z)$ para todo o $(x,y,z) \in R$, então
$$\iiint_R f\, dV \leq \iiint_R g\, dV.$$

Propriedades elementares

4. Se $f(x,y,z)=0$, excepto para (x,y,z) pertencentes a um número finito de superfícies diferenciáveis em R, então

$$\iiint_R f\,dV = 0.$$

5. Se $f(x,y,z)\leq g(x,y,z)$ para todo o $(x,y,z)\in R$, então

$$\iiint_R f\,dV \leq \iiint_R g\,dV.$$

6. Se $R=R_1\cup R_2$ tal que $R_1\cap R_2$ seja a reunião dum número finito de superfícies diferenciáveis em $\mathbb{R}^3$, então

$$\iiint_R f\,dV = \iiint_{R_1} f\,dV + \iiint_{R_2} f\,dV.$$

Cálculo de volumes

Volumes

Seja R é um sólido em $\mathbb{R}^3$. Então

$$\iiint_R dV = \mathrm{Vol}(R).$$

Definição, propriedades elementares e Teorema de Fubini

Teorema de Fubini

Integrais repetidos

- Para calcular integrais triplos usa-se também **integrais repetidos**.

Integrais repetidos

- Para calcular integrais triplos usa-se também **integrais repetidos**.

Definição

Seja $f\colon R \to \mathbb{R}$ integrável, onde $R = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$. Existem seis **integrais repetidos** *de f sobre R, um para cada ordem de integração, por exemplo:*

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx := \int_a^b \left[\int_c^d \int_e^f f(x,y,z)\,dz\,dy\right] dx$$

e

$$\int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz := \int_e^f \left[\int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dy\right] dz.$$

Exemplos

Exemplo

Sejam $f(x, y, z) = x^2yz$ *e* $R = [1, 2] \times [-3, 4] \times [0, 1]$. *Então*

$$\int_1^2 \int_{-3}^4 \int_0^1 x^2yz\, dz\, dy\, dx \quad = \quad \int_1^2 \int_{-3}^4 \left[x^2y\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=1} dy\, dx$$

Exemplos

Exemplo

Sejam $f(x,y,z) = x^2yz$ *e* $R = [1,2] \times [-3,4] \times [0,1]$. *Então*

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \int_{-3}^4 \int_0^1 x^2yz\,dz\,dy\,dx &= \int_1^2 \int_{-3}^4 \left[x^2y\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=1} dy\,dx \\
&= \int_1^2 \int_{-3}^4 x^2y\frac{1^2}{2} - x^2y\frac{0^2}{2}\,dy\,dx
\end{aligned}$$

Exemplos

Exemplo

Sejam $f(x,y,z) = x^2yz$ *e* $R = [1,2] \times [-3,4] \times [0,1]$. *Então*

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \int_{-3}^4 \int_0^1 x^2yz\,dz\,dy\,dx &= \int_1^2 \int_{-3}^4 \left[x^2y\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=1} dy\,dx \\
&= \int_1^2 \int_{-3}^4 x^2y\frac{1^2}{2} - x^2y\frac{0^2}{2}\,dy\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 \int_{-3}^4 x^2y\,dy\,dx
\end{aligned}$$

Exemplos

Exemplo

Sejam $f(x,y,z) = x^2yz$ *e* $R = [1,2] \times [-3,4] \times [0,1]$*. Então*

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \int_{-3}^4 \int_0^1 x^2yz \, dz \, dy \, dx &= \int_1^2 \int_{-3}^4 \left[x^2 y \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=1} dy \, dx \\
&= \int_1^2 \int_{-3}^4 x^2 y \frac{1^2}{2} - x^2 y \frac{0^2}{2} \, dy \, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_1^2 \int_{-3}^4 x^2 y \, dy \, dx \\
&= \frac{49}{12}.
\end{aligned}$$

Exemplos

Exemplo

$$\int_0^1 \int_{-3}^4 \int_1^2 x^2 yz \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \int_{-3}^4 \left[\frac{x^3}{3} yz \right]_{x=1}^{x=2} dy \, dz$$

Exemplos

Exemplo

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_{-3}^4\int_1^2 x^2yz\,dx\,dy\,dz &= \int_0^1\int_{-3}^4\left[\frac{x^3}{3}yz\right]_{x=1}^{x=2} dy\,dz\\ &= \int_0^1\int_{-3}^4 \frac{2^3}{3}yz-\frac{1^3}{3}yz\,dy\,dz\end{aligned}$$

Exemplos

Exemplo

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_{-3}^4\int_1^2 x^2yz\,dx\,dy\,dz &= \int_0^1\int_{-3}^4 \left[\frac{x^3}{3}yz\right]_{x=1}^{x=2} dy\,dz\\ &= \int_0^1\int_{-3}^4 \frac{2^3}{3}yz-\frac{1^3}{3}yz\,dy\,dz\\ &= \int_0^1\int_{-3}^4 \frac{7yz}{3}\,dy\,dz\end{aligned}$$

Exemplos

Exemplo

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{-3}^4 \int_1^2 x^2 yz \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 \int_{-3}^4 \left[\frac{x^3}{3} yz \right]_{x=1}^{x=2} dy \, dz \\
&= \int_0^1 \int_{-3}^4 \frac{2^3}{3} yz - \frac{1^3}{3} yz \, dy \, dz \\
&= \int_0^1 \int_{-3}^4 \frac{7yz}{3} \, dy \, dz \\
&= \frac{49}{12}.
\end{aligned}
$$

Exemplos

Exemplo

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_{-3}^4\int_1^2 x^2yz\,dx\,dy\,dz &= \int_0^1\int_{-3}^4\left[\frac{x^3}{3}yz\right]_{x=1}^{x=2}dy\,dz\\ &= \int_0^1\int_{-3}^4 \frac{2^3}{3}yz-\frac{1^3}{3}yz\,dy\,dz\\ &= \int_0^1\int_{-3}^4 \frac{7yz}{3}\,dy\,dz\\ &= \frac{49}{12}.\end{aligned}$$

- O resultado é igual!

Teorema de Fubini

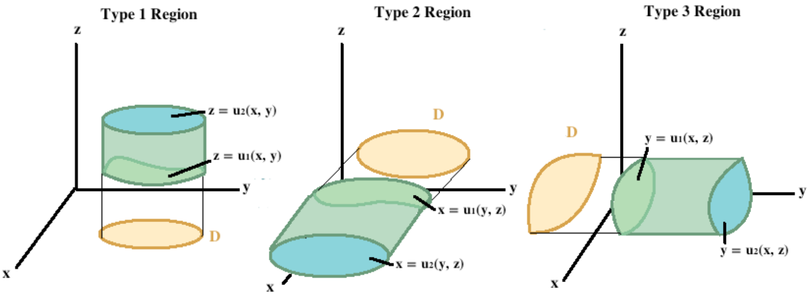
Teorema

Seja $f = f(x,y,z)\colon R \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Então*

$$
\begin{aligned}
\iiint_R f\, dV &= \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx \\
&= \int_c^d \int_a^b \int_e^f f(x,y,z)\, dz\, dx\, dy \\
&= \int_a^b \int_e^f \int_c^d f(x,y,z)\, dy\, dz\, dx \\
&= \int_e^f \int_a^b \int_c^d f(x,y,z)\, dy\, dx\, dz \\
&= \int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \\
&= \int_c^d \int_e^f \int_a^b f(x,y,z)\, dx\, dz\, dy.
\end{aligned}
$$

Regiões regulares

- O Teorema de Fubini também é válido para domínios de integração mais gerais, chamados **domínios regulares**.



Domínios regulares: tipo I

- Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ e

$$R = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\right\},$$

onde $u_1, u_2 \colon D \to \mathbb{R}$ são diferenciáveis.

Domínios regulares: tipo I

- Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ e

$$R = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\right\},$$

onde $u_1, u_2 \colon D \to \mathbb{R}$ são diferenciáveis.

Teorema

Seja $f \colon R \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então

$$\iiint_R f \, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z) \, dz\right] dA(x, y).$$

Domínios regulares: tipo II

- Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ e

$$R = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y, z) \in D,\ u_1(y, z) \le x \le u_2(y, z)\right\},$$

onde $u_1, u_2 \colon D \to \mathbb{R}$ são diferenciáveis.

Domínios regulares: tipo II

- Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ e

$$R = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y, z) \in D,\ u_1(y, z) \le x \le u_2(y, z)\right\},$$

onde $u_1, u_2 \colon D \to \mathbb{R}$ são diferenciáveis.

Teorema

Seja $f \colon R \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então

$$\iiint_R f\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x, y, z)\, dx\right] dA(y, z).$$

Domínios regulares: tipo III

- Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ e

$$R = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, z) \in D,\ u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\right\},$$

onde $u_1, u_2 \colon D \to \mathbb{R}$ são diferenciáveis.

Domínios regulares: tipo III

- Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ e

$$R = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, z) \in D,\ u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\right\},$$

onde $u_1, u_2 \colon D \to \mathbb{R}$ são diferenciáveis.

Teorema

Seja $f \colon R \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então

$$\iiint_R f\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy\right] dA(x, z).$$

Exemplo

Calculemos

$$\iiint_R \frac{z}{x^2+z^2}\,dV,$$

onde $R = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq z,\ 1 \leq y \leq 4,\ y \leq z \leq 4\right\}$.

Exemplo

Calculemos

$$\iiint_R \frac{z}{x^2 + z^2}\, dV,$$

onde $R = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le z,\ 1 \le y \le 4,\ y \le z \le 4\right\}$.

- Consideremos R como um domínio regular do tipo II, por exemplo, onde $D = \left\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le y \le 4,\ y \le z \le 4\right\}$.

Exemplo

Calculemos

$$\iiint_R \frac{z}{x^2+z^2}\, dV,$$

onde $R = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq z,\ 1 \leq y \leq 4,\ y \leq z \leq 4\right\}$.

- Consideremos R como um domínio regular do tipo II, por exemplo, onde $D = \left\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq 4,\ y \leq z \leq 4\right\}$.
- $$\iiint_R \frac{z}{x^2+z^2}\, dV = \iint_D \left[\int_0^z \frac{z}{x^2+z^2}\, dx\right] dA(y,z)$$

Exemplo

Calculemos

$$\iiint_R \frac{z}{x^2+z^2}\, dV,$$

onde $R = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq z,\ 1 \leq y \leq 4,\ y \leq z \leq 4\right\}$.

- Consideremos R como um domínio regular do tipo II, por exemplo, onde $D = \left\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq 4,\ y \leq z \leq 4\right\}$.
- $$\begin{aligned} \iiint_R \frac{z}{x^2+z^2}\, dV &= \iint_D \left[\int_0^z \frac{z}{x^2+z^2}\, dx\right] dA(y,z) \\ &= \int_1^4 \int_y^4 \int_0^z \frac{z}{x^2+z^2}\, dx\, dz\, dy. \end{aligned}$$

Exemplo

$$\int_1^4 \int_y^4 \int_0^z \frac{z}{x^2+z^2}\, dx\, dz\, dy = \int_1^4 \int_y^4 \left[\arctan\left(\frac{x}{z}\right)\right]_{x=0}^{x=z} dz\, dy$$

Exemplo

$$\begin{aligned}\int_1^4 \int_y^4 \int_0^z \frac{z}{x^2+z^2}\, dx\, dz\, dy &= \int_1^4 \int_y^4 \left[\arctan\left(\frac{x}{z}\right)\right]_{x=0}^{x=z} dz\, dy \\ &= \int_1^4 \int_y^4 \arctan(1) - \arctan(0)\, dz\, dy\end{aligned}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \int_y^4 \int_0^z \frac{z}{x^2+z^2}\, dx\, dz\, dy &= \int_1^4 \int_y^4 \left[\arctan\left(\frac{x}{z}\right)\right]_{x=0}^{x=z} dz\, dy \\
&= \int_1^4 \int_y^4 \arctan(1) - \arctan(0)\, dz\, dy \\
&= \int_1^4 \int_y^4 \frac{\pi}{4}\, dz\, dy
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \int_y^4 \int_0^z \frac{z}{x^2+z^2}\, dx\, dz\, dy &= \int_1^4 \int_y^4 \left[\arctan\left(\frac{x}{z}\right)\right]_{x=0}^{x=z} dz\, dy \\
&= \int_1^4 \int_y^4 \arctan(1) - \arctan(0)\, dz\, dy \\
&= \int_1^4 \int_y^4 \frac{\pi}{4}\, dz\, dy \\
&= \frac{\pi}{4} \int_1^4 4 - y\, dy
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \int_y^4 \int_0^z \frac{z}{x^2+z^2}\, dx\, dz\, dy &= \int_1^4 \int_y^4 \left[\arctan\left(\frac{x}{z}\right)\right]_{x=0}^{x=z} dz\, dy \\
&= \int_1^4 \int_y^4 \arctan(1) - \arctan(0)\, dz\, dy \\
&= \int_1^4 \int_y^4 \frac{\pi}{4}\, dz\, dy \\
&= \frac{\pi}{4} \int_1^4 4 - y\, dy \\
&= \frac{\pi}{4} \left[4y - \frac{y^2}{2}\right]_1^4
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \int_y^4 \int_0^z \frac{z}{x^2+z^2}\, dx\, dz\, dy &= \int_1^4 \int_y^4 \left[\arctan\left(\frac{x}{z}\right)\right]_{x=0}^{x=z} dz\, dy \\
&= \int_1^4 \int_y^4 \arctan(1) - \arctan(0)\, dz\, dy \\
&= \int_1^4 \int_y^4 \frac{\pi}{4}\, dz\, dy \\
&= \frac{\pi}{4} \int_1^4 4 - y\, dy \\
&= \frac{\pi}{4} \left[4y - \frac{y^2}{2}\right]_1^4 \\
&= \frac{9\pi}{8}.
\end{aligned}$$

Exemplo

$$\boxed{R = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq z,\ 1 \leq y \leq 4,\ y \leq z \leq 4\right\}.}$$

Exemplo

$$\boxed{R = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq z,\ 1 \leq y \leq 4,\ y \leq z \leq 4\right\}.}$$

- Alternativamente, podemos considerar R como um domínio de tipo I, onde

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq z, 1 \leq y \leq 4\right\}.$$

Exemplo

$$\boxed{R = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq z,\ 1 \leq y \leq 4,\ \ y \leq z \leq 4\right\}.}$$

- Alternativamente, podemos considerar R como um domínio de tipo I, onde

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq z, 1 \leq y \leq 4\right\}.$$

- $$\iiint_R \frac{z}{x^2+z^2}\, dV \quad = \quad \iint_D \left[\int_y^4 \frac{z}{x^2+z^2}\, dz\right] dA(x,y)$$

Exemplo

$$\boxed{R = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq z,\ 1 \leq y \leq 4,\ y \leq z \leq 4\right\}.}$$

- Alternativamente, podemos considerar R como um domínio de tipo I, onde

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq z, 1 \leq y \leq 4\right\}.$$

-

$$\begin{aligned} \iiint_R \frac{z}{x^2+z^2}\,dV &= \iint_D \left[\int_y^4 \frac{z}{x^2+z^2}\,dz\right] dA(x,y) \\ &= \int_1^4 \int_0^z \int_y^4 \frac{z}{x^2+z^2}\,dz\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Mudanças de variáveis

Mudanças de variáveis e a matriz jacobiana

Cálculo Infinitesimal II: o jacobiano

Definição

Dados:

- $R, E \subset \mathbb{R}^3$;
- $T(s,t,u) = (x(s,t,u), y(s,t,u), z(s,t,u)) \colon E \to R$ *bijetiva e de classe* C^1.

A **matriz jacobiana***:*

$$J_T(s,t,u) := \begin{pmatrix} x'_s(s,t,u) & x'_t(s,t,u) & x'_u(s,t,u) \\ y'_s(s,t,u) & y'_t(s,t,u) & y'_u(s,t,u) \\ z'_s(s,t,u) & z'_t(s,t,u) & z'_u(s,t,u) \end{pmatrix}.$$

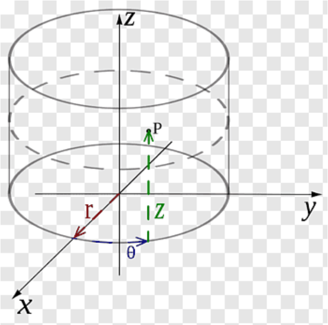
O **jacobiano** *é o determinante da matriz jacobiana.*

Exemplo: coordenadas cilíndricas

- As coordenadas cilíndricas são uma generalização imediata das coordenadas polares:

$$T(r, \theta, z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z) = (x, y, z),$$

onde $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ e $z \in \mathbb{R}$.



Exemplo: coordenadas cilíndricas

$$\boxed{T(r,\theta,z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z) = (x,y,z).}$$

Exemplo: coordenadas cilíndricas

$$\boxed{T(r,\theta,z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z) = (x,y,z).}$$

- A matriz jacobiana:

$$J_T(r,\theta,z) \quad = \quad \begin{pmatrix} (r\cos(\theta))'_r & (r\cos(\theta))'_\theta & (r\cos(\theta))'_z \\ (r\sin(\theta))'_r & (r\sin(\theta))'_\theta & (r\sin(\theta))'_z \\ z'_r & z'_\theta & z'_z \end{pmatrix}$$

Exemplo: coordenadas cilíndricas

$$\boxed{T(r,\theta,z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z) = (x,y,z).}$$

- A matriz jacobiana:

$$\begin{aligned} J_T(r,\theta,z) &= \begin{pmatrix} (r\cos(\theta))'_r & (r\cos(\theta))'_\theta & (r\cos(\theta))'_z \\ (r\sin(\theta))'_r & (r\sin(\theta))'_\theta & (r\sin(\theta))'_z \\ z'_r & z'_\theta & z'_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemplo: coordenadas cilíndricas

$$\boxed{T(r,\theta,z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z) = (x,y,z).}$$

- A matriz jacobiana:

$$\begin{aligned} J_T(r,\theta,z) &= \begin{pmatrix} (r\cos(\theta))'_r & (r\cos(\theta))'_\theta & (r\cos(\theta))'_z \\ (r\sin(\theta))'_r & (r\sin(\theta))'_\theta & (r\sin(\theta))'_z \\ z'_r & z'_\theta & z'_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Logo,

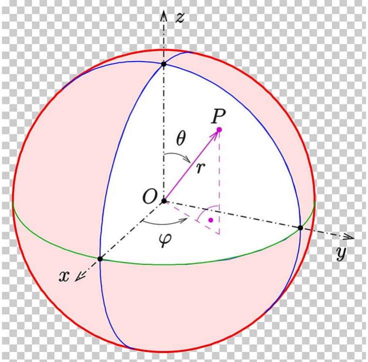
$$\boxed{\det\left(J_T(r,\theta,z)\right) = r.}$$

Exemplo: coordenadas esféricas

- As coordenadas esféricas são outra generalização das coordenadas polares:

$$T(r,\theta,\phi) = (r\sin(\theta)\cos(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), r\cos(\theta)) = (x,y,z),$$

onde $r \geq 0$, $\phi \in [0,2\pi]$ e $\theta \in [0,\pi]$.



Exemplo: coordenadas esféricas

$$\boxed{x = r\sin(\theta)\cos(\phi), y = r\sin(\theta)\sin(\phi), z = r\cos(\theta).}$$

Exemplo: coordenadas esféricas

$$\boxed{x = r\sin(\theta)\cos(\phi), y = r\sin(\theta)\sin(\phi), z = r\cos(\theta).}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \quad = \quad r^2\sin^2(\theta)\cos^2(\phi) + r^2\sin^2(\theta)\sin^2(\phi) + r^2\cos^2(\theta)$$

Exemplo: coordenadas esféricas

$$\boxed{x = r\sin(\theta)\cos(\phi), y = r\sin(\theta)\sin(\phi), z = r\cos(\theta).}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2\sin^2(\theta)\cos^2(\phi) + r^2\sin^2(\theta)\sin^2(\phi) + r^2\cos^2(\theta) \\ &= r^2\sin^2(\theta)(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)) + r^2\cos^2(\theta) \end{aligned}$$

Exemplo: coordenadas esféricas

$$\boxed{x = r\sin(\theta)\cos(\phi), y = r\sin(\theta)\sin(\phi), z = r\cos(\theta).}$$

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 &= r^2\sin^2(\theta)\cos^2(\phi) + r^2\sin^2(\theta)\sin^2(\phi) + r^2\cos^2(\theta) \\
&= r^2\sin^2(\theta)(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)) + r^2\cos^2(\theta) \\
&= r^2\sin^2(\theta) + r^2\cos^2(\theta)
\end{aligned}$$

Exemplo: coordenadas esféricas

$$\boxed{x = r\sin(\theta)\cos(\phi), y = r\sin(\theta)\sin(\phi), z = r\cos(\theta).}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2\sin^2(\theta)\cos^2(\phi) + r^2\sin^2(\theta)\sin^2(\phi) + r^2\cos^2(\theta) \\ &= r^2\sin^2(\theta)(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)) + r^2\cos^2(\theta) \\ &= r^2\sin^2(\theta) + r^2\cos^2(\theta) \\ &= r^2(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) \end{aligned}$$

Exemplo: coordenadas esféricas

$$\boxed{x = r\sin(\theta)\cos(\phi), y = r\sin(\theta)\sin(\phi), z = r\cos(\theta).}$$

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 &= r^2\sin^2(\theta)\cos^2(\phi) + r^2\sin^2(\theta)\sin^2(\phi) + r^2\cos^2(\theta) \\
&= r^2\sin^2(\theta)(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)) + r^2\cos^2(\theta) \\
&= r^2\sin^2(\theta) + r^2\cos^2(\theta) \\
&= r^2(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) \\
&= r^2.
\end{aligned}$$

Exemplo: coordenadas esféricas

$$\boxed{x = r\sin(\theta)\cos(\phi), y = r\sin(\theta)\sin(\phi), z = r\cos(\theta).}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2\sin^2(\theta)\cos^2(\phi) + r^2\sin^2(\theta)\sin^2(\phi) + r^2\cos^2(\theta) \\ &= r^2\sin^2(\theta)(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)) + r^2\cos^2(\theta) \\ &= r^2\sin^2(\theta) + r^2\cos^2(\theta) \\ &= r^2(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) \\ &= r^2. \end{aligned}$$

Ou seja, as funções x, y, z parametrizam uma esfera centrada na origem e de raio r:

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = r^2.}$$

Exemplo: coordenadas esféricas

$$\boxed{T(r,\theta,\phi) = (r\sin(\theta)\cos(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), r\cos(\theta)) = (x,y,z).}$$

Exemplo: coordenadas esféricas

$$\boxed{T(r,\theta,\phi) = (r\sin(\theta)\cos(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), r\cos(\theta)) = (x,y,z).}$$

- A matriz jacobiana:

$$J_T(r,\theta,\phi) =$$

$$\begin{pmatrix} (r\sin(\theta)\cos(\phi))'_r & (r\sin(\theta)\cos(\phi))'_\theta & (r\sin(\theta)\cos(\phi))'_\phi \\ (r\sin(\theta)\sin(\phi))'_r & (r\sin(\theta)\sin(\phi))'_\theta & (r\sin(\theta)\sin(\phi))'_\phi \\ (r\cos(\theta))'_r & (r\cos(\theta))'_\theta & (r\cos(\theta))'_\phi \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) & r\cos(\theta)\cos(\phi) & -r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) & r\cos(\theta)\sin(\phi) & r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo: coordenadas esféricas

$$\boxed{T(r,\theta,\phi) = (r\sin(\theta)\cos(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), r\cos(\theta)) = (x,y,z).}$$

- A matriz jacobiana:

$$J_T(r,\theta,\phi) =$$

$$\begin{pmatrix} (r\sin(\theta)\cos(\phi))'_r & (r\sin(\theta)\cos(\phi))'_\theta & (r\sin(\theta)\cos(\phi))'_\phi \\ (r\sin(\theta)\sin(\phi))'_r & (r\sin(\theta)\sin(\phi))'_\theta & (r\sin(\theta)\sin(\phi))'_\phi \\ (r\cos(\theta))'_r & (r\cos(\theta))'_\theta & (r\cos(\theta))'_\phi \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) & r\cos(\theta)\cos(\phi) & -r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) & r\cos(\theta)\sin(\phi) & r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

- Logo,

$$\boxed{\det\left(J_T(r,\theta,\phi)\right) = r^2\sin(\theta).}$$

Mudanças de variáveis

Mudanças de variáveis em integrais triplos

Mudanças de variáveis em integrais triplos

Teorema

Sejam

- $R, E \subset \mathbb{R}^3$ *limitados e fechados;*
- $T(s,t,u) = (x(s,t,u), y(s,t,u), z(s,t,u)) \colon E \to R$ *bijetiva e de classe* C^1*;*
- $f \colon R \to \mathbb{R}$ *contínua.*

Então

$$\iiint_R f(x,y,z)\, dV(x,y,z) =$$

$$\iiint_E f(x(s,t,u), y(s,t,u), z(s,t,u))\, |\det J_T(s,t,u)|\, dV(s,t,u).$$

Exemplo: coordenadas cilíndricas

Calculemos o integral triplo

$$\iiint_R yz\, dV(x,y,z),$$

onde

$$R = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 4\right\}.$$

Exemplo: coordenadas cilíndricas

Calculemos o integral triplo

$$\iiint_R yz\, dV(x,y,z),$$

onde

$$R = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 4\right\}.$$

- Recorde-se que $x^2 + y^2 = r^2$ e note-se que $x, y \geq 0$. Logo

$$E = \left\{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq 4\right\}.$$

Exemplo: coordenadas cilíndricas

Calculemos o integral triplo

$$\iiint_R yz\, dV(x,y,z),$$

onde

$$R = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 4\right\}.$$

- Recorde-se que $x^2 + y^2 = r^2$ e note-se que $x, y \geq 0$. Logo
$$E = \left\{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq 4\right\}.$$
- $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta), z = z$ e $J_T(r,\theta,z) = r$:
$$\iiint_R yz\, dV(x,y,z) \quad = \quad \iiint_E (r\sin(\theta)z) \cdot r\, dV(r,\theta,z)$$

Exemplo: coordenadas cilíndricas

Calculemos o integral triplo

$$\iiint_R yz\, dV(x,y,z),$$

onde

$$R = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 4\right\}.$$

- Recorde-se que $x^2 + y^2 = r^2$ e note-se que $x, y \geq 0$. Logo
$$E = \left\{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq 4\right\}.$$
- $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta), z = z$ e $J_T(r,\theta,z) = r$:
$$\begin{aligned} \iiint_R yz\, dV(x,y,z) &= \iiint_E (r\sin(\theta)z) \cdot r\, dV(r,\theta,z) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^4 r^2 \sin(\theta) z\, dz\, dr\, d\theta. \end{aligned}$$

Exemplo: coordenadas cilíndricas

- $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^4 r^2 \sin(\theta) z \, dz \, dr \, d\theta \quad = \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \left[\frac{r^2 z^2}{2} \sin(\theta) \right]_{z=0}^{z=4} dr \, d\theta$$

Exemplo: coordenadas cilíndricas

- $$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^4 r^2 \sin(\theta) z \, dz \, dr \, d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \left[\frac{r^2 z^2}{2} \sin(\theta) \right]_{z=0}^{z=4} dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 8r^2 \sin(\theta) \, dr \, d\theta \end{aligned}$$

Exemplo: coordenadas cilíndricas

- $$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2\int_0^4 r^2\sin(\theta)z\,dz\,dr\,d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2\left[\frac{r^2z^2}{2}\sin(\theta)\right]_{z=0}^{z=4}dr\,d\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 8r^2\sin(\theta)\,dr\,d\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{8r^3}{3}\sin(\theta)\right]_{r=0}^{r=2}d\theta\end{aligned}$$

Exemplo: coordenadas cilíndricas

- $$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^4 r^2 \sin(\theta) z \, dz \, dr \, d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \left[\frac{r^2 z^2}{2} \sin(\theta) \right]_{z=0}^{z=4} dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 8r^2 \sin(\theta) \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{8r^3}{3} \sin(\theta) \right]_{r=0}^{r=2} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{64}{3} \sin(\theta) \, d\theta \end{aligned}$$

Exemplo: coordenadas cilíndricas

- $$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^4 r^2 \sin(\theta) z \, dz \, dr \, d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \left[\frac{r^2 z^2}{2} \sin(\theta) \right]_{z=0}^{z=4} dr \, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 8r^2 \sin(\theta) \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{8r^3}{3} \sin(\theta) \right]_{r=0}^{r=2} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{64}{3} \sin(\theta) \, d\theta \\
&= \frac{64}{3} \left[-\cos(\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

Exemplo: coordenadas cilíndricas

- $$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^4 r^2 \sin(\theta) z \, dz \, dr \, d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \left[\frac{r^2 z^2}{2} \sin(\theta) \right]_{z=0}^{z=4} dr \, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 8r^2 \sin(\theta) \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{8r^3}{3} \sin(\theta) \right]_{r=0}^{r=2} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{64}{3} \sin(\theta) \, d\theta \\
&= \frac{64}{3} \left[-\cos(\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{64}{3} (0 - (-1))
\end{aligned}$$

Exemplo: coordenadas cilíndricas

- $$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^4 r^2 \sin(\theta) z \, dz \, dr \, d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \left[\frac{r^2 z^2}{2} \sin(\theta) \right]_{z=0}^{z=4} dr \, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 8 r^2 \sin(\theta) \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{8 r^3}{3} \sin(\theta) \right]_{r=0}^{r=2} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{64}{3} \sin(\theta) \, d\theta \\
&= \frac{64}{3} \left[-\cos(\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{64}{3} (0 - (-1)) \\
&= \frac{64}{3}.
\end{aligned}$$

Exemplo: coordenadas cilíndricas

- Conclusão:

$$\boxed{\iiint_R yz \, dV(x,y,z) = \frac{64}{3}.}$$

Exemplo: coordenadas esféricas

Calculemos o volume duma esfera S_a centrada na origem e de raio $a \geq 0$, usando um integral triplo.

Exemplo: coordenadas esféricas

Calculemos o volume duma esfera S_a centrada na origem e de raio $a \geq 0$, usando um integral triplo.

- Como foi explicado nos slides de ontem:

$$\mathrm{Vol}(S_a) = \iiint_{S_a} dV(x, y, z).$$

Exemplo: coordenadas esféricas

Calculemos o volume duma esfera S_a centrada na origem e de raio $a \geq 0$, usando um integral triplo.

- Como foi explicado nos slides de ontem:

$$\mathrm{Vol}(S_a) = \iiint_{S_a} dV(x, y, z).$$

- $x = r\sin(\theta)\cos(\phi), y = r\sin(\theta)\sin(\phi), z = r\cos(\theta)$ e $J_T(r, \theta, \phi) = r^2\sin(\theta)$:

$$\iiint_{S_a} dV(x, y, z) = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^2\sin(\theta)\,dr\,d\phi\,d\theta.$$

Exemplo: coordenadas esféricas

- $$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^2 \sin(\theta)\, dr\, d\phi\, d\theta \quad = \quad \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\sin(\theta)\right]_{r=0}^{r=a} d\phi\, d\theta$$

Exemplo: coordenadas esféricas

- $$\begin{aligned} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^2\sin(\theta)\,dr\,d\phi\,d\theta &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\sin(\theta)\right]_{r=0}^{r=a} d\phi\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^3}{3}\sin(\theta)d\phi\,d\theta \end{aligned}$$

Exemplo: coordenadas esféricas

- $$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^2\sin(\theta)\,dr\,d\phi\,d\theta &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\sin(\theta)\right]_{r=0}^{r=a} d\phi\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^3}{3}\sin(\theta)d\phi\,d\theta \\ &= \frac{a^3}{3}\int_0^{\pi}\left[\phi\sin(\theta)\right]_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\theta\end{aligned}$$

Exemplo: coordenadas esféricas

- $$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^2\sin(\theta)\,dr\,d\phi\,d\theta &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\sin(\theta)\right]_{r=0}^{r=a} d\phi\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^3}{3}\sin(\theta)d\phi\,d\theta \\
&= \frac{a^3}{3}\int_0^{\pi}\left[\phi\sin(\theta)\right]_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\theta \\
&= \frac{a^3}{3}\int_0^{\pi} 2\pi\sin(\theta)\,d\theta
\end{aligned}$$

Exemplo: coordenadas esféricas

- $$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^2\sin(\theta)\,dr\,d\phi\,d\theta &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\sin(\theta)\right]_{r=0}^{r=a} d\phi\,d\theta\\ &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^3}{3}\sin(\theta)d\phi\,d\theta\\ &= \frac{a^3}{3}\int_0^{\pi}\left[\phi\sin(\theta)\right]_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\theta\\ &= \frac{a^3}{3}\int_0^{\pi}2\pi\sin(\theta)\,d\theta\\ &= \frac{2\pi a^3}{3}\left[-\cos(\theta)\right]_0^{\pi} d\theta\end{aligned}$$

Exemplo: coordenadas esféricas

- $$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^2\sin(\theta)\,dr\,d\phi\,d\theta &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\sin(\theta)\right]_{r=0}^{r=a} d\phi\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^3}{3}\sin(\theta)d\phi\,d\theta \\
&= \frac{a^3}{3}\int_0^{\pi}\left[\phi\sin(\theta)\right]_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\theta \\
&= \frac{a^3}{3}\int_0^{\pi} 2\pi\sin(\theta)\,d\theta \\
&= \frac{2\pi a^3}{3}\left[-\cos(\theta)\right]_0^{\pi} d\theta \\
&= \frac{2\pi a^3}{3}(1-(-1))
\end{aligned}$$

Exemplo: coordenadas esféricas

- $$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^2\sin(\theta)\,dr\,d\phi\,d\theta &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\sin(\theta)\right]_{r=0}^{r=a} d\phi\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^3}{3}\sin(\theta) d\phi\,d\theta \\
&= \frac{a^3}{3}\int_0^{\pi}\left[\phi\sin(\theta)\right]_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\theta \\
&= \frac{a^3}{3}\int_0^{\pi} 2\pi\sin(\theta)\,d\theta \\
&= \frac{2\pi a^3}{3}\left[-\cos(\theta)\right]_0^{\pi}\,d\theta \\
&= \frac{2\pi a^3}{3}(1-(-1)) \\
&= \frac{4\pi a^3}{3}.
\end{aligned}$$

Exemplo: coordenadas esféricas

- Conclusão:

$$\boxed{\mathrm{Vol}(\mathrm{S_a}) = \frac{4\pi a^3}{3}.}$$

Fim de aula

FIM