Capítulo 3

Equações não lineares

3.1 Introdução

Definição 3.1.1. Consideremos uma função real de variável real $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que $x = a \in \mathbb{D}$ é uma **raiz da equação**

$$f(x) = 0$$

se, ao substituirmos x por a, transforma a equação $f(x) = 0$ numa proposição verdadeira (neste caso, $0 = 0$). Diz-se que $x = a \in \mathbb{D}$ é um **zero da função** $y = f(x)$ se $x = a$ for uma raiz da equação $f(x) = 0$.

Resolver uma equação consiste em calcular as raízes da equação, enquanto determinar os zeros de uma função corresponde em encontrar as raízes da equação $f(x) = 0$.

Definição 3.1.2. Seja $f(x) = P_n(x)$ uma função polinomial de grau n. Diz-se que $x = a$ é uma **raiz** da equação $P(x) = 0$, ou um **zero** da função $y = P_n(x)$, de **multiplicidade algébrica** m, com $1 \leq m \leq n$, se existir um polinómio $Q_{n-m}(x)$ de grau $n - m$ tal que

$$P(x) = (x - a)^m Q_{n-m}(x), \qquad \text{com } Q_{n-m}(a) \neq 0$$

Se $m = 1$, diz-se que $x = a$ tem multiplicidade algébrica simples.

Se $m = 2$, diz-se que $x = a$ tem multiplicidade algébrica dupla.

Se $m = 3$, diz-se que $x = a$ tem multiplicidade algébrica tripla.

Proposição 3.1.1. Consideremos um polinómio $P_n(x)$ de grau $n \geq 1$. O ponto de abcissa $x = a$ é uma raiz da equação $P_n(x) = 0$, ou um zero da função $y = P_n(x)$, de multiplicidade algébrica m, com $1 \leq m \leq n$, se e só se

$$P_n(a) = P_n'(a) = P_n''(a) = \cdots = P_n^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{e} \quad P_n^{(m)}(a) \neq 0\,.$$

Demonstração: Usar a Fórmula de Taylor de ordem m em torno do ponto $x = a$. □

Nas condições da proposição anterior:

(1) Se m é par, então, numa vizinhança de $x = a$, $P_n(x)$ tem o mesmo sinal de $P_n^{(m)}(a)$:

- (i) $x = a$ é um ponto de máximo $y = f(a)$ se $P_n^{(m)}(a) < 0$;
- (ii) $x = a$ é um ponto de mínimo $y = f(a)$ se $P_n^{(m)}(a) > 0$.

(2) Se m é ímpar, então, numa vizinhança de $x = a$:

- (i) $P_n(x)$ tem o mesmo sinal de $P_n^{(m)}(a)$ se $x > a$;
- (ii) $P_n(x)$ tem o sinal contrário de $P_n^{(m)}(a)$ se $x < a$.

Proposição 3.1.2. Consideremos uma função real de variável real $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{D}$. Se $f(a) = 0$ e f for m vezes continuamente diferenciável em $x = a$, então o grau de multiplicidade de $x = a$ é m se e só se

$$f(a) = f'(a) = P_n''(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(m)}(a) \neq 0\,.$$

Demonstração: Usar a Fórmula de Taylor de ordem m em torno do ponto $x = a$. □

Definição 3.1.3. seja $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real de variável real. a resolução numérica da equação

$$f(x) = 0$$

consiste em quatro etapas, que, consoante a função f, poderão ser mais ou menos distintas:

- **Etapa 1 - Localização das raízes:** determinação de um intervalo $[a, b]$ fora do qual não existem raízes da equação $f(x) = 0$;
- **Etapa 2 - Separação das raízes:** determinação de intervalos $[a_i, b_i] \subset [a, b]$ de modo a que no interior de cada intervalo $[a_i, b_i]$ exista somente uma raiz da equação $f(x) = 0$;
- **Etapa 3 - Cálculo aproximado de cada raiz:** aplicação de um algoritmo adequado que possibilite calcular um valor aproximado de cada raiz;
- **Etapa 3 - Cálculo do erro cometido:** quantificação do erro cometido no cálculo de cada raiz aproximada.

3.2 Localização das raízes

Antes de se proceder ao cálculo numérico das raízes de uma equação, há que verificar se:

- existe, pelo menos, uma raiz;
- a raiz é única.

A existência da raiz de uma equação baseia-se no resultado seguinte:

Proposição 3.2.1. Sejam $a,\ b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, e consideremos uma função contínua $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Se

$$f(a) \times f(b) < 0\,,$$

então

$$\exists\ c \in (a,b) : f(c) = 0\,.$$

Demonstração: Trata-se de um corolário do Teorema do Valor Intermédio (também conhecido por Teorema de Bolzano). Ver H. B. de Oliveira (2023) Introdução ao Cálculo Infinitesimal. □

A unicidade da raiz vai ser uma consequência do resultado seguinte.

Proposição 3.2.2. Sejam $a,\ b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, e consideremos uma função contínua $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ que se supõe ser diferenciável em $x = a$.

(i) Se $f'(x) > 0$ em (a,b), então f é estritamente crescente no intervalo (a,b);

(ii) Se $f'(x) < 0$ em (a,b), então f é estritamente decrescente no intervalo (a,b).

Demonstração: Trata-se de uma consequência do Teorema de Lagrange. Ver H. B. de Oliveira (2023) Introdução ao Cálculo Infinitesimal. □

Quando pretendemos localizar as raízes de uma equação $f(x) = 0$, o que se faz na prática é encontrar intervalos do domínio $\mathbb{D}$ da função f onde possamos garantir que não existem raízes da equação.

Proposição 3.2.3. (Teorema de Newton de Localização de Raízes) Seja $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente $n-$vezes diferenciável num ponto $x = a \in \operatorname{int}(\mathbb{D})$.

(i) Se

$$f(a) \geq 0 \quad \wedge \quad f'(a) \geq 0 \quad \wedge \quad \ldots \quad \wedge \quad f^{(n-1)}(a) \geq 0 \quad \wedge \quad f^{(n)}(a) > 0\,,$$

então $f(x) > 0$ para todo $x > a$;

(ii) Se

$$f(a) \leq 0 \quad \wedge \quad f'(a) \leq 0 \quad \wedge \quad \ldots \quad \wedge \quad f^{(n-1)}(a) \leq 0 \quad \wedge \quad f^{(n)}(a) < 0\,,$$

então $f(x) < 0$ para todo $x > a$.

Convém observar que o resultado anterior não garante a existência de raízes de uma equação $f(x) = 0$, mas apenas a não existência de raízes para $x > a$. Ou seja, se existirem raízes da equação, nenhuma delas excede $x = a$.

Ao ponto $x = a$ dado pela proposição anterior chamamos limite superior do conjunto das raízes, caso existam. Nesse caso, $x = a$ será um majorante do conjunto das raízes.

O resultado seguinte é uma consequência do anterior.

Proposição 3.2.4. Seja $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente $n-$vezes diferenciável num ponto $x = a \in \text{int}(\mathbb{D})$ e $(n-1)$vezes diferenciável noutro ponto $x = b \in \text{int}(\mathbb{D})$. Se

$$f^{(n)}(x) > 0 \quad \forall\, x > a \qquad \wedge \qquad f^{(n-1)}(a) > 0\,,$$

então

$$f^{(n)}(b) > 0 \quad \forall\, b > a\,.$$

Exemplo 3.2.1. Determinar um limite superior para as raízes da equação

$$-x^5 + 3x^4 + 20x^3 + 100 = 0\,.$$

Resolução: Seja

$$f(x) = -x^5 + 3x^4 + 20x^3 + 100$$

e calculemos as sucessivas derivadas de f:

$$\begin{aligned}
f(x) &= -x^5 + 3x^4 + 20x^3 + 100\,,\\
f'(x) &= -5x^4 + 12x^3 + 60x^2\,,\\
f''(x) &= -20x^3 + 36x^2 + 120x\,,\\
f'''(x) &= -60x^2 + 72x + 120\,,\\
f^{(4)}(x) &= -120x + 72\,.
\end{aligned}$$

Para $f^{(4)}(x)$ ter sinal constante, necessariamente negativo, terá de ser

$$f^{(4)}(x) < 0 \Leftrightarrow -120x + 72 < 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{5}\,.$$

Vamos descobrir, por tentativas, um real a que satisfaça a condição (2) do Teorema de Newton de Localização de Raízes. Por simplicidade, escolhamos inteiros $x > \frac{3}{5}$. Procedendo deste modo, obtemos a tabela seguinte, onde escrevemos o sinal do valor da função e suas derivadas calculadas anteriormente nos inteiros considerados:

x	1	3	4	5	7
$f(x)$				$+$	$-$
$f'(x)$			$+$	$-$	$-$
$f''(x)$		$+$	$-$	$-$	$-$
$f'''(x)$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f^{(n)}(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

Pelo Teorema do Valor Intermédio, todo o polinómio de grau ímpar tem, pelos menos, uma raiz real. Então, pelo Teorema de Newton de Localização de Raízes, $x = 7$ é um majorante das raízes da equação dada. Ou seja, para valores de $x > 7$ não existem raízes da equação.

As raízes negativas da equação

$$f(x) = 0$$

são as simétricas das raízes positivas da equação

$$f(-x) = 0$$

. Neste caso, se $x = a$ é um majorante das raízes positivas da equação $f(-x) = 0$, então $x = -a$ será um minorante das raízes da equação $f(x) = 0$.

Exemplo 3.2.2. Determinar um limite inferior para as raízes da equação

$$-x^5 + 3x^4 + 20x^3 + 100 = 0\,.$$

Resolução: Seja

$$f(x) = -x^5 + 3x^4 + 20x^3 + 100$$

e prucuremos um majorante das raízes positivas da equação

$$g(x) = 0, \qquad g(x) = f(-x) = x^5 + 3x^4 - 20x^3 + 100\,.$$

Calculemos as sucessivas derivadas de g:

$$\begin{aligned} g(x) &= x^5 + 3x^4 - 20x^3 + 100\,,\\ g'(x) &= 5x^4 + 12x^3 - 60x^2\,,\\ g''(x) &= 20x^3 + 36x^2 - 120x\,,\\ g^{(3)}(x) &= 60x^2 + 72x - 120\,,\\ g^{(4)}(x) &= 120x + 72\,. \end{aligned}$$

Para $g^{(4)}(x)$ ter sinal constante, necessariamente positivo, terá de ser

$$g^{(4)}(x) > 0 \Leftrightarrow 120x + 72 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{5}\,.$$

Vamos descobrir, por tentativas, um real a que satisfaça a condição (1) do Teorema de Newton de Localização de Raízes. Por simplicidade, escolhamos inteiros $x > -\frac{3}{5}$. Procedendo deste modo, obtemos a tabela seguinte, onde escrevemos o sinal do valor da função e suas derivadas calculadas anteriormente nos inteiros considerados:

x	0	1	2	3
$g(x)$				$+$
$g'(x)$			$-$	$+$
$g''(x)$		$-$	$+$	$+$
$g^{(3)}(x)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$g^{(4)}(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$

Para esta tabela foram usados os cálculos seguintentes,

$$\begin{aligned}
&g^{(4)}(0) = 72, \quad g^{(3)}(0) = -120,\\
&g^{(4)}(1) = 192, \quad g^{(3)}(1) = 12, \quad g''(1) = -64,\\
&g^{(4)}(2) = 312, \quad g^{(3)}(2) = 264, \quad g''(2) = 64, \quad g'(2) = -64,\\
&g^{(4)}(3) = 432, \quad g^{(3)}(3) = 636, \quad g''(3) = 504, \quad g'(3) = 189, \quad g(3) = 46\,.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema do Valor Intermédio, todo o polinómio de grau ímpar tem, pelos menos, uma raiz real. Então, pelo Teorema de Newton de Localização de Raízes, $x = 3$ é um majorante das raízes positivas da equação $g(x) = 0$. Logo $x = -3$ é um minorante das raízes negativas da equação $f(x) = 0$.

Combinando este exemplo com o anterior, concluímos que as raízes da equação $f(x) = 0$ localizam-se no intervalo $[-3, 7]$.

3.3 Separação de raízes

Os métodos gráficos podem ajudar na separação das raízes de uma equação

$$f(x) = 0\,.$$

Nestes métodos, decompomos a função f na diferença de outras duas funções f_1 e f_2 de modo que

$$f_1(x) = f_2(x)\,.$$

Fazemos a seguir a representação das funções f_1 e f_2 num mesmo sistema de eixos cartesianos e, por análise gráfica, marcamos os pontos de intersecção das funções f_1 e f_2. Estes pontos de intersecção dão-nos uma boa aproximação para as raízes da equação $f(x) = 0$.

Exemplo 3.3.1. Localizar as raízes da equação seguinte,

$$\frac{e^x}{20} - \operatorname{sen}(x) = 0\,.$$

Decompomos a equação da forma seguinte,

$$\underbrace{\frac{e^x}{20}}_{f_1(x)} = \underbrace{\operatorname{sen}(x)}_{f_2(x)}\,.$$

Façamos a representação gráfica das funções f_1 e f_2 num mesmo referencial cartesiano.

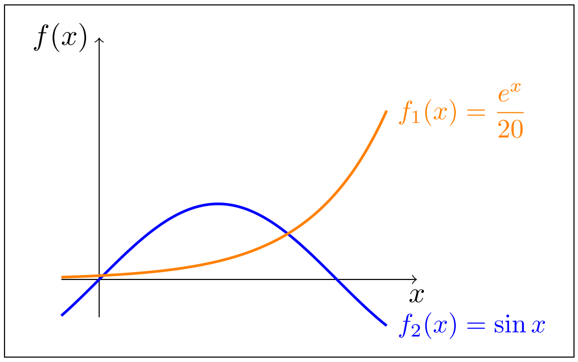

Figura 3.1: Localização gráfica de raízes.

Na proposição seguinte apresentamos um critério de fácil aplicação para estimar o número de raízes de uma equação polnomial.

Proposição 3.3.1 (Regra dos Sinais de Descartes)**.** Consideremos um polinómio de grau n

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\,.$$

O número de raízes reais positivas da equação polinomial

$$P_n(x) = 0$$

é igual ao número de variações de sinal da sucessão formada pela ordenação dos coeficientes do polinómio $P_n(x)$,

$$\{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0\}\,.$$

O número de raízes reais positivas da equação polinomial $P_n(x) = 0$ pode ainda ser igual a número inferior, mas da mesma paridade.

Demonstração: Ver `https://math.hmc.edu/funfacts/?s=Descartes`. □

Na proposição anterior, entende-se que zero é um número par.

Exemplo 3.3.2. Determinar o número de raízes reais positivas a equação polinomial

$$x^6 + x^2 - 100x - 1 = 0\,.$$

Resolução: Os coeficientes do polinómio desta equação são

$$a_6 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_1 = -100, \quad a_0 = -1\,,$$

pelos que a sucessão dos sinais é

$$+ \quad + \quad - \quad -\,.$$

Temos apenas uma variação de sinal e, assim, a equação dada tem uma só raíz real positiva.

A proposição anterior pode facilmente ser adaptado para o estudo da raízes reais negativas de uma equação polinomial.

Proposição 3.3.2. Consideremos um polinómio de grau n

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\,.$$

O número de raízes reais negativas da equação polinomial

$$P_n(x) = 0$$

é igual ao número das raízes reais positivas da equação polinomial

$$P_n(-x) = 0\,.$$

Demonstração: Este resultado sai imediatamente do anterior, bastando para tal observar que, por simetria, se x é um real negativo, então $-x$ é um real positivo. □

Exemplo 3.3.3. Determinar o número de raízes reais negativas da equação polinomial

$$x^6 + x^2 - 100x - 1 = 0\,.$$

Resolução: Substituindo x por $-x$, obtemos a equação polinomial

$$x^6 + x^2 + 100x - 1 = 0\,.$$

Aqui, os coeficientes do polinómio são

$$a_6 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_1 = 100, \quad a_0 = -1\,,$$

e a sucessão dos sinais é

$$+ \quad + \quad + \quad -\,.$$

Neste caso, temos também apenas uma variação de sinal e, assim, a equação $x^6+x^2+100x-1 = 0$ tem uma só raiz real positiva. Concluímos então que a equação dada tem uma só raiz real negativa.

Combinando a informação deste exemplo com a do anterior, podemos dizer que a equação dada tem duas raízes reais.

3.4 Método da Bissecção

O Método da Bissecção é uma técnica numérica para calcular raízes de equações que não são possíveis de resolver por métodos analíticos, ou para as quais os processos para encontrar soluções é bastante moroso. Trata-se de um método numérico muito simples e que consiste em dividir um intervalo em intervalos cada vez mais pequenos, estreitando o intervalo de soluções possíveis de forma iterativa. Este método é baseado no Teorema do Valor Intermédio (ver Proposição 3.2.1), pelo que requer que a função envolvida na equação a resolver seja contínua no intervalo em estudo. O Método da Bissecção é também conhecido por Método da Procura Binária ou Método da Dicotomia.

Para exemplificar o método, consideremos uma equação

$$f(x) = 0\,,$$

onde $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. Sejam $a,\ b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, tais que

$$f(a)f(b) < 0\,.$$

Pelo Teorema do Valor Intermédio, sabemos que a equação tem, pelo menos, uma raiz no intervalo (a, b). No entanto, a unicidade de solução não está garantida. Por simplicidade de exposição, suponhamos que existe uma única solução da equação $f(x) = 0$ no intervalo $[a, b]$.

Denotando a raiz a procurar por r, temos um primeiro valor aproximado de r:

$$\overline{r} = \frac{a+b}{2}, \qquad \Delta r = \frac{b-a}{2}\,,$$

ou seja

$$r = \frac{a+b}{2} \pm \frac{b-a}{2}\,,$$

já que

$$E_r = |r - r_1| = \left|\frac{a+b}{2} \pm \frac{b-a}{2} - \frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{b-a}{2} := \Delta r\,.$$

Para começar o método iterativo, fazemos então

$$a_1 = a, \qquad b_1 = b, \qquad r_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1) = \frac{1}{2}(a+b)\,.$$

Se $f(r_1) = 0$, a raiz da equação $f(x) = 0$ é r_1. Caso contrário, temos duas alternativas:

(i) se for $f(r_1)f(a) < 0$, fazemos $a_2 = a$ e $b_2 = r_1$, e continuamos com o intervalo $[a_2, b_2] = [a, r_1]$;

(ii) se for $f(r_1)f(b) < 0$, fazemos $a_2 = r_1$ e $b_2 = b$, e continuamos com o intervalo $[a_2, b_2] = [r_1, b]$.

A seguir, tomamos

$$r_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}\,.$$

Assim, podemos fazer

$$r = \overline{r} \pm \Delta r, \qquad \overline{r} = r_2\,,$$

com

$$\Delta r = \frac{\frac{a+b}{2}}{2} = \frac{a+b}{4}\,.$$

Prosseguindo com o processo iterativo, obtemos uma sucessão r_n:

(i) Se $f(r_n) = 0$, temos $r = r_n$ na bissecção n do intervalo $[a, b]$;

(ii) Se $f(r_n) \neq 0$, podemos ver que

$$r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} r\,.$$

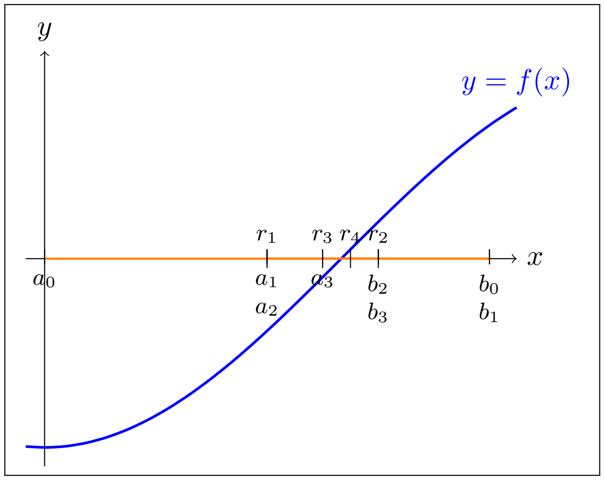

Figura 3.2: Método da Bissecção.

Ao avaliar a função nos extremos de cada intervalo e determinar o novo intervalo com base nos sinais desses valores da função, o Método da Bissecção garante a convergência para pelo menos uma raiz dentro do intervalo inicial. É uma abordagem simples para calcular raízes aproximadas de vários tipos de equações.

Exemplo 3.4.1. Usar o Método da Bissecção até à iteração $n = 8$ para encontrar um valor aproximado da raiz da equação

$$e^x + x^2 + x - 2 = 0\,,$$

no intervalo $[0.3, 0.4]$.

Resolução: Seja

$$f(x) = e^x + x^2 + x - 2 = 0\,.$$

Procedendo como indicado no Método da Bissecção, calculamos os valores da função f nos extremos dos intervalos sucessivamente bissectados e escolhidos de modo a que os valores nos extremos tenham sinais distintos, obtemos a tabela seguinte de valores.

x	sinal de $f(x)$	intervalo da raiz	amplitude do intervalo
0.3	$-$		
0.4	$+$	$[0.3, 0.4]$	0.1
0.35	$-$	$[0.35, 0.4]$	0.05
0.37	$-$	$[0.37, 0.4]$	0.03
0.39	$+$	$[0.37, 0.39]$	0.02
0.38	$-$	$[0.38, 0.39]$	0.01
0.385	$+$	$[0.38, 0.385]$	0.005
0.383	$-$	$[0.383, 0.385]$	0.002
0.384	$-$	$[0.384, 0.385]$	0.001

Temos, assim,

$$r = 0.3845 \pm 0.0005\,.$$

Proposição 3.4.1. Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, com $a,\ b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, uma função contínua tal que $f(a)f(b) < 0$. O Método da Bissecção gera uma sucessão r_n que aproxima a raiz r da equação $f(x) = 0$ de modo que

$$|r_n - r| \leq \frac{b-a}{2^n} \qquad \forall\ n \geq 1.$$

Demonstração: Definimos

$$a_0 := a \qquad \text{e} \qquad b := b_0,$$

e para $n \geq 1$ seja

$$r_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \tag{3.4.1}$$

o ponto médio do intervalo $[a_{n-1}, b_{n-1}]$. Se $f(r_n) = 0$, então encontramos a raiz. Caso contrário, escolhemos $[a_n, b_n]$ como a metade de $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ que contém a raiz r, ou seja, o subintervalo onde f muda de sinal. Assim, a cada passo o comprimento do intervalo que contém r é dividido por 2.

Por construção, para todo $n \geq 1$ temos

$$r \in [a_n, b_n] \qquad \text{e} \qquad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Isto pode ser mostrado usando indução matemática. De facto, para $n = 0$ temos $b_0 - a_0 = b - a$, e ao passar de $n - 1$ para n, o comprimento divide-se por 2.

Então, para cada $n \geq 1$, r_n é o ponto médio de $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ e a raiz r pertence a $[a_{n-1}, b_{n-1}]$. Logo, a distância de r ao ponto médio satisfaz

$$|r_n - r| \leq \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}.$$

Sabendo que $b_{n-1} - a_{n-1} = \dfrac{b-a}{2^{\,n-1}}$, obtemos

$$|r_n - r| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{b-a}{2^{\,n-1}} = \frac{b-a}{2^n}.$$

Portanto, para todo $n \geq 1$,

$$|r_n - r| \leq \frac{b-a}{2^n}.$$

□

Observemos que, fazendo $n \to \infty$ em (3.4.1), temos

$$\lim_{n\to\infty} r_n = r.$$

Exemplo 3.4.2. Determinar o número de iterações necessárias para resolver a equação

$$x^3 + 4x^2 - 10 = 0\,.$$

no intervalo $[1, 2]$, com erro inferior 10^{-5}, pelo Método da Bissecção.

Resolução: Sendo $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, temos $f(1)f(2) < 0$. Logo, temos uma garantia de existir, pelo menos, uma raiz da equação dada no intervalo $[1, 2]$. Por outro lado, $f'(x) = 3x^2+8$ não tem zeros no intervalo $[1, 2]$, pelo que existe somente uma raiz da equação $f(x) = 0$ no intervalo $[1, 2]$. Pela proposição anterior, terá de ser

$$|r_n - r| \leq \frac{2-1}{2^n} < 10^{-5} \Rightarrow \frac{2-1}{2^n} < 10^{-5} \Leftrightarrow 2^n > 10^5 \Leftrightarrow n > \log_2(10^5) \simeq 16.61\,.$$

Implementação numérica

(i) Input

- função $f(x)$ da equação $f(x) = 0$
- intervalo $[a, b]$, onde existe uma única raiz de $f(x) = 0$
- tolerância (absoluta ou relativa): TOL
- número máximo de iterações: N_0

(ii) Raiz aproximada r, ou mensagem de erro

1. Set $k = 1$
2. While $k \leq N_0$ do Steps 3-6
    3. Set $r = a + \dfrac{b-a}{2}$ (calcula r_k)
    4. If $f(r) = 0$ or $\dfrac{b-a}{2} < TOL$ then output r (STOP: Procedimento concluído com sucesso)
    5. Set $k = k + 1$
    6. If $f(a)f(b) > 0$ then set $a = r$ else $b = r$ (calcula a_k e b_k)
7. Output "O Método falhou após N_0 iterações"(STOP: Procedimento concluído sem sucesso)

3.5 Método de Newton

Outro método numérico para resolver equações, é o Método de Newton. Este método também é conhecido por Método de Newton-Raphson, ou, ainda, por Método da Tangente.

Para explicarmos o método, consideremos uma função real de variável real $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, com $a < b$. Suponhamos que f é $2-$vezes continuamente diferenciável no intervalo (a, b) e seja $\overline{r} \in (a, b)$ um valor aproximado da raiz r da equação $f(x) = 0$ no intervalo $[a, b]$. A Fórmula de Taylor de ordem $n = 1$, em torno do ponto $x = \overline{r}$, da função f é dada por

$$f(x) = f(\overline{r}) + (x-\overline{r})f'(\overline{r}) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-\overline{r})^2,$$

onde ξ é um valor de abcissa entre x e $\overline{r}$. Substituindo neste expressão x por r, e atendendo a que $f(r) = 0$, obtemos

$$0 = f(\overline{r}) + (r-\overline{r})f'(\overline{r}) + \frac{f''(\xi)}{2}(r-\overline{r})^2.$$

Observando que, para valores de $\overline{r}$ suficientemente próximos de r, $|r-\overline{r}|$ é muito pequeno, podemos desprezar o termo com $(r-\overline{r})^2$, o qual vai ser ainda mais pequeno. Temos então

$$0 \simeq f(\overline{r}) + (r-\overline{r})f'(\overline{r}) \Leftrightarrow r \simeq \overline{r} - \frac{f(\overline{r})}{f'(\overline{r})}, \qquad f'(\overline{r}) \neq 0\,.$$

Esta última expressão é a base do Método de Newton, o qual:

- começa com uma aproximação r_0;
- gera uma sequência, definida de modo recursivo por:

$$r_n = r_{n-1} - \frac{f(r_{n-1})}{f'(r_{n-1})}, \qquad f'(r_{n-1}) \neq 0\,, \qquad n \geq 1\,. \tag{3.5.2}$$

A expressão (3.5.2) designa-se por **fórmula iteradora do Método de Newton**.

Podemos deduzir o Método de Newton do modo seguinte equivalente, o qual vai ter uma interpretação geométrica mais intuitiva. Sabemos que a recta tangente ao gráfico da função f no ponto $x = r_0$ é dada por:

$$y = f(r_0) + f'(r_0)(r - r_0)\,.$$

O valor r_1 irá corresponder à abcissa do ponto de intersecção desta recta tangente com o eixo dos xx, ou seja

$$0 = f(r_0) + f'(r_0)(r_1 - r_0) \Leftrightarrow r_1 = r_0 - \frac{f(r_0)}{f'(r_0)}\,, \qquad f'(r_0) \neq 0\,.$$

Prosseguimos com a recta tangente ao gráfico da função f no ponto $x = r_1$,

$$y = f(r_1) + f'(r_1)(r - r_1)\,.$$

O valor r_2 irá, então, corresponder à abcissa do ponto de intersecção desta última recta tangente com o eixo dos xx, ou seja

$$0 = f(r_1) + f'(r_1)(r - r_1) \Leftrightarrow r_2 = r_1 - \frac{f(r_1)}{f'(r_1)}\,, \qquad f'(r_1) \neq 0\,.$$

Prosseguindo este raciocínio, obtemos uma sucessão r_n nas condições de (3.5.2).

Para r_0 na fórmula iteradora (3.5.2), escolhe-se um dos extremos do intervalo $[a, b]$:

$$r_0 = a \qquad \text{ou} \qquad r_0 = b\,.$$

Observação. Ao contrário do Método da Bissecção, a existência de uma raiz num intervalo $[a, b]$ não é garantida pelo Método de Newton.

A proposição seguinte dá-nos não só uma condição suficiente de convergência do Método de Newton, mas também nos indica como escolher o extremo do intervalo $[a, b]$ mais favorável para usar como iteração inicial r_0 na fórmula iteradora (3.5.2).

Proposição 3.5.1. Consideremos a equação seguinte num intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, com $a < b$,

$$f(x) = 0\,.$$

Se:

(1) f é $2-$vezes continuamente diferenciável no intervalo $[a, b]$;

(2) $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$;

(3) $f''(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$;

(4) $f(a)$, ou $f(b)$, tem o mesmo sinal de $f''(x)$ para todo $x \in [a, b]$;

então a fórmula iteradora (3.5.2) gera uma sucessão r_n convergente (para a raiz da equação).

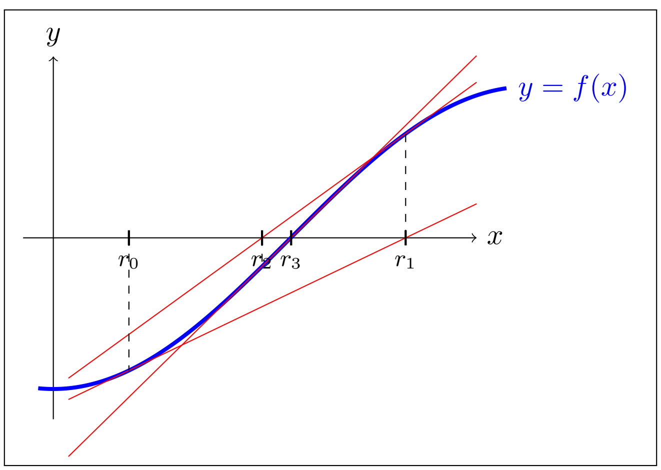

Figura 3.3: Método de Newton, com $r_0 < r$.

Exemplo 3.5.1. Usar o Métdo de Newton para encontrar uma raiz da equação

$$e^x + x^2 + x - 2 = 0\,,$$

com 3 algarismos significativos , no intervalo $[0.3, 0.4]$.

Resolução: Seja
$$f(x) = e^x + x^2 + x - 2\,.$$
Como $f(0.3) = -0.260141192$ e $f(0.4) = 0.051824698$, $f(0.3)f(0.4) < 0$. Então, pelo Teorema do Valor Intermédio, existe, pelo menos, uma raiz da equação $f(x) = 0$. Se existisse uma outra raiz nesse intervalo, então a função derivada f' teria, pelo menos, um zero nesse intervalo. Ora, a equação
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = -2x - 1$$
não tem raízes reais positivas, como facilmente se pode observar pela sobreposição dos gráficos das funções $g_1(x) = e^x$ e $g_2(x) = -2x - 1$. Assim, no intervalo $[0.3, 0.4]$ existe uma única raiz da equação $f(x) = 0$.

Para escolher qual o extremo favorável para iniciar na fórmula ieteradora, observamos que
$$f''(x) = e^x + 2 > 0 \quad \forall\, x \in [0.3, 0.4]\,.$$
Como é $f(0.4) > 0$, escolhemos $r_0 = 0.4$. Usando este valor na fórmula iteradora (3.5.2), obtemos as 2 primeiras iterações (para além de r_0),
$$\begin{aligned}
&r_0 = 0.4\,,\\
&r_1 = r_0 - \frac{f(r_0)}{f'(r_0)} = 0.4 - \frac{f(0.4)}{f'(0.4)} = 0.3842565438\,,\\
&r_2 = r_1 - \frac{f(r_1)}{f'(r_1)} = 0.3842565438 - \frac{f(0.3842565438)}{f'(0.3842565438)} = 0.3841231594\,.
\end{aligned}$$
A raiz da equação $f(x) = 0$, com 3 algarismos significativos, é então dada pela iteração r_2,
$$\overline{r} = 0.384 \pm 0.0005\,.$$

Como iremos ver mais adiante, o Método de Newton converge mais rapidamente do que o Método da Bissecção. Por isso, é um método que pode ser usado como complemento ao Método da Bissecção.

Proposição 3.5.2. O módulo do erro (de truncatura) da aproximação r_k, encontrada pelo Método de Newton, é majorado por
$$|E_{tr}| = |r - r_k| \le \frac{|f(r_k)|}{m}\,, \qquad m := \min\{|f'(x)| : x \in [a, b]\}\,.$$

Exemplo 3.5.2. Relativamente ao Exemplo 3.5.1, calcule um majorante para o módulo de truncatura da aproximação encontrada.

Resolução: Pelo que fizemos no exemplo anterior, sabemos que
$$\begin{aligned}
&r_0 = 0.3841231594\,,\\
&f(x) = e^x + x^2 + x - 2\,,
\end{aligned}$$

$$f'(x) = e^x + 2x + 1\,,$$
$$m := \min\{|f'(x)| : x \in [0.3, 0.4]\} = 2.949858808\,.$$

Então,

$$|E_{tr}| \leq \frac{|f(0.3841231594)|}{m} = \frac{|3.0 \times 10^{-8}|}{2.949858808} = 1.016997828 \times 10^{-8} \leq 10^{-7}\,.$$

Note-se que

$$|r_2 - r_1| = |0.3841231594 - 0.3842565438| = 0.0001333844 \leq 0.0002$$

é um majorante do erro absoluto cometido na aproximação r_2.

Dada uma tolerância ε, usa-se habitualmente como **critério de paragem no Método de Newton** uma das condições seguintes:

- tolerância absoluta
$$|r_n - r_{n-1}| < \varepsilon\,;$$
- tolerância relativa
$$\frac{|r_n - r_{n-1}|}{|r_n|} < \varepsilon\,.$$

Infelizmente, podem surgir problemas ao usar qualquer um destes critérios de paragem. Por exemplo, com a tolerância absoluta, pode existir uma sucessão r_n tal que

$$|r_n - r_{n-1}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,,$$

mas r_n divirja. Sem outro conhecimento *a priori*, a condição dada pela tolerância relativa oferece, regra geral, um melhor critério de paragem.

Implementação numérica

(i) Input

- função $f(x)$ da equação $f(x) = 0$
- intervalo $[a, b]$, onde existe uma única raiz de $f(x) = 0$
- aproximação inicial r_0
- tolerância (absoluta ou relativa): TOL
- número máximo de iterações: N_0

(ii) Raiz aproximada r, ou mensagem de erro

1. Set $k = 1$
2. While $k \leq N_0$ do Steps 3-6
   3. Set $r = r_0 - \dfrac{f(r_0)}{f'(r_0)}$ (Calcular r_k)
   4. If $f(r) = 0$ or $|r - r_0| < TOL$ then output r (STOP: Procedimento concluído com sucesso)
   5. Set $k = k + 1$
   6. Set $k_0 = k$ (Actualizar r_0)
7. Output "O Método falhou após N_0 iterações"(STOP: Procedimento concluído sem sucesso)

3.6 Método da Secante

O Método da Secante é um método alternativo ao Método de Newton, no caso em não é possível encontrar uma expressão para a derivada da função que intervém na equação a resolver, ou quando a derivada dessa função se anula em alguma iteração, impossibilitando, por isso, que o Método de Newton possa progredir.

Para derivarmos o Método da Secante , consideremos primeiramente a fórmula iteradora do Método de Newton

$$r_n = r_{n-1} - \frac{f(r_{n-1})}{f'(r_{n-1})}. \tag{3.6.3}$$

Sabemos que para uma função diferenciável f se tem

$$f'(r_{n-1}) = \lim_{x\to r_{n-1}} \frac{f(x) - f(r_{n-1})}{x - r_{n-1}}\,.$$

Então, para um valor r_{n-2} suficientemente próximo de r_{n-1}, podemos escrever

$$f'(r_{n-1}) \simeq \frac{f(r_{n-2}) - f(r_{n-1})}{r_{n-2} - r_{n-1}}\,.$$

Usamos esta expressão para substituir $f'(r_{n-1})$ em (3.6.3) e obter

$$r_n = r_{n-1} - \frac{f(r_{n-1})}{\frac{f(r_{n-2})-f(r_{n-1})}{r_{n-2}-r_{n-1}}} = r_{n-1} - f(r_{n-1})\frac{r_{n-2} - r_{n-1}}{f(r_{n-2}) - f(r_{n-1})}\,.$$

Facilmente se observa que esta expressão é equivalente a

$$r_n = r_{n-1} - f(r_{n-1})\frac{r_{n-1} - r_{n-2}}{f(r_{n-1}) - f(r_{n-2})}\,, \qquad n \geq 1\,. \tag{3.6.4}$$

A expressão (3.6.4) designa-se por **fórmula iteradora do Método da Secante**.

Podemos também dar uma interpretação geométrica mais intuitiva do Método da Secante. Para tal, consideremos dois pontos iniciais de abcissas r_{-1} e r_0. Consideremos a recta secante y ao gráfico da função f nos pontos de abcissas r_{-1} e r_0,

$$\frac{y - f(r_0)}{x - r_0} = \frac{f(r_0) - f(r_{-1})}{r_0 - r_{-1})}.$$

Resolvendo esta equação em ordem a x, obtemos

$$x = r_0 + (y - f(r_0))\frac{r_0 - r_{-1}}{f(r_0) - f(r_{-1}}.$$

Na intersecção desta recta com o eixo dos xx, fixamos a abcissa $x = r_1$,

$$r_1 = r_0 - f(r_0)\frac{r_0 - r_{-1}}{f(r_0) - f(r_{-1})}\,.$$

Consideremos seguidamente a recta secante y ao gráfico da função f nos pontos de abcissas r_0 e r_1,

$$\frac{y - f(r_1)}{x - r_1} = \frac{f(r_1) - f(r_0)}{r_1 - r_0}.$$

Resolvendo esta equação em ordem a x, obtemos

$$x = r_1 + (y - f(r_1))\frac{r_1 - r_0}{f(r_1) - f(r_0)}.$$

Fixamos agora a abcissa $x = r_2$ na intersecção desta recta com o eixo dos xx,

$$r_2 = r_1 - f(r_1)\frac{r_1 - r_0}{f(r_1) - f(r_0)}\,.$$

Continuando este procedimento, obtemos a fórmula iteradora do Método da Secante descrita em (3.6.4).

Observação. Como se observa, o Método da Secante precisa de dois valores iniciais

$$r_{-1} \qquad \text{e} \qquad r_0$$

para desencadear o processo iterativo.

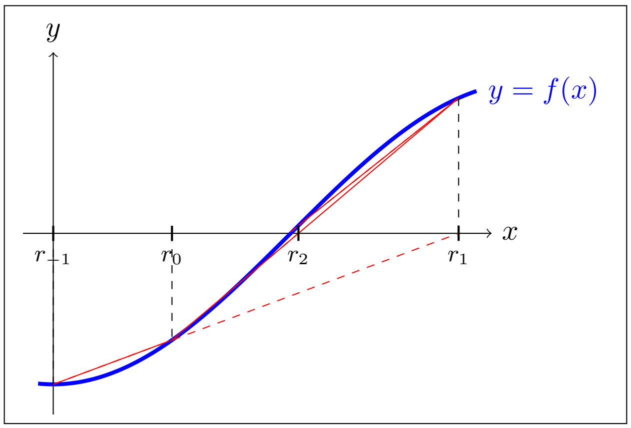

Figura 3.4: Método da Secante, com $r_{-1},\ r_0 < r$.

Exemplo 3.6.1. Usar o Métdo da Secante para encontrar uma raiz da equação do Exemplo 3.5.1 com 3 algarismos significativos, no intervalo $[0.3, 0.4]$.

Resolução: Na resolução do Exemplo 3.5.1, já vimos que existe uma única raiz da equação

$$f(x) = e^x + x^2 + x - 2$$

no intervalo $[0.3, 0.4]$. Para iterações iniciais, consideramos

$$r_{-1} = 0.3\,,$$
$$r_0 = 0.4\,.$$

Aplicando a fórmula iteradora (3.6.4), obtemos

$$r_1 = r_0 - f(r_0)\frac{r_0 - r_{-1}}{f(r_0) - f(r_{-1})} = 0.4 - f(0.4)\frac{0.4 - 0.3}{f(0.4) - f(0.3)} = 0.3833877037\,,$$
$$r_2 = r_1 - f(r_1)\frac{r_1 - r_0}{f(r_1) - f(r_0)} = 0.3833877037 - f(0.3833877037)\frac{0.3833877037 - 0.4}{f(0.3833877037) - f(0.4)}$$

$$
\begin{aligned}
&=0.3841169310\,,\\
r_3 &=r_2 - f(r_2)\frac{r_2 - r_2}{f(r_2)-f(r_2)}\\
&=0.3841169310 - f(0.3841169310)\frac{0.3841169310-0.3833877037}{f(0.3841169310)-f(0.3833877037)} = 0.3841231527\,.
\end{aligned}
$$

A raiz da equação $f(x)=0$, com 3 algarismos significativos, é então dada pela iteração r_3,

$$\overline{r} = 0.384 \pm 0.0005\,.$$

Repare-se que a iteração onde foi obtida a aproximação da raiz $\overline{r} = 0.384 \pm 0.0005$ foi r_2 pelo Método de Newton (cf. Exemplo 3.5.1) e r_3 pelo Método da Secante (cf. Exemplo 3.6.1) Isto tem a ver não só com o facto de o Método de Newton ter uma convergência mais rápida, mas com a escolha das iterações iniciais usadas no Método da Secante.

Observação. Se os valores das iterações iniciais r_{-1} e r_0 estiverem ambos à esquerda, ou ambos à direita, da raiz r, o Método da Secante converge mais rapidamente.

Implementação numérica

(i) Input

- função $f(x)$ da equação $f(x)=0$
- intervalo $[a,b]$, onde existe uma única raiz de $f(x)=0$
- aproximações iniciais r_{-1} e r_0
- tolerância (absoluta ou relativa): TOL
- número máximo de iterações: N_0

(ii) Raiz aproximada r, ou mensagem de erro

1. Set $k=1$, $y_{-1}=f(r_{-1})$ and $y_0=f(r_0)$
2. While $k \le N_0$ do Steps 3-6
    3. Set $r = r_0 - y_0\dfrac{r_0 - r_{-1}}{y_0 - y_{-1}}$ (Calcular r_k)
    4. If $f(r)=0$ or $|r-r_1| < TOL$ then output r (STOP: Procedimento concluído com sucesso)
    5. Set $k=k+1$
    6. Set $r_{-1}=r_0$, $y_{-1}=y_0$, $r_0=r$ and $y_0=f(r)$ (Actualizar r_{-1}, y_{-1} e r_0, y_0)
7. Output "O Método falhou após N_0 iterações"(STOP: Procedimento concluído sem sucesso)

3.7 Convergência

Nesta secção vamos abordar a questão da convergência dos métodos estudados neste capítulo.

Na definição seguinte apresentamos duas possíveis formas de caracterizar a ordem de convergência de um método numérico.

Definição 3.7.1. Seja $r \in \mathbb{R}$ uma raiz da equação

$$f(x) = 0\,,$$

e seja

$$r_{n+1} = \varphi(r_n)$$

um processo iterativo convergente para r. Nas condições da proposição anterior:

(1) Dizemos que a ordem de convergência do método numérico é $\alpha \geq 1$, relativamente à raiz r da equação $f(x) = 0$, se

$$\forall\ n \in \mathbb{N}\ \exists\ M_1,\ M_1 \in \mathbb{R}^+ : 0 < M_1 \leq \frac{r - r_{n+1}}{|r - r_n|^\alpha} \leq M_2\,.$$

(2) Se

$$\exists\ C > 0 : \lim_{n\to\infty} \frac{|r - r_{n+1}|}{|r - r_n|^\alpha} = C\,,$$

dizemos que a ordem de convergência do método é α.

A constante C do caso (2) da definição anterior designa-se por constante de convergência assimptotica. A ordem de convergência α não tem de ser inteira, pode ser um valor qualquer inteiro (não inferior) a 1. No caso de $\alpha = 1$, dizemos que a **convergência** é **linear**, e se $\alpha = 2$, a **convergência** é **quadrática**. De um modo geral, para $\alpha >$, dizemos que a **convergência** é **superlinear**. Um método com uma ordem de convergência superior, converge, regra geral, mais rapidamente.

Na proposição seguinte mostramos que o Método da Bissecção tem convergência linear. Esta convergência é sempre garantida pelo método, não sendo necessárias quaisquer outras condições, para além da continuidade da função envolvida, bem como da existência de, pelo menos, uma raiz no intervalo dado).

Proposição 3.7.1. Suponhamos que num intervalo $[a, b]$ existe uma raiz da equação $f(x) = 0$. Se f é uma função contínua em $[a, b]$, então o Método da Bissecção é convergente e tem ordem de convergência $\alpha = 1$.

Demonstração: Sejam $a_0 = a$ e $b_0 = b$, e consideremos a sucessão $[a_n, b_n]$ $(n \geq 0)$ dos intervalos sucessivos gerados pelo Método da Bissecção. As relações seguintes são imediatas,

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq b_0 = b$$
$$b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq a_0 = a\,.$$

A sucessão a_n é monótona crescente e limitada superiormente, e a sucessão b_n é monótona decrescente e limitada inferiormente. Pelo Teorema da Sucessão Monótona, ambas as sucessões a_n e b_n são convergentes. Além disso,

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{\frac{b_{n-2}-a_{n-2}}{2}}{2} = \cdots = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} = \frac{b - a}{2^{n+1}}\,.$$

Então, existe $r \in (a, b)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = r\,.$$

Por outro lado, como

$$f(a_n)f(b_n) < 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n)f(b_n) \leq 0 \Leftrightarrow f(r)^2 \leq 0 \Rightarrow f(r) = 0\,,$$

r é uma raiz da equação $f(x) = 0$.

Bissectemos, agora, o intervalo $[a_n, b_n]$ em dois intervalos

$$[a_n, h_n] \quad \text{e} \quad [h_n, b_n], \quad \text{com } h_n = \frac{a_n + b_n}{2}\,.$$

Para a raiz r encontrada anteriormente, temos em qualquer um destes dois intervalos,

$$|r - h_n| \leq \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b - a}{2^{n+1}}\,.$$

Daqui sai que

$$\lim_{n\to\infty} h_n = r\,.$$

Isto prova que o Método da Bissecção é convergente.

Para determinar a ordem de convergência, podemos ver, pelo exposto imediatamente antes, que

$$\begin{aligned}
|r - h_n| &\leq \frac{b_n - a_n}{2}\,,\\
|r - h_{n+1}| &\leq \frac{b_{n+1} - a_{n+1}}{2} = \frac{1}{2}\frac{b_n - a_n}{2}\,,
\end{aligned}$$

Daqui sai que

$$|r - h_{n+1}| \simeq \frac{1}{2}|r - h_n|$$

ou seja, que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|r - h_{n+1}|}{|r - h_n|^\alpha} = \frac{1}{2}, \quad \text{com } \alpha = 1\,.$$

Isto mostra que o grau de convergência do Método da Bissecção é $\alpha = 1$. □

Na proposição seguinte apresentamos as condições que nos garantem a convergência quadrática do Método de Newton.

Proposição 3.7.2. Sejam r uma raiz simples de uma equação $f(x) = 0$ e $\delta > 0$ um valor suficientemente pequeno. Se

(i) f é $2-$vezes continuamente diferenciável numa vizinhança $(r - \delta, r + \delta)$ de $x = r$,

(ii) $f'(r) = 0$,

(iii) as funções f' e f'' são ambas limitadas em $(r - \delta, r + \delta)$,

então o Método de Newton tem ordem de convergência $\alpha = 2$.

Demonstração: Seja r_n uma sucessão de iterações do Método de Newton tal que

$$r_n \in (r-\delta, r+\delta)$$

para algum $\delta > 0$, onde r é a raiz da equação

$$f(r) = 0.$$

Suponhamos que f é continuamente diferenciável em $(r-\delta, r+\delta)$ até à ordem 2. Pela Fórmula de Taylor de f, em torno de $x = r_n$, de ordem 1,

$$f(x) = f(r_n) + f'(r_n)(x - r_n) + \frac{f''(c)}{2!}(x - r_n)^2,$$

onde

$$R_2(x - r_n) = \frac{f''(c)}{2!}(x - r_n)^2$$

é o resto da Fórmula de Taylor, sendo c uma abscissa entre x e r_n. Fazendo $x = r$ na Fórmula de Taylor,

$$f(r) = f(r_n) + f'(r_n)(r - r_n) + \frac{f''(c)}{2}(r - r_n)^2.$$

Como $f(r) = 0$, obtemos

$$r = r_n - \frac{f(r_n)}{f'(r_n)} - \frac{f''(c)}{2f'(r_n)}(r - r_n)^2.$$

Pela fórmula iteradora do Método de Newton, sabemos que

$$r_{n+1} = r_n - \frac{f(r_n)}{f'(r_n)}.$$

Substituindo na expressão anterior, vem

$$r - r_{n+1} = -\frac{f''(c)}{2f'(r_n)}(r - r_n)^2.$$

Ou seja,

$$\frac{r - r_{n+1}}{(r - r_n)^2} = -\frac{f''(c)}{2f'(r_n)}.$$

Aplicando módulos e passando ao limite,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|r - r_{n+1}|}{|r - r_n|^2} = \frac{|f''(c)|}{2|f'(x)|}.$$

Assim, desde que f' e f'' sejam limitadas em $(r-\delta, r+\delta)$, e que $f'(r) \neq 0$, a ordem de convergência do método é $\alpha = 2$. $\square$

Na proposição seguinte apresentamos as condições que nos garantem a convergência superlinear, mas subquadrática, do Método da Secante.

Proposição 3.7.3. Sejam r uma raiz simples de uma equação $f(x) = 0$ e suponhamos que $f'(r) \neq 0$. Então o Método da Secante tem ordem de convergência $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Demonstração: Consideremos a fórmula iteradora do Método da Secante

$$r_{n+1} = r_n - f(r_n)\,\frac{r_n - r_{n-1}}{f(r_n) - f(r_{n-1})}, \qquad n \geq 2.$$

Definindo

$$r_n = r + e_n, \tag{3.7.5}$$

onde $\lim_{n\to\infty} r_n = r$ e, portanto, $\lim_{n\to\infty} e_n = 0$. Substituindo na fórmula iteradora, obtemos

$$e_{n+1} = e_n - \frac{f(r+e_n)(e_n - e_{n-1})}{f(r+e_n) - f(r+e_{n-1})}.$$

Suponhamos que f é continuamente diferenciável até a ordem 2 numa vizinhança de r. Pela expansão de Taylor em torno de r

$$f(r+e_n) = f(r) + f'(r)e_n + \frac{f''(r)}{2}e_n^2 + R_2(e_n).$$

Como $f(r) = 0$, obtemos aproximadamente

$$f(r+e_n) \approx f'(r)e_n + \frac{f''(r)}{2}e_n^2.$$

Substituindo na fórmula iteradora

$$e_{n+1} = e_n - \frac{\left(f'(r)e_n + \frac{f''(r)}{2}e_n^2\right)(e_n - e_{n-1})}{(e_n - e_{n-1})\left(f'(r) + \frac{f''(r)}{2}(e_n + e_{n-1})\right)} = \frac{\frac{f''(r)}{2}(e_n - e_{n-1})e_n^2}{f'(r) + \frac{f''(r)}{2}(e_n + e_{n-1})}.$$

Denotando

$$M = \frac{f''(r)}{2f'(r)},$$

temos

$$e_{n+1} = \frac{M(e_n - e_{n-1})}{1 + M(e_n + e_{n-1})}\,e_n^2,$$

de modo que, para n grande

$$e_{n+1} \sim M e_n e_{n-1}.$$

Existe assim uma constante $C > 0$ tal que

$$|e_{n+1}| \leq C\,|e_n|\,|e_{n-1}|.$$

Suponhamos que a sucessão de erros converge para zero com ordem α, ou seja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^\alpha} = L,$$

onde L é um real (finito) distinto de zero. A partir da relação $|e_{n+1}| \sim C|e_n||e_{n-1}|$, dividimos por $|e_n|^\alpha$

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^\alpha} \sim C|e_{n-1}||e_n|^{1-\alpha}.$$

Assumindo que $|e_n| \sim |e_{n-1}|^\alpha$, temos

$$|e_{n-1}| \sim |e_n|^{\frac{1}{\alpha}},$$

e portanto

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^\alpha} \sim C|e_n|^{\frac{1}{\alpha}}|e_n|^{1-\alpha} = C|e_n|^{1-\alpha+\frac{1}{\alpha}}. \tag{3.7.6}$$

Para que o limite seja finito e diferente de zero, é necessário que o expoente do último termo seja,

$$1 - \alpha + \frac{1}{\alpha} = 0.$$

Daqui, obtemos a equação quadrática característica

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0,$$

cuja solução positiva é

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618.$$

Portanto, por (3.7.5) e (3.7.6), e para este valor de α, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{|r - r_{n+1}|}{|r - r_n|^\alpha} = C,$$

o que prova a ordem de convergência $\alpha \approx 1.618$ do Método da Secante. □

A solução $\alpha \approx 1.618$ da equação $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ é conhecida por **número de ouro**. Como este valor está entre 1 e 2, dizemos que o Método da Secante tem ordem de convergência superlinear, mas não quadrática como o método de Newton ($\alpha = 2$).