Análise Matemática II
Cálculo Integral
Exercícios

---

1 Integrais duplos

1. Calcule os seguintes integrais duplos:

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^2 x + y\, dy\, dx.$

b) $\displaystyle\int_1^2 \int_0^4 x^2 - 2y^2\, dx\, dy.$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^1 y\cos(x)\, dy\, dx.$

d) $\displaystyle\int_0^4 \int_1^{\sqrt{x}} 2ye^{-x}\, dy\, dx.$

e) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \sqrt{1-x^2}\, dy\, dx.$

f) $\displaystyle\int_1^3 \int_0^y \frac{4}{x^2+y^2}\, dx\, dy.$

2. Calcule os integrais duplos das funções seguintes sobre as regiões indicadas:

a) $f(x,y) = x\cos(x+y)$ sobre o triângulo de vértices $A = (0,0)$, $B = (\pi, 0)$ e $C = (\pi, \pi)$;

b) $f(x,y) = x$ sobre a região limitada por $y = x^2$ e $y = x^3$;

c) $f(x,y) = x - y$ sobre a região limitada por $y = \sin(x)$ e pelo eixo dos xx entre os pontos $x = 0$ e $x = \pi$;

d) $f(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2}$ sobre a região limitada por $y = \dfrac{x^2}{2}$ e $y = x$;

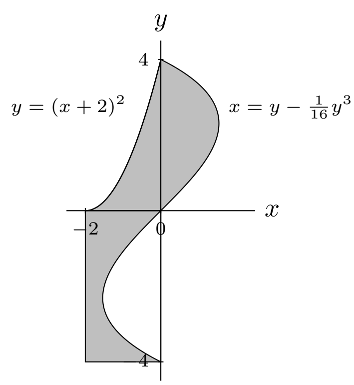
e) $f(x,y) = \sqrt{xy - y^2}$ sobre o triângulo de vértices $A = (0,0)$, $B = (10,1)$ e $C = (1,1)$ (integrando primeiro em ordem a x);

f) $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$ sobre a região limitada pela parábola $x = y^2$ e as retas $x = 0$ e $y = 1$ (integrando primeiro em ordem a x).

3. Indique possíveis integrais repetidos para calcular

$$\iint_D 2x + 5y\, dA,$$

onde D é a região planar indicada na figura abaixo



4. Desenhe o domínio de integração e inverta a ordem de integração:

a) $\int_0^1 \int_x^1 dy\,dx.$

b) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx\,dy.$

c) $\int_0^2 \int_0^x dy\,dx + \int_2^4 \int_0^{4-x} dy\,dx.$

d) $\int_0^1 \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\,dx\,dy.$

e) $\int_{-4}^3 \int_{x^2-9}^{-x+3} 3\,dy\,dx.$

f) $\int_{-6}^2 \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} x\,dx\,dy.$

5. Verifique que os integrais duplos não podem ser calculados através de primitivas imediatas pela ordem de integração apresentada. Inverta a ordem de integração e calcule os integrais.

a) $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{1+x^3}\,dx\,dy.$

b) $\int_0^1 \int_x^1 \sqrt{y^2+1}\,dy\,dx\,;$

c) $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \sqrt{x^4+1}\,dx\,dy\,;$

d) $\int_0^1 \int_{\frac{y}{10}}^{y} \sqrt{yx-x^2}\,dx\,dy + \int_1^{10} \int_{\frac{y}{10}}^{1} \sqrt{yx-x^2}\,dx\,dy\,.$

6. Calcule os integrais duplos utilizando as mudanças de variáveis indicadas:

a) $\int_1^2 \int_{x+2}^{x+3} \frac{dy\,dx}{\sqrt{xy-x^2}}, \quad x = u,\ y = u+v.$

b) $\iint_D x+y\,dA, \quad x = u-v,\ y = u+v$, onde D é a região limitada pelas retas $y = x$, $y = 3x$, $x+y = 4$.

c) $\displaystyle\iint_D x^2 + y^2\, dA, \quad u = x + y,\ v = x - y$, onde D é a região limitada pelas retas $y = x$, $y = -x$, $y = x - 2$ e $y = 2 - x$.

d) $\displaystyle\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\, dA, \quad u = y - x,\ v = y + x$, onde D é a região limitada pelas retas $x + y = 2$ e pelos eixos coordenados.

7. Utilize coordenadas polares para calcular os integrais duplos indicados.

a) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (4 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}\, dx\, dy.$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}} \int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{9-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}\, dy\, dx.$

c) $\displaystyle\iint_D x^2 + y^2\, dA$, onde $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 5\big\}$.

d) $\displaystyle\iint_D \frac{\cos(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dA$, onde $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{\pi^2}{36} \le x^2 + y^2 \le \pi^2, y \ge 0, x \le 0\right\}$.

8. Usando integrais duplos, calcule a área do domínio plano D.

a) $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 3,\ -|x| \le y \le |x|\big\}$.

b) $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ x - y^2 \ge 0\big\}$.

c) $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 4,\ y \ge 1\big\}$.

d) $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + y^2 \le 1,\ x^2 + (y - 1)^2 \le 1\big\}$.

9. Calcule o volume do sólido S em $\mathbb{R}^3$, utilizando integrais duplos.

a) S é limitado pelos planos $x + 2y + z = 2,\ x = 2y,\ y = 0,\ z = 0$.

b) $S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \ge 0,\ y \ge 0,\ 0 \le z \le 12 - 2x - 3y\big\}$.

c) $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le \sqrt{9 - x^2 - y^2}\right\}$.

d) $S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\big\}$.

e) $S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 4 - x^2 - 2y^2\big\}$.

f) $S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1/2 \le z \le 1 - x^2 - y^2\big\}$.

2 Integrais triplos

1. Calcule os integrais triplos indicados.

   a) $\displaystyle\int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 x + y + z \, dx \, dy \, dz.$

   b) $\displaystyle\int_1^4 \int_1^{e^2} \int_0^{1/xz} \ln(z) \, dy \, dz \, dx.$

   c) $\displaystyle\int_0^9 \int_0^{y/3} \int_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} z \, dz \, dx \, dy.$

   d) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} x \, dz \, dy \, dx.$

2. Calcule os integrais triplos sobre os domínios indicados.

   a) $\displaystyle\iiint_E 6z^2 \, dV$, onde E é a região debaixo do plano $4x + y + 2z = 10$ no primeiro octante.

   b) $\displaystyle\iiint_E 3 - 4x \, dV$, onde E é a região compreendida entre a superfície $z = 4 - xy$ e a região no plano-xy definida por $0 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq 1$.

   c) $\displaystyle\iiint_E 15z \, dV$, onde E é a região entre os planos $2x + y + z = 4$ e $4x + 4y + 2z = 20$ que fica em frente à região no plano-yz limitada por $z = 2y^2$ e $z = \sqrt{4y}$.

3. Usando coordenadas cilindrícas, calcule:

   a) o volume do cone dado por $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$;

   b) o integral triplo

   $$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xyz \, dz \, dx \, dy;$$

   c) o integral triplo $\displaystyle\iiint_E yz \, dV$, onde E é a região limitada pela superfície $x = 2y^2 + 2z^2 - 5$ e o plano $x = 1$.

4. Usando coordenadas esféricas, calcule:

   a) o integral triplo $\displaystyle\iiint_E x^2 + y^2 \, dV$, onde E é a região definida por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ e $y \geq 0$.

   b) o volume do sólido definido por

   $$R = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 3(x^2 + y^2) \leq z^2 \leq 4 - x^2 - y^2, \, z \geq 0\right\};$$

   c) o seguinte integral triplo:

   $$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} xy \, dz \, dy \, dx.$$