VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS

Problema 1.
Um casal decidiu decidiu parar de ter filhos assim que tivessem uma criança de cada sexo, ou então, quando tivessem 3 crianças. Admita que é igualmente provável o nascimento de um rapaz ou rapariga. Seja X o número de crianças do sexo masculino. Determine os valores possíveis para X e a sua função massa de probabilidade.

Problema 2.
Considere a variável aleatória X com a seguinte função massa de probabilidade dada por

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1/8	2/8	2/8	2/8	1/8

a) Verifique que se trata de uma função massa de probabilidade.
b) Determine $P(X \leq 2)$, $P(X > -2)$, $P(-1 \leq X \leq 1)$ e $P(X \leq -1 \text{ ou } X = 2)$.
c) Determine a função distribuição de X.
d) Calcule $E[X]$ e $V[X]$.

Problema 3.
Seja X uma variável aleatória com função distribuição dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ 0.2 & -2 \leq x < 0 \\ 0.7 & 0 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

a) Represente graficamente $F(x)$. Verifique que se trata de uma função distribuição.
b) Determine a função massa de probabilidade de X.
c) Determine $P(X > -\frac{1}{2})$, $P(2 < X \leq 4)$, $P(X < 3)$ e $P(X = 1)$.
d) Calcule $E[3X + 4]$ e $V[4X + 2]$.

Problema 4.
Considere a variável aleatória X com a seguinte função de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} cx & x = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Determine c.
b) Determine a função distribuição de X.
c) Calcule a moda e o valor esperado.

Problema 5.
Um programa de computador gera os números inteiros (pseudo-)aleatórios $0, 1, \ldots, 99$ com igual probabilidade. Seja X a variável aleatória que representa o número inteiro gerado pelo programa de computador.
a) Determine a função massa de probabilidade de X.
b) Qual é a probabilidade de ser gerado um número de dois dígitos começado por 3?
c) Determine a média e o desvio padrão de X.

Problema 6.
Uma roleta está dividida em 37 sectores de áreas iguais e numerados de 0 a 36. Seja X a variável aleatória que representa o número obtido, quando a roleta pára de girar.
a) Determine a distribuição de probabilidade de X, indicando os respectivos parâmetros.
b) Qual é a probabilidade de sair um número par?

c) Determine a média e a variância de X.

Problema 7.
Uma vez que nem todos os passageiros de aviação com bilhete comparecem ao *check in*, uma companhia de aviação permite a venda de 122 lugares para um voo com capacidade para 120 passageiros. A probabilidade de um passageiro não comparecer é 0.05 e os passageiros comportam-se independentemente.

a) Qual a probabilidade de que todos os passageiros que compareçam ao *check in* possam embarcar?
b) Qual a probabilidade do voo partir com lugares vazios?

Problema 8.
Num armazém, está preparado para distribuição um lote de 40 embalagens de um produto das quais, exactamente, 4 estão deterioradas. É efectuada uma inspecção sobre uma amostra de 10 embalagens seleccionadas aleatoriamente com reposição. O lote é rejeitado quando se encontram mais de 2 embalagens deterioradas na amostra.

a) Determine a probabilidade de rejeição do lote.
b) Admitindo que a inspecção é feita sem reposição, determine a probabilidade de rejeição do lote.

Problema 9.
Uma empresa está disposta a comprar um conjunto de 50 artigos de acordo com as seguintes condições:

- um inspector examina 4 artigos ao acaso com reposição entre extracções.
- a empresa firmará a compra se a inspecção revelar menos de 2 artigos defeituosos na amostra.

Sabendo o vendedor que 10% dos artigos são defeituosos:

a) Qual a probabilidade que a empresa tem de firmar a compra?
b) Acha que esta probabilidade será significativamente alterada se não forem repostos os artigos que vão sendo inspeccionados? Comente.
c) Nas situações de inspecção consideradas em a) e b), determine a variância do número de artigos defeituosos inspeccionados.

Problema 10.
Suponha que cada chamada telefónica que efectua para uma estação de rádio de grande audiência tem a probabilidade de 0.02 de obter ligação, isto é, de não obter sinal de interrompido. Assuma que as chamadas que efectua são independentes.

a) Determine a probabilidade de serem necessárias pelo menos cinco chamadas para obter ligação.
b) Sabendo que as duas primeiras tentativas falharam, determine a probabilidade de serem necessárias mais três tentativas.

Problema 11.
Um indivíduo tem uma determinada conta de correio electrónico em que a probabilidade de receber uma mensagem SPAM é de 0.01. Assuma que as mensagens que recebe são independentes umas das outras.

a) Qual a probabilidade de em 100 mensagens recebidas, exactamente 3 serem SPAM.
b) Encontre uma boa aproximação para a probabilidade da alínea a).
c) Qual o valor esperado do número de mensagens que recebe entre duas mensagens de SPAM.

Problema 12.
Uma página muito popular de Internet, durante o período de maior tráfego, apresenta graves problemas de acesso. Suponha que, durante esse período, a probabilidade de conseguir aceder a essa página é de 0.01 e que as tentativas que efectua são independentes.

a) Qual o valor esperado e variância do número de tentativas até conseguir aceder à página, nesse período?
b) Se fizer 200 tentativas para aceder à página, qual a probabilidade de ter sucesso em apenas 1% das tentativas?
c) Efectue um cálculo aproximado para a probabilidade da alínea b).

Problema 13.
Um vírus informático atacou 5 de 20 suportes electrónicos de uma empresa.

a) Se seleccionarmos ao acaso e sem reposição 3 desses suportes, qual é a probabilidade de, no máximo, apenas um deles estar infectado com o vírus?
b) No caso de haver reposição, qual seria essa probabilidade?
c) Determine o número médio de extracções (ao acaso), com reposição, necessárias até se obter um suporte electrónico com vírus.

Problema 14.
Numa dada região, o número de terramotos que ocorrem segue uma distribuição de Poisson com média de 5 terramotos por ano.

a) Qual a probabilidade de ocorrer pelo menos um terramoto num ano?
b) Qual a probabilidade de não ocorrer nenhum terramoto por ano.

Problema 15.
A uma central telefónica chegam em média 5 pedidos de chamadas por minuto no período de maior movimento. A central só pode estabelecer no máximo 10 chamadas por minuto. Utilizando a distribuição de Poisson, calcule a probabilidade da central estar sobrecarregada durante um dado minuto, no período de maior movimento.

Problema 16.
O número de partículas emitidas por uma fonte radioactiva, num dado período de tempo, é uma variável aleatória com distribuição de Poisson. Sabendo que a probabilidade de não ser emitida qualquer partícula nesse período de tempo é $1/3$, calcule a probabilidade de que nesse período de tempo a fonte emita pelo menos 2 partículas.