Universidade do Algarve
Faculdade de Ciências e Tecnologia

Física I

Licenciaturas em Engenharia Informática e Bioengenharia
1º ano, 2º semestre

Série de problemas nº 1
Vectores

José Mariano
Ano lectivo de 2024/2025

15. Você deve especificar um sistema de coordenadas para (*a*) somar dois vetores, (*b*) formar seu produto escalar, (*c*) formar seu produto vetorial, (*d*) achar seus componentes?

16. Por convenção, usa-se a mão direita em regras da álgebra vetorial. Que mudanças seriam necessárias se, ao invés, fosse adotada uma convenção utilizando a mão esquerda?

problemas

SEÇÃO 2-2

1. Descreva dois vetores **a** e **b** que satisfaçam às seguintes condições:

   (*a*) $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{c}$; $a+b=c$
   (*b*) $\mathbf{a}-\mathbf{b} = \mathbf{c}$; $a-b=c$
   (*c*) $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{c}$; $c^2=a^2+b^2$
   (*d*) $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{a}-\mathbf{b}$

2. Um deslocamento possui módulo $s_1 = 30$ cm. Outro deslocamento possui módulo $s_2 = 40$ cm. (*a*) Determine literalmente o módulo s do deslocamento resultante supondo que os dois deslocamentos sejam perpendiculares entre si. (*b*) Se o módulo de s for igual a 70 cm, qual seria a orientação relativa dos deslocamentos? (*c*) E se o módulo do deslocamento resultante for igual a 10 cm? (*d*) Calcule o módulo do deslocamento resultante supondo que os deslocamentos componentes sejam perpendiculares entre si.
   Resposta: (*a*) $s = (s_1^2 + s_2^2)^{1/2}$. (*b*) Os dois deslocamentos seriam paralelos e de mesmo sentido. (*c*) Os dois deslocamentos seriam paralelos e de sentidos contrários. (*d*) $s = 50$ cm.

3. Um carro percorre uma distância de 30 km no sentido Oeste-Leste; a seguir percorre 10 km no sentido Sul-Norte e finalmente percorre 5 km numa direção que forma um ângulo de 30° com o Norte e 60° com o Leste. (*a*) Use um sistema cartesiano e ache o módulo do deslocamento resultante. (*b*) Obtenha o ângulo entre o vetor deslocamento resultante e o sentido Oeste-Leste.

4. Seja a o módulo de **a** e b o módulo de **b**. (*a*) Qual é o limite *superior* para o módulo da resultante destes dois vetores? (*b*) Obtenha o limite *inferior* para o módulo da soma vetorial destes dois vetores. (*c*) Supondo $a = 2b$, qual deveria ser o limite superior e o limite inferior para o módulo da soma destes dois vetores?
   Resposta: (*a*) $a + b$. (*b*) $|a - b|$, onde as barras verticais indicam o valor absoluto. (*c*) Limite superior: $3b$; limite inferior: b.

5. Um vetor **a** tem módulo de 10 unidades e sentido de Oeste para Leste. Um vetor **b** tem módulo de 20 unidades e sentido de Sul para Norte. Determine o módulo dos seguintes vetores: (*a*) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, (*b*) $\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

6. Um jogador de golfe dá três tacadas para colocar a bola num buraco. A primeira tacada desloca a bola 6 m para o Norte, a segunda desloca a bola 2 m para o Leste e a terceira desloca a bola 2 m para o Nordeste. Determine o módulo, a direção e o sentido do deslocamento equivalente que poderia ser obtido com uma única tacada.
   Resposta: *módulo:* 8,16 m; *direção:* formando um ângulo de 65,3° com a direção Oeste-Leste; *sentido:* de baixo para cima.

SEÇÃO 2-3

7. (*a*) Um homem sai da sua casa, caminha 50 m de Oeste para Leste, 20 m de Norte para o Sul e a seguir tira uma pedra do bolso deixando-a cair de um penhasco de 500 m de altura. Calcule o módulo do deslocamento total da pedra. (*b*) A seguir o homem retorna a sua casa percorrendo um caminho diferente. O módulo do deslocamento do homem na ida pode ser calculado pelos dados acima. Calcule o módulo do deslocamento total do homem durante a volta.

8. Determine os módulos dos componentes da resultante e o módulo da resultante da soma de dois deslocamentos vetoriais **a** e **b**. Suponha que os vetores **a** e **b** possuam os seguintes componentes em m, em relação a um sistema cartesiano ortogonal:

$$a_x = 4,\ b_x = -2;\ a_y = 0,\ b_y = 5;\ a_z = 3,\ b_z = -1$$

   Resposta: Módulos dos componentes: 2 m, 5 m, 2 m. Módulo da resultante: 5,74 m.

9. Uma sala tem as seguintes dimensões: 3 m x 4 m x 3 m. Um inseto voa desde um canto da sala até o outro canto diametralmente oposto. (*a*) Calcule o módulo do deslocamento total do inseto. (*b*) O deslocamento total depende da trajetória? (*c*) Faça um esquema usando um sistema cartesiano tri-ortogonal para indicar os componentes do vetor deslocamento total. (*d*) Se o inseto andasse, em vez de voar, qual seria a trajetória de menor comprimento entre os dois pontos considerados?

10. Dois vetores são dados por: $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Determine: (*a*) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, (*b*) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, (*c*) $-\mathbf{a} + \mathbf{b}$.
Resposta: (*a*) $6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; (*b*) $-\mathbf{j} + \mathbf{k}$; (*c*) $\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

11. Dois vetores de módulos a e b formam entre si um ângulo θ. Determine o módulo s do vetor resultante da soma destes vetores.

12. Dados dois vetores $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, determine o módulo e a direção de $\mathbf{a}$, de $\mathbf{b}$, de $(\mathbf{a} - \mathbf{b})$, de $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ e de $(\mathbf{b} - \mathbf{a})$.
Resposta: Os módulos são: 2,24; 1,41; 1; 3,61; 1. As direções destes vetores fazem com o eixo Ox os seguintes ângulos: $-26{,}6°$; $-45°$; $0°$; $-33{,}7°$; $180°$.

13. Os vetores **a** e **b** estão orientados conforme indica a Fig. 2-15. A resultante da soma destes vetores vale **R**. Temos: $a = b = 5$ unidades. Determinar: (*a*) Os componentes de **R** segundo Ox e segundo Oy, (*b*) O módulo de **R**, (*c*) O ângulo que **R** forma com o eixo Ox.

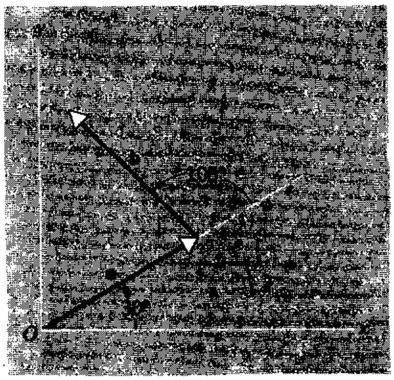

figura 2-15

14. Obtenha uma expressão analítica geral para determinar o módulo e a direção da resultante de uma soma vetorial de N vetores em duas dimensões.
Resposta: Sendo **R** o vetor resultante, os seus componentes R_x e R_y são calculados pelas relações:

$$R_x = \Sigma u_x;\ R_y = \Sigma u_y;$$

onde u_x e u_y são os componentes dos vetores ao longo do eixo Ox e Oy e a soma é feita para todos os componentes dos N vetores. O módulo da resultante é dado por: $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$. A direção do vetor resultante com o sentido positivo do eixo Ox é dada por: $\theta = \text{arc tg}\,(R_y/R_x)$.

15. A resultante de uma soma vetorial de dois vetores possui módulo igual a 4 m. O módulo de um dos vetores componentes é igual a 2 m e o ângulo entre os dois vetores componentes é igual a 60°. Calcule o módulo do outro vetor componente.

16. Uma partícula sofre três deslocamentos sucessivos sobre um plano: 2 m de Norte para Sul, 4 m de Oeste para Leste e 12 m de baixo para cima numa direção que forma um ângulo de 60° com a direção Oeste-Leste. Escolha o eixo Ox apontando no sentido Oeste-Leste e o eixo Oy no sentido Sul-Norte. Faça a origem O coincidir com a origem dos deslocamentos. Determine: (*a*) os componentes de cada deslocamento, (*b*) os componentes do deslocamento **R** resultante, (*c*) o módulo, a direção e o sentido do deslocamento resultante.
Resposta: (*a*) $a_x = 0$, $a_y = -2$ m
$b_x = 4$ m, $b_y = 0$
$c_x = 6$ m, $c_y = 10{,}39$ m
(*b*) $R_x = 10$ m; $R_y = 8{,}39$ m
(*c*) $R = 13{,}05$ m.

Direção e sentido: **R** forma um ângulo de 40° com o sentido positivo do eixo Ox, no sentido de rotação anti-horário.

17. Use o mesmo método do Probl. 14 e obtenha expressões gerais para os componentes da resultante, para o módulo e para a direção da resultante da soma vetorial de N vetores em *três dimensões*.

18. Uma pessoa viaja de um local situado a uma latitude 30° S e a uma longitude de 40° L para um local situado a 30° S e a 80° L. Usando um sistema de coordenadas cartesianas com origem no centro da Terra e um sistema de coordenadas esféricas, determine: (*a*) o deslocamento entre os dois pontos, (*b*) o comprimento da trajetória percorrida supondo que a pessoa viaje em linha reta sobre o círculo paralelo ao Equador situado a 30° S. Faça $r_T = 6\,400$ km.
Resposta: (*a*) 3 791 km, (*b*) 3 869 km.

19. Considere um triângulo equilátero. Faça o eixo Ox coincidir com um dos lados do triângulo, sendo a origem O um dos vértices do triângulo. Oriente vetores ao longo dos lados do triângulo no sentido anti-horário. Usando o método da soma vetorial verifique que a soma vetorial destes vetores é igual a zero (isto é verdade para a soma de vetores ao longo de uma poligonal *fechada*). Usando a decomposição vetorial destes vetores ao longo dos eixos Ox e Oy, mostre que:

$$1 + \cos 120° + \cos 240° = 0$$
$$\text{sen}\ 120° + \text{sen}\ 240° = 0$$

A utilização do método da *indução* finita (ou de qualquer outro método) pode conduzir à generalização do resultado acima obtido para um triângulo equilátero. Generalize este resultado para um *polígono regular* com um número de lados igual a N e obtenha uma relação: (*a*) para a soma dos cossenos dos ângulos formados entre os vetores consecutivos do lado do polígono e o eixo Ox, (*b*) para a soma dos senos destes ângulos.

20. Considere o Probl. 10 deste Capítulo. Determine o vetor $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$.
Resposta: $6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

21. Um vetor **v** possui módulo igual a 4 m e está situado a 45° com a direção Oeste-Leste no sentido anti-horário. Determine o módulo, a direção e o sentido dos seguintes vetores: (*a*) $\mathbf{v}/2$, (*b*) $-2\mathbf{v}$.

22. Considere a Fig. 2-6*b*. (*a*) Determine o valor do produto escalar de cada vetor unitário pelo próprio vetor unitário de cada direção. (*b*) Obtenha o produto escalar do vetor unitário de uma direção pelo vetor unitário de outra direção.
Resposta: (*a*) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$. (*b*) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0$

23. No sistema dextrógiro de coordenadas cartesianas ortogonais indicado na Fig. 2-6*b* mostre que o produto vetorial de um vetor unitário pelo vetor unitário da mesma direção é igual a zero. Verifique que o produto vetorial de dois vetores unitários de direções diferentes obedece à seguinte regra cíclica:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k};\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i};\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

24. (*a*) Quanto vale o produto vetorial de um vetor por outro vetor paralelo? (*b*) Como se pode calcular o módulo de um vetor **v** usando-se um produto escalar?
Resposta: (*a*) zero. (*b*) $v = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})^{1/2}$.

25. Considere um vetor **a** na direção $+Ox$ e um vetor **b** na direção $+Oy$ num sistema dextrógiro de coordenadas cartesianas. Seja d uma grandeza escalar. (*a*) Qual é a direção e o sentido do vetor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$? (*b*) Qual é a direção e o sentido do vetor $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$? (*c*) Qual é a direção e o sentido do vetor $d\mathbf{b}$? (*d*) Quanto vale o produto escalar $\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$?

26. Para os vetores mencionados no Probl. 13 determine: (*a*) $\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$, (*b*) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
Resposta: (*a*) $-6{,}47$, (*b*) $24{,}15\ \mathbf{k}$.

27. Um vetor **u** tem módulo igual a 15 unidades e um vetor **v** possui módulo igual a 10 unidades. Os dois vetores formam entre si um ângulo de 45°. Calcule: (*a*) o produto escalar destes vetores, (*b*) o módulo do produto vetorial destes vetores.

28. Considere a Fig. 2-16. Calcule o módulo do produto vetorial entre os vetores **a** e **b** e compare o resultado com a área do triângulo indicado na ilustração.
Resposta: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = a \cdot b \operatorname{sen} \phi = 2 \times$ área do triângulo.

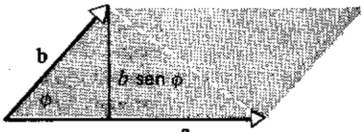

figura 2-16

29. Mostre que o módulo de um produto vetorial é numericamente igual à área do paralelogramo que possui os vetores como lados (ver a Fig. 2-16).

30. Calcule o volume de um paralelepípedo formado por três vetores não coplanares **a**, **b** e **c**.
Resposta: Volume: $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

31. Suponha que $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\cdot(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0$. Qual a relação entre a e b?

32. Considere dois vetores dados por:

$$u = \mathbf{i}u_x + \mathbf{j}u_y + \mathbf{k}u_z; \qquad \mathbf{v} = \mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y + \mathbf{k}v_z$$

Determine o produto escalar $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$.
Resposta: $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z$

33. Use a definição de produto escalar $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = uv \cos\phi$ e o resultado do Probl. anterior para determinar uma expressão para o ângulo ϕ entre os vetores **u** e **v**.

34. Obtenha analiticamente o *produto vetorial* dos vetores **u** e **v** mencionados no Probl. 32 em termos dos componentes destes vetores.
Resposta: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_yv_z - u_zv_y)\mathbf{i} + (u_zv_x - u_xv_z)\mathbf{j} + (u_xv_y - u_yv_x)\mathbf{k}$

35. Três vetores são dados por: $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Determine: (*a*) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, (*b*) $\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a} \times \mathbf{c})$, (*c*) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b} - \mathbf{c})$, (*d*) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} - \mathbf{c})$.

36. Considere a Fig. 2-17. Sejam **b** e **c** as diagonais que se interceptam, pertencentes a um cubo de aresta a. (*a*) Encontre os componentes do vetor **d** obtido pelo produto vetorial $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$. (*b*) Calcule os valores $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}$ e $\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}$. (*c*) Ache o ângulo entre **b** e **c**, entre **b** e **d** e entre **c** e **d**. (*d*) Determine o ângulo entre a diagonal de uma das faces (representada por **b**) e a diagonal do cubo **e**.
Resposta: (*a*) $d_x = d_z = a^2$, $d_y = -a^2$. (*b*) $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = a^2$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{d} = \mathbf{c}\cdot\mathbf{d} = 0$
(*c*) 60°, 90°, 90°. (*d*) 35,3°.

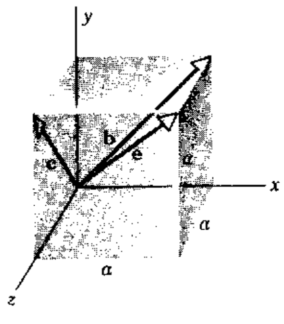

figura 2-17

37. Suponha que **u**, **v** e **w** sejam vetores não coplanares. (*a*) Mostre que

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w}\cdot(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{w} \times \mathbf{u})$$

(*b*) Seja $a = \mathbf{u}\cdot(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ e considere os vetores

$$\mathbf{A} = (1/a)(\mathbf{v} \times \mathbf{w}), \quad \mathbf{B} = (1/a)(\mathbf{u} \times \mathbf{w}), \quad \mathbf{C} = (1/a)(\mathbf{w} \times \mathbf{u})$$

(*c*) Determine o produto escalar dos vetores u, v, w pelos vetores **A**, **B**, **C**. (*d*) Se *u*, *v*, *w* possuem dimensão de comprimento, ache a dimensão de **A**, de **B** e de **C**.

38. Dois vetores u e v possuem componentes, em m, dadas por: $u_x = 3$, $u_y = 2$; $v_x = 1$, $v_y = 6$. (*a*) Ache o ângulo entre u e v. (*b*) Determine os componentes de um vetor w perpendicular ao vetor v contido no plano *xOy* e que possua módulo igual a 4 m. (*c*) Obtenha os componentes e o módulo do vetor 2u – v.
Resposta: (*a*) 46,8°. (*b*) $w_x = +3{,}95$ m; $w_y = +0{,}66$ m. (*c*) 5 m, – 2 m; módulo = = 5,39 m.

39. Já vimos que a propriedade comutativa não se aplica ao produto vetorial, ou seja, **a** x **b** é diferente de **b** x **a**. (*a*) Mostre que a propriedade comutativa se aplica ao produto escalar, isto é: **a** • **b** = **b** • **a**. (*b*) Mostre que a propriedade distributiva se aplica tanto ao produto escalar quanto ao produto vetorial, isto é, mostre que

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \quad \text{e que } \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

40. Use um sistema de coordenadas cartesianas *xyz* para verificar a validade da seguinte identidade:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c}$$

Se **a** for paralelo ao eixo *Ox*, **b** paralelo ao eixo *Oy* e **c** paralelo ao eixo *Oz*, calcule o valor do triplo produto vetorial indicado acima.
Resposta: 0.

41. As coordenadas de três pontos são dadas por: *A* (2, 2, 5); *B* (1, 0, 2); *C* (1, 1, 2). Considere um vetor **u** com origem no ponto *C* e extremidade no ponto *A* e outro vetor com origem no ponto *B* e extremidade no ponto *A*. Determine: (*a*) **u** • **v**, (*b*) **u** x **v**.

SEÇÃO 2-5

42. *Invariância da soma vetorial em relação à rotação de um sistema de coordenadas.* A Fig. 2-18 mostra dois vetores **a** e **b** e dois sistemas cartesianos ortogonais diferentes. Os eixos *x'Ox* e *y'Oy* fazem entre si um ângulo igual a ϕ. Mostre que **a** + **b** possui a mesma direção, o mesmo módulo e o mesmo sentido em ambos os sistemas de coordenadas. Se o módulo de **a** – **b** for igual a 5 unidades em relação ao sistema *xOy*, qual será o módulo de **a** – **b** em relação ao sistema *x'Oy'*?
Resposta: 5 unidades.

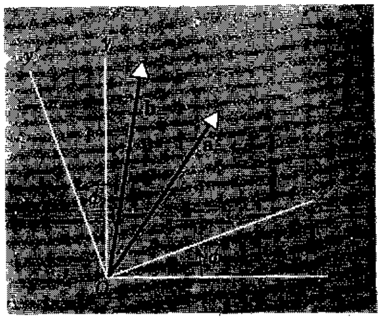

figura 2-18

43. Considere a Fig. 2-14 (ver o final da Seção 2-5). (*a*) Verifique quais dos três vetores unitários mudam de sentido na imagem do espelho. (*b*) Considere um vetor **u** situado no plano *Oxy* do sistema de coordenadas indicado pela letra (*b*) da Fig. 2-14; considere outro vetor **u'** como sendo a imagem do vetor **u** no sistema indicado pela letra (*a*) da Fig. 2-14. Verifique se o sentido do produto vetorial **u** x **j** possui sentido igual ou contrário ao do produto vetorial **u'** x **j**.