Capítulo 4

Sistemas de equações lineares

4.1 Espaço vectorial $\mathbb{R}^n$

Seja $n \in \mathbb{N}$ arbitrário. Denota-se por $\mathbb{R}^n$ o conjunto de todas as sucessões finitas de N números reais que se podem representar pelo $n-$uplo

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)\,.$$

Em particular, $\mathbb{R}^2$ é o conjunto de todos os pares (x, y) de números reais e $\mathbb{R}^3$ é o conjunto de todos os triplos (x, y, z) de números reais. Num sentido mais alargado, designamos os elementos genéricos de $\mathbb{R}^n$ por pontos. O real x_k, para $k = 1, \ldots, n$, designa-se por k-ésima **componente**, ou k-ésima **coordenada**, do ponto $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Dados dois elementos $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, tem-se $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ se e só se cada componente de $\boldsymbol{x}$ é igual à respectiva componente de $\boldsymbol{y}$, isto é,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \Longleftrightarrow x_k = y_k \quad \forall\, k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Em $\mathbb{R}^n$ define-se a **adição** por

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

e a **multiplicação por escalar** por

$$\alpha\boldsymbol{x} = \alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n),$$

para quaisquer $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. O conjunto $\mathbb{R}^n$ munido com estas duas operações tem uma estrutura algébrica de **espaço vectorial**, ou **espaço linear**, isto é, $\mathbb{R}^n$ é um grupo comutativo para a adição e

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \neq \emptyset \quad &\Longleftarrow \quad (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n; \\ (\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^n \quad &\Longleftarrow \quad \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

A noção de que $\mathbb{R}^n$ é um grupo comutativo para a adição, quer dizer que, para quaisquer $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$:

(i) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$;

(ii) $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$;

(iii) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$;

(iv) existe o elemento neutro $\mathbf{0}=(0,\ldots,0)$ e $\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$;

(v) todo $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ tem simétrico $-\boldsymbol{x}=(-x_1,\ldots,-x_n)\in\mathbb{R}^n$.

Neste sentido, os elementos de $\mathbb{R}^n$ podem ser designados por vectores, a sua notação pode aparecer escrita na forma $\vec{x}$. Sejam, agora, $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_k$ vectores de $\mathbb{R}^n$. Diz-se que o vector $\boldsymbol{x}$ é uma **combinação linear** de $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_k$, se existirem k escalares α_1, α_2, ..., α_k tais que

$$\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{x}_k.$$

Por outro lado, diz-se que $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_k\in\mathbb{R}^n$ são **vectores linearmente independentes**, se

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{x}_k=\mathbf{0}\Longrightarrow\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k=0.$$

Denotamos por $\boldsymbol{e}_k$, com $k\in\{1,\ldots,n\}$, o elemento de $\mathbb{R}^n$ com as componentes todas nulas excepto a $k-$ésima componente que é 1. Assim,

$$\boldsymbol{e}_1=(1,0,\ldots,0),\ \boldsymbol{e}_2=(0,1,0,\ldots,0),\ \ldots,\ \boldsymbol{e}_n=(0,\ldots,0,1).$$

Usando esta notação, podemos escrever, para qualquer vector $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$,

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n.$$

Verifica-se que os vectores $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ são linearmente independentes. As duas afirmações anteriores exprimem o facto de $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ ser uma **base vectorial** de $\mathbb{R}^n$. Isto significa que qualquer elemento de $\mathbb{R}^n$ se escreve de modo único como combinação linear de $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$.

Definição 4.1.1. Chama-se produto interno, ou produto escalar a uma aplicação

$$\cdot:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}_0^+$$

tal que

(i) $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$;

(ii) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z}+\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{z}$ e $\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{z}$;

(iii) $(\alpha\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\cdot(\alpha\boldsymbol{y})$;

(iv) $\mathbf{0}\cdot\mathbf{0}=0$ e, para qualquer $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}>0$;

para todos $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^n$ e todo $\alpha\in\mathbb{R}$.

Um exemplo, é o produto interno euclideano, definido por

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=(x_1,\ldots,x_n)\cdot(y_1,\ldots,y_n)=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$$

para quaisquer $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$. O espaço vectorial $\mathbb{R}^n$ munido deste produto interno designa-se por **espaço euclidiano**.

Definição 4.1.2. Chama-se norma vectorial a uma aplicação

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$$

tal que:

(i) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$;

(ii) $\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \|\boldsymbol{x}\|$;

(iii) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq= \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y})\|$;

para todos $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Alguns exemplos de normas vectoriais, são:

(1) **norma da soma**

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|\,;$$

(2) **norma euclidiana**

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{(x_1, \dots, x_n) \cdot (x_1, \dots, x_n)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\,;$$

(3) **norma do máximo**

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max_{k \in \{1, \dots, n\}} |x_k|\,.$$

A norma euclidiana é pois induzida pelo produto euclidiano. Munido de uma norma $\|\cdot\|$, $\mathbb{R}^n$ diz-se um espaço vectorial normado. Quando nada for dito sobre a norma do espaço vectorial, subentende-se que se trata da norma euclidiana.

Exemplo 4.1.1. Sendo $(-5, 1, 3)$ um elemento de $\mathbb{R}^3$, calcule:

(a) $\|(-5, 1, 3)\|_1$; (b) $\|(-5, 1, 3)\|_2$; (c) $\|(-5, 1, 3)\|_\infty$.

Resolução: (a) $\|(-5, 1, 3)\|_1 = |-5| + |1| + |3| = 9$;

(b) $\|(-5, 1, 3)\|_2 = \sqrt{(-5)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{35} \simeq 5.92$;

(c) $\|(-5, 1, 3)\|_\infty = \max\{|-5|, |1|, |3|\} = 5$.

Como se observa do exemplo anterior, temos

$$\|(-5, 1, 3)\|_\infty \leq \|(-5, 1, 3)\|_2 \leq \|(-5, 1, 3)\|_1\,.$$

Assim, podemos generalizar dizendo que, para qualquer vetor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, vale a desigualdade

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \|\boldsymbol{x}\|_1. \tag{4.1.1}$$

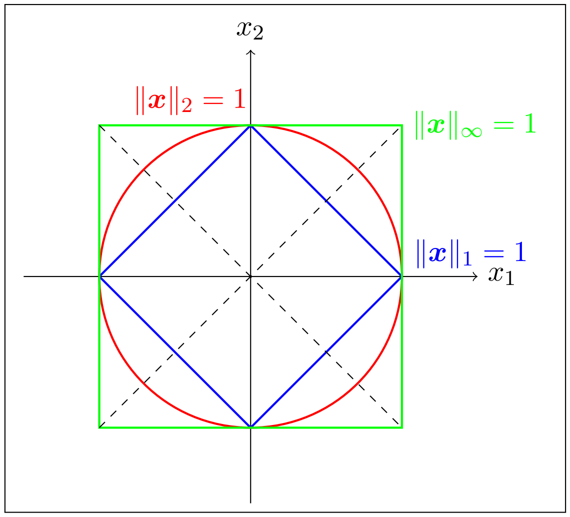

Figura 4.1: Relação entre as normas $\|\boldsymbol{x}\|_1$, $\|\boldsymbol{x}\|_2$ e $\|\boldsymbol{x}\|_\infty$.

O diagrama da Fig 4.1 representa os conjuntos (ou bolas unitárias) definidos por

$$B_p = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\boldsymbol{x}\|_p = 1\}, \quad \text{para } p = 1,\ 2,\ \infty.$$

Neste caso, ocorre o inverso da desigualdade (4.1.1), ou seja, quanto maior é o valor de p, menor é a bola unitária correspondente. Assim,

$$B_\infty \supseteq B_2 \supseteq B_1, \tag{4.1.2}$$

isto é, o quadrado verde ($\|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1$) contém o círculo vermelho ($\|\boldsymbol{x}\|_2 = 1$), que contém o losango azul ($\|\boldsymbol{x}\|_1 = 1$).

Vejamos que (4.1.2) não contradiz (4.1.1). Pata tal, suponhamos que para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ se tem (4.1.1). Isso significa que, para um mesmo vector $\boldsymbol{x}$, a norma $\|\cdot\|_1$ atribui o maior valor, enquanto a norma $\|\cdot\|_\infty$ atribui o menor valor. Assim, todo o vector que se encontra dentro da bola unitária de $\|\cdot\|_1$ também se encontra dentro das bolas unitárias de $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$. Por consequência, os conjuntos dos vectores que satisfazem $\|\boldsymbol{x}\|_p \leq 1$ serão maiores quando p aumenta. De facto, se $\|\boldsymbol{x}\|_1 \leq 1$, então necessariamente $\|\boldsymbol{x}\|_2 \leq 1$ e $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leq 1$. Portanto, temos a relação entre os conjuntos dada por (4.1.2).

As normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ são casos particulares de uma norma mais geral.

Definição 4.1.3. Dado $p \in \mathbb{N}$, define-se a norma de Hölder como sendo a aplicação

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$$

definida por

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

A norma de Hölder pode ser estendida ao caso de $p = \infty$, recuperando a norma do máximo definida acima,

$$\|(x_1,\dots,x_n)\|_\infty = \max_{k\in\{1,\dots,n\}} |x_k|\,.$$

Na proposição seguinte estabelece-se um dos resultados fundamentais que é usado em várias passagens de demonstrações que se seguem.

Proposição 4.1.1 (Desigualdade de Hölder em $\mathbb{R}^n$)**.** Sejam $1 \le p,q \le \infty$ tais que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, com a convenção de que $\frac{1}{\infty}=0$. Para quaisquer $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$, temos

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \|\boldsymbol{x}\|_p\,\|\boldsymbol{y}\|_q. \tag{4.1.3}$$

Em notação de normas,

$$\|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}\|_1 \le \|\boldsymbol{x}\|_p\,\|\boldsymbol{y}\|_q, \tag{4.1.4}$$

ou simplesmente $\langle|\boldsymbol{x}|,|\boldsymbol{y}|\rangle \le \|\boldsymbol{x}\|_p\|\boldsymbol{y}\|_q$.

Demonstração: Se $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ ou $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ a desigualdade é trivial. Suponhamos então que $\boldsymbol{x}\ne\boldsymbol{0}$ e $\boldsymbol{y}\ne\boldsymbol{0}$.

Caso 1: $1<p,q<\infty$ **com** $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$**.** Definamos

$$A := \|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}, \qquad B := \|\boldsymbol{y}\|_q = \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{1/q},$$

e

$$u_i := \frac{|x_i|}{A}, \qquad v_i := \frac{|y_i|}{B}, \qquad i=1,\dots,n.$$

Então $u_i, v_i \ge 0$ e

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^p = 1,\ \sum_{i=1}^{n} v_i^q = 1.$$

Consideremos a **desigualdade de Young**: para $a,b\ge 0$ e $p,q>1$, com $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, tem-se

$$ab \le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}. \tag{4.1.5}$$

Tomando $a=u_i$ e $b=v_i$, obtemos na desigualdade de Young

$$u_i v_i \le \frac{u_i^p}{p}+\frac{v_i^q}{q}.$$

Somando de $i=1$ até $i=n$, vem

$$\sum_{i=1}^{n} u_i v_i \le \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} u_i^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n} v_i^q = \frac{1}{p}\cdot 1 + \frac{1}{q}\cdot 1 = 1.$$

Multiplicando por AB, obtemos a desigualdade desejada:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| = AB \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \leq AB = \|\boldsymbol{x}\|_p \, \|\boldsymbol{y}\|_q.$$

Caso 2: $p = 1, \; q = \infty$ (ou $p = \infty, \; q = 1$). Por definição das respectivas normas, temos $\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ e $\|\boldsymbol{y}\|_\infty = \max_i |y_i|$. Então

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \max_i |y_i| = \|\boldsymbol{y}\|_\infty \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|\boldsymbol{x}\|_1 \, \|\boldsymbol{y}\|_\infty,$$

o que é exactamente a desigualdade de Hölder neste caso. □

No caso $1 < p, q < \infty$, a igualdade em (4.1.3), ou (4.1.4), ocorre se, e só se, as desigualdades de Young usadas são iguais para todo i com $u_i v_i > 0$. Isto equivale a existirem constantes $c \geq 0$ e sinais $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ tais que

$$|x_i|^p = c\,|y_i|^q \qquad \text{para todo } i \text{ com } x_i y_i \neq 0,$$

ou seja, os vectores $(|x_i|^p)_i$ e $(|y_i|^q)_i$ são proporcionais. Geometricamente, $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ têm direcções compatíveis (proporcionais após as potências apropriadas). Nos casos degenerados $p = 1, q = \infty$, a igualdade ocorre quando todo o suporte de $\boldsymbol{x}$ se encontra nas coordenadas onde $|y_i| = \|\boldsymbol{y}\|_\infty$.

Proposição 4.1.2. Se $p, q \in [1, \infty]$ e $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, então

$$\|\boldsymbol{x}\|_p \;\leq\; n^{\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right|} \, \|\boldsymbol{x}\|_q, \tag{4.1.6}$$

com a convenção de $\frac{1}{\infty} = 0$. Em particular, quando $p \leq q$, tem-se

$$\|\boldsymbol{x}\|_q \;\leq\; \|\boldsymbol{x}\|_p \;\leq\; n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \, \|\boldsymbol{x}\|_q, \tag{4.1.7}$$

e, para $q \leq p$, temos

$$\|\boldsymbol{x}\|_p \;\leq\; \|\boldsymbol{x}\|_q \;\leq\; n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \, \|\boldsymbol{x}\|_p. \tag{4.1.8}$$

Demonstração: Seja $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e escrevamos $a_i := |x_i| \geq 0$. Para simplificar a exposição, dividimos a demonstração em dois casos essenciais.

Caso 1: $1 \leq p \leq q < \infty$. Primeiro mostramos que $\|\boldsymbol{x}\|_q \leq \|\boldsymbol{x}\|_p$. Se $\|\boldsymbol{x}\|_p = 0$, então $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ e a desigualdade é trivial. Suponhamos que $\|\boldsymbol{x}\|_p > 0$ e consideremos

$$y_i := \frac{a_i}{\|\boldsymbol{x}\|_p} \in [0, 1].$$

Facilmente se verifica que $\sum_{i=1}^{n} y_i^p = 1$. E como $0 \leq y_i \leq 1$ e $q \geq p$ implica $y_i^q \leq y_i^p$ para cada i, temos

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^q = \|\boldsymbol{x}\|_p^q \sum_{i=1}^{n} y_i^q \leq \|\boldsymbol{x}\|_p^q \sum_{i=1}^{n} y_i^p = \|\boldsymbol{x}\|_p^q.$$

Daqui sai que

$$\|\boldsymbol{x}\|_q = \Big(\sum_{i=1}^n a_i^q\Big)^{\frac{1}{q}} \le \|\boldsymbol{x}\|_p.$$

Agora provamos a segunda parte da desigualdade (4.1.7). Usando a desigualdade de Hölder com expoentes r e $r' = \frac{r}{r-1}$, temos

$$\sum_{i=1}^n a_i^p = \sum_{i=1}^n (a_i^q)^{\frac{p}{q}} \cdot 1 \le \Big(\sum_{i=1}^n (a_i^q)^{\frac{p}{q}\cdot r}\Big)^{\frac{1}{r}} \Big(\sum_{i=1}^n 1^{r'}\Big)^{\frac{1}{r}'} = \Big(\sum_{i=1}^n a_i^q\Big)^{\frac{p}{q}} n^{1-\frac{p}{q}}.$$

Elevando ambos os membros à potência $\frac{1}{p}$, segue

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \Big(\sum_{i=1}^n a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(\sum_{i=1}^n a_i^q\Big)^{\frac{1}{q}} n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|\boldsymbol{x}\|_q.$$

Assim, combinando esta última com a anterior, obtemos (4.1.7).

Caso 2: $1 \le q \le p \le \infty$. Trocando os papeis de p e q em (4.1.7), obtemos facilmente (4.1.8)

Caso 3: $p = \infty$ ou $q = \infty$. Aceitando a convenção $\frac{1}{\infty} = 0$, os argumentos usados nos dois casos anteriores são ainda válidos no caso de $q = \infty$ ou $p = \infty$. Por exemplo, se $q = \infty$ e $p < \infty$ temos $\|x\|_\infty \le \|x\|_p \le n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$, que é consistente com a fórmula geral (4.1.7).

Combinando todos os casos, concluímos então que para quaisquer $p, q \in [1, \infty]$ e todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, se tem (4.1.6). □

Resulta da proposição anterior que o facto de $\mathbb{R}^n$ ser um espaço vectorial de dimensão finita, faz com que todas as normas aí definidas sejam equivalentes. Em particular, dadas três normas $\|\cdot\|_{p_1}$, $\|\cdot\|_{p_2}$ e $\|\cdot\|_{p_3}$, com $p_1, p_2, p_3 \in \{1, 2, \ldots, \infty\}$, existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$C_1 \|\boldsymbol{x}\|_{p_1} \le \|\boldsymbol{x}\|_{p_2} \le C_2 \|\boldsymbol{x}\|_{p_3} \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Como vimos na proposição anterior, podemos tomar explicitamente

$$C_1 = n^{-\left|\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right|}, \qquad C_2 = n^{\left|\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3}\right|},$$

onde, por convenção, $\frac{1}{\infty} = 0$.

Na proposição seguinte estabelece-se a relação entre o produto interno e a norma por ele induzida.

Proposição 4.1.3 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** Para quaisquer $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ tem-se

$$|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \le \|\boldsymbol{x}\|\, \|\boldsymbol{y}\|\,.$$

Demonstração: Se $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, a desigualdade é trivial. Suponhamos então $\boldsymbol{y} \ne \boldsymbol{0}$, e consideremos a função em t definida por

$$\varphi(t) = \|\boldsymbol{x} - t\boldsymbol{y}\|^2 = (\boldsymbol{x} - t\boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x} - t\boldsymbol{y}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Expandindo o produto escalar, temos

$$\varphi(t) = \|\boldsymbol{y}\|^2 t^2 - 2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})t + \|\boldsymbol{x}\|^2.$$

Como $\varphi(t) \geq 0$ para todo t, o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ desta função tem de ser não positivo,

$$\big(-2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})\big)^2 - 4\|\boldsymbol{y}\|^2\|\boldsymbol{x}\|^2 \leq 0.$$

Logo,

$$(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})^2 \leq \|\boldsymbol{x}\|^2\,\|\boldsymbol{y}\|^2,$$

o que implica

$$|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ são linearmente dependentes. □

Recordando que os elementos de $\mathbb{R}^n$ são vectores, definimos a **projecção do vector $\boldsymbol{x}$ sobre o vector $\boldsymbol{y}$** como sendo o vector

$$\mathbf{p} = p\,\boldsymbol{y}, \quad \text{com } p = \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|^2}.$$

No caso particular de $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_k$, a projecção de $\boldsymbol{x}$ sobre $\boldsymbol{e}_k$ é $\mathbf{p} = x_k\boldsymbol{e}_k$. Define-se o **ângulo entre dois vectores** não nulos $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ por θ, onde

$$\cos(\theta) = \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|}\,, \quad \theta \in [0,\,\pi].$$

Sai desta definição que $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ são **vectores perpendiculares**, ou **ortogonais**, se

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0.$$

Para os elementos da base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, tem-se

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j = \begin{cases} 1\,, & \text{se } i = j \\ 0\,, & \text{se } i \neq j, \end{cases} \quad , \quad \|\boldsymbol{e}_i\| = 1\,,$$

e, assim, dizemos que $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ é uma **base ortonormada** de $\mathbb{R}^n$.

4.2 Espaço vectorial $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$

Para $m,\ n \in \mathbb{N}$, denotamos por

$$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$$

o conjunto de todas as matrizes de ordem $m \times n$ (m por n, ou seja com m colunas e n linhas) de entradas reais.

Se $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, usamos habitualmente a notação seguinte

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}\,,$$

onde a_{ij} denota a entrada da matriz que se encontra no cruzamento da linha i com a coluna j, para $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$.

A matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ com todas as entradas nulas é designada por **matriz nula**, a qual se denota por 0 ou $0_{m\times n}$.

Os elementos de $\mathbb{R}^n$

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$$

são considerados matrizes de ordem $n \times 1$, ou seja **matrizes coluna** da forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}.$$

As **matrizes linha** são matrizes de ordem $1 \times n$, que se escrevem na forma

$$[x_1 \ \cdots \ x_m]_{1\times n} \, .$$

Se $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ são duas matrizes em $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ (ambas de ordem $m \times n$), então é possível somar A com B da forma seguinte:

$$A + B = C, \qquad C = [c_{ij}]_{m\times n}\,, \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Se $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ é uma matriz em $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e α é um número real, então é possível multiplicar α por A do modo seguinte,

$$\alpha A = D, \qquad D = [d_{ij}]_{m\times n}\,, \quad \text{onde} \ \ c_{ij} = \alpha a_{ij}.$$

Munido das operações de adição de matrizes e produto por escalar acima definidos, $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ é um espaço vectorial. De facto, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \neq \emptyset \quad &\Longleftarrow \quad 0_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \\ (\alpha A + \beta B) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \quad &\Longleftarrow \quad A,\ B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}),\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}\,, \end{aligned}$$

o que mostra que $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ é não vazio e é fechado para a adição de matrizes. Por outro lado, $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ é um grupo comutativo para a adição de matrizes. De facto, temos para quaisquer matrizes $A,\ B,\ C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$:

(i) $A + B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$;

(ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

(iii) $A + B = B + A$;

(iv) existe o elemento neutro $0 = 0_{m\times n}$ e $A + 0 = A$;

(v) toda a matriz $A_{m\times n} = [a_{ij}]$ tem uma matriz simétrica $-A = [-a_{ij}]$.

Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ (de ordem $m \times n$), $B \in \mathcal{M}_{n\times q}(\mathbb{R})$ (de ordem $n \times q$). Define-se o produto de A por B (com A à esquerda de B) como sendo a matriz $P \in \mathcal{M}_{m\times q}(\mathbb{R})$ (de ordem $m \times q$),

$$AB = P, \qquad \text{onde} \ \ P = [p_{ik}]_{m\times q}\,,$$

e cada entrada p_{ik} é determinada do modo seguinte,

$$p_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \cdots + a_{in} b_{nk}.$$

Esta fórmula diz-nos que para se obter a entrada p_{ik} da matriz produto AB, multiplica-se a linha i da matriz A pela coluna k da matriz B,

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \end{bmatrix}_{m\times n} \begin{bmatrix} \cdot & \cdots & b_{1k} & \cdots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ide\cdot & \cdots & b_{jk} & \cdots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdots & b_{nk} & \cdots & \cdot \end{bmatrix}_{n\times q} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdots & p_{ik} & \cdots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \end{bmatrix}_{m\times q} .$$

Multiplica-se o primeiro elemento da linha i pelo primeiro elemento da coluna k, o segundo elemento da linha i pelo segundo elemento da coluna k, e assim sucessivamente até "esgotar" todos os elementos das referidas linha e coluna. Por fim, soma-se todos estes produtos, sendo o resultado da soma a entrada da posição (i, k) da matriz produto. Por isso, só podemos multiplicar matrizes em que o número de colunas da matriz à esquerda (no produto) seja igual ao número de linhas da matriz à direita (no produto).

Se $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ é uma matriz de ordem $m \times n$, a sua **transposta** é denotada por A^T e é definida do modo seguinte,

$$A^T = [b_{ij}]_{n\times m} \qquad \text{onde } b_{ij} = a_{ji}.$$

Para se obter a transposta, basta passar as linhas da matriz original a colunas ou, de modo equivalente, passar as colunas a linhas. Deste modo, facilmente se depreende que a transposta A^T da matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ é uma matriz de ordem $n \times m$.

No estudo que iremos realizar têm particular importância as **matrizes quadradas**, ou seja as matrizes em que o número de linhas é igual ao número de colunas. Neste caso, temos $m = n$ e denotamos o correspondente espaço vectorial por $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, ou apenas por $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Se $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ é uma **matriz quadrada** de ordem n, então:

- a **diagonal principal** de A é constituída pelas suas entradas principais (entradas a_{ij} com $i = j$),

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \mathbf{a_{nn}} \end{bmatrix}_{n\times n} ;$$

- a matriz diz-se **triangular superior** se $a_{ij} = 0$, sempre que $i > j$,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ \mathbf{0} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} ;$$

• a matriz diz-se **triangular inferior** se $a_{ij} = 0$, sempre que $i < j$,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & \mathbf{0} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} ;$$

• a matriz diz-se **diagonal** se é triangular superior e inferior, ou seja se $a_{ij} = 0$, sempre que $i \neq j$,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a_{22} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & a_{33} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} ;$$

• designa-se por **matriz identidade** de ordem n e denota-se por I_n a matriz diagonal com as entradas principais todas iguais a 1,

$$I_{n\times n} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{1} \end{bmatrix}_{n\times n} .$$

Em muitas situações de aplicação prática, estas noções poderão ser estendidas a matrizes de ordem $m \times n$, onde m e n não sejam necessariamente iguais.

Diz-se que uma matriz quadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ é **simétrica** se $A^T = A$, e **anti-simétrica** se $A^T = -A$.

Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ uma matriz quadrada de ordem n. Se existir uma matriz quadrada $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de ordem n tal que

$$AX = XA = I_n,$$

diz-se que a matriz A é **invertível**. A matriz X diz-se a **inversa** de A e denota-se por $X = A^{-1}$.

Proposição 4.2.1. Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ uma matriz quadrada de ordem n. Se A é invertível, então a sua matriz inversa é única.

Demonstração: Suponhamos que B e C são duas inversas da matriz A. Ou seja,

$$AB = BA = I_n \qquad \text{e} \qquad AC = CA = I_n,$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n. Começamos por escrever

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C.$$

Da igualdade anterior segue que $B = C$. Portanto não podem existir duas inversas distintas de A, pelo que a inversa de A é única. □

A proposição seguinte mostra-nos que, das identidades $AX = I_n$ e $XA = I_n$, apenas é necessário verificar uma das duas.

Proposição 4.2.2. Sejam A e X matrizes quadradas de ordem n sobre $\mathbb{R}$ (ou sobre qualquer corpo). Seja I_n a matriz identidade de ordem n. Então

(1) $AX = I_n \quad \Rightarrow \quad XA = I_n$;

(2) $XA = I_n \quad \Rightarrow \quad AX = I_n$.

Demonstração: (1) Usando determinantes, sabemos que se $AX = I_n$, então $\det(A)\det(X) = \det(I_n) = 1$. Portanto $\det(A) \neq 0$, pelo que A é invertível, ou seja, existe A^{-1}. Multiplicando $AX = I_n$ à esquerda por A^{-1} e à direita por A, obtém-se $XA = I_n$.

(2) É completamente análogo ao caso (1).

□

A proposição anterior é muito útil na verificação de que uma matriz calculada é a matriz inversa procurada.

Definição 4.2.1. Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. A **norma matricial** de A induzida pela norma $\|\cdot\|$ definida por

$$\|A\| = \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|A\boldsymbol{x}\|.$$

Na definição anterior, observe-se que $A\boldsymbol{x}$ é um elemento de $\mathbb{R}^m$,

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

4.3 Método de eliminação de Gauss-Jordan

Antes de introduzir este método, convém recordar algumas noções.

Definição 4.3.1. Seja $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ uma matriz real de ordem $m\times n$. Diz-se que a matriz A está escrita em **forma de escada** (ou em **escada de linhas**) se, para cada linha $i \in \{1, 2, ..., m\}$, se verifica um dos casos seguintes:

(1) **A linha i é nula.**

Então, para todo $r > i$, a linha r é nula.

(2) **A linha i não é nula.**

Se a_{is} é o primeiro elemento não nulo da linha i (denominado o **pivô**), então para todo $l > i$ e para todo $c \leq s$, $a_{lc} = 0$.

Exemplo 4.3.1. A matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 19 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

está em forma de escada.

Definição 4.3.2. Seja $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ uma matriz real de ordem $m \times n$. Dizemos que a matriz A está escrita na forma **condensada** (ou em **escada de linhas reduzida**) se estiver escrita na forma de escada e se, para além disso, para cada linha $i \in \{1, 2, ..., m\}$ se verificam as condições seguintes:

(1) O pivô é igual a 1;

(2) Se a_{is} é o pivô, então para todo o $l < i$, $a_{ls} = 0$.

Exemplo 4.3.2. A matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \frac{19}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

está em forma condensada.

Para transformar uma matriz em forma de escada, são possíveis três tipos de operações elementares sobre as linhas:

- **Trocar duas linhas**

Exemplo 4.3.3. Trocar a Linha 2 com a Linha 4 na matriz seguinte:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftrightarrows L_4]{} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- **Multiplicar uma linha por um real não nulo**

Exemplo 4.3.4. Multiplicar a Linha 1 da matriz seguinte por $\dfrac{1}{2}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1\,:\ \frac{1}{2}\times L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- **Somar a uma linha outra multiplicada por um real**

Exemplo 4.3.5. Na Linha 3 da matriz seguinte, soma-se a Linha 1 multiplicada por -2. Já na Linha 3 da matriz obtida, soma-se a Linha 2 multiplicada por -3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3\,:\ L_3+(-2)L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3\,:\,L_3+(-3)L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

As mesmas operações elementares podem ser realizadas sobre as colunas de uma matriz. No entanto, convém ter o máximo de cuidado quando se realizam operações elementares sobre as linhas e sobre as colunas no mesmo procedimento de cálculo matricial. Na maioria das situações isto leva a enormes confusões e, por isso, é totalmente desaconselhado. Por regra, iremos sempre trabalhar com operações elementares somente sobre as linhas.

Proposição 4.3.1. Toda matriz pode ser transformada, através de operações elementares sobre as linhas, numa matriz em forma de escada.

Demonstração: A demonstração consiste no próprio algoritmo do Método de Eliminação de Gauss. Dada uma matriz A, procuramos a primeira coluna não nula. Escolhemos um elemento não nulo nessa coluna e, se necessário, trocamos linhas para trazê-lo para a posição do pivô. Em seguida, usamos operações elementares de linha para anular todos os elementos abaixo desse pivô. Repetimos o processo no subbloco inferior à direita, passando sucessivamente às colunas seguintes. Como a cada passo reduzimos o número de linhas e colunas a considerar, o procedimento termina após um número finito de passos. O resultado final é uma matriz em forma de escada, obtida a partir de A apenas por operações elementares sobre as linhas. $\square$

Proposição 4.3.2. Toda a matriz pode ser transformada, através de operações elementares sobre as linhas, numa matriz condensada. Essa matriz diz-se a forma condensada da matriz inicial.

Demonstração: Pelo processo de eliminação de Gauss já sabemos que, usando operações elementares sobre as linhas, qualquer matriz pode ser transformada numa matriz em forma de escada. A partir da forma de escada, aplicamos agora o Método de Eliminação de Jordan. Para cada pivô igual a 1, eliminamos não só as entradas abaixo, mas também as entradas acima do pivô, transformando todas as outras entradas na coluna do pivô iguais a zero. Este processo também é finito, pois a cada passo actuamos em colunas já reduzidas. O resultado final é uma matriz em que cada linha não nula começa com um pivô igual a 1, cada pivô é o único elemento não nulo na sua coluna, as linhas nulas (se existirem) aparecem abaixo. Esta é exactamente a forma condensada (ou reduzida por linhas) de uma matriz. Portanto, qualquer matriz pode ser transformada na sua forma condensada apenas com operações elementares sobre as linhas. $\square$

A partir de uma matriz inicial podemos obter, usando operações elementares sobre as linhas, distintas matrizes em forma de escada, mas somente uma matriz condensada.

Proposição 4.3.3. A forma condensada de uma matriz é única.

Demonstração: Suponhamos que uma matriz A tem duas formas condensadas diferentes, B e C, obtidas por operações elementares sobre as linhas. Como cada forma condensada é uma matriz em forma de escada reduzida:

- cada linha não nula começa com 1 (pivô);
- cada pivô é o único elemento não nulo na sua coluna;
- as linhas nulas (se houver) estão nas linhas mais abaixo.

Estas condições determinam de forma única a posição dos pivôs e os zeros acima e abaixo deles. Portanto, não podem existir duas formas condensadas diferentes, pelo que $B = C$. Assim, a forma condensada de uma matriz é única. $\square$

Passemos agora à descrição do Método de eliminação de Gauss-Jordan propriamente dito. Este método permite obter uma forma de escada ou a forma condensada de qualquer matriz. É de especial importância para a resolução de sistemas de equações lineares, que será estudada no capítulo seguinte

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem $m \times n$ e seja $k \in \{1, \ldots, m-1\}$.

4.3.1 Eliminação descendente

Na **primeira fase do Método de eliminação de Gauss-Jordan**, a matriz inicial é transformada numa matriz em forma de escada por meio de transformações elementares sobre as linhas.

1º Passo: Trocas de linhas

Realizam-se as trocas de linhas que forem necessárias de modo a que as primeiras k linhas da matriz sejam não nulas e as últimas $m-k$ linhas sejam nulas.

Exemplo 4.3.6.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 \rightleftarrows L_5]{} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 5 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2º Passo: Escolha de pivô

Escolhe-se um elemento da primeira coluna não nula. Se esse elemento estiver na primeira linha, passa-se ao passo três. Caso contrário, realiza-se uma troca de linhas de modo a que passe a figurar na primeira linha.

Exemplo 4.3.7.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & \boxed{-2} & -2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 5 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{} \begin{bmatrix} 0 & \boxed{-2} & -2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 5 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3º Passo: Anulação descendente

Usando o pivô escolhido, e realizando operações elementares sobre as linhas, anulam-se todos os outros elementos da coluna respectiva que estejam abaixo do pivô.

Exemplo 4.3.8.

$$\begin{bmatrix} 0 & \boxed{-2} & -2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 5 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 :\ L_3 + \frac{3}{2}L_1 \\ L_4 :\ L_4 + \frac{5}{2}L_1}]{} \begin{bmatrix} 0 & \boxed{-2} & -2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se for necessário, repete-se o 1º passo e, seguidamente, faz-se nova escolha de pivô, procurando, abaixo da linha 1, a primeira linha não nula e, nesta, escolher um elemento não nulo. Escolhido o pivô (2º passo), anulam-se os elementos abaixo dele (3º passo), realizando operações elementares sobre as linhas.

Exemplo 4.3.9.

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4\,:\ L_4+\frac{7}{2}L_2]{L_3\,:\ L_3+\frac{7}{2}L_2} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Repetem-se os passos anteriores, escolhendo sucessivos pivots as vezes que forem necessárias, até a matriz estar em forma de escada.

Exemplo 4.3.10.

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-\frac{9}{2}} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4\,:\ L_4+(-1)L_3]{} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quando a matriz está em forma de escada termina a eliminação descendente e o processo de transformar a matriz em forma de escada. O procedimento que leva a obter uma matriz em forma de escada é comummente designado por **Método de Eliminação de Gauss**.

Na **fase intermédia do Método de eliminação de Gauss-Jordan**, as entradas não nulas da diagonal principal são normalizadas.

4º Passo: Normalização dos pivots

Para cada pivô diferente de 1, multiplica-se a linha correspondente pelo inverso do pivô, isto é, sendo $a_{i,s} \neq 1$ um pivô situado na linha i (logo um real não nulo), efectua-se:

$$L_i:\ \frac{1}{a_{i,s}} \times L_i.$$

Com vista a obter uma forma condensada da matriz, esta fase do processo pode ser realizada entre a fase descendente e a fase ascendente, ou ao longo da eliminação ascendente, consoante for mais conveniente.

Exemplo 4.3.11.

$$\begin{bmatrix} 0 & \boxed{-2} & -2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-\frac{9}{2}} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_1\,:\ -\frac{1}{2}\times L_1 \\ L_3\,:\ -\frac{2}{9}\times L_3}]{} \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{7}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tal como o exemplo anterior mostra, ao normalizarmos os pivots não nulos vamos, por vezes, fazer com que as outras entradas sejam alterdas para uma escrita mais complicada (por exemplo, na forma de fracções), o que irá dificultar os cálculos subsequentes. Por isso, na grande maioria das situações, é preferível fazer este processo de normalização somente no final de tudo.

4.3.2 Eliminação ascendente

Estando a matriz já na forma de escada, esta fase do método permite obter uma matriz na forma condensada.

4º Passo: Eliminação ascendente

Usando o pivô da última linha não nula, anulam-se todos os elementos não nulos na coluna onde esse pivô está situado, realizando as operações elementares que forem necessárias sobre as linhas.

Exemplo 4.3.12.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{7}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2\,:\ L_2+2L_3 \\ L_1\,:\ L_1+\frac{1}{2}L_3}]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{7}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O processo repete-se com o pivô da linha imediatamente acima e assim por diante até a matriz estar na forma condensada.

Exemplo 4.3.13.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{4}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \,:\, L_1 + \left(-\frac{3}{2}\right) L_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{9} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{4}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

No final da eliminação ascendente, a matriz obtida encontra-se na forma condensada.

4.3.3 Resolução de sistemas de equações lineares por Gauss-Jordan

Na resolução de sistemas de equações lineares é muito importante a noção de característica de uma matriz.

Definição 4.3.3. Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. Chama-se **característica da matriz** A ao número de linhas não nulas de qualquer matriz em forma de escada que possa ser obtida de A através de operações elementares sobre as linhas.

Nestes apontamentos, iremos denotar a característica de uma matriz A por

$$\text{car}(A).$$

A característica de uma matriz será sempre não maior do que o número de linhas da matriz, i.e. $\text{car}(A) \leq m$ sempre que A for uma matriz de ordem $m \times n$. De modo análogo, podemos definir a característica de uma matriz A como sendo o número de pivots não nulos de qualquer matriz em forma de escada que possa ser obtida de A através de operações elementares nas linhas.

Exemplo 4.3.14.

$$\text{car} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2,$$

pois, como foi exemplificado atrás, por meio de operações elementares sobre as Linhas 1 e 3, obtém-se a matriz em forma de escada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a qual tem duas linhas não nulas. Pode-se também justificar com o facto de, a matriz em forma de escada obtida, ter dois pivots não nulos.

Como facilmente se pode constatar, somente a matriz nula (de qualquer ordem) tem característica nula,

$$\mathrm{car}(O_{m\times n}) = 0 \qquad \forall\, m,\ n \in \mathbb{N}.$$

A proposição seguinte estabelece os critérios de resolubilidade de um sistema de equações lineares, com base na análise das característica das matrizes associadas ao sistema. Num sistema de equações lineares representado na forma matricial $AX = B$, a matriz A dos coeficientes do sistema designa-se por matriz simples, e $[A|B]$ é a matriz ampliada correspondente.

Proposição 4.3.4. Considere-se um sistema de m equações lineares e com n incógnitas, escrito na forma matricial $AX = B$, e seja $[A|B]$ a correspondente matriz ampliada. Então:

(1) O sistema é **possível determinado** se e só se $\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}([A|B]) = n$;

(2) O sistema é **possível indeterminado** se e só se $\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}([A|B])$ e $\mathrm{car}(A) < n$;

(3) O sistema é **impossível** se e só se $\mathrm{car}(A) \neq \mathrm{car}([A|B])$.

Se A é uma matriz quadrada, o sistema é **possível determinado** se

$$\mathrm{car}(A) = \text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de linhas de } A.$$

Se $B = 0$, o sistema é sempre **possível determinado**.

Exemplo 4.3.15. Transformar a matriz ampliada associada ao sistema de equações lineares seguinte em forma de escada:

$$\begin{cases} 3x + 7y + 57z = 67 \\ 11x + 23y - z = 33 \\ 23x - 27y + 54z = 1 \end{cases}.$$

Resolução: Escrevemos a matriz ampliada do sistema:

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -57 & 67 \\ 11 & 23 & -1 & 33 \\ 23 & -27 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Passo 1: Reduzimos a zero as entradas abaixo do pivô da primeira coluna:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & 57 & 67 \\ 11 & 23 & -1 & 33 \\ 23 & -27 & 54 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 : L_2 - \frac{11}{3}L_1, \\ L_3 : L_3 - \frac{23}{3}L_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & 57 & 67 \\ 0 & -\frac{8}{3} & -210 & -\frac{638}{3} \\ 0 & -\frac{158}{3} & -204 & -\frac{734}{3} \end{array}\right].$$

Passo 2: Reduzimos a zero a entrada abaixo do pivô da segunda coluna:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & 57 & 67 \\ 0 & -\frac{8}{3} & -210 & -\frac{638}{3} \\ 0 & -\frac{158}{3} & -204 & -\frac{734}{3} \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 : -\frac{3}{2}L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & 57 & 67 \\ 0 & -\frac{8}{3} & -210 & -\frac{638}{3} \\ 0 & 0 & \frac{11841}{2} & \frac{11841}{2} \end{array}\right].$$

A matriz $[A|B]$ está na forma de escada e existem 3 pivôs (não nulos). Logo

$$\mathrm{car}([A|B]) = \mathrm{car}(A) = 3 \quad (\text{n}^{\text{o}} \text{ de incógnitas é } 3),$$

e o sistema é possível determinado.

Quando a matriz ampliada associada a um sistema de equações lineares está na forma de escada, podemos resolver o sistema por substituição sucessiva.

Exemplo 4.3.16. Resolva o sistema do exemplo anterior, usando substituição sucessiva.

Resolução: A forma matricial do sistema reduzido à sua forma em escada encontrado no exemplo anterior, é dada por:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 57 \\ 0 & -\frac{8}{3} & -210 \\ 0 & 0 & \frac{11841}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67 \\ -\frac{638}{3} \\ \frac{11841}{2} \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema de equações lineares associado, obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + 7y + 57z = 67 \\ -\frac{8}{3}y - 210z = -\frac{638}{3} \\ \frac{11841}{2}z = \frac{11841}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{67-7-57}{3} = 1 \\ y = \frac{-\frac{638}{3}+210}{-\frac{8}{3}} = 1 \\ z = 1 \end{array} \right.$$

Na fase intermédia do Método de Eliminação de Gauss-Jordan, os pivôs (primeiras entradas não nulas das linhas da matriz) são normalizados.

Na última fere de Método de Eliminação de Gauss-Jordan, é realizado o processo de transformação da matriz $[A|B]$ numa matriz condensada. Esta fase é também chamada de Eliminação de Jordan, ou eliminação ascendente.

Exemplo 4.3.17. Resolva o exemplo anterior, usando o Método de Eliminação de Gauss-Jordan (eliminação descendente e eliminação ascendente).

Resolução: Já vimos nos exemplos anteriores que o sistema original se pode escrever da forma equivalente seguinte,

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + 7y + 57z = 67 \\ 11x + 23y + z = 33 \\ 2x + 3y + 54z = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 7 & 57 \\ 0 & -\frac{8}{3} & -210 \\ 0 & 0 & \frac{11841}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67 \\ -\frac{638}{3} \\ \frac{11841}{2} \end{bmatrix}$$

Normalizando do pivô da terceira linha,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & 57 & 67 \\ 0 & -\frac{8}{3} & -210 & -\frac{638}{3} \\ 0 & 0 & \frac{11841}{2} & \frac{11841}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[L_3\,:\,\frac{2}{11841}\times L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & 57 & 67 \\ 0 & -\frac{8}{3} & -210 & -\frac{638}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Fazendo a eliminação ascendente na terceira coluna, e a seguir normalizando o pivô da segunda linha,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & 57 & 67 \\ 0 & -\frac{8}{3} & -210 & -\frac{638}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_1\,:\,L_1-57L_3 \\ L_2\,:\,L_2+210L_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & 0 & 10 \\ 0 & -\frac{8}{3} & 0 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2\,:\,-\frac{3}{8}\times L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Fazendo a eliminação ascendente na segunda coluna, e depois normalizando o pivô da primeira linha,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1\,:\,L_1-7L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1\,:\,\frac{1}{3}L_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Logo, a solução do sistema de equações lineares dado é $S = \{(1,1,1)\}$, ou seja $x = 1$, $y = 1$ e $z = 1$.

4.4 Método iterativo de Jacobi

Consideremos um sistema de m equações lineares com n incógnitas escrito na forma matricial seguinte:

$$AX = B$$

onde $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $X = [x_j]_{n\times 1}$, $B = [b_i]_{m\times 1}$, com $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, n$.

Um método iterativo para resolver um sistema $n \times n$ de equações lineares

$$AX = B$$

começa com uma aproximação inicial da solução $X^{(0)}$ e gera uma sucessão de vectores

$$X^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$$

que converge para a solução X do sistema $AX = B$:

$$\lim_{k\to\infty} X^{(k)} = X$$

Esta técnica envolve um processo que transforma o sistema $AX = B$ num sistema equivalente da forma $X = TX + C$:

$$AX = B \quad \Leftrightarrow \quad X = TX + C \tag{4.4.9}$$

para alguma matriz T de ordem $n \times n$ e para algum vector C (matriz coluna).

Depois da aproximação inicial $X^{(0)}$ ter sido selecionada, a sucessão dos vectores $X^{(k)}$ aproximantes da solução X são gerados pela fórmula:

$$X^{(k)} = TX^{(k-1)} + C, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Definição 4.4.1 (Método de Jacobi). O Método de Jacobi consiste em decompor a matriz A do sistema $AX = B$ na forma:

$$A = D - L - U \tag{4.4.10}$$

onde:

- D é a matriz diagonal de A:

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{4.4.11}$$

- L é a matriz triangular inferior estrita de A:

$$L = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{4.4.12}$$

- U é a matriz triangular superior estrita de A:

$$U = -\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{4.4.13}$$

Assim, o sistema $AX = B$ pode ser reescrito como:

$$(D - L - U)X = B \quad \Leftrightarrow \quad DX = (L + U)X + B \tag{4.4.14}$$

Supondo que D é invertível (todos os elementos diagonais não nulos), obtemos a forma iterativa:

$$X^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)X^{(k)} + D^{-1}B, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.4.15}$$

Podemos escrever a fórmula (4.4.15) do Método Iterativo de Jacobi, componente a componente, para $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right).$$

Na proposição seguinte damos as condições necessárias e suficientes para que a matriz diagonal D seja invertível.

Proposição 4.4.1. A matriz D é invertível se e somente se todas as entradas da diagonal principal da matriz A são não nulas, isto é:

$$a_{ii} \neq 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Demonstração: Suponhamos que D é a matriz diagonal retirada da matriz A. O determinante de uma matriz diagonal é o produto dos elementos da diagonal principal:

$$\det(D - L) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Uma matriz é invertível se e somente se o seu determinante é não nulo. Portanto, D é invertível se e somente se

$$\prod_{i=1}^{n} a_{ii} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_{ii} \neq 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

□

Exemplo 4.4.1. Calcula as primeiras 5 primeiras iterações do Método de Jacobi para o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15 \end{cases}$$

Resolução: Comecemos por escrever o sistema na forma matricial $AX = B$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 25 \\ -11 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Façamos a decomposição na forma $X = TX + C$, isolando cada variável x_i em cada linha i:

$$\begin{cases} x_1 &=& \frac{1}{10}x_2 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{3}{5} \\ x_2 &=& \frac{1}{11}x_1 + \frac{1}{11}x_3 - \frac{3}{11}x_4 + \frac{25}{11} \\ x_3 &=& -\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{10}x_2 + \frac{1}{10}x_4 - \frac{11}{10} \\ x_4 &=& -\frac{3}{8}x_2 + \frac{1}{8}x_3 + \frac{15}{8} \end{cases}.$$

A matriz T e o vector C associados a esta iteração, são:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{11} & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{25}{11} \\ -\frac{11}{10} \\ \frac{15}{8} \end{bmatrix}.$$

Para $k = 1, 2, 3, \ldots$, calcula-se:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} &= \dfrac{1}{10}x_2^{(k-1)} - \dfrac{1}{5}x_3^{(k-1)} + \dfrac{3}{5} \\ x_2^{(k)} &= \dfrac{1}{11}x_1^{(k-1)} + \dfrac{1}{11}x_3^{(k-1)} - \dfrac{3}{11}x_4^{(k-1)} + \dfrac{25}{11} \\ x_3^{(k)} &= -\dfrac{1}{5}x_1^{(k-1)} + \dfrac{1}{10}x_2^{(k-1)} + \dfrac{1}{10}x_4^{(k-1)} - \dfrac{11}{10} \\ x_4^{(k)} &= -\dfrac{3}{8}x_2^{(k-1)} + \dfrac{1}{8}x_3^{(k-1)} + \dfrac{15}{8}. \end{cases}$$

A primeira iteração para $X^{(0)} = [0, 0, 0, 0]^T)$, é:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} &= \dfrac{3}{5} = 0.6 \\ x_2^{(1)} &= \dfrac{25}{11} \approx 2.2727 \\ x_3^{(1)} &= -\dfrac{11}{10} = -1.1 \\ x_4^{(1)} &= \dfrac{15}{8} = 1.875. \end{cases}$$

Portanto, $X^{(1)} = (0.6, 2.2727, -1.1, 1.875)$ é a primeira iteração que aproxima a solução do sistema dado.

Na tabela seguinte apresentam-se as cinco primeiras iterações pedidas no exemplo anterior.

k	0	1	2	3	4	5
x_1^k	0	0.6	1.0473	0.9326	1.0452	0.9490
x_2^k	0	2.2427	1.7159	2.0533	1.9534	2.0144
x_3^k	0	-1.1	-0.6052	-1.0493	-0.9691	-1.0103
x_4^k	0	1.8750	0.6952	1.1309	0.9739	1.0214

Implementação numérica

(i) Input

- número de equações e incógnitas: n
- entradas a_{ij} da matriz A (coeficientes): $1 \leq i, j \leq n$
- entradas da matriz coluna B

- entradas da matriz coluna X_0 (iteração inicial)
- tolerância (absoluta ou relativa): TOL
- número máximo de iterações: N_0

(ii) Output: Solução aproximada $x_1, \ldots, x_n$ ou mensagem de que o número de iterações foi ultrapassado

1. Set $k = 1$
2. While $k \leq N_0$ do Steps 3-6

    3. For $i = 1, \ldots, n$, set $\quad x_i^{(k)} = \dfrac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right)$
    4. If $\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\| < TOL$ then OUTPUT $(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ (STOP: Procedimento concluído com sucesso)
    5. Set $k = k + 1$
    6. For $i = 1, \ldots, n$ set $x_i^{(k-1)} = x_i^{(k)}$

7. OUTPUT "Número máximo de iterações excedido"(STOP: Procedimento concluído sem sucesso)

4.5 Método iterativo de Gauss-Seidel

O Método de Jacobi consiste em usar informação **antiga** de todas as componentes do vector para calcular as novas aproximações.

Uma possível melhoria no método consiste em informação **actualizada** das componentes. Se na iteração k, já conhecermos os valores $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{i-1}^{(k)}$, podemos usar esta informação (que dá uma melhor aproximação do que $x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \ldots, x_{i-1}^{(k-1)}$) para calcular $x_i^{(k)}$. Isto é,

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right), \tag{4.5.16}$$

onde:

- usamos as componentes **já actualizadas** da iteração actual ($x_j^{(k)}$ para $j < i$);
- usamos as componentes **da iteração anterior** para as componentes que ainda não foram calculadas ($x_j^{(k-1)}$ para $j > i$).

Para escrever o Método de Gauss-Seidel na forma matricial, multiplicamos (4.5.16) por a_{ii}:

$$a_{ii} x_i^{(k)} + a_{i1} x_1^{(k)} + \cdots + a_{i,i-1} x_{i-1}^{(k)} + a_{i,i+1} x_{i+1}^{(k-1)} + \cdots + a_{in} x_n^{(k-1)} = b_i$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Escrevendo as n equações, temos o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{(k)} = -a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k-1)} + b_1 \\ a_{22}x_2^{(k)} = -a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k-1)} + b_2 \\ \vdots \\ a_{n-1,n}x_{n-1}^{(k)} = -a_{n-1,1}x_1^{(k)} - a_{n-1,2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n-1,n-2}x_{n-2}^{(k)} - a_{n-1,n}x_n^{(k-1)} + b_n \\ a_{nn}x_n^{(k)} = -a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)} + b_n, \end{cases}$$

o qual é equivalente a

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{(k)} = -a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k-1)} + b_1 \\ a_{21}x_1^{(k)} + a_{22}x_2^{(k)} = -a_{23}x_3^{(k-1)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k-1)} + b_2 \\ \vdots \\ a_{n-1,1}x_1^{(k)} + a_{n-1,2}x_2^{(k)} + \cdots + a_{n-1,n-1}x_{n-1}^{(k)} = -a_{n-1,n}x_n^{(k-1)} + b_n \\ a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)} + a_{nn}x_n^{(k)} = b_n. \end{cases}$$

Este último sistema tem a representação seguinte na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_{n-1}^{(k)} \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_{n-1}^{(k-1)} \\ x_n^{(k-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

Assim, na forma matricial do Método de Gauss-Seidel, temos

$$(D-L)X^{(k)} = UX^{(k-1)} + B,$$

onde a matriz A foi decomposta, tal como no Método de Jacobi (ver (4.4.10)),

$$A = D - L - U.$$

Neste caso, ao contrário de (4.4.14), resolvemos o sistema $AX = B$ da forma seguinte,

$$(D-L-U)X = B \quad \Leftrightarrow \quad (D-L)X = UX + B.$$

Aqui, também:

- D é a matriz diagonal de A, conforme (4.4.11);
- L é a matriz triangular inferior estrita de A (com zeros na diagonal), conforme (4.4.12)
- U é a matriz triangular superior estrita de A (com zeros na diagonal), conforme (4.4.13).

Resolvendo para $X^{(k)}$, obtemos o Método iterativo de Gauss-Seidel:

$$X^{(k)} = (D-L)^{-1}UX^{(k-1)} + (D-L)^{-1}B$$

para cada $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Na proposição seguinte damos as condições necessárias e suficientes para que a matriz triangular inferior $D - L$ seja invertível.

Proposição 4.5.1. A matriz $D - L$ é invertível se e somente se todos as entradas da diagonal principal da matriz A são não nulas, isto é:

$$a_{ii} \neq 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Demonstração: Suponhamos que a matriz $D - L$ é triangular inferior retirada da matriz A. O determinante de uma matriz triangular inferior é o produto dos elementos da diagonal principal:

$$\det(D - L) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Uma matriz é invertível se e somente se o seu determinante é não nulo. Portanto, $D - L$ é invertível se e somente se

$$\prod_{i=1}^{n} a_{ii} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_{ii} \neq 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

□

Exemplo 4.5.1. Usando o Método iterativo de Gauss-Seidel, calcule as quatro primeiras aproximações do sistema de equações lineares seguinte.

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15 \end{cases}$$

Resolução: Para o sistema indicado, a fórmula iterativa do método de Gauss–Seidel é dada por:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \dfrac{1}{10}x_2^{(k-1)} - \dfrac{1}{5}x_3^{(k-1)} + \dfrac{3}{5} \\ x_2^{(k)} = \dfrac{1}{11}x_1^{(k)} + \dfrac{1}{11}x_3^{(k-1)} - \dfrac{3}{11}x_4^{(k-1)} + \dfrac{25}{11} \\ x_3^{(k)} = -\dfrac{1}{5}x_1^{(k)} + \dfrac{1}{10}x_2^{(k)} + \dfrac{1}{10}x_4^{(k-1)} - \dfrac{11}{10} \\ x_4^{(k)} = -\dfrac{3}{8}x_2^{(k)} + \dfrac{1}{8}x_3^{(k)} + \dfrac{15}{8} \end{cases}$$

Note-se que, quando vamos calcular $x_2^{(k)}$ já conhecemos $x_1^{(k)}$, e quando calculamos $x_3^{(k)}$ já conhecemos $x_1^{(k)}$ e $x_2^{(k)}$, e quando calculamos $x_4^{(k)}$ já conhecemos $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$ e $x_3^{(k)}$. Deste modo, vamos usar informação actualizada no algoritmo, sempre que for possível,

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \dfrac{1}{10}x_2^{(k-1)} - \dfrac{1}{5}x_3^{(k-1)} + \dfrac{3}{5} \\ x_2^{(k)} = \dfrac{1}{11}x_1^{(k)} + \dfrac{1}{11}x_3^{(k-1)} - \dfrac{3}{11}x_4^{(k-1)} + \dfrac{25}{11} \\ x_3^{(k)} = -\dfrac{1}{5}x_1^{(k)} + \dfrac{1}{10}x_2^{(k)} + \dfrac{1}{10}x_4^{(k-1)} - \dfrac{11}{10} \\ x_4^{(k)} = -\dfrac{3}{8}x_2^{(k)} + \dfrac{1}{8}x_3^{(k)} + \dfrac{15}{8} \end{cases}$$

Partindo da iteração inicial $X^{(0)} = [0, 0, 0, 0]$, obtemos as quatro primeiras iterações do Método de Gauss-Seidel, conforme tabela abaixo.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
0	0	0	0	0
1	0.6	2.3273	-0.5873	0.6207
2	1.0302	2.0369	-1.0145	0.9843
3	0.9843	2.0036	-1.0026	0.9987
4	0.9994	2.0003	-1.0003	1.0000

Implementação numérica

(i) Input

- número de equações e incógnitas: n
- entradas a_{ij} da matriz A (coeficientes): $1 \leq i, j \leq n$
- entradas da matriz coluna B
- entradas da matriz coluna X_0 (iteração inicial)
- tolerância (absoluta ou relativa): TOL
- número máximo de iterações: N_0

(ii) Output: Solução aproximada $x_1, \ldots, x_n$ ou mensagem de que o número de iterações foi ultrapassado

1. Set $k = 1$
2. While $k \leq N_0$ do Steps 3-6
   3. For $i = 1, \ldots, n$, set $\quad x_i^{(k)} = \dfrac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right)$
   4. If $\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\| < TOL$ then OUTPUT $(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ (STOP: Procedimento concluído com sucesso)
   5. Set $k = k + 1$
   6. For $i = 1, \ldots, n$ set $x_i^{(k-1)} = x_i^{(k)}$
7. OUTPUT "Número máximo de iterações excedido"(STOP: Procedimento concluído sem sucesso)

4.6 Critério de paragem e convergência

Como critério de paragem dos métodos de Jacobi ou Gauss-Seidel, habitualmente faz-se:

(i) Tolerância Absoluta
$$\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\| < \Delta X^k;$$

(ii) Tolerância Relativa
$$\frac{\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\|}{\|X^{(k)}\|} < \varepsilon_k;$$

(iii) Combinação (Critério Misto)
$$\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\| < \Delta X^k + \varepsilon_k \|X^{(k)}\|$$

Qualquer norma pode ser usada no Critério de Paragem, se bem que o habitual é a norma $\|\cdot\|_2$ (euclidiana) ou $\|\cdot\|_\infty$ (máximo).

Também se pode usar, como critério de paragem adicional, o número máximo de iterações:
$$k \geq k_{\max}$$

Com vista ao estudo da convergência dos métodos de Jacobi e de Gauss-Seidel, introduzamos o conceito de matriz diagonalmente dominante.

Definição 4.6.1 (Matriz diagonalmente dominante). Uma matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem $n \times n$ diz-se **diagonalmente dominante** se:
$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \text{para todo } i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Esta definição diz-nos que, se para cada linha da matriz A o valor absoluto do elemento que está na diagonal principal for maior ou igual à soma dos valores absolutos dos elementos que estão nas outras posições dessa linha, então a matriz é diagonalmente dominante.

Se a desigualdade for estrita para todas as linhas:
$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \text{para todo } i \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

diz-se que a matriz A é **diagonalmente dominante de forma estrita**.

Exemplo 4.6.1. (1) A matriz
$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

é diagonalmente dominante de forma estrita pois:

$$\begin{aligned}
|4| &= 4 > |-1| + |0| = 1 \\
|4| &= 4 > |-1| + |-1| = 2 \\
|4| &= 4 > |0| + |-1| = 1.
\end{aligned}$$

(2) A matriz

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

é diagonalmente dominante pois:

$$\begin{aligned}
|5| &= 5 \geq |1| + |-2| = 3 \\
|4| &= 4 \geq |0| + |1| = 1 \\
|6| &= 6 \geq |1| + |0| = 1.
\end{aligned}$$

(3) A matriz

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

não é diagonalmente dominante pois:

$$|1| = 1 < |2| + |3| = 5.$$

Vejamos, na proposição seguinte, que uma matriz diagonalmente dominante de forma estrita é invertível, tornando o sistema de equações lineares associado possível e determinado, ou seja, garantindo a existência de uma única solução.

Proposição 4.6.1. Seja $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ uma matriz diagonalmente dominante de forma estrita, ou seja,

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad \forall i = \{1, \ldots, n\}.$$

Então A é invertível.

Demonstração: Suponhamos, com vista a um absurdo, que A não era invertível. Então existiria um vector não nulo $X = (x_1, \ldots, x_n)^T \neq 0$ tal que

$$AX = 0.$$

Seja k tal que $|x_k| = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$. Como $X \neq 0$, temos $|x_k| > 0$.

A k-ésima componente da equação $AX = 0$ é

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_{kk}x_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} a_{kj}x_j = 0.$$

Tomando o módulo, obtemos

$$|a_{kk}|\,|x_k| = \Big|\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} a_{kj}x_j\Big| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|\,|x_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|\,|x_k|.$$

Dividindo ambos os membros por $|x_k| > 0$, resulta

$$|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|,$$

o que contraria a hipótese de estrita dominância diagonal da matriz A. □

Na proposição seguinte damos uma **condição suficiente** de convergência dos métodos iterativos de Jacobi e de Gauss-Seidel.

Proposição 4.6.2 (Critério de Convergência dos Métodos de Jacobi e Gauss-Seidel)**.** Se a matriz A do sistema $AX = B$ for **diagonalmente dominante de forma estrita**, então tanto o método de Jacobi como o método de Gauss-Seidel convergem para a solução única do sistema, independentemente da aproximação inicial $X^{(0)}$ escolhida.

Demonstração: Seja $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ uma matriz diagonalmente dominante de forma estrita. Por definição, isto significa que

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad \forall \in \{1, \ldots, n\}.$$

(1) Existência e unicidade da solução.

Pela proposição anterior, uma matriz diagonalmente dominante de forma estrita é invertível. Assim, o sistema $AX = B$ possui uma única solução.

(2) Convergência do método de Jacobi: O método de Jacobi é dado por:

$$X^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)X^{(k)} + D^{-1}B,$$

onde D é a matriz diagonal de A, L a parte estritamente triangular inferior e U a parte estritamente triangular superior, de modo que $A = D - L - U$.

Para garantir a convergência do método, é suficiente que o raio espectral da matriz $D^{-1}(L + U)$ seja menor que 1, ou seja, $\rho(D^{-1}(L + U)) < 1$.

Pela propriedade da estrita dominância diagonal e pelo Teorema de Gershgorin[1], todos os valores próprios de $D^{-1}(L+U)$ estão dentro de bolas centradas na origem e com raio inferior a 1. Assim, $\rho(D^{-1}(L+U)) < 1$, garantindo a convergência de Jacobi.

(3) Convergência do método de Gauss-Seidel.

O método de Gauss-Seidel é dado por:

$$X^{(k+1)} = (D-L)^{-1}UX^{(k)} + (D-L)^{-1}B.$$

Para matrizes estrita e diagonalmente dominantes, verifica-se que

$$\rho((D-L)^{-1}U) < 1,$$

o que assegura a convergência do método de Gauss-Seidel para qualquer aproximação inicial $X^{(0)}$.

Portanto, se A é diagonalmente dominante de forma estrita, ambos os métodos iterativos convergem para a solução única do sistema $AX = B$, independentemente da escolha inicial $X^{(0)}$.

□

É importante notar que a condição da proposição anterior:

- É **suficiente mas não necessária** – existem matrizes que não são diagonalmente dominantes mas para as quais os métodos ainda convergem;
- Garante convergência para **qualquer aproximação inicial** $X^{(0)}$.

Para matrizes que satisfazem esta condição, a solução do sistema $AX = B$ é **única**. O método de Gauss-Seidel, em regra, converge mais rapidamente do que o método de Jacobi quando esta condição é satisfeita.

Exemplo 4.6.2 (Código Python para verificar se uma matriz é diagonalmente dominante).

```python
# Programa em Python para verificar
# se uma dada matriz é
# uma Matriz Diagonalmente Dominante.

```

[1] **Teorema (Gershgorin).** Seja $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ uma matriz quadrada com entradas reais (ou complexas). Para cada $i \in \{1,\dots,n\}$, definimos a *bola de Gershgorin*

$$D_i = \left\{ x \in \mathbb{R} \,:\, |x - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \right\}.$$

Então, todos os valores próprios de A estão contidos na união das bolas de Gershgorin, isto é,

$$\lambda \text{ valor próprio de } A \implies \lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} D_i.$$

Além disso, se um conjunto de k bolas estiver isolado das restantes bolas, então esse conjunto contém exactamente k valores próprios de A (contados com multiplicidade).


```python
# Função para verificar se a
# matriz éDiagonalmente Dominante.
def isDDM(m, n):

    # Para cada linha
    for i in range(0, n):

        # Para cada coluna, calcular
        # a soma dos valores absolutos da linha.
        soma = 0
        for j in range(0, n):
            soma = soma + abs(m[i][j])

        # Remover o elemento da diagonal principal.
        soma = soma - abs(m[i][i])

        # Verificar se o elemento diagonal
        # émenor do que a soma dos restantes
        # elementos da linha.
        if (abs(m[i][i]) < soma):
            return False

    return True

# Código principal
n = 3
m = [[3, -2, 1],
     [1, -3, 2],
     [-1, 2, 4]]

if (isDDM(m, n)):
    print("SIM")
else:
    print("NÃO")

# Código adaptado para português (Portugal)
```

https://www.geeksforgeeks.org/diagonally-dominant-matrix

