AM II, LEI + BE: Séries numéricas

Marco Mackaaij

FCT, Universidade do Algarve

Section outline

Definições

Dada uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a *soma parcial de ordem* $k \in \mathbb{N}$ é

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + \cdots + a_k.$$

Estas somas formam a **sucessão das somas parciais** $(S_k)_{k=1}^{\infty}$.

Definições

Dada uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a *soma parcial de ordem* $k \in \mathbb{N}$ é

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + \cdots + a_k.$$

Estas somas formam a **sucessão das somas parciais** $(S_k)_{k=1}^{\infty}$.

Definição (Séries convergentes e divergentes)

A **série** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diz-se convergente, se*

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n = \lim_{k\to\infty} S_k$$

existir (e for finito). Caso contrário, a série diz-se **divergente**.

Definições

- Por definição, a **soma** duma série convergente é o seu limite (caso exista).

Definições

- Por definição, a **soma** duma série convergente é o seu limite (caso exista).
- Em geral, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é um mero símbolo formal.

Definições

- Por definição, a **soma** duma série convergente é o seu limite (caso exista).
- Em geral, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é um mero símbolo formal.
- Podemos igualmente considerar séries $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$, para um $d \in \mathbb{N}$ qualquer. Nesse caso:

$$S_k = a_d + a_{d+1} + \cdots + a_{d+k-1}.$$

Definições

- Por definição, a **soma** duma série convergente é o seu limite (caso exista).
- Em geral, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é um mero símbolo formal.
- Podemos igualmente considerar séries $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$, para um $d \in \mathbb{N}$ qualquer. Nesse caso:

$$S_k = a_d + a_{d+1} + \cdots + a_{d+k-1}.$$

- Note-se que a notação das séries permite reindexações, por exemplo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=d}^{\infty} a_{n-d+1}.$$

O primeiro critério de Cauchy

Teorema

A série $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *converge sse*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \geq d : \left| \sum_{n=k}^{m} a_n \right| < \epsilon$$

para todos os $m \geq k \geq N$.

O primeiro critério de Cauchy

Teorema

A série $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *converge sse*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \geq d : \left| \sum_{n=k}^{m} a_n \right| < \epsilon$$

para todos os $m \geq k \geq N$*.*

Demonstração: Este critério é uma consequência imediata do critério correspondente para sucessões, porque

$$\sum_{n=k}^{m} a_n = S_{m-d+1} - S_{k-d},$$

onde S_ℓ é a soma parcial dos primeiros ℓ termos da série.

Exemplo

Exemplo

A série harmónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge.

Exemplo

Exemplo

A série harmónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge.

Demonstração: Para todo o $k \geq 1$:

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots \frac{1}{2k} \geq \frac{k+1}{2k} > \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}.$$

Logo, esta série não satisfaz o primeiro Critério de Cauchy.

Critérios Necessário

Corolário (Critério necessário)

Toda a série $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *convergente satisfaz* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Critérios Necessário

Corolário (Critério necessário)

Toda a série $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *convergente satisfaz* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demonstração: Este critério é um caso especial do primeiro Critério de Cauchy, porque

$$\sum_{n=k}^{k} a_n = a_k.$$

Exemplo

Exemplo

A série

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

diverge, porque $\lim_{n\to\infty}(-1)^n \neq 0$.

Exemplo

Exemplo

A série

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1-1+1-1+1-1+\cdots$$

diverge, porque $\lim_{n\to\infty}(-1)^n \neq 0$.

- A série harmónica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ satisfaz o Critério Necessário:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,$$

mas já sabemos que diverge. Portanto, o Critério Necessário não é suficiente para garantir convergência.

Section outline

Séries geométricas

Definição (Séries geométricas)

Uma série $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *diz-se* **geométrica** *se existir uma constante* $r \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ *(a* **razão***) tal que, para todo o* $n \geq d$*, se verifica*

$$a_{n+1}/a_n = r.$$

Séries geométricas

Definição (Séries geométricas)

Uma série $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *diz-se* **geométrica** *se existir uma constante* $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *(a* **razão***) tal que, para todo o* $n \geq d$, *se verifica*

$$a_{n+1}/a_n = r.$$

Proposição (Critério de convergência)

Uma série geométrica $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *de razão* r *converge sse* $-1 < r < 1$ *e, em caso de convergência,*

$$\sum_{n=d}^{\infty} a_n = \frac{a_d}{1-r}.$$

Demonstração

- Por hipótese: $a_n/a_{n-1} = r$ para todo o $n \geq d+1$. Logo

$$a_{d+k} = a_{d+k-1}r = a_{d+k-2}r^2 = \ldots = a_d r^k.$$

Demonstração

- Por hipótese: $a_n/a_{n-1} = r$ para todo o $n \geq d+1$. Logo

$$a_{d+k} = a_{d+k-1}r = a_{d+k-2}r^2 = \ldots = a_d r^k.$$

- Portanto

$$\sum_{n=d}^{d+k} = a_d + a_d r + \cdots + a_d r^k.$$

Demonstração

- Por hipótese: $a_n/a_{n-1} = r$ para todo o $n \geq d+1$. Logo
$$a_{d+k} = a_{d+k-1}r = a_{d+k-2}r^2 = \ldots = a_d r^k.$$
- Portanto
$$\sum_{n=d}^{d+k} = a_d + a_d r + \cdots + a_d r^k.$$
- Sabemos que
$$a_d + a_d r + \cdots + a_d r^k = \frac{a_d(1-r^{k+1})}{1-r}.$$

Demonstração

- Por hipótese: $a_n/a_{n-1} = r$ para todo o $n \geq d+1$. Logo
$$a_{d+k} = a_{d+k-1}r = a_{d+k-2}r^2 = \ldots = a_d r^k.$$
- Portanto
$$\sum_{n=d}^{d+k} = a_d + a_d r + \cdots + a_d r^k.$$
- Sabemos que
$$a_d + a_d r + \cdots + a_d r^k = \frac{a_d(1 - r^{k+1})}{1 - r}.$$
- $\lim_{k\to\infty} r^{k+1} = 0$ sse $|r| < 1$.

Exemplo

Exemplo

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 0,999....$$

é geométrica com $r = (\cancel{9}/10^{n+1})/(\cancel{9}/10^n) = 1/10$. *Logo converge:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{9/10}{1-(1/10)} = \frac{9/10}{9/10} = 1.$$

Exemplo

Exemplo

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 0,999....$$

é geométrica com $r = (\cancel{9}/10^{n+1})/(\cancel{9}/10^n) = 1/10$. *Logo converge:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{9/10}{1-(1/10)} = \frac{9/10}{9/10} = 1.$$

- Todas as dízimas periódicas correspondem a séries geom. com $r = 1/10^s$, para um certo $s \in \mathbb{N}$, por exemplo

$$0,234234234\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{234}{1000^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{234}{10^{3n}}.$$

Séries de Mengoli

Definição (Séries de Mengoli)

A série $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *diz-se* **de Mengoli** *(ou* **telescópica***) se existirem uma sucessão* $(b_n)_{n=d}^{\infty}$ *e uma constante* $t \in \mathbb{N}$ *tais que*

$$a_n = b_n - b_{n+t},$$

para todo o $n \geq d$.

Séries de Mengoli

Definição (Séries de Mengoli)

A série $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ diz-se **de Mengoli** *(ou* **telescópica***) se existirem uma sucessão $(b_n)_{n=d}^{\infty}$ e uma constante $t \in \mathbb{N}$ tais que*

$$a_n = b_n - b_{n+t},$$

para todo o $n \geq d$.

Exemplo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}. \quad \left(b_n = \frac{1}{n}, \ t = 1 \right)$$

Exemplo

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad = \quad \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cdots$$

Exemplo

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad = \quad \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cdots$$
- Em geral:
$$S_k = \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{k}} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1}.$$

Exemplo

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cdots$$
- Em geral:
$$S_k = \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{k}} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1}.$$
- Logo:
$$\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} 1 - \frac{1}{k+1} = 1 - 0 = 1.$$
Portanto,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1.$$

Critério de convergência

Proposição (Critério para séries de Mengoli)

Seja $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *uma série de Mengoli com* $a_n = b_n - b_{n+t}$.

1. *A* **série** *converge sse a* **sucessão** $(b_n)_{n=d}^{\infty}$ *convergir.*
2. *Em caso de convergência:*

$$\sum_{n=d}^{\infty} a_n = b_d + b_{d+1} + \cdots + b_{d+t-1} - t \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Demonstração

- Para qualquer $k \geq t$:

$$\begin{aligned} S_k &= a_d + \cdots + a_{d+k-1} \\ &= b_d - \cancel{b_{d+t}} + b_{d+1} - \cdots + b_{d+t-1} - \cancel{b_{d+2t-1}} + \cancel{b_{d+t}} - \cdots \\ &= b_d + \cdots + b_{d+t-1} - b_{d+k} - \cdots - b_{d+t+k-1}. \end{aligned}$$

Demonstração

- Para qualquer $k \geq t$:

$$\begin{aligned} S_k &= a_d + \cdots + a_{d+k-1} \\ &= b_d - \cancel{b_{d+t}} + b_{d+1} - \cdots + b_{d+t-1} - \cancel{b_{d+2t-1}} + \cancel{b_{d+t}} - \cdots \\ &= b_d + \cdots + b_{d+t-1} - b_{d+k} - \cdots - b_{d+t+k-1}. \end{aligned}$$

- Note-se que $b_d + \cdots + b_{d+t-1}$ não depende de $k \geq t$.

Demonstração

- Para qualquer $k \geq t$:

$$\begin{aligned} S_k &= a_d + \cdots + a_{d+k-1} \\ &= b_d - \cancel{b_{d+t}} + b_{d+1} - \cdots + b_{d+t-1} - \cancel{b_{d+2t-1}} + \cancel{b_{d+t}} - \cdots \\ &= b_d + \cdots + b_{d+t-1} - b_{d+k} - \cdots - b_{d+t+k-1}. \end{aligned}$$

- Note-se que $b_d + \cdots + b_{d+t-1}$ não depende de $k \geq t$.
- Se $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, então

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} S_k &= b_d + \cdots + b_{d+t-1} - b - \cdots - b \\ &= b_d + b_{d+1} + \cdots + b_{d+t-1} - tb. \end{aligned}$$

Demonstração

- Para qualquer $k \geq t$:

$$\begin{aligned} S_k &= a_d + \cdots + a_{d+k-1} \\ &= b_d - \cancel{b_{d+t}} + b_{d+1} - \cdots + b_{d+t-1} - \cancel{b_{d+2t-1}} + \cancel{b_{d+t}} - \cdots \\ &= b_d + \cdots + b_{d+t-1} - b_{d+k} - \cdots - b_{d+t+k-1}. \end{aligned}$$

- Note-se que $b_d + \cdots + b_{d+t-1}$ não depende de $k \geq t$.
- Se $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, então

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} S_k &= b_d + \cdots + b_{d+t-1} - b - \cdots - b \\ &= b_d + b_{d+1} + \cdots + b_{d+t-1} - tb. \end{aligned}$$

- Caso contrário, a sucessão $(S_k)_{k=t}^{\infty}$ diverge.

Exemplo

Exemplo

Consideremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Exemplo

Exemplo

Consideremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$ *e* $t = 1$*, a série converge e*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - 1 \cdot 0 = 1.$$

Exemplo

Exemplo

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+3}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(n) - \ln(n+3)$$

também é de Mengoli com $b_n = \ln(n)$ *e* $t = 3$. *Portanto, a série diverge porque* $\lim_{n\to\infty} ln(n) = +\infty$.

Critério do Integral

Teorema (Critério do Integral)

Seja $f : [d, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ *uma função contínua e monotonamente descrescente. Então*

$$\sum_{n=d}^{+\infty} f(n) \textbf{ converge } \Leftrightarrow \int_d^{+\infty} f(x)\, dx \textbf{ converge}.$$

Demonstração

- Para todo o $n \geq d$ (porque f é mon. decr.):

$$f(n) \geq f(x) \geq f(n+1) \quad \forall x \in [n, n+1].$$

Demonstração

- Para todo o $n \geq d$ (porque f é mon. decr.):

$$f(n) \geq f(x) \geq f(n+1) \quad \forall x \in [n, n+1].$$

- Logo, para todo o $n \geq d$:

$$\begin{aligned} f(n) = \int_n^{n+1} f(n)\, dx \quad &\geq \quad \int_n^{n+1} f(x)\, dx \\ &\geq \quad \int_n^{n+1} f(n+1)\, dx = f(n+1). \end{aligned}$$

Demonstração

- Pelo slide anterior, para todo $m \geq d$:

$$\sum_{n=d}^{m} f(n) \geq \int_{d}^{m} f(x)\, dx \geq \sum_{n=d}^{m} f(n+1).$$

Demonstração

- Pelo slide anterior, para todo $m \geq d$:

$$\sum_{n=d}^{m} f(n) \geq \int_{d}^{m} f(x)\, dx \geq \sum_{n=d}^{m} f(n+1).$$

- Como $f(x) \geq 0$ para todo o $x \geq d$, as sucessões

$$\left(\sum_{n=d}^{m} f(n)\right)_{m=d}^{\infty} \quad \text{e} \quad \left(\int_{d}^{m} f(x)\, dx\right)_{m=d}^{\infty}$$

  são ambas monotonamente crescentes.

Demonstração

- Pelo slide anterior, para todo $m \geq d$:

$$\sum_{n=d}^{m} f(n) \geq \int_{d}^{m} f(x)\,dx \geq \sum_{n=d}^{m} f(n+1).$$

- Como $f(x) \geq 0$ para todo o $x \geq d$, as sucessões

$$\left(\sum_{n=d}^{m} f(n)\right)_{m=d}^{\infty} \quad \text{e} \quad \left(\int_{d}^{m} f(x)\,dx\right)_{m=d}^{\infty}$$

são ambas monotonamente crescentes.

- O resultado segue por enquadramento e porque séries monotonamente crescentes e limitadas superiormente convergem.

Séries de Dirichlet

Corolário (Critério para Séries de Dirichlet)

A série de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

converge sse $s > 1$.

Demonstração

- Para todo o $s \leq 0$, a série diverge pelo Critério Necessário:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^s} = \begin{cases} 1 & \text{se } s = 0; \\ +\infty & \text{se } s < 0. \end{cases}$$

Demonstração

- Para todo o $s \leq 0$, a série diverge pelo Critério Necessário:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^s} = \begin{cases} 1 & \text{se } s = 0; \\ +\infty & \text{se } s < 0. \end{cases}$$

- Quando $s = 1$, trata-se da série harmónica, que diverge.

Demonstração

- Para todo o $s \leq 0$, a série diverge pelo Critério Necessário:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^s} = \begin{cases} 1 & \text{se } s = 0; \\ +\infty & \text{se } s < 0. \end{cases}$$

- Quando $s = 1$, trata-se da série harmónica, que diverge.
- Suponhamos que $s > 0$ e $s \neq 1$. A função

$$f(x) := \frac{1}{x^s}$$

é positiva, contínua, monotonamente decrescente em $[1, +\infty[$. Portanto, podemos aplicar o Critério do Integral.

Demonstração

- $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s}\,dx \quad = \quad \lim_{t\to+\infty}\int_1^t x^{-s}\,dx$$

Demonstração

- $$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s}\,dx &= \lim_{t\to+\infty} \int_1^t x^{-s}\,dx \\ &= \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\right]_1^t \end{aligned}$$

Demonstração

- $$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s}\,dx &= \lim_{t\to+\infty} \int_1^t x^{-s}\,dx \\ &= \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\right]_1^t \\ &= \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{-s+1}}{-s+1} - \frac{1}{-s+1} \end{aligned}$$

Demonstração

- $$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s}\,dx &= \lim_{t\to+\infty} \int_1^t x^{-s}\,dx \\
&= \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\right]_1^t \\
&= \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{-s+1}}{-s+1} - \frac{1}{-s+1} \\
&= \begin{cases} -\dfrac{1}{-s+1} & \text{se } s > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < s < 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Portanto, o integral converge sse $s > 1$.

Exemplos

Exemplo

1. *A série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge, porque $s = 2 > 1$.

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

diverge, porque $s = 1/2 \leq 1$.

Section outline

Séries não-negativas

Definição

A série $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *diz-se* **não-negativa** *se* $a_n \geq 0$ *para todo o* $n \geq d$.

Nesta secção vamos estudar séries não-negativas.

O Critério de Comparação: versão 1

Teorema (Critério de Comparação, versão 1)

Dadas duas séries não-negativas $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=d}^{\infty} b_n$*, suponhamos que* $a_n \leq b_n$ *para todo o* $n \geq d$.

1. *Se a série* $\sum_{n=d}^{\infty} b_n$ *convergir, a série* $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *converge também.*
2. *Se a série* $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *divergir, a série* $\sum_{n=d}^{\infty} b_n$ *diverge também.*

Demonstração

- Por hipótese, $(\sum_{n=1}^{k} a_n)_{k=1}^{\infty}$ e $(\sum_{n=1}^{k} b_n)_{k=1}^{\infty}$ (supondo que $d = 1$) são monotonamente crescentes e, para todo o $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{k} a_n \leq \sum_{n=1}^{k} b_n.$$

Demonstração

- Por hipótese, $(\sum_{n=1}^{k} a_n)_{k=1}^{\infty}$ e $(\sum_{n=1}^{k} b_n)_{k=1}^{\infty}$ (supondo que $d = 1$) são monotonamente crescentes e, para todo o $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{k} a_n \leq \sum_{n=1}^{k} b_n.$$

- Suponhamos que $\sum_{n=d}^{\infty} b_n = S < +\infty$.

Demonstração

- Por hipótese, $(\sum_{n=1}^{k} a_n)_{k=1}^{\infty}$ e $(\sum_{n=1}^{k} b_n)_{k=1}^{\infty}$ (supondo que $d = 1$) são monotonamente crescentes e, para todo o $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{k} a_n \leq \sum_{n=1}^{k} b_n.$$

- Suponhamos que $\sum_{n=d}^{\infty} b_n = S < +\infty$.
- Então $\sum_{n=1}^{k} a_n \leq \sum_{n=1}^{k} b_n \leq S$ para todo o $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração

- Por hipótese, $(\sum_{n=1}^{k} a_n)_{k=1}^{\infty}$ e $(\sum_{n=1}^{k} b_n)_{k=1}^{\infty}$ (supondo que $d = 1$) são monotonamente crescentes e, para todo o $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{k} a_n \leq \sum_{n=1}^{k} b_n.$$

- Suponhamos que $\sum_{n=d}^{\infty} b_n = S < +\infty$.
- Então $\sum_{n=1}^{k} a_n \leq \sum_{n=1}^{k} b_n \leq S$ para todo o $k \in \mathbb{N}$.
- Logo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, porque $(\sum_{n=1}^{k} a_n)_{k=1}^{\infty}$ é monotonamente crescente e limitada superiormente.

Exemplo 1

Exemplo

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

converge.

Exemplo 1

Exemplo

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

converge.

- Para todo o $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Exemplo 1

Exemplo

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

converge.

- Para todo o $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}.$$

- A série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

converge porque $r = 1/2$.

Exemplo 2

Exemplo

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^3+5}$$

é divergente.

Exemplo 2

Exemplo

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^3+5}$$

é divergente.

- Para todo o $n \geq 1$:

$$\frac{n^2+3}{n^3+5} \geq \frac{n^2}{2n^3}.$$

Exemplo 2

Exemplo

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^3+5}$$

é divergente.

- Para todo o $n \geq 1$:

$$\frac{n^2+3}{n^3+5} \geq \frac{n^2}{2n^3}.$$

- A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{diverge.}$$

Critério de Comparação: versão 2

Teorema (Critério de Comparação, versão 2)

Dadas duas séries não-negativas $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=d}^{\infty} b_n$*, suponhamos que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = \lambda.$$

1. *Se* $\lambda > 0$*, ambas as séries são da mesma natureza.*
2. *Se* $\lambda = 0$ *e* $\sum_{n=d}^{\infty} b_n$ *convergir, a série* $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *converge.*
3. *Se* $\lambda = 0$ *e* $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *divergir, a série* $\sum_{n=d}^{\infty} b_n$ *diverge.*

Demonstração

- Suponhamos que $\lambda > 0$. Pela definição de limite, existe $N \geq d$ tal que
$$\frac{\lambda}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3\lambda}{2},$$
para todo o $n \geq N$.

Demonstração

- Suponhamos que $\lambda > 0$. Pela definição de limite, existe $N \geq d$ tal que
$$\frac{\lambda}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3\lambda}{2},$$
para todo o $n \geq N$.
- Logo
$$\frac{\lambda}{2} b_n < a_n < \frac{3\lambda}{2} b_n,$$
para todo o $n \geq N$ (aqui estamos a usar que $b_n \geq 0$).

Demonstração

- Suponhamos que $\lambda > 0$. Pela definição de limite, existe $N \geq d$ tal que
$$\frac{\lambda}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3\lambda}{2},$$
para todo o $n \geq N$.
- Logo
$$\frac{\lambda}{2} b_n < a_n < \frac{3\lambda}{2} b_n,$$
para todo o $n \geq N$ (aqui estamos a usar que $b_n \geq 0$).
- A primeira versão do Critério de Comparação implica que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são da mesma natureza.

Demonstração

- Suponhamos agora que $\lambda = 0$. Neste caso, existe $N \geq d$ tal que
$$\frac{a_n}{b_n} < 1,$$
para todo o $n \geq N$.

Demonstração

- Suponhamos agora que $\lambda = 0$. Neste caso, existe $N \geq d$ tal que
$$\frac{a_n}{b_n} < 1,$$
para todo o $n \geq N$.
- Ou seja,
$$a_n < b_n$$
para todo o $n \geq N$. A primeira versão do Critério de Comparação prova as duas últimas alíneas da segunda versão.

Exemplo

Exemplo

A série

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{n^4 - 3n^3 + 5n - 7}{n^6 + n^5 - n + 3}$$

é convergente.

Exemplo

- Esta série é da mesma natureza que

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

que converge por ser de Dirichlet com $s = 2 > 1$.

Exemplo

- Esta série é da mesma natureza que

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

que converge por ser de Dirichlet com $s = 2 > 1$.

- Para mostrar que são da mesma natureza, basta calcular:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^4 - 3n^3 + 5n - 7)/(n^6 + n^5 - n + 3)}{1/n^2} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^6 - 3n^5 + 5n^3 - 7n^2}{n^6 + n^5 - n + 3} = 1 > 0$$

Critério de Cauchy

Teorema (Critério de Cauchy, Critério da raiz)

Seja $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ uma série não-negativa. Suponhamos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda.$$

1. *Se $\lambda < 1$, a série converge.*
2. *Se $\lambda > 1$, a série diverge.*
3. *Se $\lambda = 1$, não se pode concluir nada.*

Demonstração

- Suponhamos que $\lambda < 1$ e escolhemos $r \in]\lambda, 1[$.

Demonstração

- Suponhamos que $\lambda < 1$ e escolhemos $r \in]\lambda, 1[$. Então existe $N \geq d$ tal que
$$\sqrt[n]{a_n} < r \ \Leftrightarrow \ a_n < r^n$$
para todo o $n \geq N$.

Demonstração

- Suponhamos que $\lambda < 1$ e escolhemos $r \in]\lambda, 1[$. Então existe $N \geq d$ tal que
$$\sqrt[n]{a_n} < r \iff a_n < r^n$$
para todo o $n \geq N$.
- $\sum_{n=d}^{\infty} r^n$ converge (série geométrica com $|r| < 1$), logo $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ também converge pelo C.d.C. v1.

Demonstração

- Suponhamos que $\lambda < 1$ e escolhemos $r \in]\lambda, 1[$. Então existe $N \geq d$ tal que
$$\sqrt[n]{a_n} < r \;\Leftrightarrow\; a_n < r^n$$
para todo o $n \geq N$.
- $\sum_{n=d}^{\infty} r^n$ converge (série geométrica com $|r| < 1$), logo $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ também converge pelo C.d.C. v1.
- Suponhamos que $\lambda > 1$ e escolhemos $r \in]1, \lambda[$.

Demonstração

- Suponhamos que $\lambda < 1$ e escolhemos $r \in]\lambda, 1[$. Então existe $N \geq d$ tal que
$$\sqrt[n]{a_n} < r \;\Leftrightarrow\; a_n < r^n$$
para todo o $n \geq N$.
- $\sum_{n=d}^{\infty} r^n$ converge (série geométrica com $|r| < 1$), logo $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ também converge pelo C.d.C. v1.
- Suponhamos que $\lambda > 1$ e escolhemos $r \in]1, \lambda[$. Então existe $N \geq d$ tal que
$$\sqrt[n]{a_n} > r \;\Leftrightarrow\; a_n > r^n$$
para todo o $n \geq N$.

Demonstração

- Suponhamos que $\lambda < 1$ e escolhemos $r \in]\lambda, 1[$. Então existe $N \geq d$ tal que
$$\sqrt[n]{a_n} < r \;\Leftrightarrow\; a_n < r^n$$
para todo o $n \geq N$.
- $\sum_{n=d}^{\infty} r^n$ converge (série geométrica com $|r| < 1$), logo $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ também converge pelo C.d.C. v1.
- Suponhamos que $\lambda > 1$ e escolhemos $r \in]1, \lambda[$. Então existe $N \geq d$ tal que
$$\sqrt[n]{a_n} > r \;\Leftrightarrow\; a_n > r^n$$
para todo o $n \geq N$.
- $\sum_{n=d}^{\infty} r^n$ diverge ($r > 1$), logo $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ também diverge pelo C.d.C. v1.

Demonstração

- Caso $\lambda = 1$, consideremos as séries de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Para todas elas se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^s}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^s} = 1,$$

mas estas séries são convergentes se $s > 1$ e divergentes se $s \leq 1$.

Exemplo

Exemplo

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

converge.

Exemplo

Exemplo

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

converge.

- $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Critério de d'Alembert

Teorema (Critério de d'Alembert, Critério do Quociente)

Seja $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ uma série não-negativa. Suponhamos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda.$$

1. *Se $\lambda < 1$, a série converge.*
2. *Se $\lambda > 1$, a série diverge.*
3. *Se $\lambda = 1$, não se pode concluir nada.*

Demonstração

- Suponhamos que $\lambda < 1$ e escolhemos $r \in]\lambda, 1[$.

Demonstração

- Suponhamos que $\lambda < 1$ e escolhemos $r \in]\lambda, 1[$. Então existe $N \geq d$ tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r \;\Leftrightarrow\; a_{n+1} < a_n r$$

para todo o $n \geq N$.

Demonstração

- Suponhamos que $\lambda < 1$ e escolhemos $r \in]\lambda, 1[$. Então existe $N \geq d$ tal que
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r \;\Leftrightarrow\; a_{n+1} < a_n r$$
para todo o $n \geq N$.
- Recursivamente (assumindo, sem perda de generalidade, que $N = d$):
$$a_n < a_{n-1}r < a_{n-2}r^2 < \ldots < a_d r^{n-d}.$$

Demonstração

- Suponhamos que $\lambda < 1$ e escolhemos $r \in]\lambda, 1[$. Então existe $N \geq d$ tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r \;\Leftrightarrow\; a_{n+1} < a_n r$$

para todo o $n \geq N$.

- Recursivamente (assumindo, sem perda de generalidade, que $N = d$):

$$a_n < a_{n-1} r < a_{n-2} r^2 < \ldots < a_d r^{n-d}.$$

- $\sum_{n=d}^{\infty} a_d r^{n-d} = a_d \sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge (série geométrica com $|r| < 1$), logo $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ também converge pelo C.d.C. v1.

Demonstração

- Suponhamos que $\lambda > 1$ e escolhemos $r \in]1, \lambda[$.

Demonstração

- Suponhamos que $\lambda > 1$ e escolhemos $r \in]1, \lambda[$. Então existe $N \geq d$ tal que

$$a_n > a_d r^{n-d}$$

para todo o $n \geq N$.

Demonstração

- Suponhamos que $\lambda > 1$ e escolhemos $r \in]1, \lambda[$. Então existe $N \geq d$ tal que
$$a_n > a_d r^{n-d}$$
para todo o $n \geq N$.
- $\sum_{n=d}^{\infty} a_d r^{n-d} = a_d \sum_{n=0}^{\infty} r^n$ diverge (série geométrica com $r > 1$), logo $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ também diverge pelo C.d.C. v1.

Demonstração

- Suponhamos que $\lambda > 1$ e escolhemos $r \in]1, \lambda[$. Então existe $N \geq d$ tal que
$$a_n > a_d r^{n-d}$$
para todo o $n \geq N$.
- $\sum_{n=d}^{\infty} a_d r^{n-d} = a_d \sum_{n=0}^{\infty} r^n$ diverge (série geométrica com $r > 1$), logo $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ também diverge pelo C.d.C. v1.
- Para o caso $\lambda = 1$, basta outra vez considerar as séries de Dirichlet.

Exemplo 1

Exemplo

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

converge.

Exemplo 1

Exemplo

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

converge.

-
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}} = \frac{1}{n+1},$$

uma vez que $(n+1)! = (n+1)n!$.

Exemplo 1

Exemplo

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

converge.

- $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}} = \frac{1}{n+1},$$

  uma vez que $(n+1)! = (n+1)n!$.
- Logo

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Exemplo 2

Exemplo

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!3^n}{n^n}$$

diverge.

Exemplo 2

- $$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!3^{n+1}/(n+1)^{n+1}}{n!3^n/n^n} \\ &= \frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{3^{n+1}}{3^n}\cdot\frac{1}{(n+1)^{n+1}/n^n} \\ &= \frac{\cancel{(n+1)}\,\cancel{n!}}{\cancel{n!}}\cdot\frac{\cancel{3^n}3}{\cancel{3^n}}\cdot\frac{1}{\cancel{(n+1)}\left((n+1)/n\right)^n} \\ &= \frac{3}{(1+1/n)^n}.\end{aligned}$$

Exemplo 2

- $$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!3^{n+1}/(n+1)^{n+1}}{n!3^n/n^n} \\ &= \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{3^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{1}{(n+1)^{n+1}/n^n} \\ &= \frac{\cancel{(n+1)}\,\cancel{n!}}{\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{3^n}3}{\cancel{3^n}} \cdot \frac{1}{\cancel{(n+1)}\,((n+1)/n)^n} \\ &= \frac{3}{(1+1/n)^n}. \end{aligned}$$

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n} = \frac{3}{e} > 1.$$

Relação entre os dois critérios

Observação

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série não-negativa. Então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda.$$

Relação entre os dois critérios

Observação

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série não-negativa. Então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda.$$

Mas o recíproco não é válido necessariamente.

- Diz-se que o Critério de Cauchy é **mais forte** do que o Critério de d'Alembert.

Contra-exemplo

Exemplo

Consideremos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+(-1)^n}}.$$

Contra-exemplo

Exemplo

Consideremos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+(-1)^n}}.$$

- Pelo Critério de Cauchy vê-se que esta série converge

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{\frac{n+(-1)^n}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{1+\frac{(-1)^n}{n}}} = \frac{1}{2}.$$

Contra-exemplo

Exemplo

Consideremos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+(-1)^n}}.$$

- Pelo Critério de Cauchy vê-se que esta série converge

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{\frac{n+(-1)^n}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{1+\frac{(-1)^n}{n}}} = \frac{1}{2}.$$

- Mas **não** dá para aplicar o Critério de d'Alembert, porque $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$ não existe:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 1/8, & \text{caso } n \text{ seja ímpar} \\ 2, & \text{caso } n \text{ seja par} \end{cases}.$$

Observação 1

Observação

Por vezes podemos usar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

para determinar

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Observação 1

Observação

Por vezes podemos usar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

para determinar

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

- Por exemplo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

implica

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Observação 2

Observação

Por vezes podemos usar o Critério de Cauchy ou o Critério de d'Alembert, em conjunto com o Critério Necessário, para determinar o limite duma sucessão.

- Por exemplo, podemos mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{r^n} = 0,$$

onde $p \in \mathbb{N}$ e $r \in]1, +\infty[$ são duas constantes fixas.

Observação 2

- Consideremos primeiro a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{r^n}.$$

Observação 2

- Consideremos primeiro a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{r^n}.$$

- Pelo Critério de Cauchy, esta série converge quando $r > 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^p}{r^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^p}{\sqrt[n]{r^n}} = \frac{1}{r} < 1.$$

Observação 2

- Consideremos primeiro a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{r^n}.$$

- Pelo Critério de Cauchy, esta série converge quando $r > 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^p}{r^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^p}{\sqrt[n]{r^n}} = \frac{1}{r} < 1.$$

- Pelo Critério Necessário:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{r^n} = 0.$$

Section outline

A série dos módulos

Definição (Séries dos módulos)

A **série dos módulos** *duma série* $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *é a série não-negativa*

$$\sum_{n=d}^{\infty} |a_n|.$$

A série dos módulos

Definição (Séries dos módulos)

A **série dos módulos** *duma série* $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *é a série não-negativa*

$$\sum_{n=d}^{\infty} |a_n|.$$

Lema

Se $\sum_{n=d}^{\infty} |a_n|$ *convergir, a série* $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *converge também.*

Demonstração

- Suponhamos que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (assumindo que $d = 1$) converge.

Demonstração

- Suponhamos que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (assumindo que $d = 1$) converge.
- Seja $\epsilon > 0$ arbitrário mas fixo. Pelo primeiro Critério de Cauchy, existe $N \geq d$ tal que

$$\sum_{n=k}^{m} |a_n| < \epsilon$$

para todos os $m \geq k \geq N$.

Demonstração

- Suponhamos que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (assumindo que $d = 1$) converge.
- Seja $\epsilon > 0$ arbitrário mas fixo. Pelo primeiro Critério de Cauchy, existe $N \geq d$ tal que

$$\sum_{n=k}^{m} |a_n| < \epsilon$$

  para todos os $m \geq k \geq N$.
- Logo

$$\left| \sum_{n=k}^{m} a_n \right| \leq \sum_{n=k}^{m} |a_n| < \epsilon$$

  para todos os $k, m \geq N$.

Demonstração

- Suponhamos que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (assumindo que $d = 1$) converge.
- Seja $\epsilon > 0$ arbitrário mas fixo. Pelo primeiro Critério de Cauchy, existe $N \geq d$ tal que

$$\sum_{n=k}^{m} |a_n| < \epsilon$$

para todos os $m \geq k \geq N$.
- Logo

$$\left| \sum_{n=k}^{m} a_n \right| \leq \sum_{n=k}^{m} |a_n| < \epsilon$$

para todos os $k, m \geq N$.
- Pelo primeiro Critério de Cauchy, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Observações

Observação

Note-se que o lema anterior também implica que $\sum_{n=d}^{\infty} |a_n|$ *diverge se* $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *diverge.*

Observações

Observação

Note-se que o lema anterior também implica que $\sum_{n=d}^{\infty} |a_n|$ *diverge se* $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *diverge.*

- Mais adiante veremos que o recíproco do lema é falso: existem séries convergentes cujas séries dos módulos divergem. Isso justifica a definição no próximo slide.

Convergências absoluta e simples

Definição

1. *Uma série* $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *diz-se* **absolutamente convergente** *se a série dos módulos* $\sum_{n=d}^{\infty} |a_n|$ *convergir.*
2. *Uma série* $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *diz-se* **simplesmente convergente** *se convergir mas a série dos módulos* $\sum_{n=d}^{\infty} |a_n|$ *divergir.*
3. *Uma série* $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *diz-se* **divergente** *se não for absoluta nem simplesmente convergente.*

Exemplo

Exemplo

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

é absolutamente convergente, porque a série dos módulos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

é uma série de Dirichlet convergente $(s = 2 > 1)$.

Séries alternadas e o Critério de Leibniz

Definição

Uma série $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *diz-se* **alternada** *se* $a_n a_{n+1} < 0$ *para todo o* $n \geq d$.

Séries alternadas e o Critério de Leibniz

Definição

Uma série $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *diz-se* **alternada** *se* $a_n a_{n+1} < 0$ *para todo o* $n \geq d$.

Teorema (Critério de Leibniz)

Uma série alternada $\sum_{n=d}^{\infty} a_n$ *converge quando:*

1. $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$;
2. $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ *para todo o* $n \geq d$.

Demonstração

- Sem perda de generalidade, assumimos que $d = 1$ e $a_1 > 0$.

Demonstração

- Sem perda de generalidade, assumimos que $d = 1$ e $a_1 > 0$.
- Então

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n,$$

onde $b_n = |a_n|$.

Demonstração

- Sem perda de generalidade, assumimos que $d = 1$ e $a_1 > 0$.
- Então
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n,$$
onde $b_n = |a_n|$.
- A sucessão das somas parciais **pares**:
$$S_{2N} = (b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) + \cdots + (b_{2N-1} - b_{2N})$$
é monotonamente crescente.

Demonstração

- Sem perda de generalidade, assumimos que $d = 1$ e $a_1 > 0$.
- Então
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n,$$
onde $b_n = |a_n|$.
- A sucessão das somas parciais **pares**:
$$S_{2N} = (b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) + \cdots + (b_{2N-1} - b_{2N})$$
é monotonamente crescente.
- Analogamente a sucessão das somas parciais **ímpares**
$$S_{2N+1} = b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \cdots - (b_{2N} - b_{2N+1})$$
é monotonamente descrescente.

Demonstração

- Como
$$S_{2N} \leq S_{2N} + b_{2N+1} = S_{2N+1},$$
verifica-se
$$S_2 \leq S_4 \leq \cdots \leq S_{2N} \leq S_{2N+1} \leq \cdots \leq S_3 \leq S_1.$$

Demonstração

- Como
$$S_{2N} \leq S_{2N} + b_{2N+1} = S_{2N+1},$$
verifica-se
$$S_2 \leq S_4 \leq \cdots \leq S_{2N} \leq S_{2N+1} \leq \cdots \leq S_3 \leq S_1.$$

- Logo, $(S_{2N})_{N\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente por S_1 e por isso tem um limite, digamos S_P.

Demonstração

- Como
$$S_{2N} \leq S_{2N} + b_{2N+1} = S_{2N+1},$$
verifica-se
$$S_2 \leq S_4 \leq \cdots \leq S_{2N} \leq S_{2N+1} \leq \cdots \leq S_3 \leq S_1.$$

- Logo, $(S_{2N})_{N\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente por S_1 e por isso tem um limite, digamos S_P.
- Analogamente $(S_{2N+1})_{N\in\mathbb{N}}$ é limitada inferiormente por S_2 e por isso tem um limite também, digamos S_I.

Demonstração

- Como
$$S_{2N} \leq S_{2N} + b_{2N+1} = S_{2N+1},$$
verifica-se
$$S_2 \leq S_4 \leq \cdots \leq S_{2N} \leq S_{2N+1} \leq \cdots \leq S_3 \leq S_1.$$
- Logo, $(S_{2N})_{N\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente por S_1 e por isso tem um limite, digamos S_P.
- Analogamente $(S_{2N+1})_{N\in\mathbb{N}}$ é limitada inferiormente por S_2 e por isso tem um limite também, digamos S_I.
- Mas $S_P = S_I$, porque
$$S_I = \lim_{N\to\infty} S_{2N+1} = \lim_{N\to\infty} S_{2N} + \lim_{N\to\infty} b_{2N+1} = S_P.$$
Portanto $\lim_{k\to\infty} S_k = S_P = S_I$.

Exemplo

Exemplo

A série harmónica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

satisfaz as hipóteses do Critério de Leibniz, logo converge. Mas a série dos módulos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

é a série harmónica normal, que diverge. Portanto, a série harmónica alternada é apenas simplesmente convergente.

Observação

Observação

Ambas *as condições no Critério de Leibniz são necessárias.*

Observação

Observação

Ambas *as condições no Critério de Leibniz são necessárias.*

- A condição $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ é o Critério Necessário.

Observação

Observação

Ambas *as condições no Critério de Leibniz são necessárias.*

- A condição $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ é o Critério Necessário.
- A condição $|a_{n+1}| \leq |a_n|$, para todo o $n \geq d$, também é necessária: Consideremos $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$, onde

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par,} \\[2ex] \dfrac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Observação

Observação

Ambas *as condições no Critério de Leibniz são necessárias.*

- A condição $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ é o Critério Necessário.
- A condição $|a_{n+1}| \leq |a_n|$, para todo o $n \geq d$, também é necessária: Consideremos $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$, onde

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par,} \\[2ex] \dfrac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

- A sucessão $b_n = |a_n|$ não é monotonamente decrescente:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{9}, \frac{1}{4}, \frac{1}{25}, \frac{1}{6}, \ldots$$

Observação

- Vamos mostrar que esta série alternada diverge.

Observação

- Vamos mostrar que esta série alternada diverge.
- Para todo o $m \in \mathbb{N}$:

$$S_{2m} = \sum_{n=1}^{2m} (-1)^n b_n = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Observação

- Vamos mostrar que esta série alternada diverge.
- Para todo o $m \in \mathbb{N}$:

$$S_{2m} = \sum_{n=1}^{2m} (-1)^n b_n = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

- Suponhamos, por absurdo, que $\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S$.

Observação

- Vamos mostrar que esta série alternada diverge.
- Para todo o $m \in \mathbb{N}$:

$$S_{2m} = \sum_{n=1}^{2m} (-1)^n b_n = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

- Suponhamos, por absurdo, que $\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S$.
- Pelo C.d.C. v1, $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(2k-1)^2$ converge porque

$$\frac{1}{(2k-1)^2} \leq \frac{1}{k^2} \quad \text{para todo o } k \in \mathbb{N}$$

e $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ converge (série de Dirichlet com $s = 2 > 1$).

Observação

- Seja
$$D := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Observação

- Seja
$$D := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$
- Então
$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} - D \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = S + D.$$

Observação

- Seja
$$D := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$
- Então
$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} - D \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = S + D.$$
- Contradição: $\sum_{k=1}^{\infty} 1/2k = (1/2)\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ diverge.

Observação

- Seja

$$D := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

- Então

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} - D \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = S + D.$$

- Contradição: $\sum_{k=1}^{\infty} 1/2k = (1/2)\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ diverge.
- Conclusão: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ diverge.

Estratégia geral

Para determinar a natureza duma dada série:

Estratégia geral

Para determinar a natureza duma dada série:

1. Verificar se o Critério Necessário está satisfeito. Note-se que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

Estratégia geral

Para determinar a natureza duma dada série:

1. Verificar se o Critério Necessário está satisfeito. Note-se que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

2. Verificar se a série é geométrica, de Mengoli ou de Dirichlet. Caso seja, aplicar o respetivo critério.

Estratégia geral

Para determinar a natureza duma dada série:

1. Verificar se o Critério Necessário está satisfeito. Note-se que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

2. Verificar se a série é geométrica, de Mengoli ou de Dirichlet. Caso seja, aplicar o respetivo critério.
3. Analisar a série dos módulos, usando os critérios para séries não-negativas (C.d.C., Cauchy, d'Alembert).

Estratégia geral

Para determinar a natureza duma dada série:

1. Verificar se o Critério Necessário está satisfeito. Note-se que
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$
2. Verificar se a série é geométrica, de Mengoli ou de Dirichlet. Caso seja, aplicar o respetivo critério.
3. Analisar a série dos módulos, usando os critérios para séries não-negativas (C.d.C., Cauchy, d'Alembert).
4. Caso a série dos módulos seja divergente e a série seja alternada, aplicar o Critério de Leibniz.

FIM