



INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO  
Departamento de Engenharia Mecânica

---

**Métodos Computacionais e Optimização**

Programa Doutoral em Engenharia Mecânica

1º Ano - 1º Semestre

2014-2015

---

**Relatório do 3º Trabalho**

-

**BAT-ALGORITHM NA MINIMIZAÇÃO DE DEFORMADAS  
MÁXIMAS E MAXIMIZAÇÃO DE FREQUÊNCIAS  
FUNDAMENTAIS DE VIBRAÇÃO**

---

**Docente da disciplina:**

Prof. João Sousa

**Aluno:**

Gonçalo Bernardo

ist90893



## Índice de Conteúdos

Índice de Conteúdos.....	ii
Índice de Figuras.....	iv
Índice de Tabelas.....	vi
1. Introdução.....	1
1.1 Objectivos do trabalho.....	1
1.2 Organização do relatório.....	1
2. Meta-heurísticas.....	3
2.1 Bat-Algorithmic (BA).....	3
2.1.1 Movimento dos morcegos.....	4
2.1.2 Variação do Ruído e Taxas de Impulsos.....	4
2.2 Bat-Algorithm Modificado (MBA).....	6
2.3 Bat-Algorithm Híbrido (HBA).....	7
2.3.1 Evolução diferencial.....	7
3. Métodos sem malha.....	11
3.1 Interpolação das funções de base radial.....	12
3.2 Análise Estática.....	13
3.2.1 Colocação assimétrica com RBFs para placas laminadas.....	13
3.3 Análise de Vibrações Livres.....	16
3.3.1 Colocação assimétrica com RBFs para placas laminadas.....	16
3.3.2 Resolução do Problema de Vibrações Livres.....	17
3.4 Obtenção das funções objectivo.....	17
4. Testes e Resultados.....	21
4.1 Comparação com os resultados obtidos pelo PSO e validação do Método sem Malha implementado.....	21
4.1.1 Placa quadrada isotrópica sob carga uniforme e simplesmente apoiada.....	22
4.1.2 Placa quadrada Compósita $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ sob carga sinusoidal.....	23
4.1.3 Placa quadrada com gradiente funcional de propriedades em regime livre e natural.....	23
4.2 Resultados das deformações de sandwich FGM.....	24
4.3 Resultados das deformações da placa FGM.....	26
4.3.1 Análise dos resultados da minimização das deformadas.....	27
4.4 Resultados de frequências naturais de vibração.....	27
4.4.1 Análise dos resultados da maximização das frequências fundamentais.....	29
4.5 Estudo paramétrico do BA.....	29
4.5.1 Análise dos resultados do estudo paramétrico na minimização da equação (4.5).....	31
4.5.2 Análise dos resultados do estudo do parâmetro $F_p$ no HBA, na minimização da equação (4.5).....	34
4.5.3 Análise dos resultados do estudo do efeito da dimensão da população de morcegos no BA, na minimização da equação (4.5).....	35
4.5.4 Análise dos resultados do estudo paramétrico na minimização da equação (4.6).....	36
5. Conclusões.....	38
Bibliografia.....	40

ANEXOS.....	42
ANEXO A - Artigo utilizado para comparação do BA com o PSO.....	42
ANEXO B - Exemplo de uma função da viga de sandwich FGM, obtida em MATLAB.....	44
ANEXO C - Exemplos de simulações efectuadas para minimização das funções consideradas no estudo paramétrico.....	46

## Índice de Figuras

Figura 2.1 - Gráficos das Alterações do ruído $A$ (a) e da taxa de impulsos $r$ (b) ao longo de 100 iterações [4].....	7
Figura 2.2- Ilustração de uma função de custo bidimensional mostrando as isolinhas e o processo de geração $v_{i,G+1}$ . [5].....	9
Figura 2.3 - Ilustração de um processo de cruzamento para 7 parâmetros. [5].....	9
Figura 3.1- Geometria das placas sandwich FGM (a) e com gradiente funcional (b).....	18
Figura B.1 - Ilustração exemplo da função do cálculo da deformada a meio vão numa viga FGM simplesmente apoiada sob carga uniformemente distribuída.....	43
Figura C.1 - Iterações na minimização da função (4.5) utilizando o Método dos GC de Fletcher-Reeves ( $x_{inicial}=[-4,-5]$ e $\epsilon=0.05$ ).....	45
Figura C.2 - Iterações na minimização da função (4.5) utilizando o Método de DFP ( $x_{inicial}=[3,2]$ e $\epsilon=0.05$ ).....	45
Figura C.3 - Iterações na minimização da função (4.6) utilizando o Método de DFP ( $x_{inicial}=[0,0,0]$ e $\epsilon=0.005$ ).....	46



## Índice de Tabelas

Tabela 2.1 - Operações da estratégia básica da Evolução Diferencial.....	8
Tabela 3.1 - Classificação dos métodos sem malha, segundo [17].....	12
Tabela 3.2 - Funções de base radial [22].....	13
Tabela 3.3 - Propriedades dos materiais considerados.....	18
Tabela 4.1 - Parâmetros do BA utilizados para obtenção dos resultados de comparação com o PSO.....	21
Tabela 4.2a - Resultados obtidos para efeitos de comparação de Métodos, das deformadas.....	21
Tabela 4.2b - Resultados obtidos para efeitos de comparação de Métodos, das deformadas.....	21
Tabela 4.3 - Resultados obtidos para efeitos de comparação de Métodos, das frequências fundamentais.....	22
Tabela 4.4- Resultados para Teoria de Primeira Ordem obtidos, parâmetro $c$ da função multiquádrica: $c=2/\sqrt{n}$ . ( $n$ refere-se ao número de pontos de cada lado da grelha da placa).....	23
Tabela 4.5 - Resultados para Teoria de Primeira Ordem obtidos, para placa laminada, parâmetro $c$ da função multiquádrica: $c=2/\sqrt{n}$ . ( $n$ refere-se ao número de pontos de cada lado da grelha da placa).....	23
Tabela 4.6 - Resultados para Teoria de Primeira Ordem obtidos, para placa com gradiente funcional de propriedades, parâmetro $c$ da função multiquádrica e respectiva comparação com Ferreira et al. [27]: $c=2/\sqrt{n}$ . ( $n$ refere-se ao número de pontos de cada lado da grelha da placa)....	24
Tabela 4.7 - Parâmetros do BA utilizados para obtenção dos resultados para minimização da deformada da sandwich FGM.....	25
Tabela 4.8 - Parâmetros do problema de análise utilizados para obtenção dos resultados para minimização da deformada da sandwich FGM.....	25
Tabela 4.9 - Resultados obtidos na minimização da deformada a meio-vão da sandwich FGM, para o HBA.....	25
Tabela 4.10 - Resultados obtidos na minimização da deformada a meio-vão da sandwich FGM, para o BA.....	26
Tabela 4.11 - Parâmetros do problema de análise utilizados para obtenção dos resultados para minimização da deformada da placa FGM.....	26
Tabela 4.12 - Resultados obtidos na minimização da deformada a meio-vão da placa FGM, para o HBA.....	26
Tabela 4.13 - Resultados obtidos na minimização da deformada a meio-vão da placa FGM, para o BA.....	27
Tabela 4.14 - Resultados obtidos na maximização da frequência fundamental da sandwich FGM, para o HBA.....	28
Tabela 4.15 - Resultados obtidos na maximização da frequência fundamental da sandwich FGM, para o BA.....	28
Tabela 4.16 - Resultados obtidos na maximização da frequência fundamental da sandwich FGM, considerando como cerâmico a sílica, para o BA.....	28
Tabela 4.17 - Resultados obtidos na maximização da frequência fundamental da sandwich FGM, considerando como cerâmico a sílica, para o HBA.....	29
Tabela 4.18a - Resultados obtidos na minimização da equação (4.5), para o HBA, fazendo variar os diversos parâmetros de iniciação do algoritmo.....	31

Tabela 4.18b - Resultados obtidos na minimização da equação (4.5), para o BA, fazendo variar os diversos parâmetros de iniciação do algoritmo.....	32
Tabela 4.19 - Resultados obtidos na minimização da equação (4.5), para o HBA, para estudo do efeito do efeito da variação do factor de permutação.....	34
Tabela 4.20 - Resultados obtidos na minimização da equação (4.5), para o BA, para estudo do efeito do efeito de aumento da dimensão da população de morcegos e aumento do número de iterações.....	34
Tabela 4.21a - Resultados obtidos na minimização da equação (4.6), para o HBA.....	35
Tabela 4.21b - Resultados obtidos na minimização da equação (4.6), para o BA.....	35



# 1. Introdução

## 1.1 Objectivos do trabalho

Este trabalho, realizado no âmbito da disciplina de Métodos Computacionais e Optimização, do programa Doutoral em Engenharia Mecânica tem como objectivo a implementação de um algoritmo baseado num método de optimização meta-heurístico bio-inspirado: o Bat Algorithm. Adicionalmente pretende-se implementar uma versão mais eficaz do método, baseada no conceito de Evolução Diferencial.

O objectivo principal da implementação deste método é a sua aplicação na minimização das deformadas máximas de placas sandwich com gradiente funcional de propriedades e placas com uma camada com gradiente funcional de propriedades, bem como a maximização considerando as mesmas placas, da primeira frequência fundamental, em regime livre.

Quanto ao método considerado para efeitos de obtenção das funções a otimizar, implementou-se um algoritmo baseado nos métodos sem malha, utilizando as funções de interpolação multiquádricas.

Adicionalmente será efectuado um estudo paramétrico do algoritmo em funções de teste de modo a verificar-se o seu efeito nos resultados obtidos.

## 1.2 Organização do relatório

**Capítulo 1:** Introdução.

**Capítulo 2:** Métodos Meta-heurísticos e o Bat-Algorithm: neste capítulo é feita uma abordagem ao algoritmo implementado, fazendo uma breve referência aos métodos meta-heurísticos, e posteriormente descreve-se o Bat Algorithm implementado, bem como as suas versões consideradas, nomeadamente o Bat-Algorithm Modificado e o Bat-Algorithm Híbrido. Adicionalmente, são apresentados os algoritmos implementados, em detalhe.

**Capítulo 3:** Métodos sem malha: neste capítulo introduz-se os métodos sem malha baseados na colocação assimétrica de Kansas e a sua utilização no âmbito da análise estática e de vibrações livres. É descrita a formulação utilizada para efeitos de cálculos das deformadas e frequências naturais de vibração das placas de gradientes funcional de propriedades: a Teoria de Primeira Ordem de Reddy, bem como descreve-se o modo de interpolação das funções referentes à formulação. Por fim é descrita a forma como foram obtidas as funções objectivo a serem optimizadas, bem como referem-se as propriedades geométricas e de propriedades das placas consideradas.

**Capítulo 4:** Resultados: aqui os resultados são apresentados. Em primeiro lugar efectuam-se algumas validações dos métodos sem malha utilizados, comparando os resultados com outros autores. Seguidamente passa-se à apresentação dos resultados associados aos objectivos efectivos do presente trabalho e por fim efectua-se um estudo paramétrico relativo ao Bat Algorithm Híbrido. Por fim os resultados são comparados/discutidos.

**Capítulo 5:** Conclusões: no último capítulo faz-se uma análise global ao trabalho e aos resultados obtidos.



## 2. Meta-heurísticas

A área que estuda as meta-heurísticas é considerada um subcampo primário da área de optimização estocástica, classe geral de algoritmos e técnicas que empregam algum grau de aleatoriedade para encontrar soluções tão óptimas quanto possível para problemas reconhecidamente difíceis [1].

Segundo a definição original, meta-heurísticas tratam-se de métodos de solução que coordenam procedimentos de busca locais com estratégias de mais alto nível, de modo a criar um processo capaz de escapar de mínimos locais e realizar uma busca robusta no espaço de soluções de um problema [2].

Posteriormente, a definição passou a abranger quaisquer procedimentos que empregassem estratégias para escapar de mínimos locais em espaços de busca de soluções complexas. Em especial, foram incorporados procedimentos que utilizam o conceito de vizinhança para estabelecer meios de fugir dos mínimos locais.

Assim, Uma meta-heurística tem por objectivo produzir um resultado satisfatório para um dado problema, porém sem qualquer garantia de optimalidade

Meta-heurísticas são aplicadas para encontrar respostas a problemas sobre os quais há poucas informações: não se sabe como é a aparência de uma solução óptima, há pouca informação heurística disponível e força-bruta é desconsiderada devido ao espaço de solução ser muito grande. Porém, dada uma solução candidata ao problema, esta pode ser testada e sua optimalidade, averiguada.

Actualmente existem uma série de métodos meta-heurísticos de optimização, possuem cada um as suas vantagens e desvantagens, e podendo-se nomear alguns exemplos destes, que são amplamente utilizados: *Greedy Best-first Search*; *Hill Climbing*; *Tabu Search*; *Simulated Annealing*; *Ant Colony Optimization*; *GRASP*; *Memetic Algorithms*; *Genetic Algorithms (GA)*; *Particle Swarm Optimization (PSO)*; *Harmony Search*; etc.

Na referência a este algoritmos de optimização não se efectuou a sua tradução, dado que nem todos possuem uma tradução exacta para português.

No entanto, o foco do presente trabalho não será nenhum dos métodos acima mencionados, mas sim um método que tem sido desenvolvido desde há poucos anos, mostrando ser eficiente na resolução de diversos problemas de optimização: o Bat-Algorithm; possuindo já diversas variantes que têm, sem qualquer dúvida, trazido ao método inicial um aumento de eficiência no encontro de soluções óptimas, como será adiante demonstrado.

De entre as suas variáveis, neste trabalho, foi implementado o Bat-Algorithm Híbrido e com Evolução Diferencial, cuja abordagem sera efectuada nos próximos sub-capítulos.

### 2.1 Bat-Algorithmic (BA)

De entre os diversos métodos meta-heurísticos previamente mencionados, no presente trabalho foi desenvolvido uma algoritmo bio-inspirado criado por Yang em 2010 [3]: o

Bat-Algorithm (BA), que pretendeu cobrir algumas desvantagens de métodos como o PSO ou GA, principalmente nos que diz respeito a lidar com problemas de optimização multi-modal. [3]

O método BA é baseado nas características de ecolocalização de micro-morcegos, e utiliza uma técnica de sintonização da frequência para aumentar a diversidade das soluções numa população, enquanto, em simultâneo, é utilizada a ampliação automática para balancear a exploração e pesquisa durante o processo de procura através da propagação das variações de emissão de taxas de impulsos e ruído dos morcegos quando procuram presas. [3]

Como resultado, é provado ser muito eficiente com um início tipicamente rápido.

O primeiro esquema do BA proposto por Yang (2010) considera determinadas características associadas à ecolocalização dos micromorcegos [3], que levaram a que autor deste método estabele-se as três regras idealizadas:

Todos os morcegos utilizam a ecolocalização para sentir a distância, e também “sabem” a diferença entre comida/presas e barreiras de certa forma mágica;

Os morcegos voam aleatoriamente com velocidade  $v_i$  e posição  $x_i$  com  $f_{min}$ , variando o comprimento de onda  $\lambda$  e ruído  $A_0$  para procurar a presa. Eles podem automaticamente ajustar o comprimento de onda, ou a frequência dos seus impulsos emitidos e ajustar a taxa de emissão de impulsos  $r \in [0,1]$ , dependendo na proximidade do seu alvo;

Apesar do ruído poder variar de diversos modos, é assumido que este ruído varia de um valor elevado  $A_0$  (positivo) até um valor mínimo constante  $A_{min}$  [3-4].

### 2.1.1 Movimento dos morcegos

Segundo o BA, o movimento de cada morcego está associado a uma velocidade  $v_i^t$  e a uma localização  $x_i^t$  na iteração  $t$  do algoritmo, em d-dimensões do espaço de pesquisa. Entre todos os morcegos, existe uma solução actual melhor  $x^*$ . Adicionalmente, as três equações seguintes traduzem as regras de atualização das posições  $x_i^t$  e velocidades:  $v_i^t$

$$\begin{aligned} f_i &= f_{min} + (f_{max} - f_{min})\beta, \\ v_i^t &= v_i^{t-1} + (x_i^{t-1} - x_*)f_i, \\ x_i^t &= x_i^{t-1} + v_i^t, \end{aligned} \tag{2.1 a-c}$$

Onde  $\beta \in [0,1]$  é um vector aleatório considerando uma distribuição uniforme.

Também se pode utilizar os comprimentos de onda ou as frequências na implementação, sendo que os valores utilizados no presente relatório foram de  $f_{min}=0$  e  $f_{max}=2$ . Inicialmente, a cada morcego é aleatoriamente atribuída uma frequência que varia entre o intervalo referido de forma linear. Por esta razão, o BA pode ser considerado com um algoritmo de sintonização de frequência para atribuir uma combinação balanceada entre exploração e exploração. O ruído e a taxa de emissão de impulsos essencialmente atribui um mecanismo para controlo automático e auto-amplificação em regiões com soluções promissoras [3].

### 2.1.2 Variação do Ruído e Taxas de Impulsos

De modo a fornecer um mecanismo efectivo para controlar a exploração e exploração e interromper o estado de exploração quando necessário, tem-se de variar o ruído  $A_i$  e a taxa de emissão de impulsos  $r_i$  durante as iterações. Considerando que o ruído decresce em sempre que o morcego encontra a sua presa, enquanto a taxa de emissão de impulsos aumenta, o ruído pode ser escolhido como um valor de conveniência, entre  $A_{min}$  e  $A_{max}$ , assumindo  $A_{min}=0$  significa que o morcego encontrou a presa e temporariamente deixa de emitir som.

Com estas assumções, tem-se:

$$A_i^{t+1} = \alpha A_i^t, \quad r_i^{t+1} = r_i^0 [1 - \exp(-\gamma t)] \quad (2.2)$$

Onde  $\alpha$  e  $\gamma$  são constantes. Fazendo uma analogia, aqui  $\alpha$  é similar a um factor de refrigeração de um esquema de refrigeração numa simulação de recozimento. Por cada  $0 < \alpha < 1$  e  $\gamma > 0$ , tem-se:

$$A_i^t \rightarrow 0, \quad r_i^t \rightarrow r_i^0, \quad \text{as } t \rightarrow \infty \quad (2.3)$$

No caso mais simples, pode assumir-se como  $\alpha=\gamma=0.9$  até 0.98 [3].

Nas simulações do presente relatório, o valor considerado para ambos os parâmetros foi de 0.9, sendo que apenas se alteraram nas simulações propositadas para o efeito da sua influência na eficiência do algoritmo.

Considerando então a informação acima apresentada, pode considerar-se o seguinte algoritmo para se descrever o BA:

Algoritmo 1 (BAT Algorithm -BA)		
1. Função objectivo: $f(x)$ , $x=(x_1,...,x_d)^t$ ;		
2. Inicializar a população de morcegos $x_i$ e velocidade $v_i$ $i=1,2,...,n$ ;		
3. Definir a frequência $f_i$ em $x_i$ ;		
4. Inicializar a taxa de impulsos $r_i$ e o ruído $A_i$ ;		
A. Enquanto t < número máximo de iterações	6. Gerar novas soluções ajustando a frequência, e actualizar as velocidades e localização/soluções;	
	B. Se rand> $r_i$	7. Seleccionar a melhor solução de entre as melhores;
		8. Gerar uma solução local à volta da melhor solução escolhida;
	C. Enquanto(t<número máximo de iterações (gerações))	9. Aceitar novas soluções;
		10. Aumentar $r_i$ reduzir $A_i$ ;
	9. Comparar os morcegos e escolher a melhor solução $x^*$	
10. Mostrar resultados;		

## 2.2 Bat-Algorithm Modificado (MBA)

Com o objectivo de aumentar a diversidade de possíveis soluções do problema, [4] propôs uma alteração ao Algoritmo 1, alterando o algoritmo nos passos 7 e 8 de acordo com os passos descritos abaixo e gerando novos valores de  $x$  conforme a equação (2.4).

1. Gerar um valor aleatório entre 0 e 1 e compará-lo com a taxa de emissão de todos os morcegos da população;
2. Se este valor for maior que a taxa de emissão de impulsos actual  $r_i$ ;
3. Seleccionar a melhor solução de entre as melhores;
4. Gerar uma solução local em torno desta melhor solução encontrada.

O algoritmo fica então da forma mostra no Algoritmo 2

Algoritmo 2 (Modified BAT Algorithm -MBA)		
1. Função objectivo: $f(x)$ , $x=(x_1,...,x_d)^t$ ;		
2. Inicializar a população de morcegos $x_i$ e velocidade $v_i$ $i=1,2,...,n$ ;		
3. Definir a frequência $f_i$ em $x_i$ ;		
4. Inicializar a taxa de impulsos $r_i$ e o ruído $A_i$ ;		
A. Enquanto $t <$ número máximo de iterações	6. Gerar novas soluções ajustando a frequência, e actualizar as velocidades e localização/soluções;	
	B. Se $\text{rand}>r_i$	7. Seleccionar a melhor solução de entre as melhores;
		8. Gerar uma solução local à volta da melhor solução escolhida;
	C. Enquanto( $t<número$ máximo de iterações (gerações))	9. Aceitar novas soluções;
		10. Aumentar $r_i$ reduzir $A_i$ ;
	9. Comparar os morcegos e escolher a melhor solução $x^*$	
10. Mostrar resultados;		

Assim, uma vez que a melhor solução de entre as melhores é escolhida, é gerada uma nova solução candidata através de uma caminhada aleatória da seguinte forma:

$$x_{\text{novo}} = x_{\text{antigo}} + \varepsilon A^t \quad (2.4)$$

Onde  $A^t$  é o ruído médio de todos os morcegos e  $\varepsilon$  um valor aleatório entre 0 e 1 e representa a direcção e a intensidade da caminhada aleatória.

A actualização do ruído e das taxas de emissão de impulsos é efectuada da mesma forma que no caso do algoritmo inicial BA.

Para um dado problema genérico as figura 2.1 mostram os gráficos das actualizações destes parâmetros ao longo de 100 iterações.

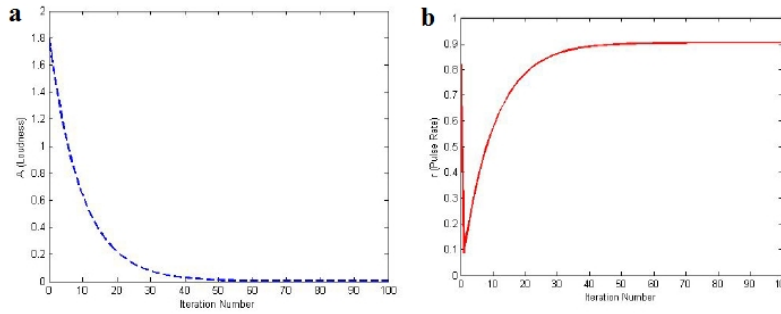


Figura 2.1 - Gráficos das Alterações do ruído  $A$  (a) e da taxa de impulsos  $r$  (b) ao longo de 100 iterações [4].

De notar que estes parâmetros apenas se actualizam quando as soluções melhoram, e caso contrário, os valores mantêm-se nos actuais [4].

Na próxima subsecção mostrar-se uma nova alteração ao BA, introduzindo novas alterações ao algoritmo na geração de novas soluções, substituindo os procedimentos do MBA, e baseando no conceito de evolução diferencial.

Por motivos de comparação, ter-se-ão em consideração estas duas formas do BA na implementação e obtenção de resultados deste relatório.

## 2.3 Bat-Algorithm Híbrido (HBA)

Baseando-se no conceito de *evolução diferencial*, [6] propôs um algoritmo BA que alterou o modo como se procede no passo B do algoritmo 2.

Em seguida faz-se uma abordagem a este conceito de evolução diferencial (DE), de modo a perceber a ideia por detrás do novo algoritmo.

### 2.3.1 Evolução diferencial

A Evolução Diferencial (ED) trata-se de um método de pesquisa paralelo que utiliza  $NP$  vectores de parâmetros  $D$ -dimensionais:

$$x_{i,G}, i=1,2,\dots, NP \quad (2.5)$$

como população para cada geração  $G$ .  $NP$  não se altera durante o processo de minimização. O vector inicial da população é escolhido aleatoriamente e deverá cobrir o espaço paramétrico todo. Como regra, assumir-se-á que a distribuição de probabilidades é uniforme para todas as decisões aleatórias a menos que se imponha o contrário. No caso da solução preliminar estar disponível, a população inicial deverá ser gerada adicionando desvios aleatórios de distribuição normal à solução nominal  $x_{nom,0}$ . ED gera nos vectores paramétricos adicionando a diferença pesada entre dois vectores de populações a um terceiro vector. Os parâmetros dos vectores mutados são uma mistura dos parâmetros de outro vector pré-determinado, o vector alvo, para conduzir-se ao vector doador. A mistura de parâmetros é por vezes referida como “cruzamento” na comunidade-ES. Se o vector doador levar a um valor da função de custo menor que o vector alvo, o primeiro repõe o segundo na próxima geração. Esta última operação é chamada de selecção.

Cada vector de população tem de servir pelo menos uma vez de vector alvo de modo a haverem NP competições numa geração.

Mais especificamente a estratégia básica da ED pode ser descrita como na tabela 2.1.

Tabela 2.1 - Operações da estratégia básica da Evolução Diferencial.

<b>Mutação</b>	<p>Por cada vector alvo <math>x_{i,G}</math>, <math>i=1,2,3,...,NP</math>, é gerado um vector mutante de acordo com a equação:</p> $v_{i,G+1} = x_{i,G} + F(x_{r_2,G} - x_{r_3,G}) \quad (2.6)$ <p>Com índices aleatórias <math>r_1, r_2, r_3 \in \{1,2,...,NP\}</math>, inteiros, mutuamente diferentes e <math>F&gt;0</math>. Os números aleatórios escolhidos <math>r_1, r_2</math> e <math>r_3</math> são também escolhidos de modo a serem diferentes do índice do indivíduo actual <math>i</math>, e sendo assim, <math>NP</math> deverá ser maior ou igual a 4 para permitir esta condição. <math>F</math> é um número real e constante <math>\in [0,2]</math> que controla a amplificação da variação diferencial <math>(x_{r_2,G}-x_{r_3,G})</math>. A figura 2.2 mostra um exemplo bidimensional que ilustra os diferentes vectores que fazem parte de uma geração de <math>v_{i,G+1}</math>.</p>
<b>Cruzamento</b>	<p>De forma a aumentar a diversidade dos parâmetros dos vectores perturbados, é introduzido o cruzamento. Para este efeito, o vector doador:</p> $u_{i,G+1} = (u_{1i,G+1}, u_{2i,G+1}, \dots, u_{Di,G+1})$ <p>É formado, onde</p> $u_{ji,G+1} = \begin{cases} v_{ji,G+1} & \text{Se } (randb(j)) \leq CR \text{ ou } j=rnbr(i); \\ u_{ji,G} & \text{Se } (randb(j)) > CR \text{ e } j \neq rnbr(i); \end{cases} \quad (2.7)$ <p>Em (2.7) <math>randb(j)</math> é a <math>j</math>th validação de um número aleatório gerado de forma aleatória entre 0 e 1. <math>CR</math> é a constante de cruzamento, também pertencente ao intervalo <math>[0,1]</math> que tem de ser determinada pelo utilizador. <math>rnbr(i)</math> é o índice escolhido aleatoriamente <math>\in 1,2,...,D</math> que assegura que <math>u_{i,G+1}</math> obtenha pelo menos um parâmetro de <math>v_{i,G+1}</math>. A figura 2.3 dá um exemplo do mecanismo de cruzamento para um vectores 7-dimensional.</p>
<b>Seleção</b>	<p>Para decidir qual deverá tornar-se, ou não, membro da geração <math>G+1</math>, o vector doador <math>u_{i,G+1}</math> é comparado com o vector alvo <math>x_{i,G}</math> usando um critério ávido. Se o vector <math>u_{i,G+1}</math> conduzir a um valor da função de custo menor que o de <math>x_{i,G}</math>, então a <math>x_{i,G+1}</math> é atribuído o valor de <math>u_{i,G+1}</math>, caso contrário, mantém-se o <math>x_{i,G}</math> antigo.</p>



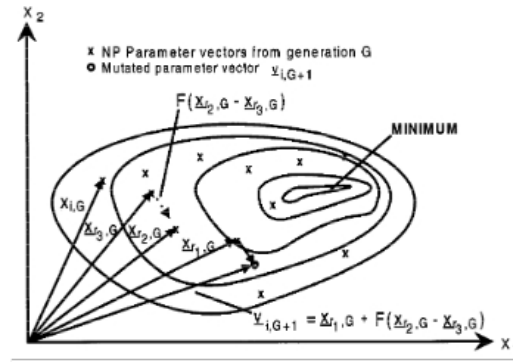


Figura 2.2- Ilustração de uma função de custo bidimensional mostrando as isolinhas e o processo de geração  $v_{i,G+1}$ .

[5]

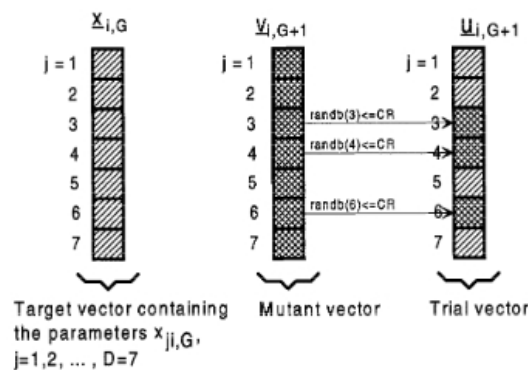


Figura 2.3 - Ilustração de um processo de cruzamento para 7 parâmetros. [5]

### Estratégias de Evolução diferencial

A aplicação do Método da Evolução diferencial pode variar conforme a escolha do utilizador. Esta escolha depende do tipo de indivíduo a ser modificado na constituição do vector doador, do número de indivíduos considerados nesta constituição e, também do tipo de cruzamento a ser utilizado no procedimento. Estas diferentes formas são chamadas de estratégias da ED e podem ser escritas com ED/a/b/c, sendo que:

- a - especifica o vector a ser perturbado, podendo ser “rand” (vector de populações escolhido aleatoriamente) ou “best” (o vector de menor custo da população);
- b - determina o número de diferenças ponderadas usadas para a perturbação do vector definido por a;
- c - denota o tipo de cruzamento (exp: exponencial; bin: binominal).

Para efeitos de implementação neste trabalho, utilizou-se a estratégia: ED/best/2/bin.

Desta forma, segundo [6] a selecção de novas soluções do problema deverá ter em consideração estas operações de mutação, cruzamento selecção, de modo aumentar a diversidade de soluções geradas, facilitando a procura de um óptimo mais facilmente.



### 3. Métodos sem malha

Actualmente, a utilização de funções de base radial visando a aproximação de funções tem vindo a aumentar, aproximando dados dispersos em várias dimensões. A aproximação por funções de base radial é particularmente útil quando se pretende que as funções a aproximar dependem de várias variáveis ou parâmetros, podendo ser definidas por vários dados, ou ainda quando estes últimos estão espalhadas num dado domínio. [8].

Hardy [9] realizou o primeiro trabalho sobre funções de base radial a ter visibilidade, sendo este relativo ao domínio da interpolação, nomeadamente pela utilização da função multiquádrica na interpolação de superfícies geográficas. Posteriormente, Franke [10], baseando-se nos critérios de exactidão, aspecto visual, sensibilidade a parâmetros, tempo de execução, esforço computacional e facilidade de implementação, concluiu que o esquema de Hardy de multiquádrica seria um dos melhores.

Micchelli [11], provou ser a interpolação por multiquádricas um método que dá sempre origem a um sistema solúvel, para um conjunto de dados distintos, concluindo Stead [12] que a função multiquádrica apresenta um excelente comportamento em superfícies com uma grande curvatura, ao estudar uma série de métodos para a estimativa de derivadas parciais com dados dispersos.

Na década de 90 surgiram os trabalhos de Kansa [13-14], onde foi utilizada com sucesso uma colocação directa de funções de base radial (colocação assimétrica de Kansa) na resolução de equações diferenciais de derivadas parciais. Adicionalmente, este método é mostrado ser mais eficiente que o método das diferenças finitas, que requer um maior número de operações para atingir o mesmo grau de precisão, a qual também apresenta ser superior que à do método dos elementos finitos (MEF) [15].

Uma das características que pode facilitar a utilização deste método em relação ao MEF é o facto de ser necessária, no caso do primeiro, geração de uma malha. A facilidade de implementação do método das funções de base radial é explicada observando por exemplo, a função multiquádrica:  $\phi = \sqrt{r^2 + c^2}$  cujos parâmetros  $r^2$  e  $c^2$  são, respectivamente, uma distância e um parâmetro de forma (escolhido pelo utilizador).

A distância  $r$  é facilmente descrita para  $n$  dimensões, o que vem simplificar a codificação do método numérico. Outra característica deste método é a utilização de uma formulação forte, onde as equações usadas correspondem as equações físicas do problema.

Considerando os trabalhos mencionados, o método das funções de base radial tem vindo a impor-se como uma boa alternativa ao MEF, sendo que, contudo, este método não se encontra amplamente explorado e testado na área da análise de estruturas.

Embora o FEM seja um método robusto e muito usado na área da engenharia, a crescente complexidade dos problemas da mecânica computacional tem mostrado algumas das suas limitações, como por exemplo, no estudo de problemas que envolvam grandes deformações e propagação de fracturas ou problemas com fronteiras em movimento [15-16]. Muitos desses problemas devem-se a que o FEM necessite de uma malha, ou seja, de um conjunto de nós que estão relacionados entre si de forma pré-definida. O objectivo dos métodos sem malha e, tal como o nome indica, eliminar o processo de geração da malha, tal como ela é entendida nos métodos computacionais convencionais, como o MEF. Segundo [15], o método sem malha ideal não

necessita de uma malha no decorrer da resolução de um problema descrito por um sistema de equações diferenciais parciais, com uma geometria arbitrária, sujeito a qualquer condição de fronteira.

Quanto à classificação dos diversos métodos sem malha que até à data já foram desenvolvidos, pode-se adoptar a classificação sugerida por Gu [17], apresentada na tabela 3.1.

Tabela 3.1 - Classificação dos métodos sem malha, segundo [17].

<b>Tipo de formulação</b>	Formulação forte: GFDM, FPM, hp-cloud, MCM, MFS; Formulação forte: DEM, EFG, RPIM, MLPG, LRPIM; Formulação forte-forte: MWS; Representação integral: SPH;
<b>Função de forma</b>	Representação integral: SPH, RKPM; Moving least squares (mls): MLPG, BNM; Funções de base radial: MRPIM, LRPIM; Outros: hp-cloud, PU, MK;
<b>Representação do domínio</b>	Domínio e fronteira: EFG, MLPG, SPH, RKPM; Fronteira: BNM, BRPIM.

Por motivos de extensão do presente relatório, apenas far-se-á uma descrição sucinta do método utilizado no presente trabalho: os métodos sem malha baseados na formulação forte.

Segundo este método, as equações de derivadas ordinárias ou parciais do movimento são directamente discretizadas nos nós, através de técnicas simples de colocação e funções de forma para discretizar um sistema de equações: GFDM [18], FPM [19], hp-meshless cloud method [20], meshless collocation method [14-15], MFS [21].

Em seguida, passa-se à abordagem acerca da interpolação deste tipo de funções.

### 3.1 Interpolação das funções de base radial

Considere-se um conjunto de dados arbitrários e distintos a ser interpolado,  $(p, f(p)) \in \mathcal{P}^n \times \mathcal{R}$ . Os dados  $p$  pertencem a um conjunto de  $P$ , que é um conjunto finito de  $\mathcal{P}^n$  com mais que um elemento. Os interpolantes de base radial  $s(p) = f(p)$ ,  $p \in P$  são da forma:

$$s(x) = \sum_{p \in P} \lambda_p \phi(\|x - p\|), x \in \mathcal{R}^n \quad (3.1)$$

onde  $\lambda_p$  são coeficientes reais. A matriz  $A = \phi(\|x - p\|)_{x, p \in P}$  é denominada matriz de interpolação ou matriz dos coeficientes, e os pontos  $p$  são denominados centros. A função  $\phi(\|x - p\|)$  é uma função de base radial, por exemplo a função multiquádrica. Outras funções de base radial têm sido aplicadas, como por exemplo as apresentadas na tabela 3.2.

Tabela 3.2 - Funções de base radial [22].

Tipo de Funções de base radial		Params.
<b>Multiquadric</b>	$R_i(x, y) = \left[ r_i^2 + (\alpha_c d_c)^2 \right]^q$	$\alpha_c \geq 0, q$
<b>Gaussian</b>	$R_i(x, y) = \exp \left[ -\alpha_c \cdot (r_i / d_c)^2 \right]$	$\alpha_c$
<b>Thin plate spline</b>	$R_i(x, y) = r_i^n$	$\eta$
<b>Logarithm</b>	$R_i(x, y) = r_i^n \log(r_i)$	$\eta$

Quanto à formulação do método utilizado no presente relatório, nomeadamente da colocação assimétrica de Kansa, em seguida, apenas fazer-se-á a demonstração das sua aplicação no âmbito da análise estática e dinâmica de placas, em especial no caso de sandwich compósitas com gradiente funcional e placas de uma camada com gradiente funcional de propriedades. A referência acerca da metodologia de obtenção das propriedades destes materiais será efectuada mais adiante, quando se tratar da obtenção das funções a otimizar.

## 3.2 Análise Estática

### 3.2.1 Colocação assimétrica com RBFs para placas laminadas

Existe uma série de teorias de deformação para o estudo de de placas em flexão.

No presente relatório, para efeitos de obtenção de funções a minimizar pelo Bat-Algorithm apenas será considerada a formulação tendo em consideração a Teoria de Primeira Ordem de Reddy, a qual requer um factor de correcção devido ao facto de não representar devidamente o estado de tensão de um plano, sendo considerado em todos os casos que serão corridos o valor de 5/6. A vantagem desta teoria em relação às de ordem superior é o facto ser computacionalmente menos exigente, o que em muitos casos é uma vantagem, principalmente se se utilizar um facto de corte adequado, o qual tem sido estudo nos últimos anos [28].

As tensões de corte, ( $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ ) são calculadas a partir das equações de equilíbrio,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.2 a-c}$$

integrando as equações (6.1) e (6.2) em ordem a  $z$ , respectivamente,

$$\tau_{xz} = - \int_{-h/2}^z \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dz = 0 \tag{3.3}$$

$$\tau_{yz} = - \int_{-h/2}^z \left( \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) dz = 0 \quad (3.4)$$

As tensões  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\tau_{xy}$  apresentadas equações constitutivas:

$$\sigma_{ij} = Q_{ij} \epsilon_{ij}, \quad i, j = x, y \quad (3.5)$$

Que no caso da Teoria de Primeira Ordem de Reddy leva às equações:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z \phi_x(x, y, t) \quad (3.6a)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z \phi_y(x, y, t) \quad (3.6b)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (3.6c)$$

As deformações, considerando a teoria linear da elasticidade são da forma:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (3.7a-e)$$

Ficando as equações de equilíbrio:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\epsilon^{(0)}\} \\ \{\epsilon^{(1)}\} \end{Bmatrix} \quad \{Q\} = k[A]\{\gamma^{(0)}\} \quad (3.8)$$

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial u_0 / \partial x \\ \partial v_0 / \partial y \\ \partial u_0 / \partial y + \partial v_0 / \partial x \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial \phi_x / \partial x \\ \partial \phi_y / \partial y \\ \partial \phi_x / \partial y + \partial \phi_y / \partial x \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial u_0 / \partial x \\ \partial v_0 / \partial y \\ \partial u_0 / \partial y + \partial v_0 / \partial x \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial \phi_x / \partial x \\ \partial \phi_y / \partial y \\ \partial \phi_x / \partial y + \partial \phi_y / \partial x \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial w_0 / \partial y + \phi_y \\ \partial w_0 / \partial x + \phi_x \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{44} & D_{45} \\ D_{45} & D_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial w_0 / \partial y + \phi_y \\ \partial w_0 / \partial x + \phi_x \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

Onde

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}(1, z, z^2) dz = \sum_{k=1}^{nc} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(1, z, z^2) dz \quad (3.12)$$

$Q$  são os elementos da matriz reduzida da camada  $k$ , e  $nc$  é o número total de camadas do laminado. Substituindo nas equações de Euler-Lagrange [26], das expressões de forças e momentos em ordem aos deslocamentos, obtém-se:

1ª Equação:

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{13} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) + A_{23} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{33} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) \\
 & + B_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + B_{13} \left( \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \right) + B_{23} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + B_{13} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \\
 & + B_{33} \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

2ª Equação:

$$\begin{aligned}
 & A_{13} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{33} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) + A_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{23} \left( 2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) \\
 & + B_{13} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + B_{23} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + B_{33} \left( \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \right) + B_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + B_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \\
 & + B_{23} \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

3ª Equação:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x} \left[ k A_{45} \left( \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + k A_{55} \left( \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right] \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \left[ k A_{44} \left( \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + k A_{45} \left( \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right] + q = 0
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

4ª Equação:

$$\begin{aligned}
 & B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_{13} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{33}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + 2B_{13} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{33} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{23} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
 & + D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D_{13} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{33}) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + 2D_{13} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{33} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + D_{23} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \\
 & - k A_{45} \left( \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) - k A_{55} \left( \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

5ª Equação:

$$\begin{aligned}
 & B_{13} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_{33} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{33}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + 2B_{23} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{23} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
 & + D_{13} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D_{33} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{33}) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + 2D_{23} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + D_{23} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \\
 & - k A_{44} \left( \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) - k A_{45} \left( \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Onde  $D_{ij}$  e  $A_{ij}$  são os componentes das matrizes de rigidez e  $k$  é factor de correcção ao corte.

Em seguida o sistemas de equações é aproximado utilizando o método das multiquádricas,

isto é, supõe-se por exemplo em  $u_0$  que  $u_0^h(x) = \sum_{j=1}^N a_j^{(u_0)} g(\|x - x^{(j)}\|, c)$ .

Quanto às condições de fronteira, no presente trabalho, apenas ter-se-á em consideração os quadro bordos da placa compósita simplesmente apoiados, sendo que estas são impostas nos mesmos moldes que os deslocamentos, impodo que nos bordos da placa onde  $x=0$  e  $x=a$ ,

$$M_{xx}=0 \quad ; \quad N_{xx}=0 \quad ; \quad \phi_y=0 \quad ; \quad u_t=v_0=0 \quad ; \quad w_0=0 \quad ; \quad \text{e nos bordos onde } y=0 \text{ e } y=b:$$

$$M_{yy}=0 \quad ; \quad N_{yy}=0 \quad ; \quad \phi_x=0 \quad ; \quad u_t=u_0=0 \quad ; \quad w_0=0 \quad .$$

### 3.3 Análise de Vibrações Livres

#### 3.3.1 Colocação assimétrica com RBFs para placas laminadas

Da mesma forma que se considerou a teoria de 1ª ordem para efeitos de análise estática de placas, na análise de vibrações livres também será utilizada esta teoria.

Para a análise de vibrações livres, utiliza-se a técnica de separação de variáveis. Supondo uma solução para as variáveis  $u_i$  da forma  $u_i(x, y, t) = U_i(x, y)T_i(t)$ , a substituição da solução escolhida nas equações de equilíbrio escritas em ordem aos deslocamentos dá origem a um problema de valores próprios, que aproximado pelo interpolante das multiquádrica fica na forma:

$$\begin{bmatrix} L' \\ B \end{bmatrix} \alpha = \lambda \begin{bmatrix} A' \\ 0 \end{bmatrix} \alpha \quad (3.17)$$

Onde:

$$L' = L \phi \left[ \left( \|x_{N_I} - y_j\|_2 \right) \right]_{N_I \times N} ; \text{ é um operador diferencial linear } L;$$

$$A' = \phi \left[ \left( \|x_{N_I} - y_j\|_2 \right) \right]_{N_I \times N} ; B = L_B \phi \left[ \left( \|x_{N_I+1} - y_j\|_2 \right) \right]_{N_B \times N} \quad (3.18a-c)$$

Sendo que ao resolver os problema, obtêm os valores próprios e vectores próprios  $v$ .

Procedendo da mesma forma considerada na obtenção das equações (3.13-17), obtêm-se equações semelhantes, apenas com a diferença que na parte direita de cada equação, são adicionados seguintes termos (por ordem da primeira à quinta equação):

$$I_0 \ddot{u}_0 + I_1 \ddot{\phi}_x ; \quad I_0 \ddot{v}_0 + I_1 \ddot{\phi}_y ; \quad I_0 \ddot{w}_0 ; \quad I_1 \ddot{u}_0 + I_2 \ddot{\phi}_x ; \quad I_1 \ddot{v}_0 + I_2 \ddot{\phi}_y . \quad (3.19a-e)$$

Sendo  $I_i$ , os factores de inércia definidos por:

$$I_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz ; I_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z dz ; I_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^2 dz \quad (3.20)$$

Onde  $h$  e  $\rho$  são a espessura e a densidade de cada camada.



### 3.3.2 Resolução do Problema de Vibrações Livres

Para a resolução do problema de vibrações livres, supomos uma solução do tipo harmónica, da forma:

$$\begin{aligned}
 u_0(x, y, t) &= u_0(x, y)e^{i\omega t} \\
 v_0(x, y, t) &= v_0(x, y)e^{i\omega t} \\
 w_0(x, y, t) &= w_0(x, y)e^{i\omega t} \\
 \phi_x(x, y, t) &= \phi_x(x, y)e^{i\omega t} \\
 \phi_y(x, y, t) &= \phi_y(x, y)e^{i\omega t}
 \end{aligned} \tag{3.21a-e}$$

onde  $\omega$  é a frequência natural de vibração. A título de exemplo, a primeira equação de equilíbrio do problema fica na forma:

$$\begin{aligned}
 &A_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{12}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{13}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y}\right) + A_{23}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{33}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y}\right) \\
 &+ B_{11}\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + B_{12}\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + B_{13}\left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y}\right) + B_{23}\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + B_{13}\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \\
 &+ B_{33}\left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y}\right) = -\omega^2 (I_0 u_0 + I_1 \phi_x)
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

A interpolação e descritização das equações de equilíbrio é efectuada da mesma forma considerada para a análise estática.

Por razões de extensão do relatório, a demonstração da interpolação destas equações não é efectuada.

### 3.4 Obtenção das funções objectivo

Relativamente à obtenção das funções objecto a serem optimizadas pelo algoritmo BA, onde se pretende minimizar as deformadas em vigas e placas sandwich com gradiente funcional de propriedades nas camadas superior e inferior, sendo o núcleo composto por um material metálico. O algoritmo também é utilizado na minimização da deformada no centro de uma placa simplesmente apoiada em todos os bordos de uma placa com gradiente funcional, impondo-se um constrangimento de massa, isto é, impondo-se que a massa total por metro da placa tenha um valor limite, para se poder observar o efeito desta imposição nas soluções obtidas.

A figura 3.1 mostra a geometria das placas consideradas no problema e a tabela 3.3 mostra as propriedades dos materiais que se tiveram em consideração.

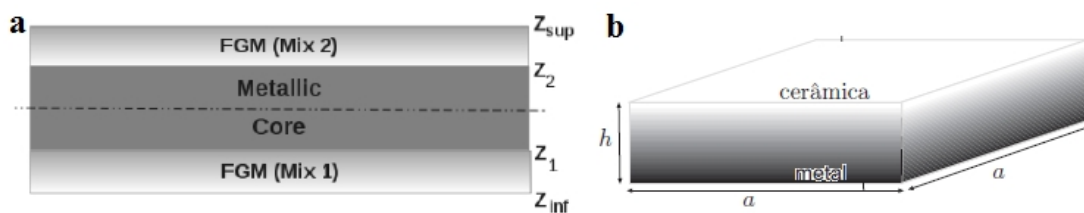


Figura 3.1- Geometria das placas sandwich FGM (a) e com gradiente funcional (b).

Tabela 3.3 - Propriedades dos materiais considerados.

Material	E (GPa)	$\nu$	$\rho$ (kg/m)
Aluminio	70	0.3	2702
Zircónia	200	0.3	5700
Silica	420	0.3	3100

As propriedades dos materiais foram obtidas tendo em consideração o método de Voigt (ANEXO A).

O mesmo se verificou para o problema de vibrações livres, sendo, que neste caso o objectivo será maximizar a primeira frequência natural de vibração, impondo-se ou não um constrangimento de massa.

Os resultados obtidos para efeitos de comparação com os obtidos pelo métodos do Particle Swarm Optimization (PSO) (subsecção 4.1) [22], foram obtidos considerando as equações objectivo obtidas através da resolução do problema linear, com a formulação de uma viga de Timoshenko:

$$f = K\alpha \quad (3.23)$$

Sendo  $f$  o vector de forças aplicada na viga,  $K$  a matriz de Rigidez, construída através do método de colocação assimétrica de Kansas mencionado previamente, mas tendo em consideração a formulação de Timoshenko. Para mais pormenores acerca da formulação, ver ANEXO A.

O vector  $\alpha$  é então o vector de incógnitas a serem determinadas para efeitos do cálculo dos deslocamentos.

A obtenção das equações deste problema foi efectuada resolvendo o problema colocando as variáveis de projecto  $e_c$  (espessura do núcleo da sandwich) e  $p$ , de igual modo que no ANEXO A, como incógnitas, e retirando a equação da deformada em função às variáveis de projecto correspondente à célula de  $\alpha$  associada à deforma a meio vão da viga.

Por motivos de complexidade e extensão das equações a otimizar, apenas se mostra uma parte do código em MATLAB do ficheiro de “Biblioteca de funções”, referente algumas destas no ANEXO B.

No caso do problema das placas, tanto de análise estática como de análise dinâmica a obtenção das funções da deformada e frequências naturais de vibração, respectivamente, não foram obtidas de forma explícita por motivos de esforço computacional do MATLAB em lidar

com funções simbólicas na resolução de problemas lineares e de valores e vectores próprios, com matrizes de rigidez de  $11 \times 11 \times 5$  células.

Considerando este problema, e uma vez que o método do BA não exige se tenham as equações de forma explícita para otimizar o seu valor, no código implementado em MATLAB, por cada vez que a solução referente a cada variável de projecto para cada partícula e cada geração considerada no algoritmo, o sistema de equações linear no caso da análise estática e o problema de valores e vectores próprios no caso das vibrações livre, é resolvido com vista a validar a solução.

Em termos computacionais, esta foi a forma mais simples de contornar o problema de obtenção das funções, dado que o MATLAB, apesar de ser poderosíssimo em termos de resolução de problemas numéricos, o mesmo já não acontece quando os problemas contêm variáveis simbólicas.

Deste modo, na implementação do algoritmo, por cada vez que a função a otimizar teria de ser validada com as variáveis de projecto geradas, os seguintes problemas para a análise estática e de vibrações livres eram resolvidos:

$$f = K\alpha \quad (3.24)$$

$$Kv = \omega^2 v \quad (3.25)$$

Sendo  $K$  a matriz de colocação assimétrica de Kansas, que contém a interpolação das funções multiquádricas e onde se impõem as condições de fronteira,  $v$  corresponde aos vectores próprios do problema e  $\omega^2$ , no presente caso, às frequências naturais de vibração associadas a cada componente do vector próprio.

Em todos os casos considerados a matriz de colocação tem dimensão  $11 \times 11 \times 5$ , isto é, considera-se uma grelha de pontos na placa de  $11 \times 11$ , ao mesmo tempo que se considera a existência de 5 graus de liberdade do problema.



## 4. Testes e Resultados

### 4.1 Comparação com os resultados obtidos pelo PSO e validação do Método sem Malha implementado

Em primeiro lugar, obtiveram-se resultados de optimização utilizando o BA implementado para efeitos de comparação com os resultados obtidos por [22], que utilizou o método PSO para minimizar a deflexão máxima a meio-vão de uma viga FGM, bem como maximizar a frequência fundamental da mesma viga, considerando a formulação de Timoshenko.

A tabela 4.1 apresenta os parâmetros associados ao BA utilizados nas simulações para obtenção da solução óptima.

Tabela 4.1 - Parâmetros do BA utilizados para obtenção dos resultados de comparação com o PSO.

Parâmetros associados ao BA	Valor
$n/N_{gen}$ (dimensão da população/ # de gerações)	20/30
$A_0/r_0$ (valores iniciais de ruído e taxa de emissão de impulsos)	1.0/0.5
$\alpha/\gamma$ (constantes de actualização de $A_0$ e $r_0$ )	0.9/0.9
$f_{min}/f_{max}$ (frequências mínima e máxima)	0/2
$\epsilon$ (factor de amplificação)	0.001
$F$ (constante)	1.0

As tabelas 4.2a-b e 4.3 apresentam os resultados obtidos pelos dois métodos, para as deformadas e para as frequências de vibração, respectivamente.

Tabela 4.2a - Resultados obtidos para efeitos de comparação de Métodos, das deformadas.

$e_c$ (m)		$p$		Deformada (m)	
PSO	BA/HBA	PSO	BA/HBA	PSO	BA/HBA
1.0770E-02	0.0128/0.01	9.577	8.7077/10	9.2712E-09	9.45E-09/ 9.27E-09
1.0370E-02		9.07		9.2727E-09	
1.0900E-02		9.96		9.2712E-09	
1.0210E-02		9.883		9.2717E-09	
1.0020E-02		9.207		9.2708E-09	

Tabela 4.2b - Resultados obtidos para efeitos de comparação de Métodos, das deformadas.

Massa (Kg/m)		$N_{Genopt}$		$N_{Gen}$	
PSO	BA/HBA	PSO	BA/HBA	PSO	BA/HBA
189.355	189.8436/ 181.2255	71	26/2	100	30
189.714		83		20	
189.783		74		80	
189.743		62		100	
189.804		97		50	

Tabela 4.3 - Resultados obtidos para efeitos de comparação de Métodos, das frequências fundamentais.

	$e_c$ (m)				$p$		Massa (Kg/m)		1ª Frq (Hz)	
	PSO ( $\times 10^{-2}$ )	HBA	PSO	HBA	PSO	HBA	PSO	HBA	PSO	HBA
SC	2	0.02	6.0308	10	162.287	162.589	1550.08	1551.05	1550.18	1551.05
	1.99		9.0097		162.525		1550.18			
	1.99		9.2972		162.581		1550.16			
Const	1.93	0.0193	1.0174	0.922	139.91	139.944	1494.42	1494.88	1494.21	1494.88
	1.9		0.9747		139.935		1494.21			
	1.98		0.9306		139.981		1494.92			

Como se pode verificar pela análise da tabela 4.2, o HBA, tendo em consideração os parâmetros de iniciação mencionados possui um comportamento muito mais eficiente que o PSO, tanto em termos de convergência para o óptimo, bem como para o seu valor, conseguindo em apenas duas iterações encontrar os valores de variáveis de projecto que conduzem ao mínimo da função.

Contudo, o mesmo não se pode dizer em relação ao BA sem a utilização da evolução diferencial, que mostra ser menos eficiente, para este caso, que para todos os casos considerados no PSO, e apesar de em apenas 26 iterações ter encontrado a solução óptima, o seu valor é ainda um pouco superior ao obtido pelo PSO.

Quanto ao caso da maximização das frequências fundamentais da viga sandwich, o HBA continuou a mostrar ser o método mais eficiente na maximização da função, no caso de não haver o constrangimento de massa.

Quando este constrangimento é imposto, pelas simulações tidas em conta, o BA apresenta um comportamento semelhante ao do PSO, o que poderá levar à conclusão que a imposição deste constrangimento no BA poderá ainda ser alvo de estudo, isto é, seria interessante de estudar formas diferentes de o implementar, de modo a melhorar os resultados obtidos.

Adicionalmente, para efeitos de validação e teste do método sem malha implementado, considerando a teoria de Primeira Ordem de Reddy, ter-se-ão em consideração 3 problemas distintos:

- Placa quadrada isotrópica sob carga uniforme e simplesmente apoiada;
- Placa quadrada Compósita  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$  sob carga sinusoidal;
- Placa quadrada com gradiente funcional de propriedades em regime livre e natural.

#### 4.1.1 Placa quadrada isotrópica sob carga uniforme e simplesmente apoiada

Aqui é considerada uma placa isotrópica simplesmente apoiada, de lado  $a$  e altura  $h$ , sujeita a uma carga uniforme,  $q$ .

As propriedades da placa são:  $E=E_1=E_2=10920$ ;  $G_{23}=E_2/2.5$ ;  $G_{12}=G_{13}=G_{23}$ ;  $\nu_{12}=\nu_{21}=0.25$ .

Os resultados numéricos são não adimensionalizados da seguinte forma:

$$\varpi = \frac{E\omega h^3 10^2}{qa^4} \quad (4.1)$$

Tabela 4.4- Resultados para Teoria de Primeira Ordem obtidos, parâmetro  $c$  da função multiquádrica:  $c=2/\sqrt{n}$ . ( $n$  refere-se ao número de pontos de cada lado da grelha da placa)

$a/h$	Método		$n=11$	desvio(%)*	$n=21$	desvio(%)*
10	FSDT Reddy [23]	4.77	4.686	-2.19	4.78	-0.23
	exacto [24]	4.791				
50	FSDT Reddy [23]	4.496	4.6608	1.79	4.5753	-0.08
	exacto [24]	4.579				
100	FSDT Reddy [23]	4.482	4.7834	4.62	4.5746	0.06
	exacto [24]	4.572				

\* Desvio  $[(valor_{obr}-valor_{ref})/valor_{ref}]$  em relação a [24]

#### 4.1.2 Placa quadrada Compósita $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ soba carga sinusoidal

Neste exemplo considera-se uma placa laminada simplesmente apoiada com camadas igualmente espaçadas e empilhamento  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , com lado  $a$  e altura  $h$ . A placa é sujeita a uma carga sinusoidal da forma:

$$p_z = P \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \quad (4.2)$$

As propriedades do laminado são:  $E_1=25E_2$ ;  $G_{23}=0.2E_2$ ;  $G_{12}=G_{13}=0.5E_2$ ;  $\nu_{12}=\nu_{21}=0.25$ .

Os resultados numéricos são não adimensionalizados da seguinte forma:

$$\varpi = \frac{E_2 \omega h^3 10^2}{Pa^4} \quad (4.3)$$

Tabela 4.5 - Resultados para Teoria de Primeira Ordem obtidos, para placa laminada, parâmetro  $c$  da função multiquádrica:  $c=2/\sqrt{n}$ . ( $n$  refere-se ao número de pontos de cada lado da grelha da placa)

$a/h$	Método		$n=21$	desvio(%)*
4	HSDT Reddy [25]	1.8937	1.7092	-0.05
	3 strip FSDT [26]	1.71		
20	HSDT Reddy [25]	0.506	0.491	-0.04
	3 strip FSDT [26]	0.4912		
100	HSDT Reddy [25]	0.4343	0.4352	0.35
	3 strip FSDT [26]	0.4337		

\*Desvio  $[(valor_{obr}-valor_{ref})/valor_{ref}]$  em relação a [26].

#### 4.1.3 Placa quadrada com gradiente funcional de propriedades em regime livre e natural

Para efeitos de validação da obtenção das frequências de vibração em regime livre pelo método sem malha considerado, compararam-se os valores obtidos com os de [27], obtendo-se as primeiras 5 frequências. No trabalho realizado por Ferreira et al. [27], considerou-se tanto a

Primeira como a Terceira Teoria de Deformação ao Corte, mas para efeitos comparativos, apenas se terá em consideração os valores obtidos para a primeira, numa placa quadrada FGM com alumínio e zircónia com a razão  $a/h=5$ .

Os resultados obtidos estão adimensionalizados pela expressão:

$$\varpi = \omega h \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \quad (4.4)$$

Sendo  $\rho_m$  e  $E_m$  a densidade e o Módulo de Young do material metálico, respectivamente.

A tabela 4.6 apresenta os resultados de validação das frequências de vibração em regime livre.

*Tabela 4.6 - Resultados para Teoria de Primeira Ordem obtidos, para placa com gradiente funcional de propriedades, parâmetro  $c$  da função multiquádrica e respectiva comparação com Ferreira et al. [27]:  $c=2/\sqrt{n}$ . ( $n$  refere-se ao número de pontos de cada lado da grelha da placa)*

Cerâmico			$p=5$			Metal		
[27]	Presente	desvio(%)*	[27]	Presente	desvio(%)*	[27]	Presente	desvio(%)*
0.2462	0.2462	0.00	0.2236	0.2239	-0.13	0.2116	0.2115	0.05
0.4483	0.451	-0.60	0.3921	0.3944	-0.59	0.3852	0.3876	-0.62
0.4484	0.4511	-0.60	0.3922	0.3945	-0.59	0.3853	0.3876	-0.60
0.5397	0.5386	0.20	0.4861	0.4856	0.10	0.4638	0.4628	0.22
0.5398	0.5387	0.20	0.4861	0.4857	0.08	0.4638	0.4629	0.19

\* Desvio  $[(valor_{obr}-valor_{ref})/valor_{ref}]$ .

Como se pode observar pelas tabelas 4.4-6, o método sem malha implementado, considerando a Teoria de Primeira Ordem apresentam resultados que convergem de forma evidente para os resultados obtidos para os autores considerados para efeitos de comparação, em especial, como seria de se esperar, no caso de se utilizar grelhas pontos gerados com um  $n$  maior e e no caso de se comparar com resultados de autores que se basearam na Teoria de Primeira Ordem.

## 4.2 Resultados das deformações de sandwich FGM

As tabelas 4.7 e 4.8 apresentam os parâmetros utilizados, associados ao BA e ao problema de análise estática, respectivamente. Estes últimos têm a ver com o constrangimento de massa quando aplicado e com os limites das duas variáveis de projecto  $e_c$  (espessura do núcleo metálico da sandwich) e  $p$  (expoente das funções de Voigt para homogeneização das propriedades).



Tabela 4.7 - Parâmetros do BA utilizados para obtenção dos resultados para minimização da deformada da sandwich FGM.

Parâmetros associados ao BA	Valor
$n/N_{gen}$ (dimensão da população/ # de gerações)	50/50
$A_0/r_0$ (valores iniciais de ruído e taxa de emissão de impulsos)	1.0/0.5
$\alpha/\gamma$ (constantes de actualização de $A_0$ e $r_0$ )	0.9/0.9
$f_{min}/f_{max}$ (frequências mínima e máxima)	0/2
$\epsilon$ (factor de amplificação)	0.001
$F$ (constante)	0.5

Tabela 4.8 - Parâmetros do problema de análise utilizados para obtenção dos resultados para minimização da deformada da sandwich FGM.

	Parâmetros associados ao Problema de Análise Estática		
$a/h$	5	25	100
Constrangimentos de massa (Kg/m)	700	170	40
Limites de $e_c/p$	[0.05;0.1]/[0;10]	[0.01;0.02]/[0;10]	[0.0025;0.005]/[0;10]

As tabelas 4.9 e 4.10 apresentam os resultados obtidos na minimização a meio-vão da sandwich FGM, para o caso de utilização do BA híbrido e sem a sua utilização, respectivamente.

Os valores apresentados nas seguintes tabelas para o *Óptimo*,  $e_c$  e *Massa*, estão em m, m e kg/m, respectivamente.  $Ngn_{opt}$  refere-se à iteração na qual se atingiu a solução óptima (ótimo).

Tabela 4.9 - Resultados obtidos na minimização da deformada a meio-vão da sandwich FGM, para o HBA.

	Híbrido					
$a/h$	5		25		100	
	Constr.	Não Constr.	Constr.	Não Constr.	Constr.	Não Constr.
<b>Óptimo</b>	5.6805E-11	4.0418E-11	4.6581E-09	4.3907E-09	3.3283E-07	2.9863E-07
$\{e_c p\}$	{.09 .9331}	{.05 10}	{.017 7.7227}	{.01 10}	{.005 5.8812}	{.0025 10}
<b>Massa</b>	699.5704	949.2182	169.159	189.8436	39.98449	47.4609
$Ngn_{opt}$	45	3	22	3	20	3

Tabela 4.10 - Resultados obtidos na minimização da deformada a meio-vão da sandwich FGM, para o BA.

	Não Híbrido					
$a/h$	5		25		100	
	Constr.	Não Constr.	Constr.	Não Constr.	Constr.	Não Constr.
<b>Ótimo</b>	5.6970E-11	4.2050E-11	4.7075E-09	4.5784E-09	3.3385E-07	3.0545E-07
$\{e_c p\}$	{.0907 .9352}	{.0635 6.03262}	{.0131 3.2728}	{.0131 4.9855}	{.005 4.6734}	{.003 6.2832}
<b>Massa</b>	698.8161	891.3913	169.8519	175.1332	39.8659	45.1246
$Ngno_{pt}$	10	2	5	1	6	1

### 4.3 Resultados das deformações da placa FGM

Os parâmetros do BA usados para obtenção destes resultados foram os mesmos que no caso anterior. A tabela 4.11 apresenta os parâmetros associados ao problema de análise estática para a placa FGM.

As tabelas 4.12 e 4.13 apresentam os resultados obtidos na minimização da deformada a meio-vão da placa FGM, para o caso de utilização do BA híbrido e sem a sua utilização, respectivamente.

Tabela 4.11 - Parâmetros do problema de análise utilizados para obtenção dos resultados para minimização da deformada da placa FGM..

	Parâmetros associados ao Problema de Análise Estática		
$a/h$	5	25	100
Constrangimentos de massa (Kg/m)	950	190	48
Limites de $p$	[0;7]	[0;7]	[0;7]

Tabela 4.12 - Resultados obtidos na minimização da deformada a meio-vão da placa FGM, para o HBA.

	Híbrido					
$a/h$	5		25		100	
	Constr.	Não Constr.	Constr.	Não Constr.	Constr.	Não Constr.
<b>Ótimo</b>	4.3673E-11	3.2743E-11	4.8111E-09	3.4635E-09	3.0534E-07	2.3182E-07
$p$	0.4768	0	0.5412	0	0.4322	0
<b>Massa</b>	946.4024	1140	185.8886	228	47.953	57
$Ngno_{pt}$	26	2	11	3	40	1

Tabela 4.13 - Resultados obtidos na minimização da deformada a meio-vão da placa FGM, para o BA.

	Não Híbrido					
$a/h$	5		25		100	
	Constr.	Não Constr.	Constr.	Não Constr.	Constr.	Não Constr.
<b>Óptimo</b>	4.3624E-11	3.2764E-11	5.2157E-09	3.4639E-09	3.3200E-07	2.3243E-07
<b><math>p</math></b>	0.4715	8.04E-04	0.7903	6.60E-04	0.651	9.87E-04
<b>Massa</b>	947.8733	1139.5185	175.0634	227.9209	45.1787	56.9704
<b><math>Ngn_{opt}</math></b>	31	43	38	46	4	41

### 4.3.1 Análise dos resultados da minimização das deformadas

Analisando os resultados obtidos a minimização das deformadas das placas FGM, tanto sandwich, como placa única, pode concluir-se com clareza que o algoritmo implementado possui uma convergência elevada na procura do valor óptimo das variáveis de projecto que conduzem a este valor.

Observando os resultados, verifica-se que o valor desta solução óptima é inconfundível, pois como seria de esperar, em termos de propriedades do material utilizado, é de se esperar que as que levariam a uma deformada menor são aquelas que se aproximam mais do valor das propriedades do material com módulo de elasticidade mais elevado, isto é, o cerâmico.

Desta forma pode dizer-se que o BA teve um notável e eficiente comportamento na procura do valor mínimo da função.

As excepções acontecem no caso do BA sem a parte híbrida e no caso de se implementar um constrangimento de massa, o que afecta um pouco a capacidade de exploração do HBA na procura de soluções óptimas.

## 4.4 Resultados de frequências naturais de vibração

De igual modo, os parâmetros utilizados para a maximização da primeira frequência em regime livre da placa sandwich, fora os mesmos considerados que para a minimização da deformada a meio vão, à excepção dos constrangimentos de massa que foram de 140 kg/m e 30 kg/m para as sandwiches com  $a/h=25$  e  $a/h=100$ , respectivamente.

As tabelas 4.14 e 4.15 apresentam os resultados obtidos na maximização da frequência fundamental da sandwich FGM, para o caso de utilização do BA híbrido e sem a sua utilização, respectivamente.

Tabela 4.14 - Resultados obtidos na maximização da frequência fundamental da sandwich FGM, para o HBA.

	Híbrido					
$a/h$	5		25		100	
	Constr.	Não Constr.	Constr.	Não Constr.	Constr.	Não Constr.
<b>Ótimo</b>	6045.44	6286.24	1342.783	1395.937	282.8912	331.7339
$\{e_c p\}$	{0.1 1.0343}	{0.1 10}	{0.02 1.075}	{0.02 10}	{0.0038 .1754}	{0.005 9.7583}
<b>Massa</b>	692.8307	812.9455	139.3161	162.5891	29.8002	40.6167
$Ngn_{opt}$	12	2	9	2	1	11

Tabela 4.15 - Resultados obtidos na maximização da frequência fundamental da sandwich FGM, para o BA.

	Não Híbrido					
$a/h$	5		25		100	
	Constr.	Não Constr.	Constr.	Não Constr.	Constr.	Não Constr.
<b>Ótimo</b>	6046.69	6286.242	1319.017	1395.937	286.2829	331.7294
$\{e_c p\}$	{.0923 .9628}	{.1 10}	{0.0157 .688}	{0.02 10}	{0.05 .244}	{0.005 10}
<b>Massa</b>	698.8537	812.9455	137.7419	162.5891	29.9606	40.6476
$Ngn_{opt}$	2	3	6	2	6	5

Considerando uma sandwich em que os materiais são o alumínio no núcleo da respectiva e as camadas exteriores com gradiente funcional de propriedades de sílica, também se obteve a maximização da frequência fundamental, mas sem se considerar qualquer constrangimento de massa.

As tabelas 4.16 e 4.17 apresentam os resultados obtidos na maximização da frequência fundamental da sandwich FGM, considerando como cerâmico a sílica, para o caso de utilização do BA híbrido e sem a sua utilização, respectivamente.

Tabela 4.16 - Resultados obtidos na maximização da frequência fundamental da sandwich FGM, considerando como cerâmico a sílica, para o BA.

	Híbrido		
$a/h$	5	25	100
<b>Ótimo</b>	11204.8	2464.985	585.3876
$\{e_c p\}$	{0.05 10}	{0.01 10}	{0.0025 10}
<b>Massa</b>	594.6727	118.9345	29.7336
$Ngn_{opt}$	4	5	4

Tabela 4.17 - Resultados obtidos na maximização da frequência fundamental da sandwich FGM, considerando como cerâmico a sílica, para o HBA.

	Não Híbrido		
$a/h$	5	25	100
<b>Óptimo</b>	11125.49	2364.236	581.414
$\{e_c p\}$	{0.0508 6.5846}	{0.02 10}	{0.0029 9.755}
<b>Massa</b>	591.9502	115.3464	29.4302
$Ngn_{opt}$	1	5	1

#### 4.4.1 Análise dos resultados da maximização das frequências fundamentais

No caso da maximização das frequências fundamentais na sandwich, tanto o BA como HBA mostraram ser eficientes na procura da solução óptima.

Contudo, nesta situação, o HBA, apesar de ter piorado um pouco em termos de convergência em relação à minimização das deformadas, continuou a encontrar soluções mais promissoras que o BA.

Novamente, como ocorreu nos casos anteriores, pela tabela 4.14 pode verificar-se que a imposição de um constrangimento ao HBA abalou um pouco a sua eficiência em termos de convergência, mostrando no caso da razão  $a/h=100$  (tabela 4.14) ter um comportamento um pouco inesperado, pois a convergência no caso da imposição de constrangimento foi elevada, e no caso da não imposição, a solução obtida não foi muito ao encontro do que ocorreu para as outras duas razões  $a/h$ .

#### 4.5 Estudo paramétrico do BA

Para efeitos de estudo paramétrico do algoritmo implementado, as equações associadas à minimização da deformada das placas, bem como à maximização das frequências fundamentais de vibração em regime livre não se mostraram apropriadas.

Este facto poderá dever-se a diversos factores, tais como a diferença enorme de dimensões entre as duas variáveis de projecto ( $e_c \in [0.01025;0.005]/[0.01 ;0.02]/[0.015;0.1]$  e  $p \in [0;10]$ ), conduzindo à dificuldade de avaliação da influência dos parâmetros cujas dimensões terão de estar de acordo com a dimensão das variáveis, como a frequência máxima ( $f_{máx}$ ).

Por outro lado, o facto das funções possuírem um “óptimo global”, sendo este associado a valores das variáveis de projecto extremos, isto é, como se observou pelos resultados das subsecções anteriores, os valores destas variáveis tendem sempre para o mínimo do intervalo no caso de  $e_c$  e o máximo do intervalo de  $p$ , no caso do problema de estática.

No caso do problema de vibrações, os valores tendem a ser os máximos dos intervalos limite para ambas as variáveis. Deste modo, a solução óptima é, de certo, modo e principalmente no caso do Bat Algorithm Híbrido, muito fácil de ser encontrada, e pelas simulações realizadas variando os parâmetros de iniciação do algoritmo, a convergência ou o resultado óptimo não era muito influenciado por estes parâmetros.

Considerando estes factos, para efeitos de estudo de parâmetros, consideraram-se outras duas funções a minimizar, que fizeram parte do 1ª trabalho realizado na presente disciplina de doutoramento.

As funções mencionadas para realização deste estudo paramétrico são as seguintes:

$$\min_x [(x_1^2 - x_2)^2 + 2(x_2 - x_1)^4] \quad (4.5)$$

$$\min_x [f(x, y, z)] \quad f(x, y, z) = 2x^2 + xy + y^2 + yz + z^2 - 6x - 7y - 8z + 9 \quad (4.6)$$

Sendo que a primeira possui duas variáveis de projecto e a segunda três.

No 1ª trabalho da disciplina realizado, concluiu-se que a função 4.5 possui três mínimos locais, sendo estes:

$$(x_1, x_2) = (-1, -1); (x_1, x_2) = (0, 0); (x_1, x_2) = (1, 1), \quad (4.7a-c)$$

Sendo nulo o valor da função nestes pontos.

Como conclusões gerais na minimização, notou-se que os métodos de optimização baseados em gradientes, nomeadamente o dos Gradientes Conjugados de Fletcher-Reeves e o de Davidon-Fletcher-Powell (DFP) conseguiam convergir para o óptimo de forma mais rápida que os não baseados em gradientes. No ANEXO C encontram-se alguns exemplos de simulações de utilização da utilização destes métodos para a optimização da função.

Quanto à função 4.6, esta possui um mínimo global:

$$(x_1, x_2, x_3) = (1.2, 1.2, 3.4) \quad (4.8)$$

Sendo o valor do mínimo -12.4.

Foi implementado o método de DFP para a resolução deste problema, que, como seria de esperar, por se tratar de uma função quadrática, mostrou ser eficiente em termos de convergência para o mínimo.

Assim, considerando estas funções, as tabelas 4.18-22 apresentam os resultados obtidos para efeitos de estudo paramétrico do Bat-Algorithm, híbrido e não híbrido.

Em primeiro lugar começou-se por construir uma tabela de resultados, fazendo variar de forma “controlada” os diversos parâmetros de modo a que se notasse algum padrão no comportamento dos algoritmos em termos de valor óptimo obtido, bem como em termos de convergência para este óptimo.

Em seguida, após concluir-se, e como se verá adiante, que o HBA tem uma eficiência claramente melhor que o BA original (salvo para alguns, mas poucos, casos consoante os parâmetros de iniciação), escolheram-se alguns casos para ambos os algoritmos para estudar outras variáveis de iniciação.

No caso do HBA, escolheram-se os casos que tiveram piores resultados, testando o efeito do factor de permutação (ED). O valor do factor de permutação recomendado por [7] deverá encontrar-se no intervalo [0,2], sendo que no seu estudo paramétrico, concluiu-se que valores entre

0.3 e 0.8 seriam os mais recomendados. Contudo há que salientar que estes valores poderão não ser os mesmos para outros casos de estudo que não os realizados por estes autores.

Assim, para estudar este parâmetro no HBA, que até agora tem sido sempre constante e igual 1, considerou-se outros 4 casos diferentes:

- $F_p=0.5$  e constante;
- $F_p=2$  e constante;
- $F_p=1.4...0.4$  e decrescente consoante a equação (4.9);
- $F_p=0.8...0.3$  e decrescente consoante a equação (4.9);

$$F_p = F_{pi} + \frac{(F_{pf} - F_{pi})}{N_{gen}}(t - 2), t=1, \dots, N_{gen} \quad (4.9)$$

sendo  $F_{pi}$  e  $F_{pf}$ , valores de permutação iniciais e finais, respectivamente,  $N_{gen}$  o número total de gerações/iterações escolhidas pelo utilizador e  $t$  o valor da actual iteração.

No caso dos resultados obtidos para o BA, verificou-se que seria interessante tanto aumentar a dimensão da população, como aumentar o número de gerações/iterações para ver se os resultados melhorariam com um aumento de diversidade.

Para o caso da minimização da equação (4.6), obteve-se por considerar o conjunto de combinações de parâmetros que conduziram a uma melhor convergência no caso da minimização de (4.5), para se comparar o comportamento do algoritmo para duas equações de natureza diferente, tendo em consideração os mesmos parâmetros de arranque.

Nas tabelas que se seguem, os termos *best<sub>i</sub>*,  $i=1, \dots, \text{número de variáveis de projecto}$ , e *BEST* referência aos valores óptimos das variáveis de projecto das equações e ao valor óptimo da função nestes pontos, respectivamente.

#### 4.5.1 Análise dos resultados do estudo paramétrico na minimização da equação (4.5)

Tabela 4.18a - Resultados obtidos na minimização da equação (4.5), para o HBA, fazendo variar os diversos parâmetros de iniciação do algoritmo.

	$A_0$	$r_0$	$\alpha$	$\gamma$	$f_{min}$	$f_{max}$	Híbrido			
							<i>best<sub>1</sub></i>	<i>best<sub>2</sub></i>	$N_{gen}$	<i>BEST</i>
<b>1</b>	1	0.9	0.9	0.9	0	1	0.0332	0.0631	24	3.98E-03
2	0.5	0.5	0.9	0.9	0	1	-0.2794	-0.0836	2	6.75E-03
<b>3</b>	0.1	0.5	0.9	0.9	0	1	1.0975	1.2528	9	5.94E-03
4	1	0.5	0.1	0.1	0	1	-0.5367	-0.2781	3	2.42E-02
5	1	0.5	0.9	0.1	0	1	-0.5367	0.0549	2	2.93E-03
<b>6</b>	1	0.5	0.1	0.9	0	1	-0.1274	0.3534	14	1.02E-03
7	1	0.5	0.9	0.9	0	4	0.8146	0.6528	4	1.40E-02
<b>8</b>	1	0.5	0.9	0.9	0	0.25	0.9340	0.8207	10	3.64E-04
<b>9</b>	1	0.1	0.9	0.9	0	4	0.9430	0.7751	22	5.64E-03

10	1	0.9	0.9	0.9	0	4	0.9612	1.0408	2	2.34E-02
11	1	0.5	0.9	0.1	0	4	0.3551	0.1199	2	1.18E-02
12	1	0.5	0.1	0.9	0	0.25	0.1868	-0.0136	25	3.63E-03
13	1	0.5	0.9	0.1	0	0.25	0.9472	0.8622	10	2.59E-04
14	0.1	0.5	0.9	0.9	0	0.25	0.1402	-0.0027	21	8.63E-04
15	0.1	0.1	0.9	0.9	0	4	-0.4577	-0.0385	4	6.50E-02
16	0.1	0.1	0.9	0.9	0	0.25	0.9488	0.8100	21	2.70E-03
17	0.1	0.5	0.1	0.9	0	4	-1.1003	-1.3150	2	4.54E-03
18	0.1	0.5	0.9	0.1	0	4	-0.5461	-0.5971	23	1.89E-01
									Média	0.0104
									DP*	0.0159

\* Desvio padrão

Tabela 4.18b - Resultados obtidos na minimização da equação (4.5), para o BA, fazendo variar os diversos parâmetros de iniciação do algoritmo.

	$A_0$	$r_0$	$\alpha$	$\gamma$	$f_{min}$	$f_{max}$	Não Híbrido			
							$best_1$	$best_2$	$N_{gen}$	$BEST$
1	1	0.9	0.9	0.9	0	1	0.0489	-0.0372	2	1.51E-03
2	0.5	0.5	0.9	0.9	0	1	-0.0473	-0.0756	30	5.70E-03
3	0.1	0.5	0.9	0.9	0	1	-0.1766	-0.0003	30	1.96E-03
4	1	0.5	0.1	0.1	0	1	0.0820	-0.0015	30	1.02E-04
5	1	0.5	0.9	0.1	0	1	0.9822	0.9474	9	2.96E-06
6	1	0.5	0.1	0.9	0	1	-0.1274	0.0962	30	1.46E-02
7	1	0.5	0.9	0.9	0	4	0.1338	0.2756	2	7.54E-02
8	1	0.5	0.9	0.9	0	0.25	0.0594	0.0007	20	2.40E-05
9	1	0.1	0.9	0.9	0	4	-1.2836	1.9757	30	4.78E-01
10	1	0.9	0.9	0.9	0	4	0.0450	0.0046	2	2.57E-05
11	1	0.5	0.9	0.1	0	4	-0.0540	0.0275	2	8.55E-04
12	1	0.5	0.1	0.9	0	0.25	0.0133	0.0024	2	5.75E-06
13	1	0.5	0.9	0.1	0	0.25	-0.0010	0.0025	2	6.12E-06
14	0.1	0.5	0.9	0.9	0	0.25	-0.0024	-5.23E-06	7	9.79E-11
15	0.1	0.1	0.9	0.9	0	4	1.4146	1.3665	22	2.1
16	0.1	0.1	0.9	0.9	0	0.25	-0.0466	0.0388	3	1.62E-03
17	0.1	0.5	0.1	0.9	0	4	-0.0063	0.0874	2	7.80E-03
18	0.1	0.5	0.9	0.1	0	4	0.0158	0.1015	2	1.05E-02
									Média	0.1581
									DP*	0.5135

\* Desvio padrão

Observando as tabelas 4.18a-b, facilmente se concluiu que o HBA comporta-se melhor, em termos gerais e em termos de convergência para o óptimo, necessitando de menos iterações para atingir este valor e mostrando possuir uma maior capacidade de exploração que o BA.



Analisando a média e o desvio padrão do valor óptimo para ambos os casos também se concluiu que o HBA possuiu uma média menor do valor mínimo, mesmo que o valor mais baixo tenha sido obtido na situação 14 no caso BA. Quanto à comparação do desvio padrão, também se pode concluir que o HBA possuiu uma maior estabilidade em termos de variação dos valores óptimos obtidos.

Adicionalmente, e facilmente explicável pelo aumento da diversidade de soluções devido à utilização da técnica de evolução diferencial, pode observar-se que o HBA consegue convergir para uma maior variedade de soluções, obtendo mais vezes soluções obtidas à volta dos três mínimos locais da função existentes, enquanto que o BS maioritariamente encontra soluções em redor do ponto de variáveis de projecto nulas..

Em termos paramétricos, em relação ao HBA pode dizer-se que este é mais afectado pelo valor da frequência máxima, pois para os casos em que esta é menor, o algoritmo apresenta uma pior convergência para o óptimo, perdendo a capacidade para explorar soluções no espaço, mas, ganhando, em algumas situações, como as 13 e 14, capacidade de exploração, conseguindo soluções óptimas mais promissoras.

Quanto ao BA, o parâmetro que afecta mais as soluções obtidas é sem dúvida a taxa de emissão de impulsos, e isto é facilmente perceptível se verificarmos a técnica utilizada para aumentar a variedade de soluções em torno do melhor valor obtido até à iteração actual, como explicado no subcapítulo 2.2, pois para valores menores de  $r_0$ , a probabilidade de utilização desta técnica é maior, o que aumenta a sua capacidade procura local, em detrimento da sua capacidade explorar soluções promissoras no espaço de possibilidades. De notar também que para frequências máximas unitárias os resultados convergem de forma mais lenta, sendo a excepção a situação 1, na qual o valor de  $r_0$  é elevado.

#### **4.5.2 Análise dos resultados do estudo do parâmetro $F_p$ no HBA, na minimização da equação (4.5)**

Para esta análise, escolheram-se quatro situações no caso da utilização do HBA onde a convergência para o mínimo é baixa, e fixando o valor de  $A_0$  e  $r_0$  em 0.8 e 0.5, respectivamente obtiveram-se resultados variando apenas o factor de permutação como se pode observar na tabela 4.19.

Tabela 4.19 - Resultados obtidos na minimização da equação (4.5), para o HBA, para estudo do efeito do efeito da variação do factor de permutação.

Híbrido								
$Fp$	$\alpha$	$\gamma$	$f_{min}$	$f_{max}$	$best_1$	$best_2$	$N_{gen}$	$BEST$
1	0.9	0.1	0	4	-0.5461	-0.5971	23	1.89E-01
1	0.9	0.9	0	1	0.0332	0.0631	24	3.98E-03
1	0.9	0.9	0	4	0.943	0.7751	22	5.64E-03
1	0.9	0.9	0	0.25	0.9488	0.81	21	2.70E-03
0.5	0.9	0.1	0	4	0.7618	0.5344	3	9.96E-03
0.5	0.9	0.9	0	1	-0.1055	-0.0188	10	4.24E-04
0.5	0.9	0.9	0	4	1.0416	1.2055	3	7.15E-03
0.5	0.9	0.9	0	0.25	-0.0092	-0.0067	8	4.54E-05
2	0.9	0.1	0	4	-1.2981	-1.8708	2	3.15E-01
2	0.9	0.9	0	1	0.8432	0.6579	2	5.77E-03
2	0.9	0.9	0	4	1.2535	1.6609	4	1.51E-01
2	0.9	0.9	0	0.25	0.8012	0.3829	16	7.86E-02
Ad1	0.9	0.1	0	4	0.2433	-0.2326	2	1.64E-01
Ad1	0.9	0.9	0	1	0.2408	0.1008	2	8.30E-03
Ad1	0.9	0.9	0	4	-0.0888	0.3543	8	2.03E-01
Ad1	0.9	0.9	0	0.25	0.0089	-0.0026	30	6.90E-06
Ad2	0.9	0.1	0	4	0.9574	0.8493	25	1.07E-03
Ad2	0.9	0.9	0	1	-0.1353	0.0395	8	3.63E-03
Ad2	0.9	0.9	0	4	0.1712	0.0443	7	2.06E-03
Ad2	0.9	0.9	0	0.25	0.0361	-0.0021	4	8.76E-06

Como se pode observar na tabela 4.19, considerar um factor de permutação unitário é pouco adequado quando se pretende que o HBA possua uma rápida convergência para o valor da solução óptima. Em termos gerais concluiu-se que utilizar um valor de factor de permutação mais elevado, no caso desta equação a minimizar, conduz a uma convergência mais rápida para o valor óptimo, apesar de um valor de 0.5 também ter baixado o número de iterações necessárias para que se encontre um óptimo.

Adicionalmente conclui-se que nesta situação considerar um factor adaptativo não faz variar muito o comportamento do algoritmo na procura da solução em relação à utilização de um factor constante. Note-se também que, em geral, as situações em que o algoritmo converge mais lentamente para o valor óptimo, são quando o valor da frequência máxima é menor.

#### 4.5.3 Análise dos resultados do estudo do efeito da dimensão da população de morcegos no BA, na minimização da equação (4.5)

Para esta análise, da mesma forma que a anterior, escolheram-se quatro situações no caso da utilização do BA onde a convergência para o mínimo é baixa, e fixando o valor de  $A_0$  e  $r_0$  em 0.8 e 0.5, respectivamente obtiveram-se resultados aumentando o número de iterações numa situação e aumentando a dimensão da população de morcegos noutra, como se pode observar na tabela 4.20.

Tabela 4.20 - Resultados obtidos na minimização da equação (4.5), para o BA, para estudo do efeito do efeito de aumento da dimensão da população de morcegos e aumento do número de iterações.

Não Híbrido								
	$\alpha$	$\gamma$	$f_{min}$	$f_{max}$	$best_1$	$best_2$	$N_{gen}$	$BEST$
Iterações=100	0.9	0.9	0	1	-0.1241	0.0855	100	1.15E-02
	0.1	0.1	0	1	0.9983	9.95E-01	23	3.72E-10
	0.9	0.9	0	4	-1.6152	-0.9541	100	1.10E+01
	0.1	0.9	0	4	-0.097	0.364	11	2.02E-03
Dim. População=100	0.9	0.9	0	1	-0.0233	8.87E-05	30	6.06E-07
	0.1	0.1	0	1	-0.0045	-6.09E-06	5	8.31E-10
	0.9	0.9	0	4	0.0122	-9.73E-05	30	2.10E-07
	0.1	0.9	0	4	-0.0078	5.38E-05	30	1.06E-08

Comparativamente aos resultados para populações de 20 morcegos e 30 iterações, conclui-se que o aumento de iterações (mantendo em 20 a dimensão da população) não faz variar muito o comportamento do BA, pois o algoritmo continua com uma baixa capacidade exploração, apesar de se notar uma certa harmonia entre procura local e global no segundo e quarto casos da tabela 4.20. Quanto ao aumento do número de morcegos na população, pode também inferir-se que não conduziu a grandes alterações no comportamento do BA na procura do óptimo.

#### 4.5.4 Análise dos resultados do estudo paramétrico na minimização da equação (4.6)

Neste caso escolheram-se alguns dos conjuntos de parâmetros que conduziram melhores resultados em termos de convergência no caso do HBA para ver o comportamento destes conjuntos na minimização da equação (4.6). A tabela 4.21a-b mostra estes resultados.

Tabela 4.21a - Resultados obtidos na minimização da equação (4.6), para o HBA..

							Híbrido				
	$A_0$	$r_0$	$\alpha$	$\gamma$	$f_{min}$	$f_{max}$	$best_1$	$best_2$	$best_3$	$N_{gen}$	$BEST$
1	1	0.9	0.9	0.9	0	1	1.1049	1.0919	3.3862	3	-12.325
2	1	0.5	0.9	0.1	0	1	1.3362	1.2554	3.3008	4	-12.348
3	1	0.5	0.1	0.9	0	1	1.2949	0.8908	3.5232	3	-12.334
4	1	0.5	0.9	0.9	0	0.25	1.2958	1.142	3.3869	7	-12.383
5	1	0.1	0.9	0.9	0	0.25	1.2014	1.0802	3.3065	2	-12.366
6	1	0.5	0.9	0.1	0	4	1.3287	1.2417	3.3814	2	-12.36
7	1	0.5	0.1	0.9	0	0.25	1.387	0.9396	3.8171	11	-12.246
8	1	0.5	0.9	0.1	0	0.25	1.076	1.1206	3.3007	4	-12.335
9	0.1	0.5	0.9	0.9	0	0.25	1.2164	1.1664	3.4855	7	-12.394
10	0.1	0.9	0.9	0.9	0	4	0.7604	1.1867	2.5425	2	-11.261
									Média	4.50	-12.24
									DP*	2.95	0.34

Tabela 4.21b - Resultados obtidos na minimização da equação (4.6), para o BA.

	$A_0$	$r_0$	$\alpha$	$\gamma$	$f_{min}$	$f_{max}$	Não Híbrido				
							$best_1$	$best_2$	$best_3$	$N_{gen}$	$BEST$
1	1	0.9	0.9	0.9	0	1	1.1701	1.9883	3.033	3	-11.955
2	1	0.5	0.9	0.1	0	1	1.1023	1.4724	3.8673	4	-11.988
3	1	0.5	0.1	0.9	0	1	1.3056	1.7478	3.6302	2	-11.841
4	1	0.5	0.9	0.9	0	0.25	1.5172	1.1099	3.054	60	-12.068
5	1	0.5	0.9	0.1	0	4	1.0276	1.4798	3.5002	60	-12.272
6	1	0.5	0.1	0.9	0	0.25	1.3143	0.9489	3.7394	3	-12.31
7	1	0.5	0.9	0.1	0	0.25	1.1265	1.6726	2.8702	60	-12.17
8	0.1	0.5	0.9	0.9	0	0.25	0.9009	1.9344	3.532	7	-11.787
9	0.1	0.9	0.9	0.9	0	4	1.5096	0.5833	3.6493	60	-12.11
									Média	28.78	-11.98
									DP*	29.65	0.29

Como verificado no caso da função anterior, conclui-se aqui que o HBA possui uma maior capacidade de exploração que o BA, mostrando o primeiro possuir uma convergência mais rápida para o ótimo, verificada pela comparação das médias do número de iterações necessárias para que se atinjam os ótimos nos dois casos.

De notar que, apesar não serem muito mais elevados os números de iterações no caso do HBA, necessárias para que se encontre um ótimo, estes valores ocorrem novamente para valores com  $f_{max}$  menor, influenciando as equações de actualização das velocidades e posições dos indivíduos de modo a prejudicar a capacidade de procura global da solução.

Contudo, há que notar, que no caso desta função, para o BA, os resultados são um pouco difíceis de interpretar, não havendo um padrão de resultados que permita tirar conclusões assertivas.

## 5. Conclusões

Neste trabalho foi implementado um algoritmo de optimização bio-inspirado, baseado na capacidade de eco-localização de micro-morcegos: o Bat-Algorithm, tanto na sua versão original como numa versão que recorreu a alterações baseadas no conceito de evolução diferencial.

Em termos gerais pode concluir-se que o BA é um algoritmo muito recente de optimização e apesar de ainda estar muito pouco explorado em termos de estudo paramétrico e de implementação em diversos tipos de funções a minimizar ou maximizar, tem mostrado, desde a sua criação por Yang em 2010, ser um algoritmo promissor no que toca à optimização, devendo-se isto a diversas características, como o factor do BA usar a eco-localização e sintonização de frequências para resolver problemas, isto é, não se utiliza directamente a eco-localização para imitar a verdadeira função. Esta capacidade pode fornecer alguma funcionalidade que poderá ser similar à característica chave usada no PSO e de harmonia de procura da solução óptima. Adicionalmente o BA tem uma enorme vantagem sobre os restantes algoritmos meta-heurísticos, na medida em que tem a capacidade de automaticamente conseguir uma amplificação na região onde as soluções mais promissoras se encontram. Esta amplificação é acompanhada pela alternância entre movimentos explorativos e explorações locais intensivas. Como resultado o BA possui uma taxa de convergência, em especial quando se implementa a sua versão híbrida, como se pode verificar pelos resultados obtidos no presente trabalho.

Em contraste com outros algoritmos, o BA utiliza controlo de parâmetros, os quais podem variar com o passar das iterações ( $A$  e  $r$ ), o que fornece um modo automático de troca entre exploração e exploração quando a solução óptima se aproxima.

Quanto à utilização do BA na minimização para se atingir os objectivos do presente trabalho, tanto a minimização das deformadas, como a maximização das frequências fundamentais de placas com gradiente funcional de propriedades, mostrou-se ser que este algoritmo é deveras eficiente, pois, utilizando a versão híbrida, os resultados são sem dúvida promissores, havendo uma convergência muito rápida para a solução óptima, que no caso destas funções pareceu ser uma solução óptima global.

Contudo, a questão de se aplicarem constrangimentos nos presentes algoritmos não foi “explorada a fundo” no presente trabalho, o que seria um trabalho futuro a ser efectuado, apesar de já existir alguma bibliografia que trate deste assunto.

Desta forma seria também interessante como trabalho futuro implementar este tipo de algoritmos em problemas de engenharia com mais variáveis e de diferentes naturezas, como por exemplo ângulos de camadas de placas compósitas laminadas que levassem a melhores comportamentos em termos de resistência ou de outra propriedade por parte destes laminados.

Em relação ao estudo paramétrico realizado nas funções considerados pelos motivos já previamente mencionados, apesar de se ter, com um sucesso razoável, verificado o comportamento das variáveis de iniciação do algoritmo, este assunto continua ter de ser explorado, dado que existem inúmeras possibilidades em termos de funções e problemas a serem optimizados, que podem fazer requerer outros tipos de perspectivas no estudo dos parâmetros.



## Bibliografia

### Literatura

- [1] LUKE, S., *Essentials of Metaheuristics, Undergraduate Lecture Notes*, 2<sup>nd</sup> Ed. Online Version, 2014;
- [2] GLOVER, F. and KOCHENBERGER, G. A., *Handbook of Metaheuristics*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 2003;
- [3] YANG, X-S., *Bat Algorithm: Literature Review and Applications*, Int. J. Bio-Inspired Computation, Vol. 5, No. 3, pp. 141-149, 2013;
- [4] YILMAZ S. et al, *Modified Bat Algorithm*, ELETRONIKA IR ELEKTROTECHNIKA, Vol. 20, No.2, pp. 71-78, 2014;
- [5] STORN, R. and PRICE, K., *Differential Evolution - A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces*, Journal of Global Optimization, Vol. 11, pp. 341-359, 1997;
- [6] IZTOK, F. Jr. et al., *A Hybrid Bat Algorithm*, ELEKTROTEHNIŠKI VESTNIK, Vol. 80(1-2), pp. 1-7, 2103;
- [7] BERGAMASCHI, P. and BONFIM, I., *O Método de Optimização Evolução Diferencial: Uma Análise dos Parâmetros - Fator de Permutação e Probabilidade de Cruzamento*, Anais do II Simpósio de Matemática e Matemática Industrial - Vol. 21, pp. 157-170;
- [8] BUGMANN, M. D., *Radial Basis Functions: Theory and Implementations*, Cambridge University Press, 2003;
- [9] HARDY, R. L., *Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces*, Journal of Geophysical Research, Vol. 176, pp. 1905-1915, 1971;
- [10] FRANKE, R., *Scattered data interpolation tests of some methods*. Mathematics of Computation, Vol. 38(157), pp. 181-200, 1982;
- [11] MICCHELI, C. A., *Interpolation of scattered data distance matrices and conditionally positive definite functions*, Constructive Approximation, Vol. 2(1), pp. 11-22, 1986;
- [12] STEAD, S., *Estimation of gradients from scattered data*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, Vol. 14, 265-279, 1984;
- [13] KANSA, E. J., *Multiquadrics. a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. I. Surface approximations and partial derivative estimates*. Computers & mathematics with applications, Vol. 19(8-9), pp. 127-145, 1990;
- [14] KANSA, E. J., *Multiquadrics. a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. II. Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations*. Computers & mathematics with applications, Vol. 19(8-9) pp. 147-161, 1990;
- [15] Li, J., Cheng, A. H. D. e Chen, C.-S., *A comparison of efficiency and error convergence of multiquadric collocation method and finite element method*. Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 27(3): pp. 251-257, 2003;
- [16] BELYTSCHKO, T. et al, *Meshless methods: An overview and recent developments*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 139(1-4), pp. 3-47, 1996;
- [17] GU, Y. T., *Meshfree methods and their comparisons*. International Journal of Computational Methods, Vol. 2(4), pp. 477-515, 2005;

- [18] LISZKA, T. and ORKISZ, J., *Finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics*. *Computers and Structures*, Vol.11(1-2), pp. 83-95, 1980;
- [19] ONATE, E. et al., *A finite point method in computational mechanics. applications to convective transport and fluid flow*, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39(22), pp. 3839-3866, 1996;
- [20] Liszka, T. J., Duarte, C. A. M. e Tworzydło, W. W., *Hp-meshless cloud method*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139(1-4), pp. 263-288, 1996;
- [21] BOGOMOLNY, A., *Fundamental solutions method for elliptic boundary value problems*. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 22(4), pp. 644-669, 1985;
- [22] BERNARDO, G. M. S. and LOJA, M. A. R., *Optimization of structures modeled with a meshfree approach*, 6<sup>th</sup> World Congress on Natural and Biologically Inspired Computation, 2014;
- [23] REDDY, J. N., *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill, 1993;
- [24] REDDY, J. N., *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*, Wiley, 1984;
- [25] REDDY, J. N., *Simple higher-order theory for laminated composite plates*, *Journal of Applied Mechanics*, *Transactions ASME*, Vol. 51(4), pp. 745-752, 1984;
- [26] AKHRAS, G. et al., *Static and vibration analysis of anisotropic composite laminates by finite strip method*, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 30(22), pp. 3129-3137, 1993;
- [27] FERREIRA, A. et al., *Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method*, *Composite Structures*, Vol. 75, pp. 593-600, 2006;
- [28] NGUYEN, T.-K. et al., *First shear deformation plate models for functionally graded materials*, *Composites Structures*, Vol. 83, pp. 25-36, 2008;
- [29] NGUYEN, T.-K. et al., *Shear correction factors for functionally graded plates*, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Taylor & Francis, pp. 567-575, 2014;
- [30] RAOUF, O. et al., *An improved chaotic bat algorithm for solving integer programming problems*, *I. J. Modern Education and Computer Science*, Vol. 8, pp. 8-24, 2014;
- [31] YANG, X.-S. and GANDOMI, A. H., *Bat algorithm: a novel approach for global engineering optimization*, *Engineering Computations*, Vol. 29, Issue 5, pp. 464-483, 2012.



## **ANEXOS**

### **ANEXO A - Artigo utilizado para comparação do BA com o PSO**



## ANEXO B - Exemplo de uma função da viga de sandwich FGM, obtida em MATLAB

[illegible]

Figura B.1 - Ilustração exemplo da função do cálculo da deformada a meio vão numa viga FGM simplesmente apoiada sob carga uniformemente distribuída.



## ANEXO C - Exemplos de simulações efectuadas para minimização das funções consideradas no estudo paramétrico

k	x1k	x2k	j	$\ \nabla f(y_j)\ $	y <sub>j</sub>		$\alpha_j$	$\lambda_j$	d <sub>j</sub>		y <sub>j+1</sub>	
	f(x <sub>k</sub> )											
1	-4	-5	1	5657.10	-4	-5	0.004	0	5656	-110	-2.2534	-4.5476
	3483		2	351.76	-1.8424	-5.042		0.002	-215.5	259.2		
2	-2.2534	-4.5476	1	140.47	-2.2534	-4.5476	1.007	0.004	113.4631	82.8118	-1.4335	-1.7534
	102.9443		2	140.98	-1.7773	-4.2001		0.013	27.3077	194.3606		
3	-1.4335	-1.7534	1	14.60	-1.4335	-1.7534	0.005	0.013	14.4421	-2.1232	-1.2425	-1.6531
	1.443		2	1.01	-1.2407	-1.7818		0.129	-0.0137	1.0005		
4	-1.2425	-1.6531	1	1.90	-1.2425	-1.6531	0.086	0.021	1.8999	0.0242	-0.9199	-0.8048
	0.1271		2	0.5562	-1.2026	-1.6526		1.52	0.186	0.5578		
5	-0.9199	-0.8048	1	0.1300	-0.9199	-0.8048	0.005	0.064	-0.1218	0.0406	0	0
	0.001		2	0.0091	-0.9277	-0.8021		0	-0.0037	-0.0083		

Figura C.1 - Iterações na minimização da função (4.5) utilizando o Método dos GC de Fletcher-Reeves  
( $x_{inicial}=[-4,-5]$  e  $\epsilon=0.05$ ).

k	x1k	x2k	j	$\ \Delta f(y_j)\ $	y <sub>j</sub>		D <sub>j</sub>		$\lambda_j$	d <sub>j</sub>		y <sub>j+1</sub>	
	f(x <sub>k</sub> )												
1	3	2	1	1359.2	3	2	1	0	0.0015	-1358	58	0.8517	0.6541
	627		2	24.395	0.9279	2.0885	0	1		0.1022	-0.7	-14	
							0.0028	0.0529					
2	0.8517	0.6541	1	0.0965	0.8517	0.6541	1	0	0.087	0.0959	-0.0107	0.9282	0.7834
	0.0044		2	0.0372	0.8601	0.6532	0	1		4.2148	0.0162	0.0309	
							0.2215	0.4114					
3	0.9282	0.7834	1	0.1232	0.9282	0.7834	1	0	0.0632	-0.1091	0.0571	0.9427	0.8382
	0.0011		2	0.0111	0.9213	0.787	0	1		4.9997	0.0043	0.0102	
							0.1502	0.3582					
4	0.9427	0.8382	1	0.0059	0.9427	0.8382	1	0	0.0778	-0.007	0.0083	0	0
	2.39E-04		2		0.9422	0.8388	0	1		0			
							0.1357	0.3469					
							0.3469	0.8872					

Figura C.2 - Iterações na minimização da função (4.5) utilizando o Método de DFP ( $x_{inicial}=[3,2]$  e  $\epsilon=0.05$ ).

k	x1k	x2k	x3k	j	Δf(yj)	yj			Dj			λj	dj				yj+1		
1	0	0	0	1	12.2066	0.0000	0.0000	0.0000	1	0	0	0.2634	6.0000	7.0000	8.0000	0.9659	1.8697	2.9574	
									0	1	0								
									0	0	1								
									0.6149	-0.3333	-0.2462								
2	9			2	2.9323	1.5802	1.8436	2.1069	-0.3333	0.7177	-0.1962	0.3647	-1.6843	0.0716	2.3321				
									-0.2462	-0.1962	0.8884								
									1	0	0								
									0	1	0								
3	0.9659	1.8697	2.9574	1	0.7461	0.9659	1.8697	2.9574	0	1	0	0.9030	0.2665	-0.6627	0.2155	1.1473	1.1773	3.3213	
									0	0	1								
									1.2610	0.8859	-0.5140								
									0.8859	0.8508	-0.9418								
4	-12.0992			2	0.4469	1.2066	1.2713	3.1520	-0.5140	-0.9418	1.8080	0.2335	-0.2540	-0.4025	0.7250				
									0.8859	0.8508	-0.9418								
									1	0	0								
									0	1	0								
5	1.1473	1.1773	3.3213	1	0.3438	1.1473	1.1773	3.3213	1	0	0	0.2402	0.2334	0.1768	0.1801	1.1935	1.2198	3.3889	
									0	1	0								
									0	0	1								
									0.4598	-0.3553	-0.2121								
6	-12.3848			2	0.0615	1.2034	1.2197	3.3646	-0.3553	0.7742	-0.1180	0.4202	-0.0235	0.0000	0.0578				
									-0.2121	-0.1180	0.9758								
									1	0	0								
									0	1	0								
7	1.1935	1.2198	3.3889	1	0.0229	1.1935	1.2198	3.3889	1	0	0	0.7047	0.0062	-0.0219	0.0025	1.2002	1.2044	3.3916	
									0	1	0								
									0	0	1								
									5.3896	1.3774	-0.2792								
8	-12.3997			2	0.0152	1.1979	1.2043	3.3906	1.3774	0.5826	-0.4814	0.1065	0.0221	0.0004	0.0095				
									-0.2792	-0.4814	0.8352								
									1	0	0								
									0	1	0								
9	1.2002	1.2044	3.3916	1	0.0134	1.2002	1.2044	3.3916	0	1	0	0.4416	-0.0053	-0.0006	0.0123	0.0000	0.0000	0.0000	
									0	0	1								
									0.6177	0.0882	0.6076								
									0.0882	0.9823	-0.1832								
10	-12.3999			2	0.0057	1.1979	1.2041	3.3971	0.6076	-0.1832	0.7347	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000				

Figura C.3 - Iterações na minimização da função (4.6) utilizando o Método de DFP ( $x_{\text{inicial}}=[0,0,0]$  e  $\varepsilon=0.005$ ).