

Cálculo diferencial e interal II

Bernardo Mondragón Brozon

Enero de 2015

1 El teorema fundamental del cálculo

1.1 Area debajo de una gráfica

- Se quiere hallar el área debajo de la gráfica de una función:

incluirgrafico

- **Definición:** Sea f una función continua en $[a, b]$ no negativa y sea $\mathbb{A} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue:

$$\mathbb{A}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = a \\ \text{área bajo } f & \text{si } x \in [a, b] \end{cases}$$

$\mathbb{A}(b)$ denota el área acumulada debajo de la gráfica de f en el intervalo $[a, b]$.

- $\mathbb{A} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ satisface que:
 - a) Por definición, $\mathbb{A}(a) = 0$
 - b) Si $c \in [a, b]$, entonces $\mathbb{A}(a, b) = \mathbb{A}(a, c) + \mathbb{A}(c, b)$
 - c) Si m es mínimo y M es el máximo de la función en el intervalo $[a, b]$, entonces $m \leq f(x) \leq M$ y $m(b-a) \leq \mathbb{A}(b) \leq M(b-a)$

incluirgrafico

- La notación integral:

$$\mathbb{A}(x) = \int_a^x f(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x = a \\ \text{área bajo } f & \text{si } x \in [a, b] \end{cases}$$

1.2 El teorema del valor medio para integrales (TVMI)

- **Teorema:** El teorema del valor medio para integrales (TVMI) establece que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $\int_a^b f(t) dt = f(c)(b-a)$.

Demostración:

Sea m y M tal que $m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b]$, entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a)$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{\int_a^b f(t) dt}{b-a} \leq M$$

El teorema del Bolzano establece que una función continua "no se salta valores", entonces

$$\begin{aligned} f(s) = m &\leq \frac{\int_a^b f(t) dt}{b-a} \leq M = f(t) \quad \text{para algún } s, t \in [a, b] \\ \Rightarrow f(c) &= \frac{\int_a^b f(t) dt}{b-a} \quad \text{para algún } c \in [a, b] \end{aligned}$$

es decir, $f(c) = \frac{\int_a^b f(t) dt}{b-a}$ es un valor que alcanza la función, pues $f(c) = \frac{\int_a^b f(t) dt}{b-a}$ está entre el mínimo y el máximo.

$$\Rightarrow f(c)(b-a) = \int_a^b f(t) dt \quad \text{para algún } c \in [a, b]$$

■

1.3 El Teorema fundamental del cálculo (TFC)

- **Teorema:** El teorema fundamental del cálculo parte 1 (TFC#1) establece que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, entonces $\mathbb{A}(x) = \int_a^x f(t) dt$ es una función continua y diferenciable tal que

$$\frac{d}{dx} (\mathbb{A}(x)) = \frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$$

Demostración:

Caso 1. ($h > 0$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \mathbb{A}(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{A}(x+h) - \mathbb{A}(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} \end{aligned}$$

Por el teorema del valor medio para integrales, existe $c \in [x, x+h]$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c)(x+h-x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(c)$$

si $h > 0$, entonces $x < x+h$ pero $c \in [x, x+h]$, de manera que si $h \rightarrow 0^+$, entonces $c \rightarrow x^+$, entonces $\lim_{h \rightarrow 0^+} f(c) = f(x)$, entonces $D^+(\mathbb{A}(x)) = f(x)$

Caso 2. ($h < 0$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \mathbb{A}(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{A}(x+h) - \mathbb{A}(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \left(\int_a^{x+h} f(t) dt + \int_{x+h}^x f(t) dt \right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\int_{x+h}^x f(t) dt}{h} \end{aligned}$$

Por el teorema del valor medio para integrales, existe $c \in [x+h, x]$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\int_{x+h}^x f(t) dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f(c)(x - (x+h))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(c)$$

si $h < 0$, entonces $x+h < x$ pero $c \in [x, x+h]$, de manera que si $h \rightarrow 0^-$, entonces $c \rightarrow x^-$, entonces $\lim_{h \rightarrow 0^-} f(c) = f(x)$, entonces $D^-(\mathbb{A}(x)) = f(x)$

Por el caso 1 y por el caso 2, se tiene que $D^+(\mathbb{A}(x)) = f(x)$ y $D^-(\mathbb{A}(x)) = f(x)$, entonces $\mathbb{A}'(x) = f(x)$.

Por el teorema fundamental del cálculo parte 1, vemos que el problema de hallar la función de área se convierte en hallar una primitiva de la función bajo la cual se quiere encontrar el área. ■

- **Teorema:** El teorema fundamental del cálculo parte 2 (*TFC#2*) establece que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, y $\frac{d}{dx}(F(x)) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = F(t) \Big|_a^b$$

Demostración:

Sea $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ y sea $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$, antiderivadas de $f(x)$ (dos funciones cuyas derivadas son $f(x)$), entonces $F(x)$ y $G(x)$ difieren por una constante C :

$$F(x) = G(x) + C \quad \forall x \in [a, b]$$

Ahora hacemos:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= \int_a^b f(t) dt - 0 = \int_a^b f(t) dt - \int_a^a f(t) dt \\ &= G(b) - G(a) = G(b) + c - (G(a) + c) = F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$
■

- Convención: si $b \leq a$, entonces $\int_a^b f(t) dt = -\int_b^a f(t) dt$
- Se tiene que interpretar correctamente la definición de valor absoluto: sean a y b tal que $a \leq b$. Si se tiene $\int_a^b |t| dt$, entonces hay tres casos:

Caso 1. $b \leq 0$, entonces $\int_a^b |t| dt = \int_a^b -t dt = -\int_a^b t dt = -\frac{t^2}{2} \Big|_a^b = \frac{a^2 - b^2}{2} > 0$.

Caso 2. $a \leq 0 \leq b$, entonces $\int_a^b |t| \, dt = \int_a^0 -t \, dt + \int_0^b t \, dt = -\int_a^0 t \, dt + \int_0^b t \, dt = -\frac{t^2}{2} \Big|_a^0 + \frac{t^2}{2} \Big|_0^b = \frac{a^2 + b^2}{2} > 0$.

Caso 3. $a \geq 0$, entonces $\int_a^b |t| \, dt = \int_a^b t \, dt = \frac{t^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2} > 0$.

incluigráfico

2 El logaritmo natural

2.1 Propiedades del logaritmo natural

- La regla del exponente dice que $\int t^r dt = \frac{t^{r+1}}{r+1} + C$, $\forall r \neq -1$. ¿Qué pasa si $r = -1$? No se puede aplicar la regla del exponente, entonces buscamos una función diferenciable $L(x)$ tal que

$$L'(x) = x^{-1} = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$$

- **Definición:** El logaritmo natural es una función $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida como sigue:

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = \int_1^x t^{-1} dt$$

El logaritmo natural es el área debajo de la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $[1, a]$:

incluir grafico

- **Observación:** Por el TFC #1, $\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{d}{dx} \left(\int_1^x \frac{1}{t} dt \right) = \frac{1}{x}$.
- Sea $F(t) = \ln(-t) + C$ y $G(t) = \ln(t) + C$, entonces $\frac{d}{dt}F(t) = \frac{1}{t}$ y $\frac{d}{dt}G(t) = \frac{1}{t}$, entonces se sigue que

$$\int \frac{1}{t} dt = \begin{cases} \ln(-t) + C & \text{si } t < 0 \\ \ln(t) + C & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Por lo tanto $\int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C$ si $t \neq 0$. En general, $\int \frac{u'}{u} du = \ln|u| + C$ si $u \neq 0$.

- **Proposición:** Propiedades del logaritmo natural. $\forall a, b > 0$ y $\forall r \in \mathbb{Q}$ ocurre que:

- a) $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- b) $\ln(a^{-1}) = \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- c) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- d) $\ln(a^r) = r \ln(a)$

Demostración:

- a) **P.D.** $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

Sea $f(b) = \ln(ab) \Rightarrow \frac{d}{db}f(b) = \frac{1}{b}$. Sea $g(b) = \ln(b) \Rightarrow \frac{d}{db}g(b) = \frac{1}{b}$, entonces $f(b)$ y $g(b)$ tienen la misma derivada, por lo tanto, difieren por una constante C , $\forall b \in (0, \infty)$, si y sólo si $F(b) = G(b) + C$, $\forall b \in (0, \infty)$. Si $b = 1 \Rightarrow F(1) = G(1) + C = \ln(1) + C = 0 + C = C \Leftrightarrow F(1) = C$, pero $F(1) = \ln(a(1)) = \ln(a) \Leftrightarrow F(1) = C = \ln(a) \Leftrightarrow C = \ln(a) \Leftrightarrow F(b) = \ln(b) + \ln(a) = \ln(a) + \ln(b) \therefore \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad \forall b \in (0, \infty)$.

b) **P.D.** $\ln(a^{-1}) = \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

Si $b > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{b} > 0$. $1 = \frac{b}{b} \Leftrightarrow 1 = bb^{-1} \Leftrightarrow \ln(1) = \ln(bb^{-1}) \Leftrightarrow 0 = \ln(bb^{-1}) \Leftrightarrow 0 = \ln(b) + \ln(b^{-1}) \Leftrightarrow \ln(b^{-1}) = -\ln(b)$.

c) **P.D.** $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(ab^{-1}) = \ln(a) + \ln(b^{-1}) = \ln(a) - \ln(b)$.

d) **P.D.** $\ln(a^r) = r \ln(a)$

Sea $F(a) = \ln(a^r) \Rightarrow \frac{d}{da} F(a) = \frac{r}{a}$. Sea $G(a) = r \ln(a) \Rightarrow \frac{d}{da} G(a) = \frac{r}{a}$, entonces $F(a)$ y $G(a)$ tienen la misma derivada, por lo tanto, difieren por una constante C , $\forall a \in (0, \infty)$, si y sólo si $F(a) = G(a) + C$, $\forall a \in (0, \infty)$.

Si $a = 1 \Rightarrow F(1) = G(1) + C = r \ln(1) + C = 0 + C = C \Leftrightarrow F(1) = C$, pero $F(1) = \ln(1^r) = \ln(1) = 0 \Leftrightarrow C = 0 \Leftrightarrow F(a) = G(a) \Leftrightarrow r \ln(a) = \ln(a^r) \Leftrightarrow \ln(a^r) = r \ln(a)$.

■

- En las demostraciones anteriores se usó el hecho de que dos funciones que tiene la misma derivada difieren por una constante.

2.2 Límites relevantes del logaritmo natural

- Los siguientes teoremas serán de gran utilidad para conocer el comportamiento del logaritmo natural y su gráfica.

• **Teorema:** $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$

Demostración:

Se prueba por inducción que $\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} \geq 1 + \frac{n}{2}$. Además, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a + \frac{n}{2}\right) = \infty$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} =$

$\sum_{i=1}^{2^\infty} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$. Luego, se observa que, $\forall n > 1$, $(1)\frac{1}{2} + (1)\frac{1}{3} + \dots + (1)\frac{1}{n} < \ln(n)$, tal y como se muestra en la siguiente gráfica:

incluir grafico

Entonces $\forall n > 1$, $(1)\frac{1}{2} + (1)\frac{1}{3} + \dots + (1)\frac{1}{n} < \ln(n)$, así pues $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \ln(n)$, luego $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) - 1 < \ln(n)$, por tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) - 1 < \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n)$, se sigue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} - 1\right) < \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n)$, entonces $\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} - 1\right) < \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n)$, por lo tanto $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$.

■

• **Teorema:** $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$

Demostración:

Sea $t = \frac{1}{x}$. Si $x \rightarrow 0^+$, entonces $t \rightarrow \infty$, además, si $t \rightarrow \infty$, entonces $x \rightarrow 0^+$, por lo tanto, $t \rightarrow \infty$, si y sólo si $x \rightarrow 0^+$. De manera que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln(t^{-1}) = \lim_{t \rightarrow \infty} -\ln(t) = -\lim_{t \rightarrow \infty} \ln(t) = -\infty$$

■

- **Teorema:** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

Demostración:

Si $1 \leq t$, entonces $t \leq t^2$, entonces $\sqrt{t} \leq \sqrt{t^2}$, entonces $\sqrt{t} \leq t$, entonces $\frac{1}{\sqrt{t}} \geq \frac{1}{t}$, tal y como se muestra en la siguiente gráfica:

incluirgrafico

Por lo tanto, si $x \geq 1$, entonces $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt \leq \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2\sqrt{x} - 2 < 2\sqrt{x}$, entonces $\ln(x) < 2\sqrt{x}$. Por lo tanto, $0 < \ln(x) < 2\sqrt{x} \quad \forall x \geq 1$, entonces $0 < \frac{\ln(x)}{x} < \frac{2\sqrt{x}}{x}$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} 0 < \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} < \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x}}{x}$, entonces $0 < \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} < 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

■

- **Teorema:** Si a y b con constantes, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{ax+b} = 0$

Demostración:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{ax+b} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln(x)}{x}}{\frac{ax+b}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax+b}{x}} = \frac{0}{a+0} = 0$$

■

2.3 La gráfica de la función logaritmo natural

- A continuación se trazará con todo detalle la gráfica de la función logaritmo natural enunciando todas sus propiedades: 0) Dominio, imagen y puntos por los que pasa la función; 1) Primera derivada, intervalos de crecimiento y decrecimiento, y puntos críticos estacionarios o puntos singulares; 2) Segunda derivada, intervalos de concavidad positiva y negativa, y puntos de inflexión; 3) Límites relevantes y comportamiento asintótico.

0) $Dom(\ln) = (0, \infty)$, $Im(\ln) = (-\infty, \infty)$ y Pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(e, 1)$.

1) $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x \in (0, \infty)$. Por lo tanto:

- (a) Intervalo de crecimiento = $(0, \infty)$
- (b) Intervalo de decrecimiento = \emptyset
- (c) No existen puntos críticos estacionarios

2) $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \forall x \in (0, \infty)$. Por lo tanto:

- (a) Intervalo de concavidad positiva = \emptyset
- (b) Intervalo de concavidad negativa = $(0, \infty)$
- (c) No existen puntos de inflexión

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. Por lo tanto hay una asíntota vertical en $x = 0$.

- Dado lo anterior, la gráfica de la función logaritmo natural tiene el siguiente aspecto:

incluir gráfico

2.4 Algunos límites importantes

- **Teorema:** $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$

Demostración:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) \left(\frac{1}{x} \right) = " \infty \cdot -\infty " = -\infty$$

■

- **Teorema:** $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$

Demostración:

Sea $t = \frac{1}{x}$. Si $x \rightarrow 0^+$, entonces $t \rightarrow \infty$, además, si $t \rightarrow \infty$, entonces $x \rightarrow 0^+$, por lo tanto, $t \rightarrow \infty$, si y sólo si $x \rightarrow 0^+$. De manera que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{\ln(t)}{t} = -0 = 0$$

■

- **Teorema:** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = 0$

Demostración:

Si $a < b < c$, entonces $\ln(a) < \ln(b) < \ln(c)$, por lo que $\ln(x^2) < \ln(1+x^2) < \ln(x^2+x^2)$, de manera que $2\ln(x) < \ln(1+x^2) < \ln(2x^2)$, así pues $2\ln(x) < \ln(1+x^2) < \ln(2) + \ln(x^2)$, entonces $\frac{2\ln(x)}{x} < \frac{\ln(1+x^2)}{x} < \frac{\ln(2) + \ln(x^2)}{x}$, se sigue que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\ln(x)}{x} < \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} < \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2) + \ln(x^2)}{x}$, de ahí que $0 < \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} < 0$, por lo tanto $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = 0$.

■

2.5 Primitivas trigonométricas

- Con lo anterior, ahora podemos hallar las primitivas de las principales funciones trigonométricas.
- Recordar que $\int \frac{u'}{u} du = \ln|u| + C$.
- Las primitivas de las principales funciones trigonométricas son las siguientes:

$$1. \int \sin(t) dt = -\cos(t) + C$$

$$2. \int \cos(t) dt = \sin(t) + C$$

$$\begin{aligned}
3. \quad \int \tan(t) \, dt &= \int \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \, dt = - \int \frac{-\sin(t)}{\cos(t)} \, dt = - \int \frac{\cos'(t)}{\cos(t)} \, dt = - \ln |\cos(t)| + C \\
4. \quad \int \cot(t) \, dt &= \int \frac{\cos(t)}{\sin(t)} \, dt = \int \frac{\sin'(t)}{\sin(t)} \, dt = \ln |\sin(t)| + C \\
5. \quad \int \sec(t) \, dt &= \int \sec(t) \frac{\sec(t) + \tan(t)}{\sec(t) + \tan(t)} \, dt = \int \frac{\sec^2(t) + \sec(t) \tan(t)}{\sec(t) + \tan(t)} \, dt \\
&= \int \frac{(\sec(t) + \tan(t))'}{\sec(t) + \tan(t)} \, dt = \ln |\sec(t) + \tan(t)| + C \\
6. \quad \int \csc(t) \, dt &= \int \csc(t) \frac{\cot(t) - \csc(t)}{\cot(t) - \csc(t)} \, dt = \int \frac{\csc(t) \cot(t) - \csc^2(t)}{\cot(t) - \csc(t)} \, dt \\
&= \int \frac{(\cot(t) - \csc(t))'}{\cot(t) - \csc(t)} \, dt = \ln |\cot(t) - \csc(t)| + C
\end{aligned}$$

2.6 Diferenciación logarítmica

- Cuando se tiene una función muy "exótica", en algunas ocasiones, es más conveniente utilizar la diferenciación logarítmica.
- **Teorema:** Sea $y = f(x)$, entonces $y' = y(\ln(f(x)))'$.

Demostración:

Si $y = f(x)$, entonces $\ln(y) = \ln(f(x))$, de manera que $\frac{d}{dx} \ln(y) = \frac{d}{dx} \ln(f(x))$, así pues, $\frac{y'}{y} = (\ln(f(x)))'$, por lo tanto $y' = y(\ln(f(x)))'$.

■

3 La exponencial

3.1 Propiedades de la exponencial

- Trazando la gráfica de la función del logaritmo natural, se probó que $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función inyectiva y suprayectiva, y por lo tanto, $\ln(x)$ es una función biyectiva. Podemos concluir que $\ln(x)$ tiene función inversa, es decir, $\ln(x)$ es invertible.
- **Definición:** La exponencial es una función $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ y se define como la inversa bajo composición de la función del logaritmo natural. De manera que

$$y = \ln(x), \quad \text{si y sólo si} \quad x = \exp(y)$$

- Si obtenemos la función exponencial a partir de la inversa de la función $\ln(x)$, habría que hacer una reflexión de $\ln(x)$ con respecto al origen tal y como se muestra en la siguiente figura:

incluirgrafico

- **Teorema:** Si $f(x)$ es una función estrictamente creciente tal que existe su inversa, entonces $f^{-1}(x)$ es una función estrictamente creciente, es decir, la inversa de una función creciente es una función creciente.

Demostración: Sea $a < b$. Supongamos que $f^{-1}(a) \geq f^{-1}(b)$, entonces, como $f(x)$ es una función creciente, $f(f^{-1}(a)) \geq f(f^{-1}(b))$, entonces $a \geq b$, lo cual es una contradicción, por lo tanto, por reducción a lo absurdo, tiene que suceder que $f^{-1}(a) < f^{-1}(b)$.

■

- **Proposición:** Propiedades de la exponencial. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ y $\forall r \in \mathbb{Q}$ ocurre que:

- a) $\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$
- b) $\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- c) $\exp(-b) = \frac{1}{\exp(b)} = (\exp(b))^{-1}$
- d) $\exp(ra) = (\exp(a))^r$

Demostración:

- a) **P.D.** $\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$

Sea $x = \exp(a)$ y $y = \exp(b)$, entonces $a = \ln(x)$ y $b = \ln(y)$, luego $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) = a + b$, así pues, $\ln(xy) = a + b$, de manera que $\exp(\ln(xy)) = \exp(a + b)$, se sigue que $xy = \exp(a + b)$, por lo tanto $\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$.

- b) **P.D.** $\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$

Sea $x = \exp(a)$ y $y = \exp(b)$, entonces $a = \ln(x)$ y $b = \ln(y)$, luego $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) = a - b$, así pues $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = a - b$, de manera que $\exp\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right) = \exp(a - b)$, se sigue que $\frac{x}{y} = \exp(a - b)$, por lo tanto $\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$.

c) **P.D.** $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)} = (\exp(a))^{-1}$

Sea $x = \exp(a)$, entonces $a = \ln(x)$, luego $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(x^{-1}) = -\ln(x) = -a$, así pues $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -a$, de manera que $\exp\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \exp(-a)$, se sigue que $\frac{1}{x} = \exp(-a)$, por lo tanto $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)} = (\exp(a))^{-1}$.

d) **P.D.** $\exp(ra) = (\exp(a))^r$

Sea $x = \exp(a)$, entonces $a = \ln(x)$, luego $\ln(x^r) = r \ln(x)$, así pues $\exp(\ln(x^r)) = \exp(r \ln(x))$, de manera que $x^r = \exp(r \ln(x))$, se sigue que $\exp(ra) = (\exp(a))^r$. ■

4 Límites relevantes de la exponencial

- **Teorema:** $\ln(x) \leq x - 1 \quad \forall x \geq 1$. (No está tan clara la demostración de este teorema)

Demostración: Por el teorema del valor medio para integrales, se tiene que existe alguna $c \in [1, x]$ tal que

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = f(c)(x - 1) = \frac{1}{c}(x - 1)$$

Por lo tanto, si $c = 1$, entonces $\ln(x) = x - 1$, pero si $c = x$, entonces $\ln(x) = \frac{x - 1}{x}$. Además, si $x \geq 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 &= x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x \geq -1 \Rightarrow x^2 - x \geq 1 - x \\ &\Rightarrow x(x - 1) \geq 1 - x \Rightarrow x - 1 \geq \frac{1 - x}{x} \geq \frac{x - 1}{x} \end{aligned}$$

Se sigue que $\frac{x - 1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$, en particular $\ln(x) \leq x - 1$. ■

- **Teorema:** $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$

Demostración:

Si $x \geq 1$, entonces $\ln(x) \leq x - 1 \leq x$, como la función exponencial es una función creciente, se tiene que $\exp(\ln(x)) \leq \exp(x)$, se sigue que $x \leq \exp(x)$, de manera que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x &\leq \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) \Rightarrow \infty \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) \\ \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) &= \infty \end{aligned}$$

- **Teorema:** $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$

Demostración:

Sea $t = -x$. Si $x \rightarrow -\infty$, entonces $t \rightarrow \infty$, además, si $t \rightarrow \infty$, entonces $x \rightarrow -\infty$, por lo tanto, $x \rightarrow -\infty$, si y sólo si $t \rightarrow \infty$. De manera que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \exp(-t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp(t)} = "0^+" = 0$$

- **Teorema:** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\exp(x)} = 0$

Demostración:

Sea $t = \exp(x)$. Si $x \rightarrow \infty$, entonces $t \rightarrow \infty$, además, si $t \rightarrow \infty$, entonces $x \rightarrow \infty$, por lo tanto, $x \rightarrow \infty$, si y sólo si $t \rightarrow \infty$. De manera que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\exp(x)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$$

- **Teorema:** Si a y b son constantes, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + b}{\exp(x)} = 0$

Demostración:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + b}{\exp(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{ax}{\exp(x)} + \frac{b}{\exp(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{\exp(x)} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{\exp(x)} \\ &= a \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\exp(x)} + b \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp(x)} = a(0) + b(0) = 0 \end{aligned}$$

4.1 La gráfica de la función exponencial

- Para trazar la gráfica de la función exponencial, primero será necesario probar que la función $\exp(x)$ es diferenciable.
- **Teorema:** La función exponencial $\exp(x)$ es diferenciable en \mathbb{R} y $\exp'(x) = \exp(x)$.

Demostración:

Dado que la función exponencial es la inversa de la función logaritmo, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \ln(\exp(x)) &= x \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{d}{dx} (\ln(\exp(x))) = \frac{d}{dx} (x) \\ &\Rightarrow \ln'(\exp(x))(\exp'(x)) = 1 \Rightarrow \frac{1}{\exp(x)}(\exp'(x)) = 1 \\ &\Rightarrow \exp'(x) = \exp(x) \end{aligned}$$

- La prueba anterior implica que la función exponencial es diferenciable, pues sólo se puede usar la regla de la cadena para funciones ambas diferenciables. La demostración anterior utiliza el hecho de que la función exponencial es diferenciable, lo cual no se ha probado. A continuación se hará la prueba formal de diferenciability de la función exponencial.
- **Teorema:** La función exponencial $\exp(x)$ es diferenciable en \mathbb{R} y $\exp'(x) = \exp(x)$.

Demostración:

Para demostrar que la función exponencial es diferenciable, es necesario comprobar que exista el siguiente límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} \right)$$

Pero

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\exp(x) \exp(h) - \exp(x)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\exp(x)(\exp(h) - 1)}{h} \right) = \exp(x) \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\exp(h) - 1}{h} \right) \end{aligned}$$

Sea $h = \ln(t)$. Si $h \rightarrow 0$, entonces $t \rightarrow 1$, además, si $t \rightarrow 1$, entonces $h \rightarrow 0$, por lo tanto, $h \rightarrow 0$, si y sólo si $t \rightarrow 1$. De manera que

$$\begin{aligned} \exp(x) \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\exp(h) - 1}{h} \right) &= \exp(x) \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{t - 1}{\ln(t)} \right) = \exp(x) \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\frac{\ln(t)}{t-1}} \right) \\ &= \exp(x) \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\frac{\ln(t) - \ln(1)}{t-1}} \right) \end{aligned}$$

Pero $\lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{\ln(t) - \ln(1)}{t-1} \right)$ es lo mismo que la derivada de la función logaritmo evaluada en 1 y $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$, por lo tanto

$$\exp(x) \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\frac{\ln(t) - \ln(1)}{t-1}} \right) = \exp(x)$$

■

- A continuación se trazará con todo detalle la gráfica de la función exponencial enunciando todas sus propiedades: 0) Dominio, imagen y puntos por los que pasa la función; 1) Primera derivada, intervalos de crecimiento y decrecimiento, y puntos críticos estacionarios o puntos singulares; 2) Segunda derivada, intervalos de concavidad positiva y negativa, y puntos de inflexión; 3) Límites relevantes y comportamiento asintótico.

0) $Dom(\exp) = (-\infty, \infty)$, $Im(\exp) = (0, \infty)$ y Pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(1, e)$.

1) $\exp'(x) = \exp(x) > 0 \quad \forall x \in (-\infty, \infty)$. Por lo tanto:

- Intervalo de crecimiento = $(-\infty, \infty)$
- Intervalo de decrecimiento = \emptyset
- No existen puntos críticos estacionarios

2) $\exp''(x) = \exp(x) > 0 \quad \forall x \in (-\infty, \infty)$. Por lo tanto:

- Intervalo de concavidad positiva = $(-\infty, \infty)$
- Intervalo de concavidad negativa = \emptyset
- No existen puntos de inflexión

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax+b}{\exp(x)} = 0$. Por lo tanto hay una asíntota horizontal en $x = 0$.

- Dado lo anterior, la gráfica de la función exponencial tiene el siguiente aspecto:

incluirgrafico

4.2 Más acerca de la exponencial

- Dado que ya se demostró que la función esponencial $\exp(x)$ es una función diferenciable y $\exp'(x) = \exp(x)$, se puede hacer la siguiente observación, pues se sigue que

$$\int \exp(x) dx = \exp(x) + C$$

Lo cual da lugar al siguiente teorema.

- **Teorema:** Si $f(x)$ es diferenciable, entonces

$$\int \exp(f(x)) f'(x) dx = \exp(f(x)) + C$$

Demostración:

$$(\exp(f(x)) + C)' = (\exp(f(x)))' = \exp(f(x)) f'(x)$$

■

- Se demostrará que si $P(x)$ es cualquier polinomio en x , entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{\exp(x)} = 0$. Enseguida se mostrarán las ideas que ayudarán a llegar a esta conclusión.
- Se probó que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\exp(x)} = 0$. Veamos que pasa con $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\exp(x)}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\exp(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\exp(\frac{x}{2} + \frac{x}{2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\exp(\frac{x}{2}) \exp(\frac{x}{2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\exp(\frac{x}{2})} \frac{x}{\exp(\frac{x}{2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 4 \frac{\frac{x}{2}}{\exp(\frac{x}{2})} \frac{\frac{x}{2}}{\exp(\frac{x}{2})} \end{aligned}$$

Sea $t = \frac{x}{2}$. Si $x \rightarrow \infty$, entonces $t \rightarrow \infty$, además, si $t \rightarrow \infty$, entonces $x \rightarrow \infty$, por lo tanto, $x \rightarrow \infty$, si y sólo si $t \rightarrow \infty$. De manera que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 4 \frac{\frac{x}{2}}{\exp(\frac{x}{2})} \frac{\frac{x}{2}}{\exp(\frac{x}{2})} = \lim_{t \rightarrow \infty} 4 \frac{t}{\exp(t)} \frac{t}{\exp(t)} = 2^2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{t}{\exp(t)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{t}{\exp(t)} = 2^2 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

- Ahora veamos que ocurre con $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{\exp(x)}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{\exp(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{\exp(\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{\exp(\frac{x}{3}) \exp(\frac{x}{3}) \exp(\frac{x}{3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\exp(\frac{x}{3})} \frac{x}{\exp(\frac{x}{3})} \frac{x}{\exp(\frac{x}{3})} = \lim_{x \rightarrow \infty} 27 \frac{\frac{x}{3}}{\exp(\frac{x}{3})} \frac{\frac{x}{3}}{\exp(\frac{x}{3})} \frac{\frac{x}{3}}{\exp(\frac{x}{3})} \end{aligned}$$

Sea $t = \frac{x}{3}$. Si $x \rightarrow \infty$, entonces $t \rightarrow \infty$, además, si $t \rightarrow \infty$, entonces $x \rightarrow \infty$, por lo tanto, $x \rightarrow \infty$, si y sólo si $t \rightarrow \infty$. De manera que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} 27 \frac{\frac{x}{3}}{\exp(\frac{x}{3})} \frac{\frac{x}{3}}{\exp(\frac{x}{3})} \frac{\frac{x}{3}}{\exp(\frac{x}{3})} &= \lim_{t \rightarrow \infty} 27 \frac{t}{\exp(t)} \frac{t}{\exp(t)} \frac{t}{\exp(t)} \\ &= 3^3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{t}{\exp(t)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{t}{\exp(t)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{t}{\exp(t)} = 3^3 \cdot 0 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

- En general, se cumple que si $k = \frac{x}{t}$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{\exp(x)} = \lim_{t \rightarrow \infty} k^k \left(\frac{t}{\exp(t)} \right)^k$. Con esto podemos probar el teorema pendiente.
- **Teorema:** Si $P(x)$ es cualquier polinomio en x , entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{\exp(x)} = 0$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{\exp(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n}{\exp(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(a_0 \frac{1}{\exp(x)} + a_1 \frac{x}{\exp(x)} + a_2 \frac{x^2}{\exp(x)} + \cdots + a_n \frac{x^n}{\exp(x)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(a_0 \frac{1}{\exp(x)} + \sum_{i=1}^n a_i (i)^i \left(\frac{\frac{x}{i}}{\exp(\frac{x}{i})} \right)^i \right) = a_0(0) + a_1(0) + a_2(0) + \cdots + a_{n-1}(0) + a_n(0) = 0 \end{aligned}$$

■

4.3 Nueva notación para la exponencial

- Se probará que $\exp(x) = e^x$. Esto se cumple en todos los casos, por ejemplo:

- a) $\exp(1) = e$.
- b) $\exp(2) = \exp(1+1) = \exp(1)\exp(1) = e \cdot e = e^2$.
- c) $\exp(n) = \exp(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ veces}}) = \underbrace{\exp(1)\exp(1)\cdots\exp(1)}_{n \text{ veces}} = \exp(1)^n = e^n$.
- d) $\exp(-1) = \frac{1}{\exp(1)} = \exp(1)^{-1} = e^{-1}$.
- e) $\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}$.

- **Teorema:** $\exp(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Demostración:

$$\exp(x) = \exp(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{x \text{ veces}}) = \underbrace{\exp(1)\exp(1)\cdots\exp(1)}_{x \text{ veces}} = \underbrace{e \cdot e \cdots e}_{x \text{ veces}} = e^x.$$

■

- **Teorema:** $\exp(-x) = e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Demostración:

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} = \frac{1}{e^x} = (e^x)^{-1} = e^{-x}$$

■

- **Teorema:** $\left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m \quad \forall n, m \in \mathbb{R}$

Demostración:

$$\begin{aligned} \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m &= \underbrace{\exp\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{n}\right) \cdots \exp\left(\frac{1}{n}\right)}_{m \text{ veces}} \\ &= \exp\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{m \text{ veces}}\right) = \exp\left(m \left(\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(\frac{m}{n}\right) = e^{\frac{m}{n}} \end{aligned}$$

■

- En conclusión, $\exp(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

4.4 Leyes de los exponentes

- **Proposición: (Leyes de los exponentes)** $\forall a, b \in \mathbb{R}$ y $\forall r \in \mathbb{Q}$ ocurre que:

- $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$.
- $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$.
- $(e^a)^r = e^{ar}$.

Demostración:

- Por demostrar que $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$.

$$e^a \cdot e^b = \exp(a) \exp(b) = \exp(a+b) = e^{a+b}.$$

- Por demostrar que $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$.

$$\frac{e^a}{e^b} = \frac{\exp(a)}{\exp(b)} = \exp(a-b) = e^{a-b}.$$

- Por demostrar que $(e^a)^r = e^{ar}$.

$$(e^a)^r = e^{ar} = \exp(a)^r = \exp(ra) = \exp(ar) = e^{ar}.$$

■

4.5 Cambio de base

- Se observa que $x \ln(a) = \ln(a^x)$, entonces $\exp(x \ln(a)) = \exp(\ln(a^x)) = a^x$, pues la función exponencial es la inversa de la función logaritmo. Esta última igualdad da lugar a la siguiente definición:
- **Definición:** Sea $a > 0$ una constante. Definimos

$$a^x = \exp(x \ln(a)).$$

□

- **Observación:** $1^x = \exp(x \ln(1)) = \exp(x \cdot 0) = \exp(0) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

- Sea $a > 0$, entonces la función $f(x) = a^x$ es diferenciable y $\frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(\exp(x \ln(a))) = \exp(x \ln(a)) \frac{d}{dx}(x \ln(a)) = \exp(x \ln(a))(\ln(a)) = a^x \ln(a)$. De lo que podemos concluir que, si $f(x) = a^x$, entonces $\frac{d}{dx}(f(x)) = a^x \ln(a)$.

- **Teorema:** Sea $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$.

Demostración:

Se observó que si $f(x) = a^x$, entonces $\frac{d}{dx}(f(x)) = a^x \ln(a)$, por lo tanto $\int a^x \ln(a) dx = a^x + C$,

de manera que $\ln(a) \int a^x dx = a^x + C$, se sigue que

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + \frac{C}{\ln(a)} = \frac{a^x}{\ln(a)} + C'$$

■

4.6 La gráfica de la función a^x con a fijo

- A continuación se trazará con todo detalle la gráfica de la función $f(x) = a^x$ enunciando todas sus propiedades: 0) Dominio, imagen y puntos por los que pasa la función; 1) Primera derivada, intervalos de crecimiento y decrecimiento, y puntos críticos estacionarios o puntos singulares; 2) Segunda derivada, intervalos de concavidad positiva y negativa, y puntos de inflexión; 3) Límites relevantes y comportamiento asintótico.

0) $Dom(a^x) = (-\infty, \infty)$, $Im(a^x) = (0, \infty)$ y Pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(1, a)$.

1)

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln(a) \begin{cases} < 0 & \text{si } 0 < a < 1 \\ = 0 & \text{si } a = 1 \\ > 0 & \text{si } 1 < a \end{cases}$$

Por lo tanto:

Caso 1. $0 < a < 1$

- Intervalo de crecimiento = \emptyset .
- Intervalo de decrecimiento = $(-\infty, \infty)$.
- No existen puntos críticos estacionarios.

Caso 2. $a = 1$

- Intervalo de crecimiento = \emptyset .
- Intervalo de decrecimiento = \emptyset .
- No existen puntos críticos estacionarios.

Caso 3. $1 < a$

- Intervalo de crecimiento = $(-\infty, \infty)$.
- Intervalo de decrecimiento = \emptyset .
- No existen puntos críticos estacionarios.

2)

$$\frac{d^2}{dx^2}(a^x) \begin{cases} > 0 & \text{si } a \neq 1 \\ = 0 & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto:

Caso 1. $0 < a < 1$

- i. Intervalo de concavidad positiva = $(-\infty, \infty)$.
- ii. Intervalo de concavidad negativa = \emptyset .
- iii. No existen puntos de inflexión.

Caso 2. $a = 1$

- i. Intervalo de concavidad positiva = \emptyset .
- ii. Intervalo de concavidad negativa = \emptyset .
- iii. No existen puntos de inflexión.

Caso 3. $1 < a$

- i. Intervalo de concavidad positiva = $(-\infty, \infty)$.
- ii. Intervalo de concavidad negativa = \emptyset .
- iii. No existen puntos de inflexión.

3) Límites relevantes

Caso 1. $0 < a < 1$

- i. $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x \ln(a)) = 0$.
- ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x \ln(a)) = \infty$.

Caso 2. $a = 1$

- i. $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x \ln(a)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x \cdot 0) = 1$.
- ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x \ln(a)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x \cdot 0) = 1$.

Caso 3. $1 < a$

- i. $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x \ln(a)) = \infty$.
- ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x \ln(a)) = 0$.

- Dado lo anterior, la gráfica de la función $f(x) = a^x$ tiene el siguiente aspecto:

incluirgrafico

- **Teorema:** Si $1 < a < b$, entonces

- a) $a^x < b^x$ si $x > 0$.
- b) $a^x = b^x$ si $x = 0$.
- c) $a^x > b^x$ si $x < 0$.

Demostración:

Sea $\frac{a^x}{b^x} = \frac{\exp(x \ln(a))}{\exp(x \ln(b))} = \exp(x \ln(a)) \cdot \exp(x \ln(b))^{-1} = \exp(x \ln(a)) \cdot \exp(-x \ln(b)) = \exp(x \ln(a) - x \ln(b)) = \exp(x(\ln(a) - \ln(b)))$, entonces $\frac{a^x}{b^x} = \exp(x[\ln(a) - \ln(b)])$.

Si $r = \ln(a) - \ln(b)$, entonces $r < 0$ y

$$\frac{a^x}{b^x} = \exp(x \cdot r) \begin{cases} < 1 & \text{si } x > 0, \text{ entonces } a^x < b^x \\ = 1 & \text{si } x = 0, \text{ entonces } a^x = b^x \\ > 1 & \text{si } x < 0, \text{ entonces } a^x > b^x \end{cases}$$

■

Teorema: Si $0 < a < b < 1$, entonces

- i) $a^x < b^x$ si $x > 0$.
- ii) $a^x = b^x$ si $x = 0$.
- iii) $a^x > b^x$ si $x < 0$.

Demostración: Sea $\frac{a^x}{b^x} = \exp(x[\ln(a) - \ln(b)])$. Si $r = \ln(a) - \ln(b)$, entonces $r < 0$ y

$$\frac{a^x}{b^x} = \exp(r \cdot x) \begin{cases} < 1 & \text{si } x > 0, \text{ entonces } a^x < b^x \\ = 1 & \text{si } x = 0, \text{ entonces } a^x = b^x \\ > 1 & \text{si } x < 0, \text{ entonces } a^x > b^x \end{cases}.$$

■

En resumen, se definió la función $f(x) = a^x = \exp(x \ln(a))$ con $a > 0$ constante, se estudio el caso especial $a = 1$ y se demostró el aspecto del siguiente gráfico:

incluirgrafico

4.7 Algunas propiedades algebraicas

Teorema: Sea a constante, entonces

- i) $a^x a^y = a^{x+y}$.
- ii) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.
- iii) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.
- iv) $(a^x)^y = a^{xy}$.

Demostración:

- i) Por demostrar $a^x a^y = a^{x+y}$.

$$\begin{aligned} a^x a^y &= \exp(x \ln(a)) \cdot \exp(y \ln(a)) = \exp(x \ln(a) + y \ln(a)) = \exp(\ln(a)(x + y)) = \exp(\ln(a^{x+y})) \\ &= a^{x+y}. \end{aligned}$$

- ii) Por demostrar $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

$$a^{-x} = \exp(-x \ln(a)) = \exp(x \ln(a))^{-1} = \frac{1}{\exp(\ln(a^x))} = \frac{1}{a^x}.$$

iii) Por demostrar $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

$$\begin{aligned}\frac{a^x}{a^y} &= \frac{\exp(x \ln(a))}{\exp(y \ln(a))} = \exp(x \ln(a)) \cdot \exp(y \ln(a))^{-1} = \exp(x \ln(a)) \cdot \exp(-y \ln(a)) \\ &= \exp(x \ln(a) - y \ln(a)) = \exp(\ln(a)(x - y)) = \exp(\ln(a^{x-y})) \\ &= a^{x-y}.\end{aligned}$$

iv) Por demostrar $(a^x)^y = a^{xy}$.

$$(a^x)^y = \exp(x \ln(a))^y = \exp(xy \ln(a)) = \exp(\ln(a^{xy})) = a^{xy}.$$

■

Teorema: $\lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt[n]{x} - 1) = \ln(x)$.

Demostración:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt[n]{x} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}.$$

Sea $b = \frac{1}{n}$, entonces $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{x^b - 1}{b} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{x^b - x^0}{b} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\exp(b \ln(x)) - \exp(0 \ln(x))}{b}$. Además,
 $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{\exp(b \ln(x)) - \exp(0 \ln(x))}{b} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{f(b) - f(0)}{b} = f'(0)$ donde $f(b) = \exp(b \ln(x))$. Entonces
 $\lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt[n]{x} - 1) = f'(0) = \ln(x)$.

■

4.8 Logaritmo base a de x

Se vio que $e^x = \exp(x)$ y que $a^x = \exp(x \ln(a))$, ahora se hablará de $\log_a(x)$. Pues el contenido anterior trató de $\ln(x) = \log_e(x)$. Se sabe que la función $f(x) = a^x$ tiene el siguiente aspecto para diferentes valores de a tal que $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$.

incluir grafico

Para encontrar $\log_a(x)$ habrá que invertir $a^x \quad \forall x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$. Sea $a > 0$ ($a \neq 1$). Se probó que $a^x : (-\infty, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ es una función biyectiva por lo tanto es invertible.

Definición: (Logaritmo base a de x) $\log_a(x) : (0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$ se define como la función inversa de a^x , tal que $x = \log_a(y)$ si y sólo si $y = a^x$, de manera que $x = \log_a(a^x)$.

□

En particular, sucede que $a^{\log_a(x)} = x$, por lo que podemos decir que "el logaritmo base a de x es el exponente al cual hay que elevar a para obtener x ". Como $\log_a(x)$ es la función inversa de a^x , entonces se tiene que

$$\log_a(a^x) = x = a^{\log_a(x)}.$$

Por definición, $a^{\log_a(x)} = x$, entonces, aplicando logaritmo natural en ambos lados de la desigualdad se obtiene que $\ln(a^{\log_a(x)}) = \ln(x)$, por lo que $\log_a(x) \ln(a) = \ln(x)$, de modo que, despejando, se obtiene una manera sencilla de calcular $\log_a(x)$:

$$\log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)} \ln(x).$$

Observación: Como $\ln(e) = 1$, entonces se tiene que

$$\log_e(x) = \frac{1}{\ln(e)} \ln(x) = \ln(x)$$

□

4.9 Propiedades del logaritmo base a

Teorema: (Propiedades del logaritmo base a) Sean $x, y > 0$ y $r \in \mathbb{R}$, entonces

- i) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$, iii) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$,
- ii) $\log_a(x^{-1}) = -\log_a(x)$, iv) $\log_a(x^r) = r \log_a(x)$.

Demostración: La demostración del teorema se realizará utilizando la definición de logaritmo natural base a y usando las propiedades ya conocidas del logaritmo natural.

i)

$$\begin{aligned} \log_a(xy) &= \frac{1}{\ln(a)} \ln(xy) = \frac{1}{\ln(a)} [\ln(x) + \ln(y)] = \frac{1}{\ln(a)} \ln(x) + \frac{1}{\ln(a)} \ln(y) \\ &= \log_a(x) + \log_a(y). \end{aligned}$$

ii)

$$\log_a(x^{-1}) = \frac{1}{\ln(a)} \ln(x^{-1}) = -\frac{1}{\ln(a)} \ln(x) = -\log_a(x).$$

iii)

$$\begin{aligned} \log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \frac{1}{\ln(a)} \log\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{\ln(a)} [\ln(x) - \ln(y)] \\ &= \frac{1}{\ln(a)} \ln(x) - \frac{1}{\ln(a)} \ln(y) = \log_a(x) - \log_a(y). \end{aligned}$$

iv)

$$\log_a(x^r) = \frac{r}{\ln(a)} \ln(x) = r \log_a(x).$$

■

4.10 Límites relevantes para $\log_a(x)$

Teorema: Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > 0$, entonces

- i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a(x) = \infty$ si $a > 1$. iii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = -\infty$ si $a > 1$.
 ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a(x) = -\infty$ si $0 < a < 1$. iv) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = \infty$ si $0 < a < 1$.

Demostración:

- i) Si $a > 1$, entonces $\frac{1}{\ln(a)} > 0$ de manera que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(a)} \ln(x) = \frac{1}{\ln(a)} \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty.$$

- ii) Si $0 < a < 1$, entonces $\frac{1}{\ln(a)} < 0$ de modo que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(a)} \ln(x) = \frac{1}{\ln(a)} \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = -\infty.$$

- iii) Si $a > 1$, entonces $\frac{1}{\ln(a)} > 0$ de manera que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln(a)} \ln(x) = \frac{1}{\ln(a)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty.$$

- iv) Si $0 < a < 1$, entonces $\frac{1}{\ln(a)} < 0$ de modo que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln(a)} \ln(x) = \frac{1}{\ln(a)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = \infty.$$

■

4.11 La gráfica de la función $\log_a(x)$ con a fijo

A continuación se examinarán las propiedades de la función $f(x) = \log_a(x)$ para hallar esbozar su gráfica.

4.11.1 Dominio e imagen

$$Dom(\log_a(x)) = (0, \infty) \quad \quad \quad Img(\log_a(x)) = (-\infty, \infty)$$

4.11.2 Imagen de puntos por los que pasa la función

Pasa por $(1, 0)$.

4.11.3 Primera derivada

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{\ln(a)x} \begin{cases} > 0 & \text{si } 1 < a \\ < 0 & \text{si } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Entonces la función es creciente en el intervalo $(0, \infty)$ cuando $1 < a$ y decreciente en el intervalo $(0, \infty)$ cuando $0 < a < 1$.

4.11.4 Segunda derivada

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = -\frac{1}{\ln(a)x^2} \begin{cases} > 0 & \text{si } 0 < a < 1 \\ < 0 & \text{si } 1 < a \end{cases}$$

Entonces la función tiene concavidad positiva en el intervalo $(0, \infty)$ cuando $0 < a < 1$ y tiene concavidad negativa en el intervalo $(0, \infty)$. En ningún caso se observan puntos de inflexión.

4.11.5 Comportamiento límite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } 1 < a \\ -\infty & \text{si } 0 < a < 1 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } 1 < a \\ \infty & \text{si } 0 < a < 1 \end{cases}$$

4.11.6 Gráfica de la función

Entonces la función tiene el siguiente aspecto:

incluir grafico

Se observan los siguientes 4 casos:

- Si $1 < a < b$ y $x > 1$, entonces

$$\log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)} \ln(x) \geq \frac{1}{\ln(b)} \ln(x) = \log_b(x).$$

- Si $1 < a < b$ y $0 < x < 1$, entonces

$$\log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)} \ln(x) \leq \frac{1}{\ln(b)} \ln(x) = \log_b(x).$$

- Si $0 < a < b < 1$ y $x > 1$, entonces

$$\log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)} \ln(x) > \frac{1}{\ln(b)} \ln(x) = \log_b(x).$$

- Si $0 < a < b < 1$ y $0 < x < 1$, entonces

$$\log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)} \ln(x) < \frac{1}{\ln(b)} \ln(x) = \log_b(x).$$

Entonces se puede demostrar el aspecto del siguiente gráfico

incluir grafico

En resumen se tiene el siguiente gráfico:

incluir grafico

Teorema: Para $x > 0$ se tiene que

$$\int \ln(x) \, dx = x \ln(x) - x + C$$

Demostración: Se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \{x \ln(x) - x + C\} &= \frac{d}{dx} \{x \ln(x)\} - 1 \\ &= \ln(x) + x \frac{1}{x} - 1 \\ &= \ln(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que

$$x \ln(x) - x + C = \int \frac{d}{dx} \{x \ln(x) - x + C\} \, dx = \int \ln(x) \, dx.$$

■

4.12 Cambio de base

Se hallará la respuesta a preguntas similares a la siguiente: ¿Cuánto es $\log_a(x)$ si se conoce el valor de $\log_b(x)$ y $a \neq b$ con $a \neq 1$ y $b \neq 1$? Se sabe que

$$\begin{aligned}\log_a(x) &= \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \quad \text{y} \quad \log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}, \\ \Leftrightarrow \ln(x) &= \log_a(x) \ln(a) \quad \text{y} \quad \ln(x) = \log_b(x) \ln(b), \\ \Leftrightarrow \log_a(x) \ln(a) &= \log_b(x) \ln(b).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\log_a(x) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)} \log_b(x).$$

En este caso, el cociente $\frac{\ln(b)}{\ln(a)}$ es el factor de cambio de base.

[Poner ejercicios]

5 Funciones hiperbólicas

Definición: (Seno y coseno hiperbólico) El seno hiperbólico es una función $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

y el coseno hiperbólico es una función $\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

A partir de las definiciones anteriores se pueden definir el resto de las funciones hiperbólicas.

$$\tanh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\coth : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{sech} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{csch} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Las analogías entre el mundo trigonométrico y el mundo hiperbólico son diversas. A continuación se muestran algunas propiedades.

Mundo hiperbólico	Mundo trigonométrico
$\frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x)$	$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$
$\frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x)$	$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$
$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$	$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$
$\sinh(x \pm y) = \sinh(x) \cosh(y) \pm \sinh(y) \cosh(x)$	$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$ $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$
Ley de De Moivre $(\cosh(x) + \sinh(x))^2 = \cosh(2x) + \sinh(2x)$	$(\cos(x) + i \sin(x))^2 = \cos(2x) + i \sin(2x)$

A continuación se muestran algunas antiderivadas de las funciones del mundo hiperbólico y del mundo trigonométrico:

Mundo hiperbólico	Mundo trigonométrico
$\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + c$	$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$
$\int \cosh(x) dx = \sinh(x) + c$	$\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$
$\int \tanh(x) dx = \ln \cosh(x) + c$	$\int \tan(x) dx = -\ln \cos(x) + c$
$\int \coth(x) dx = \ln \sinh(x) + c$	$\int \cot(x) dx = \ln \sin(x) + c$
$\int \operatorname{sech}(x) dx = \operatorname{arctan}(\sinh(x)) + c$	$\int \sec(x) dx = \ln \sec(x) + \tan(x) + c$
$\int \operatorname{csch}(x) dx = -\operatorname{arctan}(\sinh(x)) + c$	$\int \csc(x) dx = \ln \csc(x) - \cot(x) + c$

Teorema: Para toda $x \in \mathbb{R}$ se tiene lo siguiente:

- $\frac{d}{dx} \tanh(x) = \operatorname{sech}(x)^2$
- $\frac{d}{dx} \operatorname{sech}(x) = -\operatorname{sech}(x) \tanh(x)$
- $\frac{d}{dx} \coth(x) = -\operatorname{csch}(x)^2$
- $\frac{d}{dx} \operatorname{csch}(x) = -\operatorname{csch}(x) \coth(x)$

5.1 Gráficas de las funciones hiperbólicas

5.1.1 $\sinh(x)$

- $\operatorname{Dom}(\sinh) = (-\infty, \infty)$, $\operatorname{Im}(\sinh) = (-\infty, \infty)$ y pasa por el punto $(0, 0)$. Es función impar, es decir, $\sinh(-x) = -\sinh(x)$.
- $\frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow IC = (-\infty, \infty)$, $ID = \emptyset$. No existen puntos críticos estacionarios.
-

$$\frac{d^2}{dx^2} \sinh(x) = \frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \begin{cases} < 0 & \text{si } x < 0 \Rightarrow IPC = (0, \infty) \\ = 0 & \text{si } x = 0 \Rightarrow ICN = (-\infty, 0) \\ > 0 & \text{si } x > 0 \Rightarrow PI = (0, 0) \end{cases}$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sinh(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty$$

Entonces la gráfica de la función $\sinh(x)$ tiene el siguiente aspecto:

incluirgrafico

5.1.2 $\cosh(x)$

1. $Dom(\cosh) = (-\infty, \infty)$, $Img(\cosh) = (1, \infty)$ y pasa por el punto $(0, 1)$. Es función par, es decir, $\cosh(-x) = \cosh(x)$.

2.

$$\frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \begin{cases} > 0 & \text{si } x > 0 \Rightarrow IC = (0, \infty) \\ = 0 & \text{si } x = 0 \Rightarrow ID = (-\infty, 0) \\ < 0 & \text{si } x < 0 \Rightarrow PCE = (0, 1) \text{ mínimo global.} \end{cases}$$

3. $\frac{d^2}{dx^2} \cosh(x) = \frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow IP = (-\infty, \infty), IN = \emptyset$.
No existen puntos de inflexión.

4.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sinh(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty$$

Entonces la gráfica de la función $\sinh(x)$ tiene el siguiente aspecto:

incluirgrafico