Cálculo diferencial e interal II

Bernardo Mondragón Brozon

Enero de 2015

1 El teorema fundamental del cálculo

1.1 Area debajo de una gráfica

- Se quiere hallar el área debajo de la gráfica de una función:

$$incluirgrafico$$

- **Definición:** Sea f una función continua en $[a,b]$ no negativa y sea $\mathbb{A} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ como sigue:

$$\mathbb{A}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = a \\ \\ \text{área bajo } f & \text{si } x \in [a,b] \end{cases}$$

  $\mathbb{A}(b)$ denota el área acumulada debajo de la gráfica de f en el intervalo [a,b].

- $\mathbb{A} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface que:

  a) Por definición, $\mathbb{A}(a) = 0$
  b) Si $c \in [a,b]$, entonces $\mathbb{A}(a,b) = \mathbb{A}(a,c) + \mathbb{A}(c,b)$
  c) Si m es mínimo y M es el máximo de la función en el intervalo $[a,b]$, entonces $m \leq f(x) \leq M$ y $m(b-a) \leq \mathbb{A}(b) \leq M(b-a)$

$$incluirgrafico$$

- La notación integral:

$$\mathbb{A}(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{dt} = \begin{cases} 0 & \text{si } x = a \\ \\ \text{área bajo } f & \text{si } x \in [a,b] \end{cases}$$

1.2 El teorema del valor medio para integrales (TVMI)

- **Teorema:** El teorema del valor medio para integrales $(TVMI)$ estable que se si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces existe $c \in [a,b]$ tal que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} = f(c)(b-a)$.

  Demostración:

  Sea m y M tal que $m \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in [a,b]$, entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} \leq M(b-a)$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}}{b-a} \leq M$$

El teorema del Bolzano establece que una función continua "no se salta valores", entonces

$$f(s) = m \leq \frac{\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}}{b-a} \leq M = f(t) \quad \text{para algún} \quad s, t \in [a, b]$$
$$\Rightarrow f(c) = \frac{\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}}{b-a} \quad \text{para algún} \quad c \in [a, b]$$

es decir, $f(c) = \frac{\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}}{b-a}$ es un valor que alcanza la función, pues $f(c) = \frac{\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}}{b-a}$ está entre el mínimo y el máximo.

$$\Rightarrow f(c)(b-a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} \quad \text{para algún} \quad c \in [a, b]$$

■

1.3 El Teorema fundamental del cálculo (TFC)

- **Teorema:** El teorema fundamental del cálculo parte 1 ($TFC\#1$) establece que si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, entonces $\mathbb{A}(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{dt}$ es una función continua y diferenciable tal que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathbb{A}(x)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{dt}\right) = f(x)$$

Demostración:

Caso 1. $(h > 0)$

$$\frac{d}{dx}\mathbb{A}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbb{A}(x+h) - \mathbb{A}(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{dt} - \int_a^x f(t)\,\mathrm{dt}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^x f(t)\,\mathrm{dt} + \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{dt} - \int_a^x f(t)\,\mathrm{dt}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{dt}}{h}$$

Por el teorema del valor medio para integrales, existe $c \in [x, x+h]$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{dt}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(c)(x+h-x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c)$$

si $h > 0$, entonces $x < x+h$ pero $c \in [x, x+h]$, de manera que si $h \longrightarrow 0^+$, entonces $c \longrightarrow x^+$, entonces $\lim\limits_{h\to 0^+} f(c) = f(x)$, entonces $D^+(\mathbb{A}(x)) = f(x)$

Caso 2. $(h < 0)$

$$\frac{d}{dx}\mathbb{A}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbb{A}(x+h) - \mathbb{A}(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{dt} - \int_a^x f(t)\,\mathrm{dt}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{dt} - \left(\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{dt} + \int_{x+h}^x f(t)\,\mathrm{dt}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\int_{x+h}^x f(t)\,\mathrm{dt}}{h}$$

Por el teorema del valor medio para integrales, existe $c \in [x+h, x]$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{-\int_{x+h}^{x} f(t)\,\mathrm{dt}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-f(c)(x-(x+h))}{h} = \lim_{h\to 0} f(c)$$

si $h < 0$, entonces $x+h < x$ pero $c \in [x, x+h]$, de manera que si $h \longrightarrow 0^-$, entonces $c \longrightarrow x^-$, entonces $\lim\limits_{h\to 0^-} f(c) = f(x)$, entonces $D^-(\mathbb{A}(x)) = f(x)$

Por el caso 1 y por el caso 2, se tiene que $D^+(\mathbb{A}(x)) = f(x)$ y $D^-(\mathbb{A}(x)) = f(x)$, entonces $\mathbb{A}'(x) = f(x)$.

Por el teorema fundamental del cálculo parte 1, vemos que el problema de hallar la función de área se convierte en hallar una primitiva de la función bajo la cual se quiere encontrar el área.

■

- **Teorema:** El teorema fundamental del cálculo parte 2 ($TFC\#2$) establece que si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, y $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F(x)) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} = F(b) - F(a) = F(t)\Big|_a^b$$

Demostración:
Sea $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{dt}$ y sea $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$, antiderivadas de $f(x)$ (dos funciones cuyas derivadas son $f(x)$), entonces $F(x)$ y $G(x)$ difieren por una contante C:

$$F(x) = G(x) + C \quad \forall x \in [a, b]$$

Ahora hacemos:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} = \int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} - 0 = \int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} - \int_a^a f(t)\,\mathrm{dt}$$
$$= G(b) - G(a) = G(b) + c - (G(a) + c) = F(b) - F(a)$$

Por lo tanto,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} = F(b) - F(a)$$

■

- Convención: si $b \leq a$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{dt}$
- Se tiene que interpretar correctamente la definición de valor absoluto: sean a y b tal que $a \leq b$. Si se tiene $\displaystyle\int_a^b |t|\,\mathrm{dt}$, entonces hay tres casos:

  Caso 1. $b \leq 0$, entonces $\displaystyle\int_a^b |t|\,\mathrm{dt} = \int_a^b -t\,\mathrm{dt} = -\int_a^b t\,\mathrm{dt} = -\frac{t^2}{2}\Big|_a^b = \frac{a^2 - b^2}{2} > 0.$

Caso 2. $a \leq 0 \leq b$, entonces $\displaystyle\int_a^b |t|\,\mathrm{dt} = \int_a^0 -t\,\mathrm{dt} + \int_0^b t\,\mathrm{dt} = -\int_a^0 t\,\mathrm{dt} + \int_0^b t\,\mathrm{dt} = -\frac{t^2}{2}\Big|_a^0 + \frac{t^2}{2}\Big|_0^b = \frac{a^2+b^2}{2} > 0$.

Caso 3. $a \geq 0$, entonces $\displaystyle\int_a^b |t|\,\mathrm{dt} = \int_a^b t\,\mathrm{dt} = \frac{t^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2} > 0$.

$$incluirgrafico$$

2 El logaritmo natural

2.1 Propiedades del logaritmo natural

- La regla del exponente dice que $\int t^r \,\mathrm{dt} = \frac{t^{r+1}}{r+1} + C$, $\forall r \neq -1$. ¿Qué pasa si $r = -1$? No se puede aplicar la regla del exponente, entonces buscamos una función diferenciable $L(x)$ tal que

$$L'(x) = x^{-1} = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$$

- **Definición:** El logaritmo natural es una función $ln : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como sigue:

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} \,\mathrm{dt} = \int_1^x t^{-1} \,\mathrm{dt}$$

  El logaritmo natural es el área debajo de la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $[1, a]$:

$$incluirgrafico$$

- **Observacion:** Por el TFC #1, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_1^x \frac{1}{t} \,\mathrm{dt}\right) = \frac{1}{x}$.

- Sea $F(t) = \ln(-t) + C$ y $G(t) = \ln(t) + C$, entonces $\frac{d}{dt}F(t) = \frac{1}{t}$ y $\frac{d}{dt}G(f) = \frac{1}{t}$, entonces se sigue que

$$\int \frac{1}{t} \,\mathrm{dt} = \begin{cases} \ln(-t) + C & \text{si } t < 0 \\ \ln(t) + C & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

  Por lo tanto $\int \frac{1}{t} \,\mathrm{dt} = \ln|t| + C$ si $t \neq 0$. En general, $\int \frac{u'}{u} \,\mathrm{du} = \ln|u| + C$ si $u \neq 0$.

- **Proposición:** Propiedades del logaritmo natural. $\forall a, b > 0$ y $\forall r \in \mathbb{Q}$ ocurre que:

  a) $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
  b) $\ln(a^{-1}) = \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
  c) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
  d) $\ln(a^r) = r\ln(a)$

  Demostración:

  a) **P.D.** $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
     Sea $f(b) = \ln(ab) \Rightarrow \frac{d}{db}f(b) = \frac{1}{b}$. Sea $g(b) = \ln(b) \Rightarrow \frac{d}{db}g(b) = \frac{1}{b}$, entonces $f(b)$ y $g(b)$ tienen la misma derivada, por lo tanto, difieren por una contante C, $\forall b \in (0, \infty)$, si y sólo si $F(b) = G(b) + C$, $\forall b \in (0, \infty)$. Si $b = 1 \Rightarrow F(1) = G(1) + C = \ln(1) + C = 0 + C = C \Leftrightarrow F(1) = C$, pero $F(1) = \ln(a(1)) = \ln(a) \Leftrightarrow F(1) = C = \ln(a) \Leftrightarrow C = \ln(a) \Leftrightarrow F(b) = \ln(b) + \ln(a) = \ln(a) + \ln(b) \therefore \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad \forall b \in (0, \infty)$.

b) **P.D.** $\ln(a^{-1}) = \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

Si $b > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{b} > 0$. $1 = \frac{b}{b} \Leftrightarrow 1 = bb^{-1} \Leftrightarrow \ln(1) = \ln(bb^{-1}) \Leftrightarrow 0 = \ln(bb^{-1}) \Leftrightarrow 0 = \ln(b) + ln(b^{-1}) \Leftrightarrow \ln(b^-1) = -\ln(b)$.

c) **P.D.** $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(ab^{-1}) = \ln(a) + \ln(b^{-1}) = \ln(a) - \ln(b)$.

d) **P.D.** $\ln(a^r) = r\ln(a)$

Sea $F(a) = \ln(a^r) \Rightarrow \frac{d}{da}F(a) = \frac{r}{a}$. Sea $G(a) = r\ln(a) \Rightarrow \frac{d}{da}G(a) = \frac{r}{a}$, entonces $F(a)$ y $G(a)$ tienen la misma derivada, por lo tanto, difieren por una constante C, $\forall a \in (0, \infty)$, si y sólo si $F(a) = G(a) + C$, $\forall a \in (0, \infty)$.
Si $a = 1 \Rightarrow F(1) = G(1) + C = r\ln(1) + C = 0 + C = C \Leftrightarrow F(1) = C$, pero $F(1) = \ln(1^r) = \ln(1) = 0 \Leftrightarrow C = 0 \Leftrightarrow F(a) = G(a) \Leftrightarrow r\ln(a) = \ln(a^r) \Leftrightarrow \ln(a^r) = r\ln(a)$.

■

- En las demostraciones anteriores se usó el hecho de que dos funciones que tiene la misma derivada difieren por una constante.

2.2 Límites relevantes del logaritmo natural

- Los siguientes teoremas serán de gran utilidad para conocer el comportamiento del logaritmo natural y su gráfica.

- **Teorema:** $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$

  Demostración:

  Se prueba por inducción que $\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} \geq 1 + \frac{n}{2}$. Además, $\lim_{n\to\infty}\left(a + \frac{n}{2}\right) = \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{2^\infty} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$. Luego, se observa que, $\forall n > 1$, $(1)\frac{1}{2} + (1)\frac{1}{3} + \cdots + (1)\frac{1}{n} < \ln(n)$, tal y como se muestra en la siguiente gráfica:

  $$incluirgrafico$$

  Entonces $\forall n > 1$, $(1)\frac{1}{2} + (1)\frac{1}{3} + \cdots + (1)\frac{1}{n} < \ln(n)$, así pues $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln(n)$, luego $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - 1 < \ln(n)$, por tanto $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - 1 < \lim_{n\to\infty} \ln(n)$, se sigue que $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} - 1\right) < \lim_{n\to\infty} \ln(n)$, entonces $\infty = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} - 1\right) < \lim_{n\to\infty} \ln(n)$, por lo tanto $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$.

  ■

- **Teorema:** $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

  Demostración:

  Sea $t = \frac{1}{x}$. Si $x \to 0^+$, entonces $t \to \infty$, además, si $t \to \infty$, entonces $x \to 0^+$, por lo tanto, $t \to \infty$, si y sólo si $x \to 0^+$. De manera que

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = \lim_{t\to\infty} \ln\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to\infty} \ln(t^{-1}) = \lim_{t\to\infty} -\ln(t) = -\lim_{t\to\infty} \ln(t) = -\infty$$

■

- **Teorema:** $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

  Demostración:

  Si $1 \leq t$, entonces $t \leq t^2$, entonces $\sqrt{t} \leq \sqrt{t^2}$, entonces $\sqrt{t} \leq t$, entonces $\frac{1}{\sqrt{t}} \geq \frac{1}{t}$, tal y como se muestra en la siguiente gráfica:

  $$incluirgrafico$$

  Por lo tanto, si $x \geq 1$, entonces $ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{dt} \leq \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{dt} = 2\sqrt{x} - 2 < 2\sqrt{x}$, entonces $\ln(x) < 2\sqrt{x}$. Por lo tanto, $0 < \ln(x) < 2\sqrt{x} \quad \forall x \geq 1$, entonces $0 < \frac{\ln(x)}{x} < \frac{2\sqrt{x}}{x}$, entonces $\lim_{x\to\infty} 0 < \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} < \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x}$, entonces $0 < \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} < 0$, entonces $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

■

- **Teorema:** Si a y b con constantes, entonces $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{ax+b} = 0$

  Demostración:

  $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{ax+b} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln(x)}{x}}{\frac{ax+b}{x}} = \frac{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x}}{\lim_{x\to\infty} \frac{ax+b}{x}} = \frac{0}{a+0} = 0$$

■

2.3 La gráfica de la función logaritmo natural

- A continuación se trazará con todo detalle la gráfica de la función logaritmo natural enunciando todas sus propiedades: 0) Dominio, imagen y puntos por los que pasa la función; 1) Primera derivada, intervalos de crecimiento y decrecimiento, y puntos críticos estacionarios o puntos singulares; 2) Segunda derivada, intervalos de concavidad positiva y negativa, y puntos de inflexión; 3) Límites relevantes y comportamiento asintótico.

  0) $Dom(\ln) = (0,\infty)$, $Im(\ln) = (-\infty,\infty)$ y Pasa por los puntos $(1,0)$ y $(e,1)$.
  1) $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x \in (0,\infty)$. Por lo tanto:
     (a) Intervalo de crecimiento$= (0,\infty)$
     (b) Intervalo de decrecimiento$= \varnothing$
     (c) No existen puntos críticos estacionarios
  2) $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \forall x \in (0,\infty)$. Por lo tanto:
     (a) Intervalo de concavidad positiva$= \varnothing$
     (b) Intervalo de concavidad negativa$= (0,\infty)$
     (c) No existen puntos de inflexión

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$. Por lo tanto hay una asíntota vertical en $x = 0$.

- Dado lo anterior, la gráfica de la función logaritmo natural tiene el siguiente aspecto:

$$incluirgrafico$$

2.4 Algunos límites importantes

- **Teorema:** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty$

  Demostración:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \ln(x)\left(\frac{1}{x}\right) = \text{"}\infty \cdot -\infty\text{"} = -\infty$$

■

- **Teorema:** $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$

  Demostración:

  Sea $t = \dfrac{1}{x}$. Si $x \to 0^+$, entonces $t \to \infty$, además, si $t \to \infty$, entonces $x \to 0^+$, por lo tanto, $t \to \infty$, si y sólo si $x \to 0^+$. De manera que

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{t} = \lim_{t\to\infty} -\frac{\ln(t)}{t} = -0 = 0$$

■

- **Teorema:** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} = 0$

  Demostración:

  Si $a < b < c$, entonces $\ln(a) < \ln(b) < \ln(c)$, por lo que $\ln(x^2) < \ln(1+x^2) < \ln(x^2+x^2)$, de manera que $2\ln(x) < \ln(1+x^2) < \ln(2x^2)$, así pues $2\ln(x) < \ln(1+x^2) < \ln(2) + \ln(x^2)$, entonces $\dfrac{2\ln(x)}{x} < \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} < \dfrac{\ln(2)+\ln(x^2)}{x}$, se sigue que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2\ln(x)}{x} < \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} < \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(2)+\ln(x^2)}{x}$, de ahí que $0 < \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} < 0$, por lo tanto $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} = 0$.

■

2.5 Primitivas trigonométricas

- Con lo anterior, ahora podemos hallar las primivitvas de las principales funciones trigonométricas.
- Recordar que $\displaystyle\int \frac{u'}{u}\,\mathrm{du} = \ln|u| + C$.
- Las primitivas de las principales funciones trigonométricas son las siguientes:

  1. $\displaystyle\int \sin(t)\,\mathrm{dt} = -\cos(t) + C$
  2. $\displaystyle\int \cos(t)\,\mathrm{dt} = \sin(t) + C$

3. $\displaystyle\int \tan(t)\,\mathrm{dt} = \int \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\,\mathrm{dt} = -\int \frac{-\sin(t)}{\cos(t)}\,\mathrm{dt} = -\int \frac{\cos'(t)}{\cos(t)}\,\mathrm{dt} = -\ln|\cos(t)| + C$

4. $\displaystyle\int \cot(t)\,\mathrm{dt} = \int \frac{\cos(t)}{\sin(t)}\,\mathrm{dt} = \int \frac{\sin'(t)}{\cos(t)}\,\mathrm{dt} = \ln|\sin(t)| + C$

5. $\displaystyle\int \sec(t)\,\mathrm{dt} = \int \sec(t) frac \sec(t) + \tan(t) \sec(t) + \tan(t)\,\mathrm{dt} = \int \frac{\sec^2(t) + \sec(t)\tan(t)}{\sec(t) + \tan(t)}\,\mathrm{dt}$

   $\displaystyle= \int \frac{(\sec(t) + \tan(t))'}{\sec(t) + \tan(t)}\,\mathrm{dt} = \ln|\sec(t) + \tan(t)| + C$

6. $\displaystyle\int \csc(t)\,\mathrm{dt} = \int \csc(t) \frac{\cot(t) - \csc(t)}{\cot(t) - \csc(t)}\,\mathrm{dt} = \int \frac{\csc(t)\cot(t) - \csc^2(t)}{\cot(t) - \csc(t)}\,\mathrm{dt}$

   $\displaystyle= \int \frac{(\cot(t) - \csc(t))'}{\cot(t) - \csc(t)}\,\mathrm{dt} = \ln|\cot(t) - \csc(t)| + C$

2.6 Diferenciación logarítmica

- Cuando se tiene una función muy "exótica", en algunas ocaciones, es más conveniente utilizar la diferenciación logarítmica.

- **Teorema:** Sea $y = f(x)$, entonces $y' = y(\ln(f(x)))'$.

  Demostración:

  Si $y = f(x)$, entonces $\ln(y) = \ln(f(x))$, de manera que $\dfrac{d}{dx}\ln(y) = \dfrac{d}{dx}\ln(f(x))$, así pues, $\dfrac{y'}{y} = (\ln(f(x)))'$, por lo tanto $y' = y(\ln(f(x)))'$.

  $\blacksquare$

3 La exponencial

3.1 Propiedades de la exponencial

- Trazando la gráfica de la función del logaritmo natural, se probó que $\ln : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función inyectiva y suprayectiva, y por lo tanto, $\ln(x)$ es una función biyectiva. Podemos concluir que $\ln(x)$ tiene función inversa, es decir, $\ln(x)$ es invertible.

- **Definición:** La exponencial es una función $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ y se define como la inversa bajo composición de la función del logaritmo natural. De manera que

$$y = \ln(x), \quad \text{si y sólo si} \quad x = \exp(y)$$

- Si obtenemos la función exponencial a partir de la inversa de la función $\ln(x)$, habría que hacer una reflexión de $\ln(x)$ con respecto al origen tal y como se muestra en la siguiente figura:

$$incluirgrafico$$

- **Teorema:** Si $f(x)$ es una función estrictamente creciente tal que existe su inversa, entonces $f^{-1}(x)$ es una función estrictamente creciente, es decir, la inversa de una función creciente es una funcion creciente.

  Demostración: Sea $a < b$. Supongamos que $f^{-1}(a) \geq f^{-1}(b)$, entonces, como $f(x)$ es una función creciente, $f(f^{-1}(a)) \geq f(f^{-1}(b))$, entonces $a \geq b$, lo cual es una contradicción, por lo tanto, por reducción a lo absurdo, tiene que suceder que $f^{-1}(a) < f^{-1}(b)$.

  ■

- **Proposición:** Propiedades de la exponencial. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ y $\forall r \in \mathbb{Q}$ ocurre que:

  a) $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$
  b) $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
  c) $\exp(-b) = \dfrac{1}{\exp(b)} = (\exp(b))^{-1}$
  d) $\exp(ra) = (\exp(a))^r$

  Demostración:

  a) **P.D.** $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$
  Sea $x = \exp(a)$ y $y = \exp(b)$, entonces $a = \ln(x)$ y $b = \ln(y)$, luego $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) = a + b$, así pues, $\ln(xy) = a + b$, de manera que $\exp(\ln(xy)) = \exp(a+b)$, se sigue que $xy = \exp(a+b)$, por lo tanto $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.

  b) **P.D.** $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
  Sea $x = \exp(a)$ y $y = \exp(b)$, entonces $a = \ln(x)$ y $b = \ln(y)$, luego $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) = a - b$, así pues $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = a - b$, de manera que $\exp\left(\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)\right) = \exp(a-b)$, se sique que $\dfrac{x}{y} = \exp(a-b)$, por lo tanto $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$.

c) **P.D.** $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)} = (\exp(a))^{-1}$

Sea $x = \exp(a)$, entonces $a = \ln(x)$, luego $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ln(x^{-1}) = -\ln(x) = -a$, así pues $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -a$, de manera que $\exp\left(\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = \exp(-a)$, se sique que $\dfrac{1}{x} = \exp(-a)$, por lo tanto $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)} = (\exp(a))^{-1}$.

d) **P.D.** $\exp(ra) = (\exp(a))^r$

Sea $x = \exp(a)$, entonces $a = \ln(x)$, luego $\ln(x^r) = r\ln(x)$, así pues $\exp(\ln(x^r)) = \exp(r\ln(x))$, de manera que $x^r = \exp(r\ln(x))$, se sigue que $\exp(ra) = (\exp(a))^r$.

$\blacksquare$

4 Límites relevantes de la exponencial

- **Teorema:** $\ln(x) \leq x-1 \quad \forall x \geq 1$. **(No está tan clara la demostración de este teorema)**

  Demostración: Por el teorema del valor medio para integrales, se tiene que existe algúna $c \in [1, x]$ tal que

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{dt} = f(c)(x-1) = \frac{1}{c}(x-1)$$

  Por lo tanto, si $c = 1$, entonces $\ln(x) = x - 1$, pero si $c = x$, entonces $\ln(x) = \dfrac{x-1}{x}$. Además, si $x \geq 1$ se tiene que

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x \geq 1 \Rightarrow x^2 - x \geq 1 + x$$
$$\Rightarrow x(x-1) \geq 1 + x \Rightarrow x - 1 \geq \frac{1+x}{x} \geq \frac{x-1}{x}$$

  Se sigue que $\dfrac{x-1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$, en particular $\ln(x) \leq x - 1$.

$\blacksquare$

- **Teorema:** $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$

  Demostración:

  Si $x \geq 1$, entonces $\ln(x) \leq x - 1 \leq x$, como la función esponencial es una función creciente, se tiene que $\exp(\ln(x)) \leq \exp(x)$, se sigue que $x \leq \exp(x)$, de manera que

$$\lim_{x\to\infty} x \leq \lim_{x\to\infty} \exp(x) \Rightarrow \infty \leq \lim_{x\to\infty} \exp(x)$$
$$\therefore \lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$$

$\blacksquare$

- **Teorema:** $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$

  Demostración:

  Sea $t = -x$. Si $x \to -\infty$, entonces $t \to \infty$, además, si $t \to \infty$, entonces $x \to -\infty$, por lo tanto, $x \to -\infty$, si y sólo si $t \to \infty$. De manera que

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim_{t\to\infty} \exp(-t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\exp(t)} = \text{"}0^+\text{"} = 0$$

$\blacksquare$

- **Teorema:** $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\exp(x)} = 0$

  Demostración:

  Sea $t = \exp(x)$. Si $x \to \infty$, entonces $t \to \infty$, además, si $t \to \infty$, entonces $x \to \infty$, por lo tanto, $x \to \infty$, si y sólo si $t \to \infty$. De manera que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\exp(x)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$$

$\blacksquare$

- **Teorema:** Si a y b son constantes, entonces $\lim_{x\to\infty} \frac{ax+b}{\exp(x)} = 0$

  Demostración:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{ax+b}{\exp(x)} &= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{ax}{\exp(x)} + \frac{b}{\exp(x)}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{ax}{\exp(x)} + \lim_{x\to\infty} \frac{b}{\exp(x)} \\ &= a \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\exp(x)} + b \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\exp(x)} = a(0) + b(0) = 0\end{aligned}$$

$\blacksquare$

4.1 La gráfica de la función exponencial

- Para trazar la gráfica de la funcion exponencial, primero será necesario probar que la función $\exp(x)$ es diferenciable.

- **Teorema:** La función exponencial $\exp(x)$ es diferenciable en $\mathbb{R}$ y $\exp'(x) = \exp(x)$.

  Demostración:

  Dado que la función exponencial es la inversa de la función logaritmo, se tiene lo siguiente:

$$\begin{gathered}\ln(\exp(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln(\exp(x))) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) \\ \Rightarrow \ln'(\exp(x))(\exp'(x)) = 1 \Rightarrow \frac{1}{\exp(x)}(\exp'(x)) = 1 \\ \Rightarrow \exp'(x) = \exp(x)\end{gathered}$$

$\blacksquare$

- La prueba anterior implica que la función exponencial es diferenciable, pues sólo se puede usar la regla de la cadena para funciones ambas diferenciables. La demostración anterior utiliza el hecho de que la función exponencial es diferenciable, lo cual no se ha probado. A continuación se hará la prueba formal de diferenciabilidad de la función exponencial.

- **Teorema:** La función exponencial $\exp(x)$ es diferenciable en $\mathbb{R}$ y $\exp'(x) = \exp(x)$.

  Demostración:

  Para demostrar que la función exponencial es diferenciable, es necesario comprobar que exista el siguinete límite:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h}\right)$$

Pero

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\exp(x)\exp(h)-\exp(x)}{h}\right)$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\exp(x)(\exp(h)-1)}{h}\right)=\exp(x)\lim_{h\to 0}\left(\frac{\exp(h)-1}{h}\right)$$

Sea $h=\ln(t)$. Si $h\to 0$, entonces $t\to 1$, además, si $t\to 1$, entonces $h\to 0$, por lo tanto, $h\to 0$, si y sólo si $t\to 1$. De manera que

$$\exp(x)\lim_{h\to 0}\left(\frac{\exp(h)-1}{h}\right)=\exp(x)\lim_{t\to 1}\left(\frac{t-1}{\ln(t)}\right)=\exp(x)\lim_{t\to 1}\left(\frac{1}{\frac{\ln(t)}{t-1}}\right)$$
$$=\exp(x)\lim_{t\to 1}\left(\frac{1}{\frac{\ln(t)-\ln(1)}{t-1}}\right)$$

Pero $\lim_{t\to 1}\left(\frac{\ln(t)-\ln(1)}{t-1}\right)$ es lo mismo que la derivada de la función logaritmo evaluada en 1 y $\ln'(1)=\frac{1}{1}=1$, por lo tanto

$$\exp(x)\lim_{t\to 1}\left(\frac{1}{\frac{\ln(t)-\ln(1)}{t-1}}\right)=\exp(x)$$

■

- A continuación se trazará con todo detalle la gráfica de la función exponencial enunciando todas sus propiedades: 0) Dominio, imagen y puntos por los que pasa la función; 1) Primera derivada, intervalos de crecimiento y decrecimiento, y puntos críticos estacionarios o puntos singulares; 2) Segunda derivada, intervalos de concavidad positiva y negativa, y puntos de inflexión; 3) Límites relevantes y comportamiento asintótico.

  0) $Dom(\exp)=(-\infty,\infty)$, $Im(\exp)=(0,\infty)$ y Pasa por los puntos $(0,1)$ y $(1,e)$.
  1) $\exp'(x)=\exp(x)>0 \quad \forall x\in(-\infty,\infty)$. Por lo tanto:
     (a) Intervalo de crecimiento= $(-\infty,\infty)$
     (b) Intervalo de decrecimiento= $\varnothing$
     (c) No existen puntos críticos estacionarios
  2) $\exp''(x)=\exp>0 \quad \forall x\in(-\infty,\infty)$. Por lo tanto:
     (a) Intervalo de concavidad positiva= $(-\infty,\infty)$
     (b) Intervalo de concavidad negativa= $\varnothing$
     (c) No existen puntos de inflexión
  3) $\lim_{x\to\infty}\exp(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}\exp(x)=0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{ax+b}{\exp(x)}=0$. Por lo tanto hay una asíntota horizontal en $x=0$.

- Dado lo anterior, la gráfica de la función exponencial tiene el siguiente aspecto:

$$incluirgrafico$$

4.2 Más acerca de la exponencial

- Dado que ya se demostró que la función esponencial $\exp(x)$ es una función diferenciable y $\exp'(x) = \exp(x)$, se puede hacer la siguiente observación, pues se sigue que

$$\int \exp(x)\,\mathrm{dx} = \exp(x) + C$$

Lo cual da lugar al siguinete teorema.

- **Teorema:** Si $f(x)$ es diferenciable, entonces

$$\int \exp(f(x))f'(x)\,\mathrm{dx} = \exp(f(x)) + C$$

Demostración:

$$(\exp(f(x)) + C)' = (\exp(f(x)))' = \exp(f(x))f'(x)$$

$\blacksquare$

- Se demostrará que si $P(x)$ es cualquier polinomio en x, entonces $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{\exp(x)} = 0$. Enseguida se mostrarán las ideas que ayudarán a llegar a esta conclusión.

- Se probó que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\exp(x)} = 0$. Veamos que pasa con $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\exp(x)}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\exp(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\exp(\frac{x}{2} + \frac{x}{2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\exp(\frac{x}{2})\exp(\frac{x}{2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\exp(\frac{x}{2})}\frac{x}{\exp(\frac{x}{2})} \\ &= \lim_{x\to\infty} 4\frac{\frac{x}{2}}{\exp(\frac{x}{2})}\frac{\frac{x}{2}}{\exp(\frac{x}{2})}\end{aligned}$$

Sea $t = \dfrac{x}{2}$. Si $x \to \infty$, entonces $t \to \infty$, además, si $t \to \infty$, entonces $x \to \infty$, por lo tanto, $x \to \infty$, si y sólo si $t \to \infty$. De manera que

$$\lim_{x\to\infty} 4\frac{\frac{x}{2}}{\exp(\frac{x}{2})}\frac{\frac{x}{2}}{\exp(\frac{x}{2})} = \lim_{t\to\infty} 4\frac{t}{\exp(t)}\frac{t}{\exp(t)} = 2^2 \lim_{x\to\infty} \frac{t}{\exp(t)} \lim_{x\to\infty} \frac{t}{\exp(t)} = 2^2 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

- Ahora veamos que ocurre con $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{\exp(x)}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{\exp(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{\exp(\frac{x}{3} + \frac{x}{3}) + \frac{x}{3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{\exp(\frac{x}{2})\exp(\frac{x}{2})\exp(\frac{x}{3})} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\exp(\frac{x}{3})}\frac{x}{\exp(\frac{x}{3})}\frac{x}{\exp(\frac{x}{3})} = \lim_{x\to\infty} 27\frac{\frac{x}{3}}{\exp(\frac{x}{3})}\frac{\frac{x}{3}}{\exp(\frac{x}{3})}\frac{\frac{x}{3}}{\exp(\frac{x}{3})}\end{aligned}$$

Sea $t = \dfrac{x}{3}$. Si $x \to \infty$, entonces $t \to \infty$, además, si $t \to \infty$, entonces $x \to \infty$, por lo tanto, $x \to \infty$, si y sólo si $t \to \infty$. De manera que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} 27\frac{\frac{x}{3}}{\exp(\frac{x}{3})}\frac{\frac{x}{3}}{\exp(\frac{x}{3})}\frac{\frac{x}{3}}{\exp(\frac{x}{3})} &= \lim_{t\to\infty} 27\frac{t}{\exp(t)}\frac{t}{\exp(t)}\frac{t}{\exp(t)} \\ &= 3^3 \lim_{x\to\infty} \frac{t}{\exp(t)} \lim_{x\to\infty} \frac{t}{\exp(t)} \lim_{x\to\infty} \frac{t}{\exp(t)} = 3^3 \cdot 0 \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

- En general, se cumple que si $k = \frac{x}{t}$, entonces $\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{\exp(x)} = \lim_{t\to\infty} k^k \left(\frac{t}{\exp(t)}\right)^k$. Con esto podemos probar el teorema pendiente.

- **Teorema:** Si $P(x)$ es cualquier polinomio en x, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{\exp(x)} = 0$$

Demostración:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{\exp(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n}{\exp(x)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(a_0\frac{1}{\exp(x)} + a_1\frac{x}{\exp(x)}a_2\frac{x^2}{\exp(x)} + \cdots + a_n\frac{x^n}{\exp(x)}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(a_0\frac{1}{\exp(x)} + \sum_{i=1}^{n} a_i(i)^i \left(\frac{\frac{x}{i}}{\exp(\frac{x}{i})}\right)^i\right) = a_0(0)+a_1(0)+a_2(0)+\cdots+a_{n-1}(0)+a_n(0) = 0$$

■

4.3 Nueva notación para la exponencial

- Se probará que $\exp(x) = e^x$. Esto se cumple en todos los casos, por ejemplo:

  a) $\exp(1) = e$.
  b) $\exp(2) = \exp(1+1) = \exp(1)\exp(1) = e\cdot e = e^2$.
  c) $\exp(n) = \exp(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\text{n veces}}) = \underbrace{\exp(1)\exp(1)\cdots\exp(1)}_{\text{n veces}} = \exp(1)^n = e^n$.
  d $\exp(-1) = \frac{1}{\exp(1)} = \exp(1)^{-1} = e^{-1}$.
  e) $\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}$.

- **Teorema:** $\exp(x) = e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$.
  Demostración:

$$\exp(x) = \exp(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{x\text{ veces}}) = \underbrace{\exp(1)\exp(1)\cdots\exp(1)}_{x\text{ veces}} = \underbrace{e\cdot e\cdots e}_{x\text{ veces}} = e^x.$$

■

- **Teorema:** $\exp(-x) = e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
  Demostración:

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} = \frac{1}{e^x} = (e^x)^{-1} = e^{-x}$$

■

- **Teorema:** $\left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m \qquad \forall n, m \in \mathbb{R}$

  Demostración:

$$\left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m = \underbrace{\exp\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\exp\left(\frac{1}{n}\right)\cdots\exp\left(\frac{1}{n}\right)}_{m\text{ veces}}$$

$$= \exp\left(\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{m\text{ veces}}\right) = \exp\left(m\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(\frac{m}{n}\right) = e^{\frac{m}{n}}$$

$\blacksquare$

- En conclusión, $\exp(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

4.4 Leyes de los exponentes

- **Proposición: (Leyes de los exponentes)** $\forall a, b \in \mathbb{R}$ y $\forall r \in \mathbb{Q}$ ocurre que:

  a) $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$.

  b) $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$.

  c) $(e^a)^r = e^{ar}$.

  Demostración:

  a) Por demostrar que $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$.

$$e^a \cdot e^b = \exp(a)\exp(b) = \exp(a+b) = e^{a+b}.$$

  b) Por demostrar que $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$.

$$\frac{e^a}{e^b} = \frac{\exp(a)}{\exp(b)} = \exp(a-b) = e^{a-b}.$$

  b) Por demostrar que $(e^a)^r = e^{ar}$.

$$(e^a)^r = e^{ar} = \exp(a)^r = \exp(ra) = \exp(ar) = e^{ar}.$$

$\blacksquare$

4.5 Cambio de base

- Se observa que $x\ln(a) = \ln(a^x)$, entonces $\exp(x\ln(a)) = \exp(\ln(a^x)) = a^x$, pues la función exponencial es la inversa de la función logaritmo. Esta última igualdad da lugar a la siguiente definición:

- **Definición:** Sea $a > 0$ una constante. Definimos

$$a^x = \exp(x\ln(a)).$$

$\square$

- **Observación:** $1^x = \exp(x\ln(1)) = \exp(x\cdot 0) = \exp(0) = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$.

- Sea $a > 0$, entonces la función $f(x) = a^x$ es diferenciable y $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\exp(x\ln(a))) = \exp(x\ln(a))\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((x\ln(a))) = \exp(x\ln(a))(\ln(a)) = a^x\ln(a)$. De lo que podemos concluir que, si $f(x) = a^x$, entonces $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)) = a^x\ln(a)$.

- **Teorema:** Sea $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces $\displaystyle\int a^x\,\mathrm{dx} = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$.

  Demostración:

  Se observó que si $f(x) = a^x$, entonces $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)) = a^x\ln(a)$, por lo tanto $\displaystyle\int a^x\ln(a)\,\mathrm{dx} = a^x + C$, de manera que $\displaystyle\ln(a)\int a^x\,\mathrm{dx} = a^x + C$, se sigue que

$$\int a^x\,\mathrm{dx} = \frac{a^x}{\ln(a)} + \frac{C}{\ln(a)} = \frac{a^x}{\ln(a)} + C'$$

■

4.6 La gráfica de la función a^x con a fijo

- A continuación se trazará con todo detalle la gráfica de la función $f(x) = a^x$ enunciando todas sus propiedades: 0) Dominio, imagen y puntos por los que pasa la función; 1) Primera derivada, intervalos de crecimiento y decrecimiento, y puntos críticos estacionarios o puntos singulares; 2) Segunda derivada, intervalos de concavidad positiva y negativa, y puntos de inflexión; 3) Límites relevantes y comportamiento asintótico.

  0) $Dom(a^x) = (-\infty, \infty)$, $Im(a^x) = (0, \infty)$ y Pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(1, a)$.

  1)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x) = a^x\ln(a)\begin{cases} < 0 & \text{si } 0 < a < 1 \\ = 0 & \text{si } a = 1 \\ > 0 & \text{si } 1 < a \end{cases}$$

  Por lo tanto:

  Caso 1. $0 < a < 1$

  i. Intervalo de crecimiento$= \varnothing$.
  ii. Intervalo de decrecimiento$= (-\infty, \infty)$.
  iii. No existen puntos críticos estacionarios.

  Caso 2. $a = 1$

  i. Intervalo de crecimiento$= \varnothing$.
  ii. Intervalo de decrecimiento$= \varnothing$.
  iii. No existen puntos críticos estacionarios.

  Caso 3. $1 < a$

  i. Intervalo de crecimiento$= (-\infty, \infty)$.
  ii. Intervalo de decrecimiento$= \varnothing$.
  iii. No existen puntos críticos estacionarios.

  2)

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x}(a^x)\begin{cases} > 0 & \text{si } a \neq 1 \\ = 0 & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

  Por lo tanto:

Caso 1. $0 < a < 1$

i. Intervalo de concavidad positiva= $(-\infty, \infty)$.

ii. Intervalo de concavidad negativa= $\varnothing$.

iii. No existen puntos de inflexión.

Caso 2. $a = 1$

i. Intervalo de concavidad positiva= $\varnothing$.

ii. Intervalo de concavidad negativa= $\varnothing$.

iii. No existen puntos de inflexión.

Caso 3. $1 < a$

i. Intervalo de concavidad positiva= $(-\infty, \infty)$.

ii. Intervalo de concavidad negativa= $\varnothing$.

iii. No existen puntos de inflexión.

3) Límites relevantes

Caso 1. $0 < a < 1$

i. $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \lim\limits_{x\to\infty} \exp(x\ln(a)) = 0.$

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x\ln(a)) = \infty.$

Caso 2. $a = 1$

i. $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \lim\limits_{x\to\infty} \exp(x\ln(a)) = \lim\limits_{x\to\infty} \exp(x\cdot 0) = 1.$

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x\ln(a)) = \lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x\cdot 0) = 1.$

Caso 3. $1 < a$

i. $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \lim\limits_{x\to\infty} \exp(x\ln(a)) = \infty.$

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x\ln(a)) = 0.$

- Dado lo anterior, la gráfica de la función $f(x) = a^x$ tiene el siguiente aspecto:

$$incluirgrafico$$

- **Teorema:** Si $1 < a < b$, entonces

a) $a^x < b^x$ si $x > 0$.

b) $a^x = b^x$ si $x = 0$.

c) $a^x > b^x$ si $x < 0$.

Demostración:
Sea $\dfrac{a^x}{b^x} = \dfrac{\exp(x\ln(a))}{\exp(x\ln(b))} = \exp(x\ln(a))\cdot\exp(x\ln(b))^{-1} = \exp(x\ln(a))\cdot\exp(-x\ln(b)) = \exp(x\ln(a) - x\ln(b)) = \exp(x(\ln(a)-\ln(b)))$, entonces $\dfrac{a^x}{b^x} = \exp(x[\ln(a)-\ln(b)])$.
Si $r = \ln(a) - \ln(b)$, entonces $r < 0$ y

$$\frac{a^x}{b^x} = \exp(x\cdot r)\begin{cases} < 1 & \text{si } x > 0 \quad \text{, entonces} \quad a^x < b^x \\ = 1 & \text{si } x = 0 \quad \text{, entonces} \quad a^x = b^x \\ > 1 & \text{si } x < 0 \quad \text{, entonces} \quad a^x > b^x \end{cases}$$

$\blacksquare$

Teorema: Si $0 < a < b < 1$, entonces

i) $a^x < b^x$ si $x > 0$.

ii) $a^x = b^x$ si $x = 0$.

iii) $a^x > b^x$ si $x < 0$.

Demostración: Sea $\dfrac{a^x}{b^x} = \exp(x[\ln(a) - \ln(b)])$. Si $r = \ln(a) - \ln(b)$, entonces $r < 0$ y

$$\frac{a^x}{b^x} = \exp(r \cdot x) \begin{cases} < 1 & \text{si } x > 0 & \text{, entonces} & a^x < b^x \\ = 1 & \text{si } x = 0 & \text{, entonces} & a^x = b^x \\ > 1 & \text{si } x < 0 & \text{, entonces} & a^x > b^x \end{cases} .$$

■

En resumen, se definió la función $f(x) = a^x = \exp(x \ln(a))$ con $a > 0$ constante, se estudio el caso especial $a = 1$ y se demostró el aspecto del siguiente gráfico:

$$incluirgrafico$$

4.7 Algunas propiedades algebraicas

Teorema: Sea a constante, entonces

i) $a^x a^y = a^{x+y}$.

ii) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^{-x}}$.

iii) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

iv) $(a^x)^y = a^{xy}$.

Demostración:

i) Por demostrar $a^x a^y = a^{x+y}$.

$$\begin{aligned} a^x a^y &= \exp(x \ln(a)) \cdot \exp(y \ln(a)) = \exp(x \ln(a) + y \ln(a)) = \exp(\ln(a)(x + y)) = \exp(\ln(a^{x+y})) \\ &= a^{x+y}. \end{aligned}$$

ii) Por demostrar $a^{-x} = \dfrac{1}{a^{-x}}$.

$$a^{-x} = \exp(-x \ln(a)) = \exp(x \ln(a))^{-1} = \frac{1}{\exp(\ln(a^x))} = \frac{1}{a^x}.$$

iii) Por demostrar $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

$$\begin{aligned}\frac{a^x}{a^y} &= \frac{\exp(x\ln(a))}{\exp(y\ln(a)} = \exp(x\ln(a))\cdot\exp(y\ln(a))^{-1} = \exp(x\ln(a))\cdot\exp(-y\ln(a))\\ &= \exp(x\ln(a) - y\ln(a)) = \exp(\ln(a)(x-y)) = \exp(\ln(a^{x-y}))\\ &= a^{x-y}.\end{aligned}$$

iv) Por demostrar $(a^x)^y = a^{xy}$.

$$(a^x)^y = \exp(x\ln(a))^y = \exp(xy\ln(a)) = \exp(\ln(a^{xy})) = a^{xy}.$$

■

Teorema: $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) = \ln(x)$.

Demostración:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}.$$

Sea $b = \frac{1}{n}$, entonces $\lim_{b\to 0}\frac{x^b - 1}{b} = \lim_{b\to 0}\frac{x^b - x^0}{b} = \lim_{b\to 0}\frac{\exp(b\ln(x)) - \exp(0\ln(x))}{b}$. Además, $\lim_{b\to 0}\frac{\exp(b\ln(x)) - \exp(0\ln(x))}{b} = \lim_{b\to 0}\frac{f(b) - f(0)}{b} = f'(0)$ donde $f(b) = \exp(b\ln(x))$. Entonces $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) = f'(0) = \ln(x)$.

■

4.8 Logaritmo base a de x

Se vio que $e^x = \exp(x)$ y que $a^x = \exp(x\ln(a))$, ahora se hablará de $\log_a(x)$. Pues el contenido anterior trató de $\ln(x) = \log_e(x)$. Se sabe que la función $f(x) = a^x$ tiene el siguiente aspecto para diferentes valores de a tal que $a \in (0,1)\cup(1,\infty)$.

$$incluirgrafico$$

Para encontrar $\log_a(x)$ habrá que invertir $a^x \quad \forall x \in (0,1)\cup(1,\infty)$. Sea $a > 0$ ($a \neq 1$). Se probó que $a^x : (-\infty,\infty) \to (0,\infty)$ es una función biyectiva por lo tanto es invertible.

Definición: (Logaritmo base a de x) $\log_a(x) : (0,\infty) \to (-\infty,\infty)$ se define como la función inversa de a^x, tal que $x = \log_a(y)$ si y sólo si $y = a^x$, de manera que $x = \log_a(a^x)$.

□

En particular, sucede que $a^{\log_a(x)} = x$, por lo que podemos decir que ”el logaritmo base a de x es el exponente al cual hay que elevar a para obtener x”. Como $\log_a(x)$ es la función inversa de a^x, entonces se tiene que

$$\log_a(a^x) = x = a^{\log_a(x)}.$$

Por definición, $a^{\log_a(x)} = x$, entonces, aplicando logaritmo natural en ambos lados de la desigualdad se obtiene que $\ln(a^{\log_a(x)}) = \ln(x)$, por lo que $\log_a(x)\ln(a) = \ln(x)$, de modo que, despejando, se obtiene un manera sencilla de calcular $\log_a(x)$:

$$\log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)}\ln(x).$$

Observación: Como $\ln(e) = 1$, entonces se tiene que

$$\log_e(x) = \frac{1}{\ln(e)}\ln(x) = \ln(x)$$

□

4.9 Propiedades del logaritmo base a

Teorema: (Propiedades del logaritmo base a) Sean $x, y > 0$ y $r \in \mathbb{R}$, entonces

i) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$,

ii) $\log_a(x^{-1}) = -\log_a(x)$,

iii) $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$,

iv) $\log_a(x^r) = r\log_a(x)$.

Demostración: La demostración del teorema se realizará utilizando la definición de logaritmo natural base a y usando las propiedades ya conocidas del logaritmo natural.

i)

$$\begin{aligned}\log_a(xy) &= \frac{1}{\ln(a)}\ln(xy) = \frac{1}{\ln(a)}[\ln(x) + \ln(y)] = \frac{1}{\ln(a)}\ln(x) + \frac{1}{\ln(a)}\ln(y)\\ &= \log_a(x) + \log_a(y).\end{aligned}$$

ii)

$$\log_a(x^{-1}) = \frac{1}{\ln(a)}\ln(x^{-1}) = -\frac{1}{\ln(a)}\ln(x) = -\log_a(x).$$

iii)

$$\begin{aligned}\log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \frac{1}{\ln(a)}\log\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{\ln(a)}[\ln(x) - \ln(y)]\\ &= \frac{1}{\ln(a)}\ln(x) - \frac{1}{\ln(a)}\ln(y) = \log_a(x) - \log_a(y).\end{aligned}$$

iv)

$$\log_a(x^r) = \frac{r}{\ln(a)}\ln(x) = r\log_a(x).$$

■

4.10 Límites relevantes para $\log_a(x)$

Teorema: Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > 0$, entonces

i) $\lim_{x\to\infty} \log_a(x) = \infty \quad \text{si} \quad a > 1.$

ii) $\lim_{x\to\infty} \log_a(x) = -\infty \quad \text{si} \quad 0 < a < 1.$

iii) $\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty \quad \text{si} \quad a > 1.$

iv) $\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = \infty \quad \text{si} \quad 0 < a < 1.$

Demostración:

i) Si $a > 1$, entonces $\dfrac{1}{\ln(a)} > 0$ de manera que

$$\lim_{x\to\infty} \log_a(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln(a)} \ln(x) = \frac{1}{\ln(a)} \lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty.$$

ii) Si $0 < a < 1$, entonces $\dfrac{1}{\ln(a)} < 0$ de modo que

$$\lim_{x\to\infty} \log_a(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln(a)} \ln(x) = \frac{1}{\ln(a)} \lim_{x\to\infty} \ln(x) = -\infty.$$

iii) Si $a > 1$, entonces $\dfrac{1}{\ln(a)} > 0$ de manera que

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln(a)} \ln(x) = \frac{1}{\ln(a)} \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty.$$

iv) Si $0 < a < 1$, entonces $\dfrac{1}{\ln(a)} < 0$ de modo que

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln(a)} \ln(x) = \frac{1}{\ln(a)} \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = \infty.$$

$\blacksquare$