

Tarea 2 Simulación

Bernardo Mondraón Brozon

4 de septiembre de 2018

Problema 1

Probar por inducción matemática que para un GLC,

$$Z_i = a^i Z_0 + c \frac{a^i - 1}{a - 1} \pmod{m}$$

Demostración:

Para $i = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} Z_0 &= Z_0 \pmod{m} \\ &= a^0 Z_0 + c \frac{a^0 - 1}{a - 1} \pmod{m}, \end{aligned}$$

y para $i = 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} Z_1 &= aZ_0 + c \pmod{m} \\ &= a^1 Z_0 + c \frac{a^1 - 1}{a - 1} \pmod{m}. \end{aligned}$$

Procediendo por inducción, se supone válido para i de manera que

$$\begin{aligned} Z_{i+1} &= aZ_i + c \pmod{m} \\ &= a \left(a^i Z_0 + c \frac{a^i - 1}{a - 1} \right) + c \pmod{m} \\ &= a^{i+1} Z_0 + c \frac{a^{i+1} - 1}{a - 1} \pmod{m}. \end{aligned}$$

Por lo tanto es válido para toda $i \in \mathbb{N}$.

■

Problema 2

¿Qué se puede decir del periodo de $Z_i = 630,360,016Z_{i-1} \pmod{2^{31} - 1}$?

Solución:

Se puede decir que su periodo es inferior a $2^{31} - 1$.

Problema 3

Sin calcular ninguna Z_i , determinar cuál de los siguientes GLC's mixtos tienen periodo completo.

a) $Z_i = 13Z_{i-1} + 13 \pmod{16}$.

b) $Z_i = 12Z_{i-1} + 13 \pmod{16}$.

c) $Z_i = 13Z_{i-1} + 12 \pmod{16}$.

d) $Z_i = Z_{i-1} + 12 \pmod{13}$.

e) El GLC con parámetros: $a = 2, 814, 749, 767, 109$, $c = 59, 482, 661, 568, 307$, $m = 248$.

Solución:

a) $Z_i = 13Z_{i-1} + 13 \pmod{16}$.

El generador lineal congruencial tiene periodo completo

b) $Z_i = 12Z_{i-1} + 13 \pmod{16}$.

El generador lineal congruencial no tiene periodo completo

c) $Z_i = 13Z_{i-1} + 12 \pmod{16}$.

El generador lineal congruencial no tiene periodo completo

d) $Z_i = Z_{i-1} + 12 \pmod{13}$.

El generador lineal congruencial tiene periodo completo

e) El GLC con parámetros: $a = 2, 814, 749, 767, 109$, $c = 59, 482, 661, 568, 307$, $m = 248$.

[1] "El generador lineal congruencial tiene periodo completo"

Problema 4

Mostrar que el promedio de las U_i 's tomadas de un ciclo completo de un GLC de periodo completo es $\frac{1}{2} - \frac{1}{2m}$.

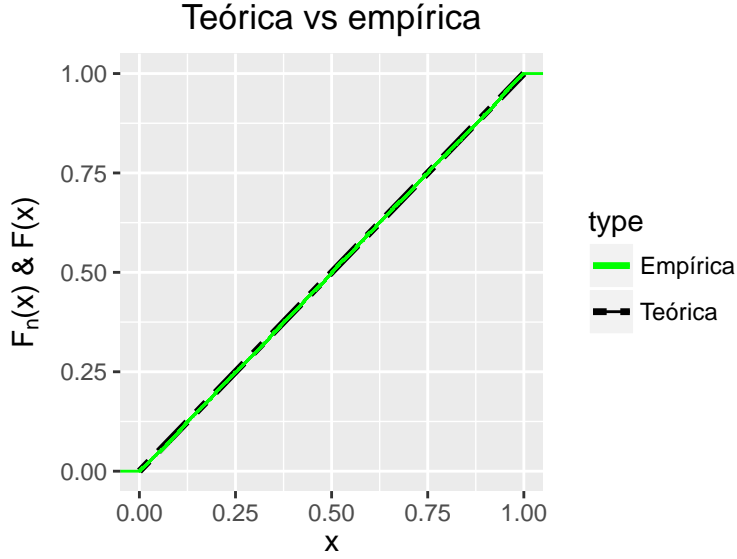
Problema 5

Generar 10,000 números uniformemente distribuidos entre 0 y 1 en Excel. Hacer un breve estudio para probar la calidad de los generadores; aplicar las pruebas de uniformidad e independencia a cada conjunto de datos. Resumir resultados en NO MAS de 2 cuartillas, incluyendo gráficas. De acuerdo a tus resultados, ¿cómo calificarías al generador de Excel?

Solución:

Pruebas de bondad de ajuste

A continuación se muestra la gráfica de la distribución empírica de los valores generados con Excel y la gráfica de la distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$:



Se realizará la prueba de Kolmogorov-Smirnov (prueba de bondad de ajuste) a los valores simulados para determinar si efectivamente provienen de la distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$. Para realizar la prueba se contrastaran las siguientes hipótesis:

$$H_0 : F(x) = x \quad \forall x \quad \text{vs.} \quad H_1 : F(x) \neq x \quad \text{para alguna } x$$

Entonces la estadística de prueba está dada por

$$D_n = \max_x |F_n(x) - x|.$$

Se rechazará la hipótesis H_0 si D_n es muy grande. En este caso, la estadística de prueba toma el siguiente valor

$$D_n = 0.0055188$$

El valor p correspondiente al valor de la estadística de prueba está dado por

$$\text{p-value} = 1.0876343$$

En este caso el valor p es mayor a 1 porque se calculó mediante una aproximación, sin embargo el verdadero valor es muy cercano a 1, de manera que no se rechaza la hipótesis de que los números aleatorios provienen de la distribución uniforme.

Aplicando la prueba de Crámer-von Misses se obtiene el siguiente valor de la estadística de prueba:

$$W_n = n \int_{-\infty}^{\infty} (F_n(x) - F(x))^2 dF(x) = 10000 \int_{-\infty}^{\infty} (F_n(x) - x)^2 dx = 0.0459533.$$

De manera que el valor p está dado por

$$\text{p-value} = 0.9003661$$

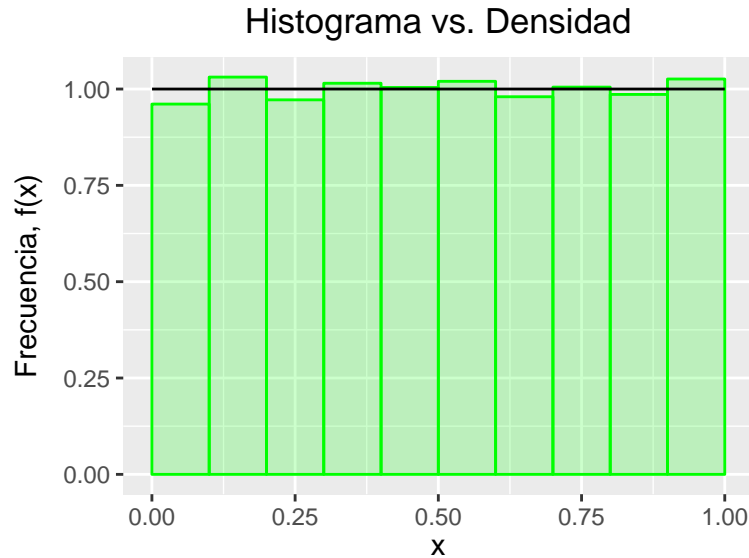
Aplicando la prueba de Anderson-Darling se obtiene el siguiente valor de la estadística de prueba:

$$A_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(F_n(x) - F(x))^2}{F(x)(1 - F(x))} dF(x) = 10000 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(F_n(x) - x)^2}{x(1 - x)} dx = \infty$$

De manera que el valor p está dado por

$$p\text{-value} = 6 \times 10^{-8}$$

A continuación se muestra el histograma de los datos generados en Excel y la función de densidad uniforme en el intervalo $[0, 1]$:



Para la prueba de bondad de ajuste χ^2 de Pearson, las hipótesis a contrastar son las mismas que las de la prueba de Kolmogorov-Smirnov. En este caso la estadística de prueba toma el siguiente valor:

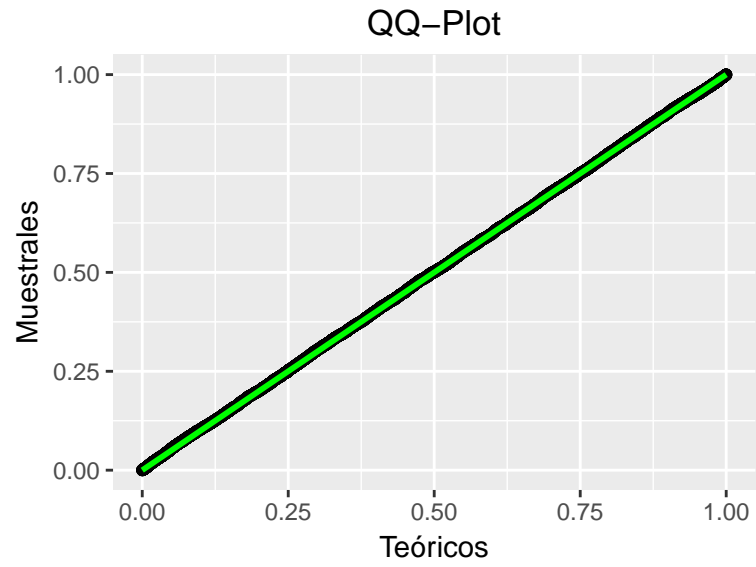
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(N_j - np_j)^2}{np_j} = \sum_{i=1}^1 \frac{(N_j - 10000p_j)^2}{10000p_j} = 2026.8$$

De manera que el valor p está dado por

$$p\text{-value} = 0.3270129$$

Por lo tanto no se rechaza la hipótesis nula de que los datos generados por Excel provienen de la distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$.

A continuación se presenta un qq-plot de los valores generados por Excel. Si el qq-plot sigue la recta identidad cuando se grafica contra la distribución teórica, entonces se puede decir que los datos siguen adecuadamente la distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$.



Al parecer se tiene un buen ajuste, sin embargo, esto no es una prueba en sentido estricto; es simplemente una guía visual para determinar si se tiene un buen ajuste.