Tarea 2 Simulación

Bernardo Mondraón Brozon

4 de septiembre de 2018

Problema 1

Probar por inducción matemática que para un GLC,

$$Z_i = a^i Z_0 + c\frac{a^i - 1}{a - 1} \mod m$$

Demostración:

Para $i = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} Z_0 &= Z_0 \mod m \\ &= a^0 Z_0 + c\frac{a^0 - 1}{a - 1} \mod m, \end{aligned}$$

y para $i = 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} Z_1 &= aZ_0 + c \mod m \\ &= a^1 Z_0 + c\frac{a^1 - 1}{a - 1} \mod m. \end{aligned}$$

Procediendo por indución, se supone válido para i de manera que

$$\begin{aligned} Z_{i+1} &= aZ_i + c \mod m \\ &= a\left(a^i Z_0 + c\frac{a^i - 1}{a - 1}\right) + c \mod m \\ &= a^{i+1} Z_0 + c\frac{a^{i+1} - 1}{a - 1} \mod m. \end{aligned}$$

Por lo tanto es váido para toda $i \in \mathbb{N}$.

$\blacksquare$

Problema 2

¿Qué se puede decir del periodo de $Z_i = 630,360,016 Z_{i-1} \mod 2^{31} - 1$?

Solución:

Se puede decir que su periodo es inferor a $2^{31} - 1$.

Problema 3

Sin calcular ninguna Z_i, determinar cuál de los siguientes GLC's mixtos tienen periodo completo.

a) $Z_i = 13Z_{i-1} + 13 \mod 16$.

b) $Z_i = 12Z_{i-1} + 13 \mod 16$.

c) $Z_i = 13Z_{i-1} + 12 \mod 16$.

d) $Z_i = Z_{i-1} + 12 \mod 13$.

e) El GLC con pará metros: $a = 2,814,749,767,109$, $c = 59,482,661,568,307$, $m = 248$.

Solución:

```r
#install.packages("numbers")
library(numbers)
#install.packages("gmp")
library(gmp)
check <- function(a, c, m) {
  condition1Holds <- coprime(c,m)
  # Descomponer en factores primos a m
  primes <- factorize(m)
  condition2Holds <- FALSE
  # Check if any prime factor also divides a-1
  for (i in 1:length(primes)) {
    if (a %% primes[i] == 1) {
      condition2Holds <- TRUE
      break
    }
  }
  condition3Holds <- TRUE
  if (m %% 4 == 0) {
    if (!a %% 4 == 1) {
      condition3Holds <- FALSE
    }
  }
  #return(condition1Holds && condition2Holds && condition3Holds)
  if (condition1Holds && condition2Holds && condition3Holds) {
    print("El generador lineal congruencial tiene periodo completo")
    return(TRUE)
  } else {
    print("El generador lineal congruencial no tiene periodo completo")
    return(FALSE)
  }
}
```

a) $Z_i = 13Z_{i-1} + 13 \mod 16$.

```r
check(13,13,16)
```

```
## [1] "El generador lineal congruencial tiene periodo completo"
## [1] TRUE
```

b) $Z_i = 12Z_{i-1} + 13 \mod 16$.

```r
check(12,13,16)
```

```
## [1] "El generador lineal congruencial no tiene periodo completo"
## [1] FALSE
```

c) $Z_i = 13Z_{i-1} + 12 \mod 16$.

```r
check(13,12,16)
```

```
## [1] "El generador lineal congruencial no tiene periodo completo"
```

```
## [1] FALSE
```

d) $Z_i = Z_{i-1} + 12 \mod 13.$

```r
check(1,12,13)
```

```
## [1] "El generador lineal congruencial tiene periodo completo"
```

```
## [1] TRUE
```

e) El GLC con pará metros: $a = 2,814,749,767,109$, $c = 59,482,661,568,307$, $m = 248$.

```r
check(2814749767109,59482661568307,248)
```

```
## [1] "El generador lineal congruencial tiene periodo completo"
```

```
## [1] TRUE
```

Problema 4

Mostrar que el promedio de las U_i's tomadas de un ciclo completo de un GLC de periodo completo es $\frac{1}{2} - \frac{1}{2m}$.

Problema 5

Generar 10,000 números uniformemente distribuidos entre 0 y 1 en Excel. Hacer un breve estudio para probar la calidad de los generadores; aplicar las pruebas de uniformidad e independencia a cada conjunto de datos. Resumir resultados en NO MAS de 2 cuartillas, incluyendo gráficas. De acuerdo a tus resultados, ¿cómo calificarías al generador de Excel?

Solución:

Pruebas de bondad de ajuste

```r
df = read.csv("../uniformNumbers.csv", sep="", header = TRUE)
unifs <- df$Unif
```