Bernardo Paniagua Zabal 158372

Final Análisis Aplicado

1)

a) $p_1, \dots, p_\ell$ no nulos, $p_i^T A p_j = 0 \quad \forall i \neq j$, A simétrica def. pos, entonces $p_1, \dots, p_\ell$ son l.i.

PD $0 = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \cdots \alpha_\ell p_\ell \iff \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, \ell$

$p_i^T A p_j = 0 \Rightarrow$ los vectores son conjugados de A

Sea $p_j = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \cdots + \alpha_\ell p_\ell$

$$p_i^T A p_j = 0 = p_i^T A (\alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_\ell p_\ell)$$

$$= \alpha_1 p_i^T A p_1 + \cdots + \alpha_i p_i^T A p_i + \cdots + \alpha_\ell p_i^T A p_\ell$$

$$= 0 + \cdots + \alpha_i p_i^T A p_i + 0 + \cdots + 0$$

$$\Rightarrow 0 = \alpha_i p_i^T A p_i$$

Como A es simétrica definida positiva,

$$p_i^T A p_i > 0$$

$$\Rightarrow \alpha_i = 0$$

Análogamente, $\alpha_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, \ell$

2)

a) Segunda condición fuerte de Wolfe implica la condición de curvatura

$$s_k^T y_k > 0$$

Wolfe $\quad |\nabla f_k(x_k + \alpha_k p_k)^T p_k| \leq c_2 |\nabla f_k^T p_k|$

$$0 < c_1 < c_2 < 1$$

pd $\quad s_k^T y_k > 0$

donde $\quad y_k = \nabla f(x_k + \alpha_k p_k) - \nabla f(x_k)$

$\qquad\qquad s_k = \alpha_k p_k$

De wolfe

$$-c_2 |\nabla f_k^T p_k| \leq \nabla f_k(x_k + \alpha_k p_k)^T p_k \leq \underbrace{c_2 |\nabla f_k^T p_k|}_{\text{No lo tomo}}$$

$\Leftrightarrow \quad c_2 \nabla f_k^T p_k \leq \nabla f_k(x_k + \alpha_k p_k)^T p_k \qquad (a)$

$\qquad c_2 \nabla f_k^T p_k \geq -\nabla f_k(x_k + \alpha_k p_k)^T p_k \qquad (b)$

de (a)

$$\nabla f_k(x_k + \alpha_k p_k)^T p_k - c_2 \nabla f_k^T p_k \geq 0$$

$\Leftrightarrow \quad \nabla f_k(x_k + \alpha_k p_k)^T p_k - \nabla f_k^T p_k + \nabla f_k^T p_k - c_2 \nabla f_k^T p_k \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad p_k y_k + (1 - c_2) \nabla f_k^T p_k \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad p_k y_k \geq (c_2 - 1) \nabla f_k^T p_k$

Como p_k es una dirección de descenso, $\nabla f_k^T p_k < 0$,

y como $c_2 \in (0,1)$, $(c_2 - 1) < 0$

$\Rightarrow p_k y_k > 0 \Rightarrow \alpha_k p_k y_k > 0$

$\Rightarrow \underline{s_k^T y_k > 0}$

b) B_{k+1} y H_{k+1} son inversas una de la otra

Las ecuaciones secantes son

$$B_{k+1} s_k = y_k \quad (1)$$

$$H_{k+1} y_k = s_k \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$B_{k+1} (H_{k+1} y_k) = y_k$$

$$\Leftrightarrow B_{k+1} H_{k+1} y_k = y_k$$

$$\Leftrightarrow B_{k+1} H_{k+1} = I$$

$\therefore$ B_{k+1} y H_{k+1} son inversas una de la otra

1)

b) $p_1, \dots, p_\ell$ l. i. $\Rightarrow$ GC converge en a lo más n iteraciones

Como $p_1, \dots, p_\ell$ son l. i., podemos escribir $x^* - x_0$ como

$$x^* - x_0 = \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_\ell p_\ell$$

$$\Leftrightarrow \quad p_k^T A (x^* - x_0) = p_k^T A(\alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_\ell p_\ell)$$

$$\Leftrightarrow \quad p_k^T A (x^* - x_0) = \alpha_1 p_k^T A p_1 + \dots + \alpha_\ell p_k^T A p_\ell$$

$$\Leftrightarrow \quad p_k^T A (x^* - x_0) = \alpha_k p_k^T A p_k$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha_k = \frac{p_k^T A (x^* - x_0)}{p_k^T A p_k}$$

Explicación

GC resuelve $Ax = b$, donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

que es equivalente a minimizar $\phi(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x$

la longitud de paso es $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$

El minimizador unidimensional para $\phi(x_{k+1})$

es $\alpha_k = \dfrac{-r_k^T p_k}{p_k^T A p_k}$

que es el mismo que se obtiene si $p_1, \dots, p_n$ son l.i.

Como son n direcciones conjugadas, converge en n pasos.