I - SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

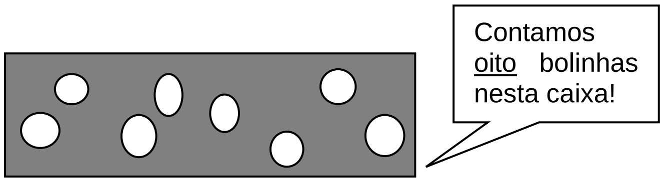
Intuitivamente, sabemos o que é número e quantidade, pois, assim como o pastor de ovelhas, somos dotados da capacidade de contar e saber a quantidade de algo que possuímos. A própria história do *Homo sapiens*, com a necessidade de sobrevivência deste último, acabou suscitando nessa espécie, como mostra a história do pastor de ovelhas, a idéia, abstrata, de número e quantidade. Ora, os dígitos que conhecemos nada mais são do que elementos de representação desses números, tornando-os “visíveis” ou “representáveis”, na forma do que chamamos de **numerais**.

A maneira da qual representamos os números, não por extenso, mas através dos algarismos, símbolos convencionados para se representar uma determinada quantidade, consta no que chamamos de sistema de numeração, de forma que montamos, então, um numeral.

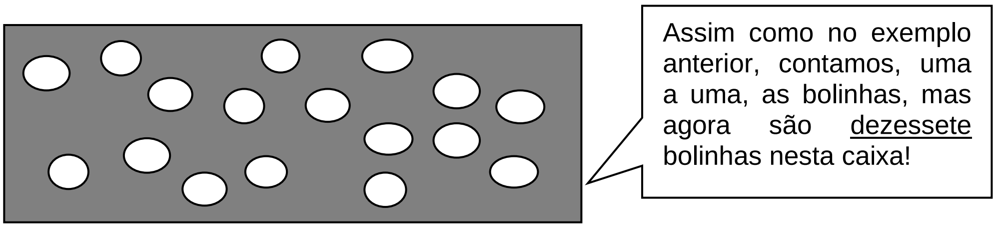
Sendo número e quantidade palavras abstratas, vamos representá-los, ou seja, escrevamo-nos na forma de numerais, que, por sua vez, serão formados pelos algarismos (dígitos) que conhecemos e usamos. A ordem destes, quando alterada, muda o número (12 e 21, 102 e 120, 1143 e 1431, por exemplo).

Hoje em dia, os ocidentais, principalmente, fazem uso do sistema de numeração indo-arábico (inventado pelos hindus e difundido pelos árabes na Europa).

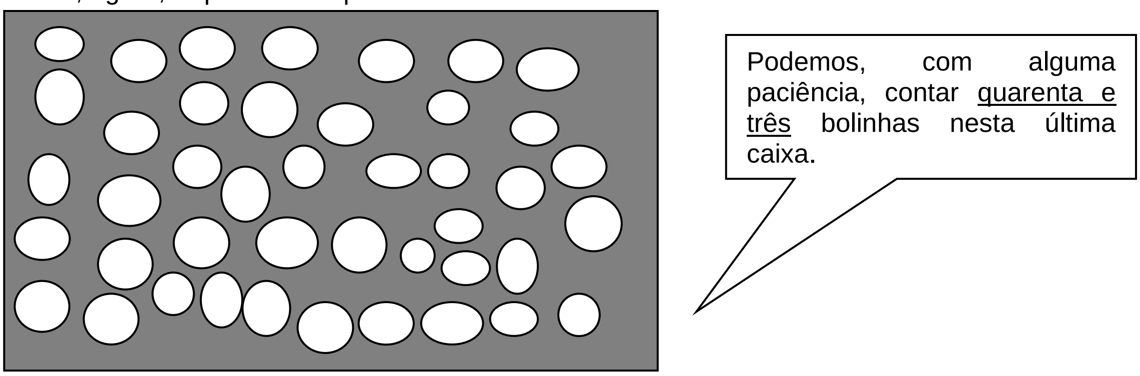
Tentemos entender a essência de um sistema de numeração, tomando o indo-arábico como exemplo. Vamos contar bolinhas, dentro de uma caixa e em uma certa quantidade, oito.



Vamos considerar, agora, a quantidade dezessete:



E, agora, a quantidade quarenta e três:

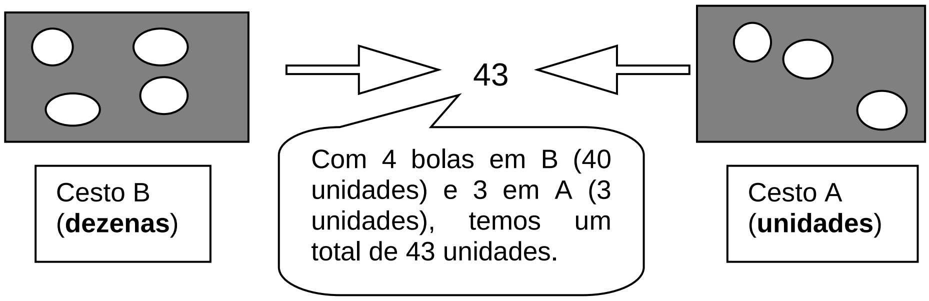


A clara impressão que fica é que representar os números (quantidades) dessa forma não será nem um pouco prática. Imagine mostrar e contar, uma a uma, 13607 (treze mil, seiscentos e sete) bolinhas numa única caixa. Assim, o numeral que desejamos para enfim denotarmos essas quantidades maiores não será encontrado. Tampouco sabemos onde os dígitos entram nesse contexto.

Então, vamos nos permitir fazer uso de várias caixas para colocarmos as bolinhas. Em uma caixa A (caixa da ordem das **unidades**) colocamos bolinhas, uma a uma, até que cheguemos a 10 bolinhas. Logo em seguida, retiramos essas 10 bolinhas de A e colocamos uma outra bolinha em outra caixa B. Esta outra bolinha valerá pelas 10 bolinhas de A que retiramos. Esta caixa B vamos chamar, também, de caixa da ordem das **dezenas**.

Depois disso, continuamos colocando mais bolinhas na caixa A (como cada bolinha, a princípio, vale por uma unidade, colocamos esta na caixa das unidades), até que, de novo, atinjamos 10 bolinhas na caixa e troquemo-nas por outra bolinha na caixa B (temos mais uma dezena então). Recomeçamos a encher a caixa A das unidades até que, novamente, tenhamos dez bolinhas em A para trocarmos todas elas por uma bolinha em B. Dessa forma, note que todas as bolinhas em B valem, cada uma, dez bolinhas de A.

Agora, vamos representar o quarenta e três de um jeito aceitável e fácil de se analisar, sempre colocando, conforme convenção, a caixa B a esquerda da caixa A.



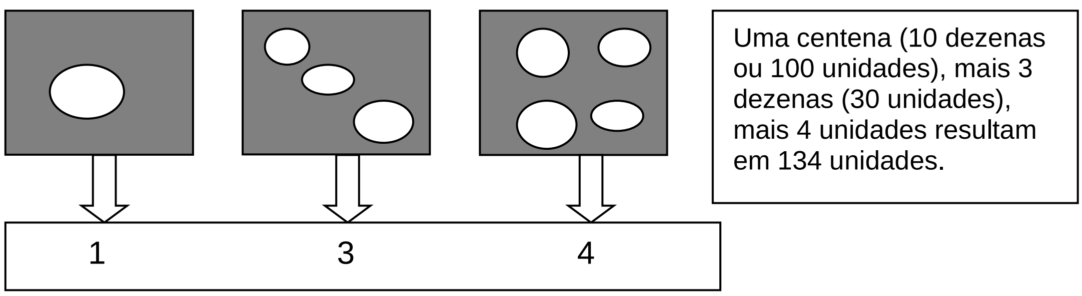
Note que, conforme a quantidade de bolas que acabam em uma caixa, teremos um dígito correspondente àquela quantidade e naquela ordem (4 na caixa das dezenas e 3 na caixa das unidades formam o numeral 43, neste caso).

Vamos ver outros exemplos de numerais com dois dígitos, 51 e 30.

Mas, e os números que conhecemos com três ou mais algarismos? Como ficam na representação em caixinhas como as que vimos até agora? Vamos encher as caixas B com todas as dezenas (bolas na caixa B)?

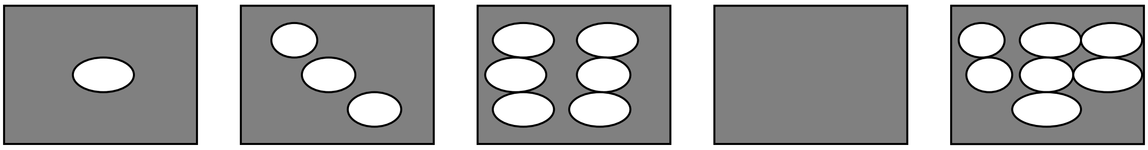
Ora, sabemos que utilizamos, para os numerais, somente dez algarismos (de 0 a 9, antecessor de 10). Então, até 9 dezenas podemos colocar em B, uma vez que os algarismos indicam quantidades até o 9. Quando atingirmos a décima dezena, sempre colocando bolas em A (cada bola não usada representa uma unidade, logo deve ser posta na caixa das unidades), depois trocando as bolas de A por uma em B, sempre de dez em dez, trocamos todas as bolas de B por uma em uma caixa C. Esta caixa C será a caixa da ordem das **centenas**.

Vamos representar o número cento e trinta e quatro:



Se cada caixa, correspondente a qualquer ordem, poderá ter, no máximo, 9 bolinhas, então, conclui-se que, a cada 10 bolas que acumulamos em uma caixa, trocamos todas por uma bola em outra caixa (que valerá, obviamente, pelas 10 trocadas), que será a caixa da ordem imediatamente superior à primeira, da qual tiramos as 10 bolas. Assim, podemos concluir que todo e qualquer número, no sistema de numeração indo-arábico, pode vir a possuir quantos dígitos forem necessários para se representar cada número. É sempre bom lembrar que, de 0 a 9, temos um dígito por número. De 10 a 99 são dois dígitos. De 100 a 999 são três, de 1000 a 9999 são quatro, e assim por diante.

Assim, podemos representar o número treze mil, seiscentos e sete (13607), com 5 caixas (temos 5 dígitos), desta forma:



1 3 6 0 7

Na caixa à direita (unidades), temos 7 bolinhas (7 unidades); Na segunda da direita para esquerda (dezenas), não temos nenhuma bolinha (zero dezena); Na do meio (centenas), são 6 bolinhas (60 dezenas, ou 600 unidades); Na quarta da direita para esquerda (milhares), temos 3 bolinhas (30 centenas, ou 300 dezenas, ou 3000 unidades); e, por fim, na caixa à esquerda (dezenas de milhares), temos uma bolinha (10 milhares, ou 100 centenas, ou 1000 dezenas, ou 10000 unidades). No total, são 10000 + 3000 + 600 + 00 + 7 = 13607 unidades.

Depois das dezenas de milhares, temos as **centenas de milhares**, **milhões**, **dezenas de milhões**, **centenas de milhões, bilhões**, **dezenas de bilhões**, **centenas de bilhões**, e assim sucessivamente.

Para a parte decimal de cada número, também utilizamos a mesma idéia empregada na representação da parte inteira desse número. A primeira casa após a vírgula indica quantos décimos de unidade (para a base 10) possui o número (a cada dez décimos temos um inteiro, que representamos na ordem das unidades, e não nessa casa). Na segunda casa, o número de centésimos não representados na casa dos décimos (cada 10 centésimos equivalem a um décimo, que representamos na primeira casa após a vírgula), e assim por diante.

Exemplo: 123,94 é a soma: 1 centena + 2 dezenas + 3 unidades + 9 décimos (90 centésimos) + 4 centésimos. A terceira casa após a vírgula corresponde aos milésimos, a quarta aos décimos de milésimos e assim sucessivamente.

Base de um sistema de numeração

Diante dos exemplos conferidos aqui, resta uma dúvida: por que, a cada dez, e exatamente dez, bolinhas numa caixa, trocamos todas estas dez bolinhas por uma na caixa relativa à ordem imediatamente superior (que valerá pelas 10 trocadas)? Por que a primeira casa após a vírgula refere-se a quantidade de décimos (1/10) de cada número

O número dez (10) é a chamada base do sistema de numeração que utilizamos no nosso dia-a-dia para representarmos os números. Atribui-se, historicamente, a escolha da base dez em função dos 10 dedos que possuímos nas duas mãos. Dizia-se, também, que a cada dez unidades (dez dedos), tínhamos um homem (dotado de dez dedos).

Na verdade, podemos ter bases diferentes da base dez, como a base 2 (sistema de numeração binário, utilizado largamente na computação), a base 60 utilizada pelos babilônios, que deu origem às igualdades 1 hora = 60 minutos e 1 minuto = 60 segundos, utilizadas na medição do tempo. Temos a base 12, que nos fez pensar no que chamamos de “dúzia” (conjunto de doze unidades).

Sendo b a base do sistema de numeração, a cada b bolinhas em uma caixa, trocamos todas por uma bolinha na caixa correspondente à ordem imediatamente superior, que muda de nome conforme a própria base do sistema.

Utilizando algarismos indo-arábicos, escrevemos qualquer número na forma: $(\ldots xywz, rstu\ldots)_b$, em que x, y, w, z, r, s t e u, ou qualquer letra à esquerda de x, e à direita de u, são algarismos utilizáveis no sistema de numeração de base b (do 0 até o antecessor de b; se b for maior que 10, “inventamos” algarismos para os números dez, onze, doze e assim por diante.

Se a base utilizada for o 10, convencionalmente, não se escreve o “b”, como sendo 10, no índice.

Um pouco sobre sistema binário

Como já citado, de larga aplicação na computação, o sistema binário, por ser de base 2, admite apenas os algarismos 0 e 1 na composição dos números. Cada programa, ou cada símbolo é marcado na forma de um número binário (numeral representado no sistema binário), ou seja, em um emaranhado de “zeros” e “uns”. Como, para cada dispositivo eletrônico, existem somente duas condições estáveis (aberto, por onde passa corrente elétrica, ou fechado, por onde não passa corrente elétrica), então, a linguagem numérica computacional deve ter apenas dois símbolos (um para indicar cada condição dos aparelhos utilizados nas máquinas).

Se fôssemos representar os mesmos números que mostramos anteriormente, a cada duas bolinhas postas numa caixa, deveríamos retirá-las e trocá-las por uma bolinha na caixa referente à ordem imediatamente superior.

Assim, o número 20 seria igual a $(10100)_2$. Já o 231 equivaleria a $(11100111)_2$.

Note que usamos uma quantidade de dígitos muito grande para representar números pequenos, porém, dígitos distintos apenas dois, 0 e 1.

Poderíamos registrar o resultado de uma questão de somatório como que indicando várias “linhas”, tantas quantos itens possuir a questão.

Por exemplo: $(\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_)_2$ $\Rightarrow$ QUESTÃO COM 7 ITENS

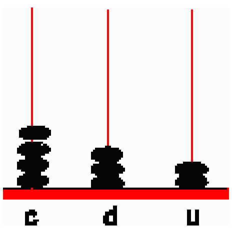
Como na questão de somatório do vestibular só tem duas condições para analisar as afirmativas: correta ou errada. Se convencionarmos 1 para correta e 0 para errada, a resposta será um número binário

Suponha uma questão com sete itens e reposta 35. Nela, não marcamos o item 64 que está incorreto (colocamos 0 na primeira casa à esquerda - sétima ordem do sistema binário). Assinalamos um no item 32 que está correto, marcamos um “um” na sexta ordem do sistema binário. Os itens 16, 08 e 04 não estão corretos, resultando num “zero” nas três casas centrais do número. Como estão corretos os itens 02 e 01, então colocamos um “um nas duas casas à direita (primeira e segunda ordens do sistema binário). O número então fica:

$$(0100011)_2 = 35$$

O ábaco

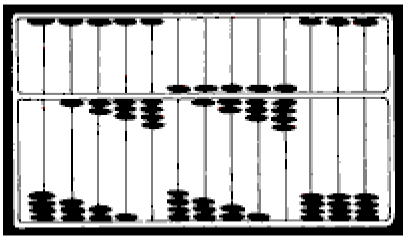
Na medida em que o homem foi precisando aprimorar sua capacidade de calcular, um instrumento foi criado, no sentido de facilitar sua vida. Ele ilustra toda a explicação aqui constada de sistema de numeração. No lugar das caixas, temos as colunas, em forma de hastes de metal. Nos ábacos russos, por exemplo, temos, em cada haste, dez pedrinhas que deslizam, que fazem o papel das “bolinhas” que utilizamos aqui. Este é o _ábaco_, instrumento precursor das máquinas de calcular que conhecemos hoje em dia. A cada dez pedrinhas que separávamos na haste à direita (das unidades), contando-as, colocamos no lugar onde estavam e puxamos uma pedrinha na haste das dezenas. Separadas dez dezenas nesta haste, puxávamos uma na haste das centenas. E assim, sucessivamente.



No exemplo ao lado, temos 4 pedrinhas na haste das centenas (4 centenas = 40 dezenas = 400 unidades), 3 na haste das dezenas (3 dezenas = 30 unidades) e 2 na haste das unidades (2 unidades), Temos, então, o número 432 representado no ábaco.

Houve ábacos que também tinham 5 pedrinhas em cada haste, mais duas outras pedrinhas, na mesma haste, em outro conjunto separado. A cada 5 pedrinhas que puxávamos no conjunto dessas mesmas 5 pedrinhas, trocávamos todas por uma pedrinha no conjunto separado, que valeria pelas 5 pedrinhas. Até, claro, que puxássemos de novo as 5 pedrinhas anteriores, trocássemos todas pela outra pedrinha do conjunto separado (o que resultaria em 10 pedrinhas na haste) e trocávamos todas as pedrinhas por uma na haste à esquerda.

Um exemplo de ábaco utilizado é o japonês *soroban*, considerado muito útil, em relação aos demais ábacos, se o usuário puder manuseá-lo com destreza. Nele, as duas pedrinhas do conjunto separado eram uma só, pois não chegávamos a trocar as duas por uma pedrinhas na haste seguinte, simplesmente separávamos esta pedrinha na outra haste direto. Além disso, no conjunto maior são 4 pedrinhas, pois não separamos 5 para trocá-las por uma no conjunto separado (o conjunto de cima na figura), simplesmente, ao invés de separarmos esta quinta pedrinha, já puxávamos a pedrinha do conjunto separado e recolocávamos as quatro no seu lugar abaixo, como mostra a figura.



Soroban: o Ábaco Japonês

Sistema de numeração romano

Usado por aproximadamente 1600 anos, o sistema de numeração romano deixa seus vestígios em alguns exemplos tais como:

- Nome de pontífices (papas) e monarcas (reis). Ex.: João Paulo II, Bento XVI, Pio XII, Luís XIV, Elizabeth II.
- Numeração dos séculos no calendário gregoriano (o qual utilizamos). Ex.: Século XX, século II a.C. (antes de Cristo).

Os símbolos usados para representar os números eram letras do alfabeto latino. Veja:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Somente as letras I, X e C podem ser repetidas e, no máximo, três vezes. Estas mesmas letras, escritas à esquerda de outra letra, faz com que seu valor seja subtraído do valor da letra de maior valor. Exemplo: IX = 9; XIV = 14 (10 + 5 – 1).

A letra I só pode vir à esquerda de V e X, e só quando desrespeitarmos a regra de repetir a letra três vezes. Ao invés de XVIIII, escrevemos XIX (10 + 9 = 19). A letra X vem à esquerda de L e C, e C vem à esquerda de D e M apenas. O número 490 expressamos como (500 – 100) + (10 – 100) (CDXC).

Se toda letra escrita em um número tiver valor maior ou igual a outra letra, à direita da primeira, então os valores da letra são todos somados, quaisquer sejam as letras.. Exemplo: XVI = 16 (10 + 5 + 1); DCX = 610 (500 + 100 + 10); MMMXV (3015 = 1000 + 1000 + 1000 + 10 + 5).

Para números a partir de 4000, escrevemos o número com um traço em cima, que o multiplica por mil. Assim, 4000 é $\overline{\text{IV}}$, 4435 é $\overline{\text{IV}}$CDXXXV

O sistema romano, com o advento dos mouros (grupos árabes que viriam a ser expulsos com a Reconquista Cristã) na parte sul da península Ibérica (composta por Espanha e Portugal), começou a perder força para o sistema indo-arábico que nos é tão familiar. Algumas razões para isso foram o menor número de símbolos para se representar a maioria dos números, bem como a maior facilidade em se fazer operações com esse dígitos.

EXERCÍCIOS

01. Como podemos contar quantos dedos estão dentro de uma sala de aula, de maneira rápida e precisa? Contamos em que base?

02. Contando o tempo com auxílio de um relógio, qual base utilizamos para contagem de horas, minutos e segundos?

03. Se uma grosa são doze dúzias, 600 unidades são quantas grosas?

04. Converta para o sistema indo-arábico, e depois para o binário os números:

a) XVII
b) XCV
c) XVL
d) MXCVII
e) LX
f) XVI

05. Converta para números romanos:

a) $(10011)_2$
b) 323
c) 54
d) $(110)_2$
e) $(11)_2$
f) 1045

06. Calcule:

a) $(101)_2 + 32$
b) XII + 412
c) $(1111)_2$ + CXV
d) 1111 + CXV
e) MDC + MMC
f) $(10110)_2 + (1011)_2$

II – CONJUNTOS NUMÉRICOS

Conjunto dos Números Naturais

Para que servem os números naturais?
No dia a dia, utilizamos estes números para contagens do tipo:

- quantas moedas temos na carteira?
- quantos livros estão na estante?
- quantas teclas existem no teclado de um computador?

Então o número natural é o resultado de uma contagem.

Formalizando matematicamente, dizemos que o conjunto dos números naturais representado por N, é tal que N = {0, 1, 2, 3, 4, 5,...}
↓
(estas reticências indicam que o conjunto é infinito)

OBSERVAÇÃO: O asterisco (∗) junto ao símbolo do conjunto indica a exclusão do 0 (zero) deste conjunto. Portanto, o conjunto N* é a representação do conjunto dos números naturais sem o elemento 0.

Conjunto dos números Inteiros

Estes números estão precedidos de sinais.

Os sinais de mais (+) e menos (–) não foram inventados por nenhum matemático. Conta a história que estes sinais foram criados por espertos comerciantes da Antigüidade.
Suponha que um deles tivesse em seu depósito duas sacas de trigo de 50 kg cada.

Se esse comerciante vendesse 13 kg do trigo de uma dessas sacas , ele escreveria –13 na saca para não esquecer que no saco faltavam 13 kg de trigo.

Se esse comerciante ganhasse 15 kg de trigo e resolvesse colocar no outro saco, ele escreveria o número +15 neste saco para não esquecer que no saco havia 15 kg de trigo a mais.

Está "em falta": –13 Está "com excesso": +15

O escritor e matemático brasileiro Malba Tahan conta que, na Alemanha, há muitos anos, um homem negociava vinhos.Habituado a pesar os tonéis, ele punha o sinal (+) para indicar que havia mais vinho o tonel do que deveria ter. Quando parecia faltar vinho, aparecia então o sinal de (–).

Notamos que em todos os exemplos existe uma quantidade que serve de referencial. Os sacos de trigo deveriam ter 50 kg. Qualquer quilo a mais fica com o sinal (+) (ganho) e qualquer peso a menos implica em sinal (–) (perda).

Em função de uma solução tão prática dos comerciantes, o progresso da matemática e o uso dos sinais, hoje trabalhamos com um novo tipo de números, que não indica apenas a quantidade, mas também o ganho ou a perda, com os sinais positivo ou negativo, respectivamente.

Então:

- No conjunto dos números inteiros, esse referencial é o número zero. Isto é, se pesarmos a saca e ela tiver 50 kg, não anotaremos nem + nem –, pois 50 kg é exatamente a quantidade que devemos ter.

Note que:

- se anotamos (+) no saco, teremos mais que 50 kg de trigo, isto é, números com sinal (+) são POSITIVOS, ou maiores que zero.
- Se anotarmos (–) no saco, teremos menos que 50 kg de trigo, isto é, números com sinal (–) são NEGATIVOS, ou menores que zero.
- O zero é o único número inteiro que não é positivo nem negativo, sendo chamado de número NULO

Anular um gol, significa dizer que este não tem efeito, não contará a favor do time que o marcou.

Sanar uma divida no banco, pagar uma conta negativa, significa pagar tudo que se deve de forma que a conte fique nula ou zerada.

Assim sendo, podemos escrever que o conjunto dos números inteiros, representado por Z é tal que: Z = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...}
↓ ↓
(estas reticências indicam que o conjunto é infinito)

Para representarmos os números inteiros negativos usamos Z_- e para representar os números inteiros positivos usamos Z_+

Observe que este conjunto contém o zero e os números positivos, que formam o conjunto dos números naturais. Isto é, o conjunto dos números naturais está contido no conjunto dos números inteiros ($N \subset Z$)

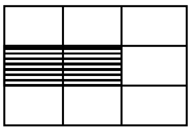
Conjunto dos números Racionais

As necessidades de cada época têm exigido a DESCOBERTA de novos números. Quando foi necessário dividir os números inteiros, para resolver problemas como a divisão de 2 litros de leite comprados por 5 pessoas em partes iguais. Este problema não tem solução no conjunto dos números inteiros uma vez que cada pessoa receberia menos que um litro de leite.

Para representar estas quantidades inferiores a um, porém maiores que zero, surgiu o conceito de fração, ou seja uma parte de um inteiro.

NOÇÃO DE FRAÇÃO

Considere a figura a seguir. Ela foi dividida em partes iguais.



Número de partes: 9
Número de partes destacadas: 2
A fração que representa a parte destacada é $\frac{2}{9}$.

Toda fração tem dois termos:

- o NUMERADOR que indica a quantidade de partes destacadas
- o DENOMINADOR que indica em quantas partes iguais foi dividido o inteiro

No exemplo acima: $\frac{2}{9}$ temos: 2 é o numerador e 9 o denominador.

A leitura de uma fração depende de seu denominador:

- frações com denominadores menores que 10:

  $\frac{3}{4}$ lê-se três quartos; $\frac{2}{5}$ lê-se dois quintos.

- frações com denominador igual a 10 ou a suas potências:

  $\frac{2}{10}$ lê-se dois décimos; $\frac{5}{100}$ lê-se cinco centésimos; $\frac{23}{1000}$ lê-se vinte e três milésimos.

- Frações com denominador maior que 10 e diferentes de suas potências:

  $\frac{2}{13}$ lê-se dois, treze avos; $\frac{5}{47}$ lê-se cinco, quarenta e sete avos.

FRAÇÕES DECIMAIS E NÚMEROS DECIMAIS

Chamamos de frações decimais as frações de denominador igual a 10 ou a uma de suas potências (100, 1000, 10000,..)

Viéte, um matemático francês do século XVI, criou um jeito especial para escrever frações com potências de 10 nos denominadores. No lugar das frações, escrevia números com vírgula.

As frações decimais podem ser escritas na forma de números decimais.

Por exemplo: $\frac{3}{10} = 0,3$; $\frac{121}{100} = 1,21$; $\frac{37}{1000} = 0,037$

Nos números decimais temos: parte inteira , parte decimal

$$\begin{array}{ccc} \text{parte inteira} & , & \text{parte decimal} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{(antes da vírgula)} & \text{(vírgula)} & \text{(após a vírgula)} \end{array}$$

A quantidade de algarismo que fica a direita da vírgula é a quantidade de zeros com que o denominador termina.

A leitura de um número decimal é feita da seguinte forma: lê-se o numerador e após observa-se o denominador:
10 décimos;
100 centésimos;
1000 milésimos
10000 décimos de milésimos
100000 centésimos de milésimos
1000000 milionésimos
e assim sucessivamente.

No problema do leite, cada um ficaria com $\frac{2}{5}$ de um litro que é igual a $\frac{4}{10}$, ou ainda 0,4 litros de leite.

Surgiu então o conjunto dos números racionais, representado pela letra Q (quociente), onde estão todos os números que podem ser representados por uma razão entre dois números inteiros, sendo o segundo diferente de zero, ou seja: $Q = \{\frac{a}{b}$ onde $\{a, b\} \in Z$ e $b \neq 0\}$

Exemplos:

a) **0,2 ou qualquer número decimal com número finito de casas decimais**, é um número racional pois pode ser representado por uma razão entre dois números inteiros.

$$0,2 = \frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{3}{15} = \ldots$$

b) **5 ou –5, ou qualquer número inteiro**, é um número racional pois pode ser representado por uma razão entre dois números inteiros

$$5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{30}{6} = \ldots \quad -5 = -\frac{5}{1} = -\frac{10}{2} = -\frac{30}{6} = \ldots$$

c) **o número decimal 1,3333....,** o algarismo 3 se repete indefinidamente. Esse número é conhecido como **dízima periódica** de parte inteira 1 e período 3.

$$1,333\ldots = \frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{12}{9} = \ldots$$

REGRAS PRÁTICA PARA CONVERTER DÍZIMAS PERIÓDICAS EM FRAÇÕES

1º passo: igualar a dízima a uma incógnita x;
2º passo: multiplicar a expressão obtida por uma potência de 10 de modo que a vírgula se desloque até antes do período (parte que se repete).
3º passo: multiplicar novamente a expressão obtida no segundo passo por uma potência de 10 com expoente igual ao número de dígitos que o período possui (quantidade de dígitos que se repete).
4º passo: criando duas expressões com o mesmo valor após a vírgula (parte decimal) diminui-se a maior da menor (3º passo menos 2º passo), eliminando-se a parte decimal infinita.
5º passo: isolar o x e obter a fração geratriz.

Exemplos:
2,3333......
1º passo: x = 2,3333......
2º passo: a vírgula já esta antes do período. x = 2,333....
3º passo: 10.x = 23,3333.....
4º passo: 10.x = 23,33333....
– x = 2,33333....
9.x = 21 (note que as partes decimais infinitas são iguais, portanto quando subtraídas se anulam)

5º passo: $\boxed{x = \frac{21}{9}}$ → fração geratriz

1,0544444....
1º passo: x = 1,054444......
2º passo: 100.x = 105,4444... (multiplicamos por 100 (10^2) para deslocar a vírgula duas casas)
3º passo: 10.100x = 1054,4444.....
4º passo: 1000.x = 1054,4444....
– 100x = 105,4444....
900.x = 949 (note que as partes decimais infinitas são iguais, portanto quando subtraídas se anulam)

5º passo: $\boxed{x = \frac{949}{900}}$ → fração geratriz

3,1424242....
1º passo: x = 3,1424242.........
2º passo: 10.x = 31,424242...
3º passo: 100.10.x = 3142,424242....
4º passo: 1000.x = 3142,424242....
– 10.x = 31,424242....
990.x = 3111 (note que as partes decimais infinitas são iguais, portanto quando subtraídas se anulam)

5º passo: $\boxed{x = \frac{3111}{990}}$ → fração geratriz

CONCLUSÃO

Assim sendo, podemos afirmar que o conjunto dos números racionais

$$Q = \{\frac{a}{b} \mid a \in Z \text{ e } b \in Z^*\}$$

onde o quociente dos números escritos na forma de fração $\left(\frac{a}{b}\right)$, quando escritos na forma decimal, apresentam número de casas decimais finito ou são dízimas periódicas.

Quando b for igual a 1, o número será inteiro também, então podemos dizer que: $Z \subset Q$.

Conjunto dos números Irracionais

Durante muitos séculos acreditou-se que os números racionais fossem suficientes para resolver qualquer problema numérico. Admitia-se que a medida de uma grandeza, em qualquer unidade, podia ser expressa através de um número racional. Não se sabe ao certo, mas supõe-se que da escola pitagórica surgiu um problema que lançou por terra a idéia de suficiência dos números racionais. Esse problema buscava calcular a medida da diagonal de um quadrado cujo lado media uma unidade.

Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se que: $d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d^2 = 2$.

Esse problema certamente causou polêmica entre os matemáticos da época. Qual seria o número de cuja segunda potência é igual a 2?

Provavelmente muitos matemáticos fizeram cálculos em busca desse número d. E concluíram que estava entre 1,4 e 1,5 pois $1{,}4^2 = 1{,}96$ e $1{,}5^2 = 2{,}25$.

Calcularam então a média entre esses dois números, ou seja 1,45. Como $1{,}45^2 = 2{,}1025$ concluíram que $1{,}4 < d < 1{,}45$. Continuaram esse processo indefinidamente e não chegaram a um número decimal com número de casas finitas ou a nenhuma dizima periódica como valor de d, ou seja, d não é um número racional.

Essa constatação levou os matemáticos a concluírem que existiam números que não podiam ser escritos na forma de razão de dois números inteiros.

Em contraposição aos números racionais, chamou-se esses "novos" números de Irracionais.

Números irracionais são todas as dízimas não periódicas, isto é, todo número com infinitas casas decimais e não periódicas.

Exemplos: $\pi = 3{,}1415....$; $e = 2{,}71....$; $\sqrt{2} = 1{,}41421356....$; $\sqrt{3} = 1{,}7320508...$; $\sqrt{17} = 4{,}123105...$

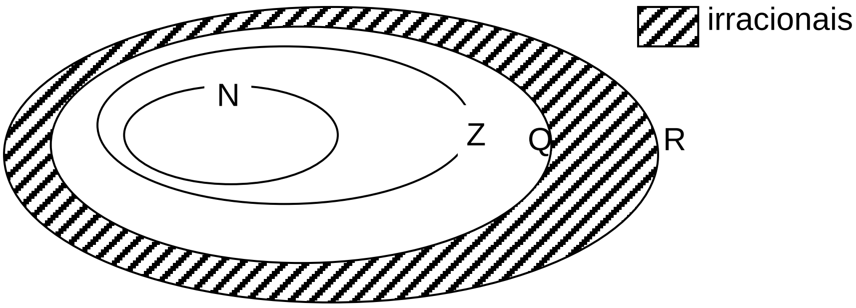
Conjunto dos números Reais

Como a nossa realidade está associada aos números racionais e irracionais, foi criado o conjunto dos números reais. É representado pela letra R e podemos afirmar que:

$$R = \{x \mid x \text{ é um número racional ou irracional}\}.$$

CONCLUSÃO:

Para contagem de objetos (números naturais); para expressar perdas e ganhos (números inteiros); para divisão em partes iguais (números racionais) ou para medir diagonais de quadrados (números irracionais) existem os números reais que podem ser representados de forma resumida pelo diagrama a seguir:



RESUMINDO:

Números Naturais $\Rightarrow N = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ $N^* = \{1, 2, 3, ...\}$

Números Inteiros $\Rightarrow Z = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ $Z^* = \{... -2, -1, 1, 2, ...\}$

$Z_+ = N = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ $Z_- = \{0, -1, -2, -3, ...\}$

Números Racionais $\Rightarrow Q = \{\frac{a}{b} \mid a \in Z \text{ e } b \in Z^*\}$

Quando dividimos o numerador pelo denominador, podemos obter:

- um decimal exato, isto é, um número que tem a representação finita.
- uma dízima periódica, isto é, um número decimal que tem uma representação infinita e periódica (há algarismos que se repetem periodicamente).

Números Irracionais $\Rightarrow$ I, é o conjunto dos números que não podem ser representados na forma de uma fração com numerador e denominador inteiros (decimais não exatos e não periódicos).

Números Reais $\Rightarrow R = Q \cup I$

EXERCÍCIOS

01. Assinale V nas sentenças verdadeiras e F nas falsas.

a) (   ) $\frac{3}{7} \in Q$

b) (   ) $\frac{3}{7} - 1 \notin Q$

c) (   ) $-\frac{1}{2} \in Q - Z$

d) (   ) 0,222... $\in Q$

e) (   ) $0,\overline{9} \in Z$

f) (   ) $-\frac{14}{7} \notin Q$

02. Usando os símbolos $\in$ (pertence) e $\notin$ (não pertence), complete as sentenças a seguir:

a) –7 __ N

b) $\sqrt{2}$ __ Q

c) 4 __ Z

d) 0,1666... __ Q

e) $\sqrt[3]{8}$ __ N

f) $\sqrt{10}$ __ conjunto dos Irracionais

03. Escreva na forma fracionária:

a) três sétimos

b) cinco oitavos negativos

c) nove décimos negativos

d) treze dezenove avos negativos

e) oito quinze avos

f) cento e cinqüenta e três milésimos

g) dois inteiros e oito décimos

04. Complete com > (maior), < (menor) ou igual as sentenças:

a) $\frac{2}{7}$ ___ $\frac{3}{8}$

b) $\frac{5}{8}$ ___ $\frac{8}{5}$

c) $-\frac{1}{3}$ ___ $-\frac{9}{5}$

d) $-\frac{3}{7}$ ___ $-\frac{5}{8}$

e) $\frac{5}{10}$ ___ $\frac{10}{20}$

f) $\frac{2}{7}$ ___ $-\frac{2}{7}$

g) $\frac{3}{7}$ ___ $-\frac{8}{5}$

05. Encontre a fração geratriz de cada dízima periódica:

a) $0,\overline{4}$

b) 1,777...

c) $1,\overline{81}$

d) 18,11...

e) $0,2\overline{35}$

f) $1,23\overline{15}$

g) 0,555...

h) 0,373737...

i) 1,4333...

06. Encontre três números compreendidos entre $0,\overline{8}$ e $\frac{97}{99}$.

07. Verifique em cada caso abaixo se os números representados são iguais (=) ou diferentes (≠):

a) 3 ___ $\frac{12}{4}$

b) $\frac{1}{3}$ ___ $\frac{5}{15}$

c) 0,333... ___ $\frac{1}{3}$

d) $\frac{7}{3}$ ___ $\frac{22}{9}$

e) 0,777... ___ $\frac{1}{7}$

f) 0,3555... ___ $\frac{35}{99}$

08. Quais dos seguintes números são racionais (Q) e quais são irracionais (I):

a) 0,2222....
b) 7,1317....
c) 0,123456....
d) - 7,212121...
e) $\sqrt{6}$
f) $\sqrt{64}$
g) $\sqrt{3+\sqrt{16}}$
h) $\sqrt{1+\sqrt{9}}$
i) $\sqrt[3]{27}$

09. Observe o conjunto numérico A e responda:

A = {0; 4; -6; π; $\frac{10}{2}$; $\sqrt{7}$; $-\sqrt{4}$; -1,8; 0,555...; -1,45777...}

a) Quais elementos são números naturais?
b) Quais elementos são números inteiros?
c) Quais elementos são números racionais?
d) Quais elementos são números irracionais?
e) Quais elementos são números reais?

10. Qual dos conjuntos a seguir é vazio?

a) $\{x \in Z \mid 0 < x \leq 1\}$
b) $\{x \in Z \mid 0 \leq x \leq 1\}$
c) $\{x \in Z \mid 0 \leq x < 1\}$
d) $\{x \in Z \mid 0 < x < 1\}$

11. O conjunto F = $\{x \in Z \mid x \geq 6\}$ pode ser representado por:

a) F = {6, 7, 8, 9, ...}
b) F = {7, 8, 9, 10, ...}
c) F = {6, 5, 4, 3, ...}
d) F = {5, 4, 3, 2, ...}

12. Quantos são os números inteiros compreendidos entre –4 e 5?

a) 2 b) 7 c) 8 d) 9 e) 5

13. Qual o conjunto dos números inteiros negativos menores que –3?

a) {–4, –5, –6, ...}
b) {–3, –2, –1, ...}
c) {–2, –1, 0}
d) {–3, –2, –1}

14. Qual o conjunto dos números inteiros negativos maiores que –4?

a) {–3, –2, –1}
b) {–3, –2, –1, 0}
c) {–4, –3, –2, –1}
d) {–4, –3, –2, –1, 0}
e) {–4, –5, –6, ...}

15. O conjunto A = {x ∈ Z* | –2 < x < 2} é igual a:

a) {–2, –1, 1, 2}
b) {–2, –1, 0, 1, 2}
c) {–1, 1}
d) {–1, 0, 1}
e) ∅

16. O conjunto A = {0, 6, 2, 15} é subconjunto de:

01. IN
02. Z
04. Z^*
08. Z_+
16. Z_-

17. (CESCEM-SP) Dadas as frações: $\frac{5}{7}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{8}{5}$, a ordenação delas em ordem crescente é:

a) $-\frac{2}{3}, -\frac{8}{5}, \frac{1}{4}, \frac{5}{7}$
b) $-\frac{8}{5}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{7}$
c) $\frac{1}{4}, -\frac{2}{3}, -\frac{8}{5}, \frac{5}{7}$
d) $-\frac{8}{5}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{1}{4}$

18. Assinale a alternativa incorreta.

a) $\frac{-3}{5} = \frac{3}{-5}$
b) $\frac{3}{-5} = \frac{-3}{5}$
c) $\frac{-3}{-5} = -\frac{3}{5}$
d) $\frac{+3}{+5} = \frac{3}{5}$

19. O número $\frac{-19}{38}$ é igual a:

a) 2
b) $\frac{1}{2}$
c) –2
d) $-\frac{1}{2}$