X - EXPRESSÕES ALGÉBRICAS OU LITERAIS

A matemática do alfabeto

Ao longo da história, as necessidades de contar, dividir e medir fizeram os homens passar a estudar, ou pelo menos ter algum contato direto, com número, frações, medidas e elementos geométricos. À medida em que se desenvolviam os estudos nos ramos da aritmética e da geometria, aprimoravam-se os usos das letras na representação dos números e como medidas de segmentos de reta, áreas e volumes.

A parte da matemática que lida com letras representando números desconhecidos chama-se *álgebra*. Este termo, segundo consta, vem do termo árabe *al-jabr* (ou *al-jebr*), que aparece no curioso título do livro *Hisab* *al-jabr* *w'al-muqabalah*, obra considerada a mãe da álgebra na Europa, já que o seu autor, Al-Khowarizmi, conduziu registros de seus estudos até o Velho Continente, colocando letras para se representar números.

Muito tempo antes, no Egito, na Grécia Antiga e na Babilônia, já se falava em letras e em relações matemáticas representadas por elas. Por exemplo, o teorema de Pitágoras já era enunciado na forma $a^2 = b^2 + c^2$, independente dos valores das medidas dos lados **a**, **b** e **c**. Quer dizer, demonstrou-se, então, que a o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos, *generalizando* essa frase para *qualquer* triângulo retângulo.

A generalização de situações matemáticas é a grande razão de ser da álgebra. O uso das letras indica números genéricos quaisquer, números cujos valores não sabemos, mas que protagonizam fatos, independente de seus valores, como no caso do teorema de Pitágoras.

O grande pilar da álgebra são as equações, sentenças matemáticas que retratam uma igualdade entre dois números, ou expressões, envolvendo um número que não sabemos quanto vale, representado, usualmente, pela letra **x**, ou por símbolos.

Um exemplo clássico de equação que se estuda são as funções, que, geralmente são escritas com a notação f(x), ou um valor que depende do valor de **x**.

O cálculo que envolve expressões como **ab**, **x + 1**, é chamado de *cálculo algébrico*, e as expressões citadas são chamadas de expressões algébricas ou *literais*. Note que não sabemos, nesse exemplo, quanto valem a, b e x, mas temos duas expressões que indicam o produto de dois números a e b e a soma de um número x com 1 unidade, respectivamente.

As frações que apresentam alguma letra no denominador também são chamadas de frações algébricas.

Ajudaram a desvendar esse imenso e complexo ramo da matemática, nomes como Aristóteles, Cardano, Stifel, Isaac Newton (que enunciou o termo qualquer, ou termo genérico, do binômio que leva seu nome), e muitos outros. Na verdade, para qualquer um deles, a postura necessária para se entender a matemática de uma forma genérica, e não somente baseado em exemplos numéricos (que não provam nada), era se utilizar números genéricos (letras) para se chegar a fórmulas verdadeiras (alguém já viu fórmulas sem letras ou símbolos, só com números?).

FRANÇOIS VIÈTE (1540-1603), foi o responsável pela sistematização dos usos de letras e símbolos e das operações básicas, e simplificação na resolução de equações.

Definição

Expressões algébricas são expressões matemáticas que apresentam letras e números, ou somente letras.

Estas expressões acabam indicando, em si mesmas, operações envolvendo números desconhecidos e conhecidos, ou só desconhecidos.

Exemplos: $3x$, y^2, $x - 2y$, $z - 4$, $\sqrt{x} + 1$, $\frac{xy}{2}$, etc.

VALOR NUMÉRICO DE UMA EXPRESSÃO ALGÉBRICA

Se, em um campeonato de futebol, um clube marcou x gols e sofreu y gols, então seu saldo de gols é representado pela expressão $x - y$. Se, naquele ano, o time marcou 60 gols e sofreu 74, então o saldo é dado por 60 (valor suposto de x) menos y (valor suposto de y).
Assim, o saldo de gols será 60 – 74 = -14.

Se cada partida de futebol tem duração total de 90 minutos, podemos dizer que um jogador que tenha participado de x jogos (sem ser substituído) terá atuado em um total de 90.x minutos. Suponha que ele tenha atuado em 30 jogos. Ele terá, logo, jogado 90.30 minutos, ou seja, 2700 minutos.

Se temos um produto indicado por 2xy, então, para x = 3 e y = 1, vamos ter 2.(3).(1) = 6. E este será o valor numérico da expressão 2xy, para os valores atribuídos às letras x e y.

Portanto, com este raciocínio, vamos ter a seguinte conseqüência:

Quando substituímos as letras por valores conhecidos determinamos o valor numérico da expressão.

Exemplo: $3a^2 + 5b - c$:

para a = 1, b = 5 e c = 2, temos $3.1^2 + 5.5 - 2 = 26$, isto é, o valor numérico é 26.

para a = 0, b = 1 e c = 3, temos $3.0^2 + 5.1 - 3 = 2$, isto é, o valor numérico é 2.

LEMBRE-SE: Para expressões que apresentem letras no denominador de frações, devemos verificar se o valor numérico do denominador é diferente de zero, para que a fração seja um número existente (números com "zero" no denominador não existem, já que nunca podemos dividir algo por zero).
Exemplo: A fração $\frac{10}{2x-7}$ não existe para x = $\frac{7}{2}$, já que $2.\frac{7}{2} - 7 = 0$.

Já para x = 4, a fração existe, uma vez que 2.4 – 7 = 1, e 1 é diferente de zero.

MONÔMIO

- Se um quadrado tem lado ℓ, sua área é dada pela expressão ℓ^2.

- Se dobra o meu salário (aumento de 100%), meu novo salário fica designado por 2x, sendo x o valor de meu salário não-reajustado.

- Em uma prova de matemática, obtive nota 7,5.

Denominamos *monômio*, ou *termo algébrico*, toda expressão literal que contenha um número, uma variável, ou uma multiplicação envolvendo números e variáveis.

- A parte literal (do latim *littera*) de um monômio é constituída pela(s) letra(s) que possui.
- O coeficiente numérico, geralmente escrita à esquerda da parte literal, é o número que está multiplicando a(s) letra(s).

Exemplos:
- 3xy (parte literal xy, e coeficiente numérico 3)
- $42.z\frac{x}{10.a}$ (parte literal $z\frac{x}{a}$ e coeficiente numérico $\frac{42}{10}$)
- $7.x.5.y^2$ (parte literal xy^2 e coeficiente numérico 35 = 7 x 5)

MONÔMIOS SEMELHANTES

Dois ou mais monômios são ditos semelhantes quando possuírem a mesma parte literal (tomando cuidado com os expoentes das letras, que devem ser os mesmos para cada letra).

Os monômios $4x^2$ e $-3{,}2x^2$ são semelhantes; os monômios 9yz e 4yz também são semelhantes, mas os monômios $7ab^2$ e $3a^2b$ não o são.

Observação: O *grau* de um monômio é dado pela soma dos expoentes das letras que o formam. Por exemplo, $7ab^2$ tem grau 3 (1 + 2) e $4x^2$ tem grau 2 (expoente da única variável, x). Monômios semelhantes terão, logo, mesmo grau.

Números isolados de letras são monômios de grau zero.

POLINÔMIOS

Nos monômios, não enxergamos os sinais de “+”, nem o sinal de “-“. Porém, podemos considerar a soma de dois ou mais monômios, de forma que vamos passar a ter vários termos algébricos somados, ou subtraídos, ou seja, vamos ter *polinômios*. Veja:

- $3x + 2$ indica o triplo de x (3x) somado com duas unidades
- $4y – 2y + 4$ nos dá a subtração do quádruplo de y (4y) pelo dobro de y (2y), somado com 4

Observação: Grau de um polinômio é dado pelo maior grau de um polinômio que apareça na soma (ou subtração).
Exemplo: O polinômio $4x^2 – 3y$ tem grau 2, assim como $2x^2 – 4x + 2$.

O polinômio $x + \frac{y}{2}$ é do primeiro grau.

OPERAÇÕES COM EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

- Fator comum

É o valor que aparece em dois ou mais termos e pode ser colocado em evidência..
Exemplo: $3x + 3$ é o mesmo que $3(x + 1)$.

- Fator comum da parte numérica é qualquer divisor comum aos coeficientes numéricos dos termos, costuma-se usar o máximo divisor comum entre os mesmos.

- Fator comum da parte literal é letra(s) elevada(s) ao menor de seus expoentes.

Exemplo: $9x^2y^3 – 12x^2y + 15x^4y^5 = 3x^2y\,(3y^2 – 4 + 5x^2y^4)$.

- Redução de termos semelhantes

É a soma ou a subtração da parte numérica de termos com a mesma parte literal (monômios semelhantes que, somados ou subtraídos, resultam em um monômio, ou polinômio), que não se altera com a soma.

Exemplo: $5m + 3n – 4 – 12n + 7m – 9 = (5 + 7)m + (3 - 12)n +(-4 -9) = 12m – 9n – 13$

- Multiplicação e divisão

Para efetuar estas operações multiplicam-se ou dividem-se as partes numéricas, escrevemos os produtos entre letras diferentes como “a.b”, por exemplo (não precisamos indicar o sinal de multiplicação) e aplicam-se as propriedades de multiplicação e potenciação ($a^m.a^n = a^{m+n}$ e $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$), que valem também para as expressões algébricas.

Exemplo: $\frac{4x^3y^2z \cdot 5xyz}{10x^2z} = \left(\frac{4 \cdot 5}{10}\right).\ x^{(3+1-2)}\ .y^{(2+1-1)}.\ z^{(1+1-1)} = 2x^2y^3z$

- Multiplicação entre expressões com mais de um termo

Multiplica-se cada termo de uma delas por todos os termos da outra e depois reduz-se os termos semelhantes quando possível, obtendo assim, o polinômio da forma reduzida (forma em que nenhuma adição ou subtração pode mais ser feita).

Exemplo: $(2x+y).(x^2 – 2x+y) = 2x^3 – 4x^2 + 2xy + yx^2 – 2yx + y^2 = 2x^3 – 4x^2 + yx^2 + y^2$

PRODUTOS NOTÁVEIS

São produtos, entre expressões algébricas, muito utilizados no cálculo algébrico, por isso convém efetua-los por “regras simples”, de modo que saibamos o polinômio resultado da multiplicação sem calcula-lo manualmente. Aqui, vamos apresentar o cálculo que nos traz o polinômio resultado, em negrito.

Os principais produtos notáveis são:

a) quadrado da soma $\mathbf{(a + b)^2 =} (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = \mathbf{a^2 + 2ab + b^2}$

$$\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

b) quadrado da diferença $\mathbf{(a – b)^2 =} (a – b)(a – b) = a^2 – ab – ab – b^2 = \mathbf{a^2 – 2ab + b^2}$

$$\mathbf{(a – b)^2 = a^2 – 2ab + b^2}$$

c) produto da soma pela diferença **$(a + b).(a - b) =$** $a^2 - ab + ab - b^2 =$ **$a^2 - b^2$**

$$\mathbf{(a + b).(a - b) = a^2 - b^2}$$

d) cubo da soma

$(a+b)^3 =$ $(a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 =$ **$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$**

$$\mathbf{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

e) cubo da diferença

$(a-b)^3 =$ $(a-b)^2(a-b) = (a^2-2ab+b^2)(a-b) = a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3 =$ **$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$**

$$\mathbf{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$$

f) produtos da forma

$$\mathbf{(x + p)(x + q) =} \; x^2 + xq + px + pq = \mathbf{x^2 + (p + q)x + pq = x(x + q) + p(x + q)}$$

$$\mathbf{(a + b + c)^2 = (}a+b+c)(a+b+c) = a^2+ab+ac+ab+b^2+bc+ac+bc+c^2 = \mathbf{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}$$

$$\mathbf{(a + b).(a^2 - ab + b^2) =} \; a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = \mathbf{a^3 + b^3}$$

$$\mathbf{(a - b).(a^2 + ab + b^2) =} \; a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = \mathbf{a^3 - b^3}$$

FATORAÇÃO DE POLINÔMIOS

Quando vamos fatorar um número, escrevemos este como sendo um produto de dois ou mais fatores. Podemos "quebrá-lo', ou, decompô-lo como o produto de fatores, por exemplo 45 pode ser escrito como 3.3.5.

Com as expressões algébricas acontece o mesmo. Por exemplo, a expressão $x^2 - 5x + 6$ pode ser escrita como sendo $(x - 2)(x - 3)$ que é a forma fatorada do polinômio $(x^2 - 5x + 6)$.

Quebrando o polinômio em vários fatores não mais quebráveis (não mais fatoráveis), assim como os fatores primos na fatoração de números, (desprezando o "1" como fator em uma fatoração, pois ele não muda o produto). Então, esse polinômio será escrito como o produto de vários polinômios, ou monômios, de *menor grau possível*, maior ou igual a 1. Note que $(x - 2)$ e $(x - 3)$ são polinômios de primeiro grau, mas o produto entre eles resulta no polinômio $(x^2 - 5x + 6)$, que é do segundo grau.

Os exemplos de produtos notáveis acima representam casos de fatorações de polinômios escritos nas formas de produto de polinômios de primeiro, ou de segundo grau. A diferença $(a^2 - b^2)$, do segundo grau, pode ser fatorada como sendo o produto $(a + b)(a - b)$, que envolve dois polinômios do primeiro grau.

NOTA: Calculando os possíveis valores de x na equação $(x + 2)(x - 3)(x + 1) = 0$, em que o polinômio do terceiro grau está na forma fatorada, vamos encontrar todos os valores de x que satisfazem a igualdade, já que, para o produto de qualquer número de fatores ser igual a zero, um dos fatores deverá ser igual a zero.

Exercícios

01. Escreva a expressão algébrica que representa:

a) o quadrado de um número
b) a soma de um número e 5 unidades
c) a diferença entre dois números
d) o produto de um número pela raiz quadrada do dobro desse número
e) a décima parte do produto de três números

02. Se uma caneta custa x reais e uma lapiseira custa y reais. Escreva as expressões algébricas que representam as seguintes situações:

a) a diferença entre o preço da caneta e da lapiseira.
b) a diferença entre o preço de 10 lapiseiras e 7 canetas.
c) O custo de 5 canetas e 8 lapiseiras.

03. Gerador é um aparelho que transforma qualquer tipo de energia em energia elétrica. A potência, e, watts que certo gerador lança num circuito elétrico é representado pela expressão $20\ i - 5\ i^2$, onde i é a corrente elétrica em ampere – A. Calcule a potência em watts quando a corrente i = 3 A.

04. (FEI-SP) A fração $\frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$, quando a = 93 e b = 92, é igual a:

a) 0
b) 185
c) $93^2 - 92^2$
d) 1
e) $\frac{185}{2}$

05. (FSA-SP) Para $a = -\frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{3}$, o valor da expressão $\dfrac{a^2 + \frac{1-b}{a}}{b^2 + \frac{1-b}{a}}$ é:

a) $\frac{39}{52}$
b) $\frac{4}{5}$
c) $\frac{39}{44}$
d) $\frac{57}{52}$
e) $\frac{3}{5}$

06. (Unimep-SP) Se m + n + p = 6, m.n.p = 2 e m.n + m.p + n.p = 11, podemos dizer que o valor de $\frac{m^2 + n^2 + p^2}{mnp}$ é :

a) 22
b) 7
c) 18
d) 3
e) 1

07. Determine a expressão algébrica solicitada:
a) o quadrado de $-10x^3$
b) o monômio que representa a expressão $-x^2.y^2 + 9.y^2.x^2$
c) o monômio que representa a divisão do cubo da soma $(-7y + 10y + 2y)$ pela soma $(-10y^2\ \ 15y^2)$
d) x dezenas mais y centenas

08. Desenvolver os produtos notáveis:
a) $(x + a)^2$
b) $(m - 1)^2$
c) $(y + m).(y - m)$
d) $(x + 3).(x - 3)$
e) $(a^2 + 1)^2$
f) $(x^3 + 1)^2$
g) $(a + 2m)^2$
h) $(2a - m)^2$
i) $(a^2 - b^3)^2$
j) $(x^3 + 1).(x^3 - 1)$

09. Desenvolva os produtos notáveis:
a) $(x + a)^3$
b) $(m - a)^3$
c) $(a + b + m)^2$
d) $(a + m + 1)^2$

10. Desenvolva os produtos notáveis simplificando em seguida:
a) $(a + b + c)^2 - (a + b)^2 - (a + c)^2 + (a + c).(a - c)$
b) $(x + 3)^2 + (x - 3)^2 + (x + 3).(x - 3) - (x + 1)^2 - 8$

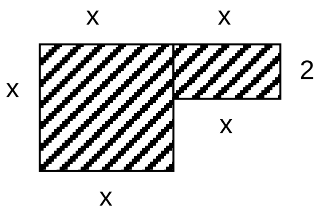
11. Fatore os seguintes polinômios:

a) $ax - x + ab + bx$
b) $15 + 5y + 2ay + 6a$
c) $2an + n - 2am - m$
d) $1 - m^2n^2$
e) $\frac{1}{25} - \frac{a^2}{4}$
f) $(y + 1)^2 - 9$
g) $\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{3}m + \frac{1}{9}$
h) $ab^2 - ac^2 + b^3 - bc^2$

12. Calcule o mmc dos polinômios

a) xy^6 e x^4y^5
b) $12bc^2$, $16bc^5$ e $20b^3c$
c) $8x^2$ e $2x - 10$
d) $x^2 - 7x$, $x^2 - 49$ e $2x + 14$
e) $x^2 - 2x + 1$, $(x - 1)^3$ e $2x - 2$

13. Qual é o polinômio que representa a área da figura abaixo e qual é o seu valor quando x = 10?



14. Simplificando a expressão: $\dfrac{\frac{a+b}{a}\cdot\left(\frac{a}{b}-\frac{a}{a+b}\right)}{\frac{m+b}{m}\cdot\left(\frac{m}{b}-\frac{m}{m+b}\right)}$ temos:

a) $\frac{am}{b}$
b) $\frac{bm}{a}$
c) $\frac{a}{mb}$
d) $\frac{1}{am}$
e) $\frac{a}{m}$

15. (Unifor-CE) Efetuando-se $\frac{3x^2y^2}{10a^2b^5}\cdot\frac{5a^3b^4}{6xy^3}:\frac{7a^5y}{4xy^2}$, onde $a.b.x.y \neq 0$, obtém-se:

a) $\frac{x^2}{7a^4b}$
b) $\frac{7a^6}{16by^2}$
c) $\frac{x^3}{7ab^5}$
d) $\frac{16ab}{7y^2}$
e) $\frac{7a}{by^3}$

XI. EQUAÇÕES

O objetivo básico da álgebra é permitir a resolução de problemas que envolvem números desconhecidos. Representando o número desconhecido por uma letra do alfabeto podemos escrever a relação entre os números conhecidos e o desconhecido através de uma equação.

Numa equação o número desconhecido é uma variável ou uma incógnita?

Apesar de muitas vezes usarmos indiferentemente os termos variável e incógnita, eles não possuem o mesmo significado. Por exemplo: a expressão algébrica ax + b tem as constantes a e b e a variável x, que pode assumir qualquer valor real.

Já a equação ax + b = 0, o valor de x deixa de ser uma variável no campo real para assumir um valor bem determinado. Neste caso, dizemos que x é uma incógnita da sentença ou equação.

Equação é uma igualdade entre expressões algébricas.

Usando os princípios matemáticos é possível manipular essa equação até torná-la simples de modo a permitir definir o valor desconhecido (incógnita). Os princípios matemáticos mais utilizados para resolver equações são:

- <u>Princípio aditivo:</u> Se adicionarmos um número nos dois lados da igualdade, esta igualdade continua sendo verdadeira.
- <u>Princípio multiplicativo</u>: se multiplicarmos ou dividirmos os dois lados da igualdade por um mesmo número, esta igualdade continua sendo verdadeira.
- <u>Redução de termos semelhantes:</u> quando os termos da equação são semelhantes (possuem a mesma parte literal) podemos somar os coeficientes numéricos destes termos e manter a parte literal.

LEMBRE-SE: Sempre que nas equações aparecem parênteses, colchetes ou chaves, devemos eliminar estes símbolos aplicando as operações com expressões algébricas.

EQUAÇÕES INTERIAS DE 1º GRAU COM UMA INCÓGNITA

São chamadas equações inteiras de 1º grau as equações com uma incógnita, x, que fazendo transformações com a aplicação de princípios de equivalência, pode ser escrita na f orma reduzida ***ax = b,*** com $a \in R$ e $a \neq 0$

Exemplos:

1) x + 3 = 5 (aplicando o princípio aditivo: somar –3 nos dois membros
x + 3 – 3 = 5 – 3 implica que x = 2

2) 5x + 4 = 10x (pelo principio aditivo: somar –4 nos dois membros)
5x + 4 – 4 = 10x – 4 (pelo principio aditivo: somar –10x nos dois membros)
5x – 10x = 10x – 10x –4
– 10x = – 4 (pelo principio multiplicativo: multiplicar os dois membros por $-\frac{1}{10}$)
$-10x \cdot -\frac{1}{10} = -4 \cdot -\frac{1}{10}$ (pelo principio multiplicativo: multiplicar os dois membros por 1/10)
$x = \frac{4}{10} = 0{,}4$

3) $3(2a+5)-(3a-5)=a+4(1-a)$

$6a+15-3a+5=a+4-4a$

$3a+20=4-3a$

$3a+3a=4-20$

$6a=-16$

$a = -\frac{16}{6}$

4) $\frac{y-3}{4}+\frac{5+y}{6}=\frac{y-3}{3}$

$\frac{3(y-3)+2(5+y)}{12}=\frac{4(y-3)}{12}$ (reduzir todos os termos ao mesmo denominador)

$3(y-3)+2(5+y)=4(y-3)$ (pelo principio multiplicativo:eliminamos o denominador multiplicando os termos por 12)

$3y-9+10+2y=4y-12$

$5y+1=4y-12$ (somando termos semelhantes

$5y-4y=-12-1$ (pelo princípio aditivo)

y = –13

5) Num sítio são criadas galinhas e porcos num total de 13 animais e 46 patas. Quantas galinhas e quantos porcos são criados neste sítio?

Resolução: Vamos representar o número de galinhas por x, então o número de porcos será 13 – x. Escrevendo a equação que corresponde ao problema:

$$\underbrace{2x}_{\text{nº de patas de galinha}} + \underbrace{4.(13-x)}_{\text{n° de patas de porcos}} = \underset{\text{n° total de patas}}{46}$$

2x + 52 – 4x = 46

–2x = 46 – 52

–2x = – 6

x = 3 número de galinhas

número de porcos $\rightarrow$ 13 – x = 10

EQUAÇÕES FRACIONARIAS DO 1° GRAU COM UMA INCÓGNITA

Uma equação é chamada de fracionária quando tem pelo menos uma incógnita no denominador.

Exemplos: $\frac{5}{x}=20$; $\frac{7}{x}-4=\frac{3}{2}$; $\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x-2}-1$

A resolução de uma equação fracionária é feita de forma semelhante à resolução de uma equação inteira; apenas devemos excluir do conjunto solução da equação os valores da incógnita que anulam o denominador pois não existe divisão por zero.

Exemplo:

1) $\frac{23}{4}+\frac{1}{x}=\frac{35}{6}$ (mmc de 4, x e 6 = 12x)

$\frac{69x+12}{12x}=\frac{70x}{12x}$

69x + 12 = 70x

69x – 70x = –12

–x = –12 $\rightarrow$ **x = 12**

Como 12 não anula o denominador então S = {12}

2) $\frac{1+y}{1-y}=\frac{3+y^2}{(y-1)(y+1)}$ (mmc: (1 + y)(1 – y))

$\frac{(1+y)(1+y)}{(1+y)(1-y)}=\frac{3+y^2}{(1+y)(1-y)}$

$(1 + y)(1 + y) = 3 + y^2$

$1 + 2y + y^2 = 3 + y^2$

$2y + y^2 - y^2 = 3 - 1$

2y = 2 $\rightarrow$ **y = 1**

Como y = 1 zera o denominador (1 – y) este valor não é solução da equação, logo S = $\varnothing$

EQUAÇÕES LITERAIS DO 1° GRAU NA INCÓGNITA X

São equações que apresentam outras letras além da incógnita x. Sua resolução é feita da mesma maneira que as outras e o conjunto solução é dado em função dessas letras.

Exemplo: Sendo x a incógnita:

1) $5x + 3m = 3x - m$

$5x - 3x = -m - 3m$

$2x = -4m$

$x = \frac{-4m}{2}$

$x = -2m \rightarrow$ o conjunto solução $S = \{-2m\}$

2) $3(mx + n) - 2mx = 5n$

$3mx + 3n - 2mx = 5n$

$mx = 5n - 3n$

$mx = 2n$

$x = \frac{2n}{m} \rightarrow$ o conjunto solução $S = \{\frac{2n}{m}\}$ se $m \neq 0$.

EQUAÇÃO DO 1° GRAU COM DUAS INCÓGNITAS

Toda equação que reduzida a forma ***ax + by = c*** é denominada equação do 1° grau com duas incógnitas, x e y.

Estas equações têm infinitas soluções, cada uma delas indicada pelo par (x, y)

Exemplo: $3x + 2y = 16$

Veja que se $x = 2 \rightarrow 3.2 + 2y = 16 \rightarrow 2y = 16 - 6 \rightarrow y = 5$ então o par (2, 5) é solução dessa equação.

Agora se $x = 4 \rightarrow 3.4 + 2y = 16 \rightarrow 2y = 16 - 12 \rightarrow y = 2$ então o par (4, 2) também é solução dessa equação.

Logo, o valor de y dependerá do valor de x e vice-versa.

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO 1° GRAU COM DUAS INCÓGNITAS.

Sistemas de equações é o conjunto de equações ligadas pelo conectivo e, isto é, o valor de uma incógnita é o mesmo para todas as equações do sistema.
Portanto para resolver um sistema de n incógnitas é preciso n equações.

Os sistemas de duas equações com duas incógnitas pode ser resolvido pelos métodos:

a) substituição

- A partir de uma equação, definimos o valor de uma incógnita em função da outra incógnita
- Substituímos este valor na outra equação e obtemos uma equação com uma única incógnita, que nos permite determiná-la.
- Como já temos o valor definido de uma incógnita, podemos determinar o da outra.

Exemplo: Resolver o sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 5y = 20 \end{cases}$

$2x + 3y = 7$

$2x = 7 - 3y$

$x = \frac{7 - 3y}{2}$

$3x - 5y = 20$

$3.\left(\frac{7-3y}{2}\right) - 5y = 20$

$\frac{21 - 9y}{2} - 5y = 20$

$\frac{21 - 9y - 10y}{2} = \frac{40}{2}$

$21 - 19y = 40$

$-19y = 40 - 21$

$-19y = 19$

$y = -1$

$x = \frac{7 - 3y}{2}$

$x = \frac{7 - 3(-1)}{2}$

$x = \frac{7 + 3}{2} = \frac{10}{2}$

$x = 5$

Logo, o par ordenado (5, –1) é solução do sistema

b) adição

- Devemos aplicar o princípio multiplicativo em uma das equações de modo que elas apresentem termos opostos. Assim ao somar as duas equações termo a termo, conseguimos obter uma única equação com apenas uma incógnita, que nos permite determiná-la.
- Conhecendo o valor de uma incógnita substituímos este valor em uma das equações originais e obtemos o valor da outra incógnita.

Exemplo: Resolver o sistema $\begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$

Multiplicamos todos os termos da 1ª equação por 2 $5x + 3y = 2 \ .(2) \rightarrow 10x + 6y = 4$

Multiplicamos todos os termos da 2ª equação por 3 $4x - 2y = 6 \ .(3) \rightarrow \underline{12x - 6y = 18}$

$$22x - 0y = 22$$
$$22x = 22$$
$$x = 1$$

Finalmente substituímos x = 1 em qualquer uma das equações do sistema e determinamos y

$5x + 3y = 2$

$5.1 + 3y = 2$

$3y = 2 - 5$

$3y = -3$

$y = -1$

Logo o par ordenado (1, –1) é solução do sistema.

EQUAÇÃO DE 2º GRAU

É toda equação do tipo $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ em que x é incógnita e a, b e c são os coeficientes reais, com $a \neq 0$

As equações de 2º grau podem se apresentar de forma completa quando seus coeficientes são diferentes de zero, isto é, a, b e c $\in \mathbb{R}^*$.

Exemplo: $10x^2 = 5c - 8 = 0$

$(x + 5)(x - 3) = 0$

As equações de 2º grau podem se apresentar de forma incompleta quando um dos coeficientes b ou c são iguais zero, isto é, b = 0 ou c = 0. Lembre que a (coeficiente de x^2) deve ser diferente de zero.

Exemplos: $5x^2 - 10x = 0$ é incompleta pois a = 5, b = 10 e c = 0

$16x^2 - 8 = 0$ é incompleta pois a = 16, b = 0 e c = –8

$9x^2 = 1$ é incompleta pois a = 9, b = 0 e c = –1

RAÍZES DA EQUAÇÃO DE 2º GRAU

Chamamos de raiz de uma equação do 2º grau ao número real que, atribuído á variável, transforma essa equação numa sentença matemática verdadeira.

De um modo geral, a solução de uma equação do 2º grau é dada:

- pela fórmula de Báscara : $\mathbf{x_1} = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ **;** $\mathbf{x_2} = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Observe que a expressão dentro do radical $b^2 - 4ac$,, conhecida como discriminante, pode assumir valores reais que não possuem raiz quadrada real, logo não haverá raiz real para esta equação.

Resumindo:
- Quando $b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow x_1 \neq x_2$
- Quando $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$
- Quando $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow x_1$ e $x_2 \notin R$

- pela regra da soma e produto das raízes:

A partir da fórmula de Báscara podemos perceber que: $\mathbf{x_1 + x_2} = \dfrac{-b}{a}$ **;** $\mathbf{x_1 \, . \, x_2} = \dfrac{c}{a}$

EQUAÇÃO FRACIONÁRIAS REDUTÍVEIS AO 2º GRAU

Algumas equações fracionárias podem ser reduzidas a uma equação de segundo grau aplicando as operações com expressões algébricas. Porém, após resolvê-las devemos verificar se as raízes obtidas não zeram o denominador.

Exemplo: $\frac{2x}{x-1}+\frac{3}{x-3}=\frac{x+3}{x^2-4x+3}$ fatorando podemos escrevê-la $\frac{2x}{x-1}+\frac{3}{x-3}=\frac{x+3}{(x-1)(x-3)}$

Resolvendo a equação encontramos $x^2 - 2x - 3 = 0$ cujas raízes são 3 e –1. Observe que a raiz 3 zera um denominador na forma fracionária e devemos excluí-la do conjunto solução.

EQUAÇÕES LITERAIS DE 2º GRAU

As equações do 2º grau na variável x podem admitir como coeficientes alguns parâmetros expressos de forma literal. Estas equações são resolvidas do mesmo modo que as equações completas ou incompletas.

As raízes dessas equações vão depender dos parâmetros.

Exemplo: $3x^2 - 10mx + 3m^2 = 0$ em que m é o parâmetro.

Como a = 3, b = –10m e c = $3m^2$, aplicando a fórmula de Bascara, temos: x” = 3m e x””= $\frac{m}{3}$

Atribuindo valores diferentes aos parâmetros, podemos determinar a quantidade de raízes da equação literal.

Exemplo: Considere a equação anterior $x^2 - 6x + 3m = 0$ em que m é o parâmetro.

a = 1, b = –6 e c = 3m $\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4.1.3m = 36 - 12m$

Sabemos que para $\Delta > 0 \rightarrow 36 - 12m > 0 \rightarrow m < 3$ temos duas raízes reais e distintas

$\Delta = 0 \rightarrow 36 - 12m = 0 \rightarrow m = 3$ temos duas raízes reais iguais

$\Delta < 0 \rightarrow 36 - 12m < 0 \rightarrow m > 3$ não existe raízes reais.

EQUAÇÃO BIQUADRADA

É toda equação do tipo $\mathbf{ax^4 + bx^2 + c = 0}$ com $a \neq 0$ e a, b e c $\in$ R. A solução é dada utilizando uma variável auxiliar y ($y = x^2$), transformando a equação biquadrada em equação de 2º grau.

Exemplos: $4x^4 - 2x^2 + 5 = 0$; $25x^4 - 49 = 0$; $3x^4 + 5x^2 = 0$

LEMBRE-SE: Quando $y < 0 \Rightarrow$ não há solução real

Quando $y \geq 0 \Rightarrow$ a solução real é dada por $x = \pm\sqrt{y}$

EQUAÇÃO IRRACIONAL

É toda equação onde a incógnita está sujeita a operação radiciação. A solução é obtida eliminando-se os radicais, elevando-se os dois lados da equação a uma potência conveniente.

LEMBRE-SE: A verificação é sempre necessária porque, ao elevar ao quadrado ambos os membros da equação, podemos obter uma nova equação cujas raízes não satisfazem a equação original.

Exemplos:

1) $\sqrt{x+1} = 5$

$(\sqrt{x+1})^2 = 5^2$

$x + 1 = 25 \rightarrow x = 24$

Verificando percebemos que $\sqrt{24+1} = 5 \rightarrow \sqrt{25} = 5 \rightarrow 5 = 5$ sentença é verdadeira, então S = {24}

2) $\sqrt{x+4} = x-2$

$\left(\sqrt{x+4}\right)^2 = (x-2)^2$

$x + 4 = x^2 - 4x + 4$

$x^2 - 5x = 0$ Resolvendo temos x’= 0 e x’’ = 5

Verificando percebemos que

para x = 0 $\rightarrow \sqrt{0+4} = 0-2 \rightarrow 2 = -2$ sentença falsa, logo 0 não é raiz da equação

para x = 5 $\rightarrow \sqrt{5+4} = 5-2 \rightarrow 3 = 3$ sentença verdadeira, logo 5 é raiz da equação.

O conjunto solução da equação $\sqrt{x+4} = x-2$ é S = {5}

Exercícios

01. Resolva as equações de 1º grau considerando o conjunto dos números reais como universo.

a) $11x - 13 = 20$
b) $12x + 21 = 10x + 16$
c) $5(x + 2) - 2(3x - 1) = 13$
d) $t - [-t - (t - 1)] = 2 - t$
e) $\frac{2y}{5} - \frac{3}{4} = \frac{3y}{20}$
f) $\frac{2x-1}{10} - 2 = \frac{1}{5} - \frac{1+x}{4}$

02. Marina fez duas provas de matemática. Na primeira prova, ela tirou uma nota x e na segunda prova ela obteve 3 pontos a mais que na primeira. O professor calculou a média bimestral da seguinte forma: peso 1 para a primeira prova e peso 2 para a segunda. Se a média de Marina foi 8, quanto ela tirou em cada prova?

03. Uma industria produziu x unidades de certo aparelho. Vendeu 50% da produção para uma loja A, 30% para uma loja B e 1000 aparelhos para uma loja C. Quantos aparelhos essa industria produziu?

04. Para comprar uma blusa, Maria precisa de 4 reais a mais do que tem. Mas se ela tivesse o dobro da quantia que tem, poderia comprar a blusa e ainda ficaria com 7 reais. Nessas condições responda:
a) Quanto tem Maria?
b) Quanto custa a blusa?

05. O IBGE contratou um certo número de entrevistadores para fazer o recenseamento de uma região. Se cada um deles visitasse 100 residências, 60 delas não seriam visitadas. Como cada recenseador visitou 102 residências, todas residências da região foram visitadas. Pergunta-se:
a) Qual o número de recenseadores contratados pelo IBGE?
b) Quantas residências tem a região?

06. Resolva as seguintes equações fracionárias:
a) $\frac{3}{4} + \frac{1}{x} = \frac{11}{12}$
b) $\frac{2}{2x-1} = \frac{5}{x+1}$
c) $1 + \frac{3}{2-x} = \frac{1}{2}$
d) $\frac{x-1}{1-x} = \frac{1}{2} + \frac{x}{1-x}$
e) $\frac{5}{x^2-9} = \frac{-3}{x+3}$
f) $\frac{2x}{x-1} - \frac{3x}{x+1} = \frac{5-x^2}{x^2-1}$

07. O conjunto verdade da equação $\frac{2-x}{x-2} + \frac{x}{x-2} = 1$ é:

a) V = {2} b) V = {3} c) V = {4} d) V = {5}

08. (UFPA) A raiz da equação de 1º grau $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+2}{x+1} = \frac{x-3}{x-1} + \frac{4-x}{x+1}$ é:

a) -3 b) 5 c) -5 d) 3 e) 1

09. A 5ª série A tem x alunos. Nessa série foram distribuídos 320 livros de forma que cada aluno recebeu a mesma quantidade de livros. A 5ª série B tem dois alunos a menos que a A e nessa turma foram distribuídos 300 livros e todos os alunos receberam a mesma quantidade de livros.
Nessas condições:
a) Escreva a fração que representa a quantidade de livros que a turma A recebeu.
b) Escreva a fração que representa a quantidade de livros que a turma B recebeu.
c) Quantos livros tem cada série se cada aluno das duas turmas recebeu a mesma quantidade de livros?

10. Um carro, com certa velocidade, percorre 240 km em t horas. Mantendo a mesma velocidade média, vai percorrer 400 km em (t + 2) horas. Qual é o número t de horas?

11. Se 3 é solução da equação $m + \frac{1}{x+1} = \frac{3x}{x+1}$, então o valor de m é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

12. Escreva um sistema de duas equações usando as incógnitas x e y para cada uma das situações a seguir:
a) O preço de uma camisa é o dobro do preço de uma camiseta e as suas juntas custam R$ 45,00.
b) A soma de dois números é 50 e o maior deles é igual ao dobro do menor menos 1.
c) Beatriz tem 8 notas, uma de cinco reais e outras de 10 reais, num total de 55 reais.
d) Um terreno tem 1300 m^2 de área e a parte construída deve ser igual a $\frac{5}{4}$ da parte destinada ao jardim.

13. Resolva os sistema de equações do 1º grau:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ x - y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - 3y = 8 \\ 7x + y = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y = -2 \\ \frac{3x}{2} - y = 9 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 7x + (2 + y) = 0 \\ \frac{x}{5} + 2y = -4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x - (y + 1) = 8 \\ \frac{x + y}{7} = 0 \end{cases}$

14. (UMC-SP) Deseja-se cortar uma tira de couro de 120 cm de comprimento, em duas partes tais que o comprimento de uma seja igual ao triplo da outra. A parte maior mede:

a) 75 cm b) 80 cm c) 90 cm d) 95 cm

15. (UFGO) Diminuindo-se seis anos da idade de minha filha obtém-se 3/5 de sua idade. A idade de minha filha, em anos é:

a) 10 b) 15 c) 12 d) 18

16. As idades de três irmãos somam 99 anos. Sabendo-se que o mais jovem tem um terço da idade do mais velho e o segundo irmão tem a metade da idade do mais velho, qual a idade do mais velho?

17. Paga-se um presente de R$ 180,00 com cédulas de R$ 5,00 e de R$ 10,00. Se o número total de cédulas é 23, então, necessariamente foi pago com:

a) 10 cédulas de R$ 5,00
b) 12 cédulas de R$ 5,00
c) 13 cédulas de R$ 5,00
d) 14 cédulas de R$ 5,00

18. Tenho 9 anos a mais que meu irmão, e juntos temos 79. Quantos anos eu tenho?

19. (FCC-BA - adaptada) Um grupo de amigos quer dividir a despesa de um restaurante. Se cada um pagar R$ 20,00, faltarão R$ 60,00; porém, se cada um der R$ 30,00, sobrarão R$ 90,00. Qual é o número de pessoas desse grupo?

20. Ana comprou para seus alunos n canetas por 30 reais e (m + 4) lapiseiras por 20 reais. Sabendo-se que o preço de cada caneta é o dobro do preço de uma lapiseira, quantas canetas e quantas lapiseiras ela comprou?

21. Resolva os sistemas de equações fracionárias

a) $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{y+3} = 1 \\ \dfrac{y}{x+2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 9 \\ \dfrac{x}{2y} = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x = 2 + 3y \\ \dfrac{1}{y-1} = \dfrac{1}{x-3} \end{cases}$

22. Resolva em R, as equações do 2º grau:

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$
b) $x^2 - x - 6 = 0$
c) $-x^2 - x + 12 = 0$
d) $2x^2 - 5x + 2 = 0$
e) $x(x - 1) = 3(x - 1)$
f) $(x - 2)^2 = 3x - 2$
g) $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{7}{10} = \dfrac{x+1}{2}$
h) $\dfrac{x^2 + 2x}{3} = x + 4$

23. Resolver em R, as equações fracionárias do 2º grau:

a) $\dfrac{x+4}{x+1} = \dfrac{3x+4}{x+3}$

b) $\dfrac{x}{3x+5} + 1 = \dfrac{1}{x+1}$

24. Qual é a soma e o produto das raízes das equações:

a) $x^2 - 5x + 4 = 0$
b) $x^2 + 2x - 8 = 0$
c) $2x^2 - 5x + 2 = 0$
d) $-x^2 + 6x - 5 = 0$

25. Determine m em $x^2 + (m - 3)x - 4 = 0$, se as raízes são simétricas.

26. Qual é o valor de m, sabendo-se que a equação $x^2 - 7x + m = 0$ admite uma raiz igual a 3?

27. Qual é o valor de m em $x^2 - mx + 12 = 0$, se uma raiz é o triplo da outra raiz?

28. Calcular m para que a equação $x^2 - mx + 25 = 0$ tenha raízes iguais.

29. Sendo x' e x'' as raízes da equação $2x^2 - 8x + 5 = 0$, calcule:

a) $x' + x''$

b) $x' . x''$

c) $(x' + 3)(x'' + 3)$

d) $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}$

e) $(x')^2 + (x'')^2$

f) $\frac{1}{(x')^2} + \frac{1}{(x'')^2}$

30. Determine uma equação do 2º grau que tenha como raízes os valores dados em cada caso:

a) $x' = 2$ e $x'' = 3$

b) $x' = -2$ e $x'' = 5$

c) $x' = -1$ e $x'' = -3$

d) $x' = a$ e $x'' = \frac{1}{a}$

e) $x' = (k + 1)$ e $x'' = (k - 1)$

31. Calcule n na equação $x^2 - 10x + (n + 1) = 0$ de modo que:

a) as raízes sejam reais e diferentes

b) as raízes sejam reais e iguais

c) as raízes não sejam reais

32. Um pai tinha 30 anos quando seu filho nasceu. Se multiplicarmos as idades que possuem hoje, o produto será igual a 3 vezes o quadrado da idade do filho. Qual é a idade do pai e qual a do filho?

33. Determine o conjunto verdade das equações biquadradas a seguir:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $x^4 - 25x^2 = 0$

c) $x^4 - 64 = 0$

d) $(x^2 + 10)(x^2 - 10) + 36 = 0$

e) $9x^4 = 4 - 5x^2$

f) $(x^2 + 5)(x^2 - 5) = 50$

g) $\frac{1}{1+x^2} + \frac{10}{x^2+1} = \frac{x^2}{10}$

34. Calcule a soma dos quadrados das raízes da equação $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$.

35. (UNIRIO) O conjunto das raízes positivas de $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$ vale:

a) $\{2, \sqrt{3}\}$
b) $\{3, \sqrt{2}\}$
c) $\{4, \sqrt{2}\}$
d) $\{5, \sqrt{3}\}$
e) $\{5, \sqrt{2}\}$

36. (UGF-RJ) A diferença entre a maior e a menor raiz da equação $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ é:

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

37. Determine o conjunto verdade das equações irracionais, no universo dos reais.

a) $\sqrt{2x+4} = 1$

b) $x + \sqrt{x} = 2$

c) $\sqrt{x+1} - x + 1 = 0$

d) $\sqrt{3x^2 - 20x + 16} = x - 4$

e) $\sqrt{x+6} = \sqrt{3x-14}$

38. O valor de x tal que $\sqrt{3 + \sqrt{2+x}} = 5$ é:

a) 482
b) 479
c) 0
d) 484
e) 20

39. (PUC) Resolva a equação $\sqrt[3]{x^2 - x - 1} = x - 1$.

40. A raiz quadrada do dobro de x, somada com 3 unidades resulta em 30 unidades. Qual é o valor de x?

DESAFIO:

1) A soma dos quadrados de três números inteiros e positivos é 676. Determine-os sabendo que estes números estão entre si assim como 3 : 4 : 12

2) Duas torneiras enchem um reservatório em 2 horas. A primeira, sozinha, enche o reservatório em x horas. A segunda, sozinha, leva 3 horas a mais que a primeira. Quanto tempo leva cada torneira para encher o reservatório sozinha?