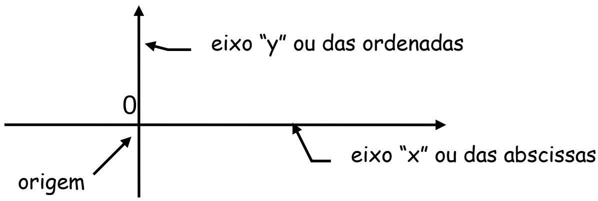
UNIDADE III

RELAÇÕES E FUNÇÕES

1. Plano Cartesiano

É o sistema formado por dois eixos orientados, perpendiculares entre si e que se cruzam no ponto **0,** chamado de origem.. A cada eixo é associado o conjunto dos números reais.
O eixo horizontal é chamado de eixo das abscissas ou eixo dos "x"; o eixo vertical é chamado de eixo das ordenadas ou eixo dos "y".



2. Par Ordenado

A partir de dois números reais a e b, é possível obter um novo elemento, representado por (a, b) que chama-se **par ordenado**. O par ordenado , no plano cartesiano, representa um único ponto.

LEMBRE-SE: Se $a \neq b$, então o par ordenado $(a, b) \neq (b,a)$.

3. Produto Cartesiano

Sejam dois conjuntos A e B, não vazios, chama-se produto cartesiano de A por B o conjunto de todos os pares ordenados (x,y) com $x \in A$ e $y \in B$. O produto cartesiano é representado por AxB (lê-se "A cartesiano B").

$$\boxed{A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A \text{ e } b \in B \}}$$

LEMBRE-SE:

- Se $A \neq B$, temos $A \times B \neq B \times A$.
- O produto cartesiano de um conjunto A por ele mesmo é simbolizado por A^2 (lê-se "A dois"), isto é, $AxA = A^2$.

Exercícios

01. Dados A = {1, 2, 3, 4} e B = {1,2,3}, represente graficamente:
a) A x B
b) B x A
c) {(x, y) $\in$ A x B | y = x}
d) [(x, y) $\in$ A x B | x < y}

02. Se (x, 2) = (5, y), então o valor de x + y é:
a) 3 b) 4 c) 7 d) 10 e) 12

03. (ESAN-SP) Os valores de “x” e “y” de modo que os pares ordenados (x - 3, 2y + 1) e (2x + 2, -y - 8) sejam iguais são:
a) -1, 7
b) -9, -5
c) -5, -9
d) -5, -3
e) -3, -5

04. (CESGRANRIO) Sejam F = {1, 2, 3, 4} e G = {3, 4, 7}. Então:
a) F x G tem 12 elementos.
b) G x F tem 9 elementos.
c) F $\cup$ G tem 7 elementos.
d) F $\cap$ G tem 3 elementos.
e) G x G tem 6 elementos.

05. Se A x B = {(1, 5); (1,3); (1,2); (7, 5); (7, 3); (7, 2)}, então:
a) A = {1, 7} e B = {5, 3, 2}
b) A = {5, 3, 2} e B = {1, 7}
c) A = {1, 5, 3} e B = {1, 2}
d) A = {1, 2} e B = {1, 5, 3}
e) A = {1, 7} e B = {1, 2, 7}

06. (UFMT) Sejam os conjuntos A e B tais que:
A x B = {(-1, 0); (2, 0); (-1, 2); (2, 2); (-1, 3); (2, 3)}. O número de elementos do conjunto A $\cap$ B é:
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

07. Se A = {-2, 0, 2}, B = {5, 6} e C = { -4 }, determine:
a) A x C =
b) C x B =
c) A x B =

08. Assinale a alternativa verdadeira;

a) { 1, 5} x { 3, 4} = { 3, 4, 15, 20}
b) { 1, 5} x { 3, 4} = { 3, 4} x { 1, 5}
c) { 1, 5} x { 3, 4} = { (1, 3); (1, 4); (3, 5); (4, 5) }
d) { 1, 5} x { 3, 4} = { (1, 3); (1, 4); (5, 3); (5, 4) }

09. (PUC) O número de elementos do conjunto A é 2^m e o número de elementos do conjunto B é 2^n. Então, o número de elementos de AxB é:

a) $2^m + 2^n$
b) 2^{m+n}
c) $2^{m.n}$
d) m.n
e) m + n

10. (ULBRA) Sendo A = {1, 2}, B = {3, 4} e C = {4, 5}, o produto cartesiano A x (B∩C) é:

a) {(1, 4); (2, 4)}
b) {(1, 4); (1, 5)}
c) {(1,3); (1,4); (2, 3); (2, 4)}
d) {(1, 4); (1, 5); (2, 4); (2,5)}
e) ∅

4. Relações

4.1 Definição

Dados dois conjuntos A e B não vazios, chama-se **relação de A em B** qualquer subconjunto de AxB. Uma relação de A em B é denotada pelo símbolo $\mathfrak{R}$: A→B.

Exemplos: Se A = {2, 5} e B = {3, 4, 7}, então:
AxB = { (2, 3); (2, 4); (2, 7); (5, 3); (5, 4); (5, 7) }

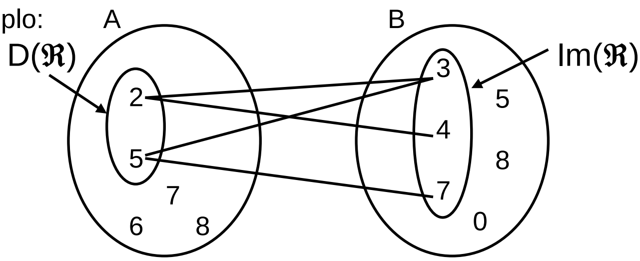
Observando este conjunto temos:
$\mathfrak{R}_1$ = { (2, 3); (2, 4) } e $\mathfrak{R}_2$ = { (5, 3); (5, 4) }, são relações de A em B.

4.2 Domínio e Imagem

Chama-se **domínio** de uma relação qualquer de A em B, ao conjunto de todos os elementos de A que estão associados a, pelo menos, um elemento de B, e representa-se por D($\mathfrak{R}$).

Chama-se **imagem** de uma relação qualquer de A em B, ao conjunto de todos os elementos de B que estão associados a, pelo menos, um elemento de A, e representa-se por Im($\mathfrak{R}$).

Exemplo:



4.3 Relação Inversa

A relação inversa de uma relação $\Re$ é aquela obtida invertendo-se a ordem dos termos dos pares ordenados de $\Re$, e representa-se por $\Re^{-1}$.

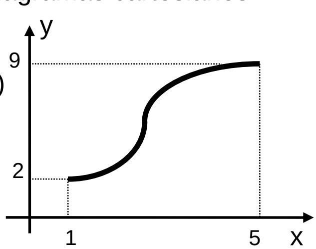
Exemplo: Se $\Re = \{ (0,1); (1,2); (2,3) \} \Rightarrow \Re^{-1} = \{ (1,0); (2,1); (3,2) \}$

LEMBRE-SE : $D(\Re) = Im(\Re^{-1})$ e $D(\Re^{-1}) = Im(\Re)$

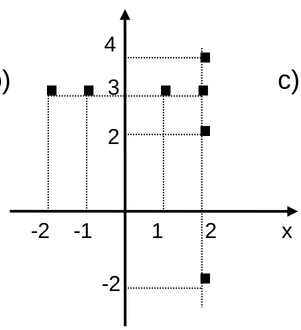
Exercícios

11. Dê o domínio e a imagem das relações representadas a seguir pelos diagramas cartesianos.

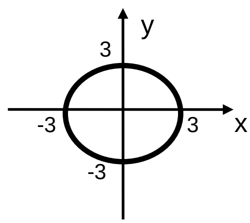
a)



b)



c)



12. Construa o gráfico das relações de A = {-2, -1, 0, 1, 2} em R definidas por:

a) $\{(x, y) \in A \times R \mid y = 2x\}$

b) $\{(x, y) \in A \times R \mid y = |x| \}$

c) $\{(x, y) \in A \times R \mid y = -x^2 \}$

13. Sendo $A = \{ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{ 0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3} \}$ designe os pares da relação $\Re$: $\{ (x, y) \in A \times B \mid y = \sqrt{x} \}$

5. Funções

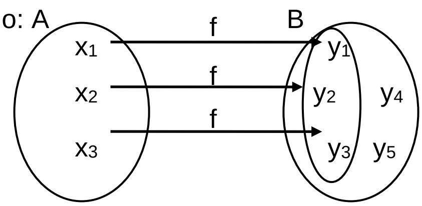
5.1 Conceitos

Uma relação $\mathfrak{R}$: A $\rightarrow$ B é uma função de A em B se, **e somente se**, o domínio for o conjunto A, isto é, todos os elementos de A, e cada um deles se relaciona com apenas **um** elemento de B.
As funções são, usualmente, representadas pelas letras f, g, h, ...

Uma função f de A em B é representada por **f: A $\rightarrow$ B.**

- O **domínio** da função, **D(f)** é o conjunto A.
- O **contra domínio** da função, **CD(f)** é o conjunto B.
- A **imagem** da função Im(f) é o conjunto dos elementos de B associados aos elementos de A. A imagem de uma função f é representada por f(x) onde x é um elemento do domínio e lê-se “f de x”.

Exemplo:



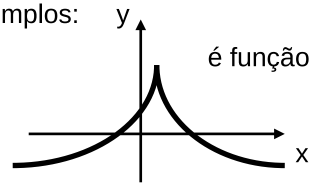
f: A $\rightarrow$ B
D(f) = A = $\{x_1, x_2, x_3\}$
CD(f) = B = $\{ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$
Im(f) = $\{y_1, y_2, y_3\}$

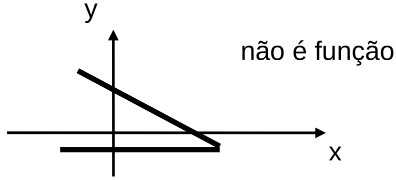
LEMBRE-SE: Im(f) $\subset$ B (contra domínio).

5.2 Gráficos de uma função

Para obtermos o gráfico de uma função f, devemos representar no plano cartesiano, os pares ordenados (x,y), onde x $\in$ D(f) e y $\in$ Im(f). Dependendo do domínio de f, o gráfico da função pode ser um ponto, alguns pontos ou ainda, infinitos pontos.
Para reconhecer se um gráfico representa uma função, verificamos se a cada x do domínio corresponde uma única imagem traçando retas paralelas ao eixo das ordenadas e observamos se cada uma delas corta o gráfico em um único ponto.

Exemplos:

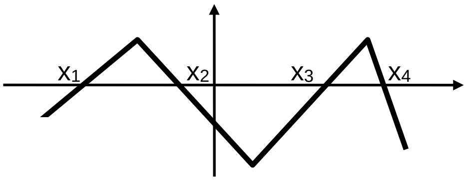




OBSERVAÇÃO: A projeção do gráfico de uma função sobre o eixo x (abscissas) é o domínio da mesma, e a projeção sobre o eixo y (ordenadas) é a imagem.

5.3 Raiz ou zero de uma função

É o valor de x $\in$ D(f) que faz f(x) = 0. É o ponto onde o gráfico corta o eixo das abscissas.
Exemplo: Considere o gráfico a seguir:



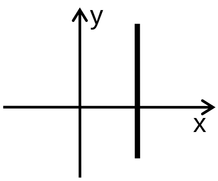
$f(x_1) = 0$
$f(x_2) = 0$
$f(x_3) = 0$
$f(x_4) = 0$

$\Rightarrow$ x_1, x_2, x_3 e x_4 são raízes da função

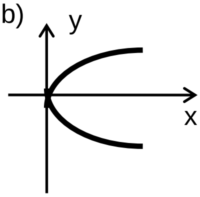
Exercícios

14. (ACAFE) Qual dos gráficos abaixo representa uma função:

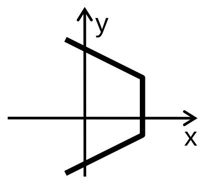
a)



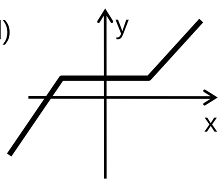
b)



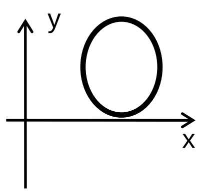
c)



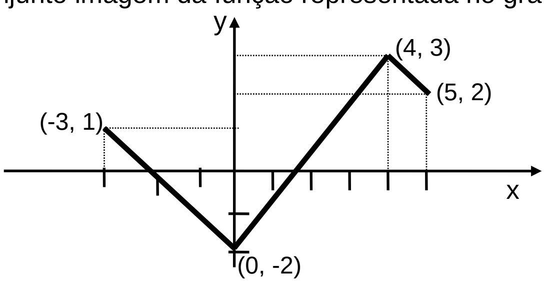
d)



e)



15. O conjunto imagem da função representada no gráfico abaixo é:



a) [0, 4]
b) [1, 2]
c) [-3, 5]
d) [0, 5]
e) [-2, 3]

16. Determine o domínio das funções abaixo:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

b) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-4}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-6x+5}$

d) $f(x) = \sqrt{3+x}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{7-x}{x+3}}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{x+5} + \dfrac{1}{x^2-9}$

g) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt[3]{3x-6}}$

h) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x-1}}$

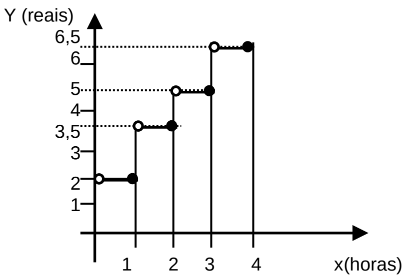
i) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x-3}}$

j) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$

k) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-4}}{3x}$

17. Ao lado vê-se parte de um gráfico que mostra o valor y a ser pago (em reais), pelo uso de um estacionamento por um período de x horas.

Suponha que o padrão observado no gráfico não se altere quando x cresce. Nessas condições, quanto deverá pagar uma pessoa que estacionar seu carro das 22 horas de um dia até as 8 horas e 30 minutos do dia seguinte?



18. Dada a função f(x) = -3x + 6, calcule:
a) f(5)
b) f($\frac{1}{5}$)
c) f(2,5)

19. (FUVEST) Se f(x) = $\frac{1}{x^2+1}$, quanto vale f$\left(\sqrt[4]{7}\right)$?

20. (FUVEST) As funções f e g são dadas por f(x) = $\frac{3}{5}x-1$ e g(x) = $\frac{4}{3}x+a$. Sabe-se que f(0) – g(0) = $\frac{1}{3}$. O valor de f(3) – 3.g$\left(\frac{1}{5}\right)$ é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

21. Complete a tabela a seguir.

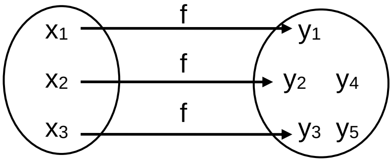
Função definida de R→ R	f(0)	f(1)	f(-1)	f(1/3)	f(2,5)	f($\sqrt{3}$)
a) f(x) = $\sqrt{3}$						
b) f(x) = x + 5						
c) f(x) = x^2 + 1						
d) f(x) = 2 + | 2x |						
e) f(x) = $\frac{1}{x+1}$						
f) f(x) = $\sqrt{x+1}$						

22. Dada a função f(x) = -2x + 3, definida de R → R, calcule x para que:
a) f(x) = 5
b) f(x) = -9

5.4 Classificação das funções

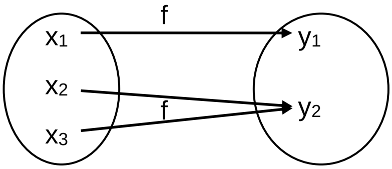
a) Quanto ao contra domínio

- injetora Uma função é injetora quando para $x_1 \neq x_2 \leftrightarrow y_1 \neq y_2$



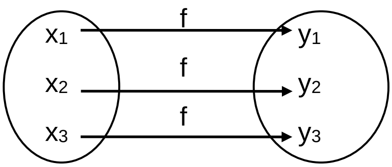
- sobrejetora

A função é sobrejetora quando Im(f) = CD(f). "Não sobra elemento em y ".



- bijetora

A função é bijetora quando é injetora e sobrejetora ao mesmo "tempo".



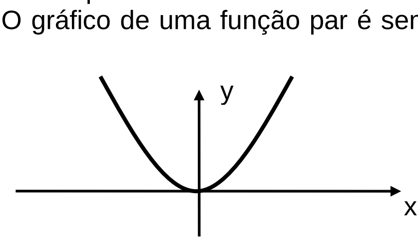
b) Função par e ímpar

- função par

Uma função $f(x){:}A \to B$ é par quando para valores simétricos de x, as imagens são iguais, isto é, $\mathbf{f(x) = f(-x)}$. O gráfico de uma função par é sempre simétrico em relação ao eixo dos y.

Exemplo: $f(x) = x^2$

$f(1) = 1, \quad f(2) = 4$
$f(-1) = 1, \quad f(-2) = 4$

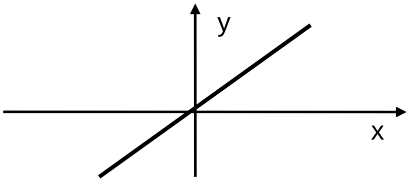


- função ímpar

Uma função f(x):A → B é ímpar quando para valores simétricos de x, as imagens são simétricas, isto é, **f(x) = - f(-x)**. O gráfico de uma função ímpar é sempre simétrico em relação a origem do plano cartesiano.

Exemplo: f(x) = 2x

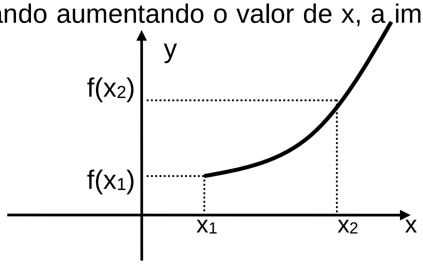
f(1) = 2, f(2) = 4
f(-1) = -2, f(-2) = -4



c) Função crescente e decrescente

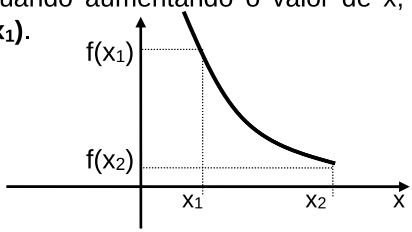
- função crescente

Uma função f(x):A→B é crescente quando aumentando o valor de x, a imagem aumenta, isto é, $\mathbf{x_2 > x_1 \rightarrow f(x_2) > f(x_1)}$.



- função decrescente

Uma função f(x)**:** A → B é decrescente quando aumentando o valor de x, a imagem diminui, isto é, $\mathbf{x_2 > x_1 \rightarrow f(x_2) < f(x_1)}$.



Exercícios

23. Classifique as funções abaixo, definidas de R → R, em pares, ímpares ou sem paridade.

a) f(x) = 4
b) f(x) = 2x
c) f(x) = = $x^2 - 1$
d) f(x) = $x^2 - 5x + 6$
f) f(x) = |x – 5 |

24. Das funções abaixo, definidas de R $\rightarrow$ R, assinale com C as crescentes e com D as decrescentes.

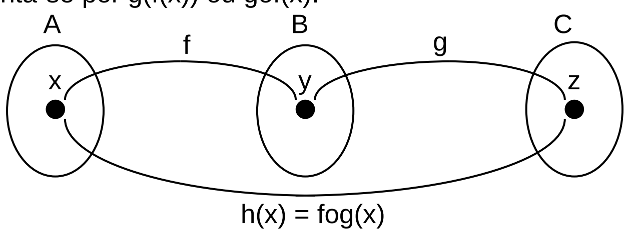
a) ( ) y = 3x
b) ( ) y = -2x
c) ( ) y = x + 2
d) ( ) y = -2x + 2

25. Seja a função f**:** A $\rightarrow$ B definida por y = $\frac{x}{2}$ + 1, com A = {0, 2, 4, 6} e B = { 1, 2, 3, 4}**.** Esta função f é:

01. sobrejetora
02. injetora
04. bijetora
08. simples
16. par
32. ímpar

d) Função composta

Supondo-se uma função f(x)**:** A $\rightarrow$ B e g(x)**:** B $\rightarrow$ C, pode-se estabelecer uma terceira função h(x)**:** A $\rightarrow$ C conhecida como função composta de f(x) e g(x), representa-se por g(f(x)) ou gof(x).



Exercícios

26. Se f(x) = 2x + 1 e g(x) = x + 6, encontre gof(x).

27. Dados f(x) = x – 1 e g(x) = x^2, determine g(f(x)).

28. Se f(x) = 2x + 3, obtenha f(f(x)).

29. Dadas as funções f(x) = 3x + 2 e g(x) = x – 1, calcule:

a) g(f(1))
b) f(g(0))
c) f(f(0))
d) g(g(1)

30. Dadas as funções $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = 3x - 4$, determine:

a) f(g(x)) =
b) g(f(x)) =
c) f(g(0)) + g(f(1)) =

31. Calcule o valor de **a**, sabendo que $f(x) = 4x + 5$, $g(x) = 2x + a$ e $f(g(x)) = g(f(x))$.

32. Se $f(x) = x^2 - 2x + 1$, encontre $f(x + 1)$

33. Se $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, obtenha f(f(x)).

34. (PUC-MG) Se $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, o valor de x de modo que f(f(x)) = 1 é:

a) 1,0 b) 2,0 c) 1,5 d) –1,0 e) –1,5

35. (FCC-BA) Sejam f e g funções de R em R definidas por $f(x) = 1 - 2x$ e $g(x) = 2x - 1$, respectivamente. Nestas condições, o valor de f[g(-2)] é:

a) -11 b) -9 c) 5 d) 9 e) 11

36. Dadas as funções $f(x) = 5x - 3$, $g(x) = x^2 - 1$ e $h(x) = 2x^2$:

a) simplifique a expressão dada por f [h(x)] – 4.g(x);
b) calcule x, para que f [h(x)] = 7

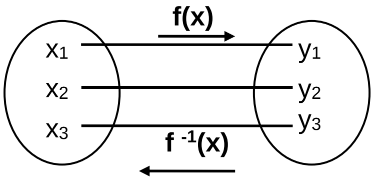
37. (UECE) Sejam "f" e "g" funções de R em R definidas por $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = 2x + 1$. Então a função composta fog assume o menor valor em um ponto do intervalo:

a)]-1, 0[b)]0, 1[c) $\left]\dfrac{1}{2}, 2\right[$ d) $\left]-1, -\dfrac{1}{2}\right[$ e) $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$

38. Dadas as funções $f(x) = 3x + 4$ e $f(g(x)) = x - 5$. Determine g(x).

e) Função inversa

Dada uma função f(x): A → B, **bijetora**, pode-se obter uma função de B em A, chamada de função inversa, invertendo-se a ordem dos pares ordenados de f(x), e representa-se por $f^{-1}(x)$.



$D(f) = Im(f^{-1})$
$Im(f) = D(f^{-1})$

LEMBRE-SE: Quando uma função f(x) não é bijetora, ela não admite função inversa, pois a inversão dos pares ordenados não define uma função

Exercícios

39. Encontre a função inversa de cada função:

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{2}$

b) $f(x) = \dfrac{x-1}{3}$

c) $f(x) = x^3 + 1$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$

e) $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$

f) $f(x) = \dfrac{x-2}{3-x}$

g) $f(x) = \dfrac{1-x}{x} + 3$

h) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{2}$

40. Determine a função inversa, caso ela exista, de:

a) $f(x) = 3x - 5$

b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{3x-5}$ $\left(x \neq \dfrac{5}{3}\right)$

c) $f(x) = x^2 + 2x - 1$

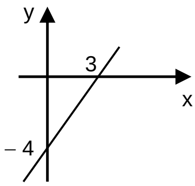
41. (CESGRANRIO) Sejam f : $]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ a função dada por $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ e f^{-1} a função inversa da f. O valor de f^{-1} no ponto 4 é:

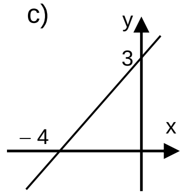
a) $\dfrac{1}{4}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) 1 d) 2 e) 4

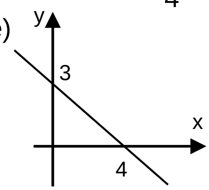
42. (UFPA) O gráfico de uma função f é a reta que corta os eixos coordenadas em x = 2 e y = -3. O valor de $f[f^{-1}(0)]$ é:

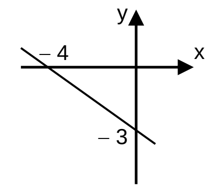
a) $\frac{15}{2}$ b) 0 c) $-\frac{10}{3}$ d) $\frac{10}{3}$ e) $-\frac{5}{2}$

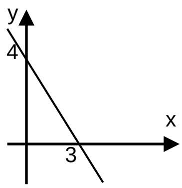
43. (CESGRANRIO) O gráfico que representa a inversa da função f(x) = $3 - \frac{3}{4}x$ é:

a)


c)


e)


b)


d)


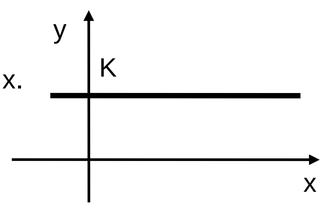
44. Dada a função f(x) = $\frac{x}{3} + \frac{2}{3}$, determine:

a) $f^{-1}(x)$ =
b) $f^{-1}(2x)$ =

6. Principais Funções

6.1 Função constante

É a função f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por **f(x) = K** onde K $\in \mathbb{R}$
Domínio: D(f) = $\mathbb{R}$
Imagem: Im(f) = { **K** }
Gráfico: é uma reta paralela ao eixo x.



Exercícios

45. Determine o valor de **a** para que a função $f(x) = (a^2 - 1)x + 2$ seja uma função constante.

46. Sabendo que $f(x) = (2m + 1)x - 3n$ e $g(x) = n\,x$, calcule os valores de **m** e **n** de modo que:
a) f(x) seja uma função constante
b) f(g(x)) seja uma função constante

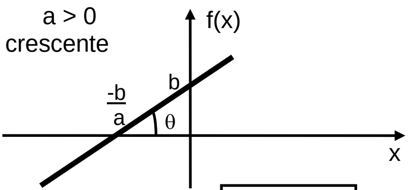
6.2 Função de 1º Grau

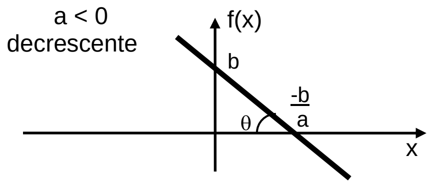
É a função $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\mathbf{f(x) = ax + b}$**,** com a e b $\in$ $a \neq 0$.

Domínio: $D(f) = \mathbb{R}$

Imagem: $Im(f) = \mathbb{R}$

Gráfico: é uma reta que forma com o eixo x um ângulo θ.





Zero ou raiz da função: $\boxed{\mathbf{x =} -\frac{b}{a}}$

LEMBRE-SE:
Toda função de 1º grau é injetora
Toda função do 1º grau definida R → R é bijetora
O ponto do gráfico que corta o eixo y é o valor da constante b
A função de 1º grau é ímpar quando b = 0

Exercícios

47. Dada a função de 1º grau, f(x) = x + 3, calcule:
a) f(0)
b) f(1)
c) f(4)
d) f(-1)
e) f(8)

48. Para que valores reais de m, f(x) = (m – 3)x + 6 é crescente?

49. Para que valores reais de a, $f(x) = (a + 2)x - 1$ é decrescente?

50. Sendo $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$, calcule o valor de $f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{4}\right)$.

51. Se $g(x) = mx + 4$, calcular m de modo que $g(2) = 10$.

52. Se $g(x) = 2x + b$, calcular b para que $g(-1) = 3$.

53. Dada a função $f:R \to R$, $f(x) = 2x + m$. Calcular m, sendo $f(f(1)) = 13$.

54. (UFMA) O gráfico da função $f(x) = ax + b$ intercepta o eixo dos x no ponto de abscissa 4 e passa pelo ponto $(1, -3)$, então a função f(x) é:

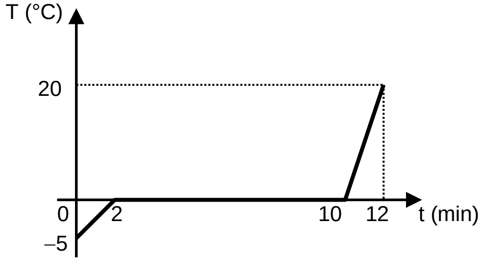
a) $f(x) = x - 3$
b) $f(x) = x - 4$
c) $f(x) = 2x - 5$
d) $f(x) = -2x - 1$
e) $f(x) = 3x - 6$

55. (FCC-BA) Seja a função $f : R \to R$, tal que $f(x) = ax + b$. Se os pontos $(0, -3)$ e $(2, 0)$ pertencem ao gráfico de f, então a + b é igual a:

a) $\frac{9}{2}$ b) 3 c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{-3}{2}$ e) -1

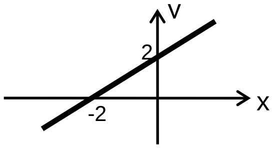
56. (UFCE) Seja f uma função real, de variável real, definida por $f(x) = ax + b$. Se $f(1) = -9$ e $b^2 - a^2 = 54$, calcule o valor de a – b.

57. Um recipiente contendo certa substância, foi levado ao fogo durante 12 minutos. A figura a seguir mostra a variação da temperatura da substância em função do tempo do experimento. Determine a expressão da função que associa a temperatura T ao tempo t.



58. Dada a função $f(x) = ax + b$, calcule "a" e "b" sabendo que $f(0) = 3$ e $f(-3) = 0$.

59. (ACAFE) A função representada no gráfico abaixo é:



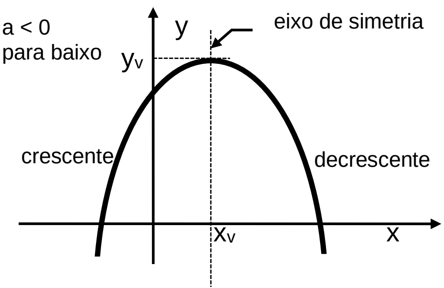
a) $y = 2x + 2$
b) $y = -2x + 2$
c) $y = x + 2$
d) $y = x - 2$
e) $y = 2x - 2$

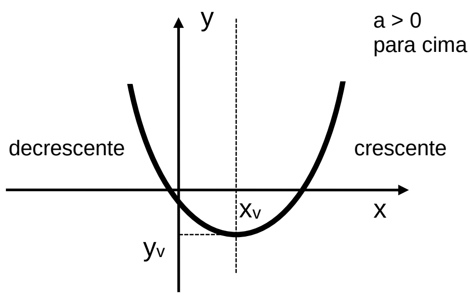
6.3 Função de 2º Grau ou função quadrática

É a função $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$, com a, b e c $\in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Domínio: $D(f) = \mathbb{R}$

Gráfico: é uma parábola, com o eixo de simetria paralelo ao eixo dos y.





Coordenadas do vértice:

$V = (x_v, y_v)$ $\boxed{x_v = -\dfrac{b}{2a}}$ $\boxed{y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$

Valor máximo e valor mínimo

Se $a > 0$, o valor mínimo é y_v pois a concavidade é para cima
Se $a < 0$, o valor máximo é y_v pois a concavidade é para baixo.

Imagem: Se $a > 0$, $Im(f) = \{y \in R \mid y \geq y_v\}$
Se $a < 0$, $Im(f) = \{y \in R \mid y \leq y_v\}$

Zeros da função: Báscara: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

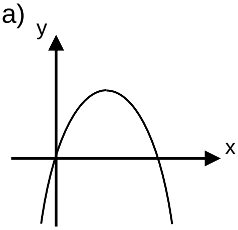
Exercícios

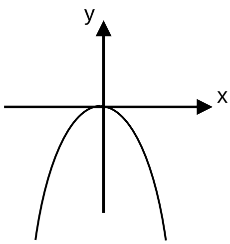
60. Dada a função $f(x) = (m + 3)\,x^2 + 5x - 4$, determine **m** para que f seja uma função quadrática.

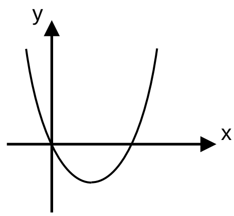
61. Sabe-se que $f(x) = (2m + 5)\,x^2 + 6x + 4\,m^2$ é uma função de 2º grau e que $f(0) = 25$. Calcule o valor de **m**.

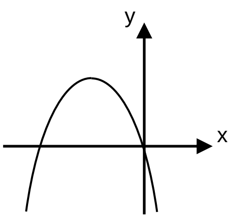
62. Obtenha as coordenadas dos pontos comuns dos gráficos de $y = x + 5$ e $y = x^2 - x + 2$.

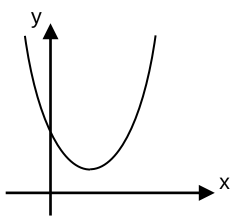
63. (F.D.B - DF) Na função de 2º grau $y = ax^2 + bx + c$, tem-se $a < 0$, $b > 0$ e $c = 0$. Então o gráfico dessa função tem a seguinte configuração.

a)


c)


e)


b)


d)


64. Some os valores associados às afirmativas verdadeiras:

01. $y = x^2 - 3x + 2$, admite um ponto de mínimo.
02. $y = -x^2 + 8x + 3$, admite um ponto de mínimo.
04. $y = x^2 - 6x - 4$, admite um ponto de máximo.
08. $y = -x^2 + 9x + 3$, admite um ponto de máximo.

65. Determine as coordenadas do vértice de:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$
b) $f(x) = x^2 + 8x$

c) $f(x) = x^2 - 3$
d) $f(x) = x^2 + 10x - 1$
e) $f(x) = -x^2 + 6x - 7$
f) $f(x) = -x^2 + 2x$

66. Dada a função quadrática $f: R \to R$, sendo $f(x) = -x^2 + 6x - 1$, o seu vértice é:

a) máximo, V = (3, 8)
b) máximo, V = (-3, -8)
c) mínimo, V = (3, -8)
d) mínimo, V = (-3, 8)

67. Construa os gráficos das funções $f: R \to R$:

a) $y = x^2 - 2x + 1$
b) $y = x^2 - 4x$
c) $y = -x^2 + 2x$
d) $y = -x^2 - 3x + 2$
e) $y = -x^2 + 3x$
f) $y = x^2 + 4x + 5$

68. Encontre a ordenada de cada vértice e responda qual é o conjunto imagem das seguintes funções:

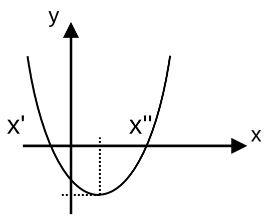
a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$
b) $f(x) = 3x^2 - 6x + 7$
c) $f(x) = -x^2 + 2x$

69. O custo para se produzir x unidades de um determinado produto é dado pela função $C(x) = 2x^2 - 100x + 5000$. Encontre o custo mínimo.

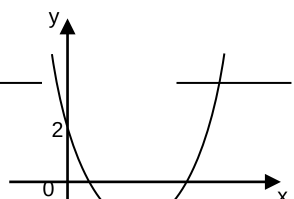
70. (UFPA) A parábola abaixo representa graficamente a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$.

Assim sendo, podemos afirmar que:

a) $a = b = c > 0$
b) $a > 0$, $b > 0$ e $c < 0$
c) $a > 0$, $b > 0$ e $c = 0$
d) $a > 0$, $b < 0$ e $c > 0$
e) $a > 0$, $b < 0$ e $c < 0$



71. (CESGRANRIO) Considere o gráfico a seguir, que representa a função definida por $y = 2x^2 - 5x + c$. As coordenadas do vértice V da parábola são:

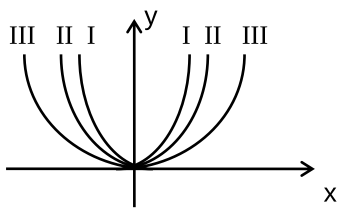


a) $\left(\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}\right)$ c) $\left(-\frac{5}{4}, -2\right)$ e) $(2, -1)$

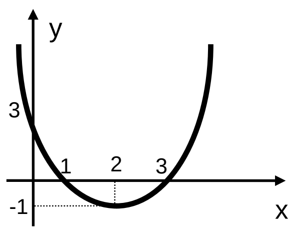
b) $\left(\frac{5}{4}, -\frac{3}{5}\right)$ d) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$

72. Observando-se o gráfico, onde estão representados três parábolas (I), (II) e (III), de equações $f(x) = ax^2$, $f(x) = bx^2$ e $f(x) = cx^2$, respectivamente, conclui-se que:

a) $a < b < c < 0$
b) $0 < c < b < a$
c) $0 < a < b < c$
d) $c < b < a < 0$
e) $b < a < c < 0$



73. (ACAFE - 90) Com relação ao gráfico podemos afirmar que:



a) O vértice é (2, -1) e $\Delta = 0$.
b) O ponto de intersecção com y é (3, 0) e $\Delta = 0$.
c) Os zeros são 1 e 3 e $\Delta > 0$.
d) A imagem da função é $]-1, \infty[$.
e) Os pontos de intersecção com os eixos coordenados são (3, 0) e (1, 3).

74. (OSEC-SP) O trinômio do 2º grau $y = (m - 1)x^2 + mx + m$, onde $m \in R$, é sempre positivo se, e somente se:

a) $m > 1$ c) $m > \frac{4}{3}$ e) $m < 0$ ou $m > \frac{4}{3}$

b) $m < 0$ d) $1 < m < \frac{4}{3}$

75. (UFPE) O custo C, em reais, para se produzir n unidades de determinado produto é dado por $C = 2510 - 100n + n^2$. Quantas unidades deverão ser produzidas para se obter o custo mínimo?

76. (FGV-SP) O lucro mensal de uma empresa é dado por $L = -x^2 + 30x - 5$, onde x é a quantidade mensal vendida. Pergunta-se:

a) Qual o lucro mensal máximo possível?
b) Entre quais valores deve variar x para que o lucro mensal seja, no mínimo, igual a 195?

77. (UFBA) Considere a função quadrática representada por uma parábola que intercepta o eixo 0y em P(0, –2) e cujo vértice é $V\left(\frac{3}{4}, -\frac{25}{8}\right)$. Pode-se, então, afirmar:

I. $V\left(\frac{3}{4}, -\frac{25}{8}\right)$ é o ponto máximo da função.
II. A intersecção da parábola com o eixo 0x é (–3, 0).
III. A equação do eixo de simetria da parábola é $x = \frac{3}{4}$.
IV. A parábola e a reta $y = -x + 2$ se interceptam nos pontos (2, 0) e (–1, 3).

Quais afirmações são verdadeiras?

78. (PUCC-SP) A trajetória de um projétil foi representada no plano cartesiano por $y = \frac{-x^2}{64} + \frac{x}{16}$, com uma unidade representado o quilômetro. A altura máxima que o projétil atingiu foi:

a) 40 m
b) 64 m
c) 16,5 m
d) 32 m
e) 62,5 m

79. (ACAFE) Para que valores de **p** a função $y = (2 - p)x^2 - 2x - 1$ tem como gráfico uma parábola com a concavidade voltada para baixo e não intercepta o eixo x?

a) $p > 2$
b) $p > 3$
c) $2 < p < 3$
d) $p < 2$
e) $p < 3$

6.4 Função modular

a) Módulo

Denomina-se módulo de um número real qualquer, ao próprio número (se este é positivo ou nulo) ou ao seu oposto (se este é negativo), ou seja,

logo, $\boxed{\begin{array}{l} |x| = x, \text{ se } x \geq 0 \\ |x| = -x, \text{ se } x < 0 \end{array}}$ $\boxed{|x| \geq 0, \ \forall \ x \in \mathbb{R}}$

Na reta dos números reais, o módulo de um número representa a distância deste número ao número zero.

Exemplo: $|-a| = a$, $|a| = a$

b) Equações modulares

São as equações que apresentam a incógnita em uma expressão em módulo.
Para encontrar a solução da equação modular, reduzindo a equação a uma outra de solução conhecida.

Exemplos: $|2x| = 4 \Rightarrow$ $2x = 4 \rightarrow x = 2$ $\Rightarrow$ $S = \{-2, 2\}$
$-2x = 4 \rightarrow x = -2$

$|2x| = -4 \Rightarrow$ como o módulo é sempre um número positivo, não existe $x \in \mathbb{R}$, que satisfaça a equação, logo a solução $S = \varnothing$.

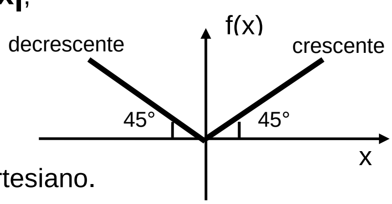
c) Função modular

É a função $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\mathbf{f(x) = |x|}$,

Domínio: $D(f) = \mathbb{R}$

Imagem: $Im(f) = \mathbb{R}_+$

Gráfico: são duas retas, acima do eixo x e simétricas ao eixo dos y.
As retas se interceptam na origem do plano cartesiano.



LEMBRE-SE: $\sqrt{x^2} = |x|$

d) Funções compostas com função modular

Existem funções com a incógnita no módulo que são obtidas a partir da função composta da modular ($f(x) = |x|$) e outra função real (1º grau, 2º grau, etc.).

<u>Exemplo 1</u>: A função $y = |x| + a$, definida de $R \rightarrow R$, é obtida da composição de $g(x) = x + a$ e $f(x) = |x|$, ou seja $g(f(x)) = y = |x| + a$

Neste caso o domínio $D(gof) = \mathbf{R}$ porém a imagem será o intervalo fechado $[a,\infty)$, isto é $Im(gof) = \{ y \in \mathbf{R} \mid y \geq a\}$ e o gráfico apresenta duas retas acima do eixo x, simétricas em relação ao eixo y que se cruzam no ponto $y = a$

Exemplo 2: A função y = |x + a|, definida de R→R, é obtida da composição de g(x) = |x| e f(x) = x + a, ou seja g(f(x)) = y = |x + a|.

Neste caso o domínio D(gof) = **R** porém a imagem será o intervalo fechado [0,∞), isto é Im(gof) = { y ∈ **R** | y ≥ 0}, e o gráfico apresenta duas retas acima do eixo x que se cruzam no ponto x = -a. Observe que não existe simetria em relação ao eixo y.

Exercícios

80. (UCS-RS) O conjunto solução da equação $|x|^2 + 3|x| - 4 = 0$ é:

a) {1}
b) {-1, 1}
c) {4}
d) {1, 4}
e) {-1, 1, 4}

81. Resolva as equações:

a) |x – 1| = 4
b) |x + 1| = 9
c) |x – 3| = 5
d) |x + 1| = -5

82. Encontre o conjunto solução de:

a) |x – 2| = x
b) |2x – 1| = x
c) |2x + 1| = x
d) |x| = x – 3

7. Inequações

Seja a função real y = f(x) na variável real x. Inequação é uma das seguintes desigualdades:

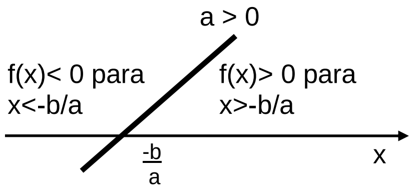
$$f(x) > 0 \qquad f(x) \geq 0 \qquad f(x) < 0 \qquad f(x) \leq 0$$

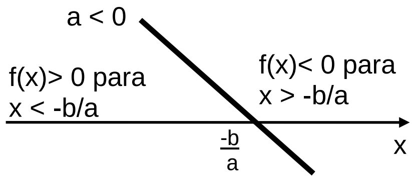
Resolver uma inequação é determinar os valores da variável x para os quais ocorre uma das desigualdades citadas.

7.1 Inequações de 1º grau

São expressões do tipo: **ax + b > 0** **ax + b ≥ 0** **ax + b < 0** **ax + b ≤ 0**

Solução gráfica:





7.2 Inequações de 2º grau

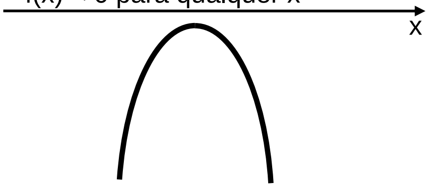
São expressões do tipo: $ax^2 + bx + c > 0$ $\quad$ $ax^2 + bx + c \geq 0$

$ax^2 + bx + c < 0$ $\quad$ $ax^2 + bx + c \leq 0$

Solução gráfica :

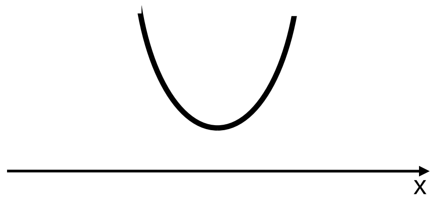
a < 0 e Δ < 0

f(x) < 0 para qualquer x

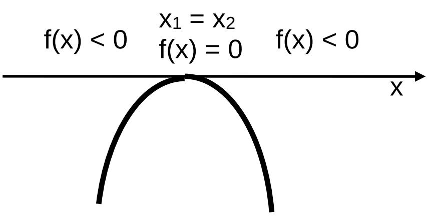


a > 0 e Δ < 0

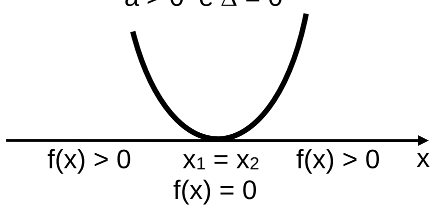
f(x) > 0 para qualquer x



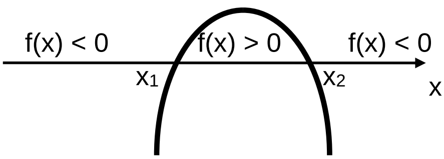
a < 0 e Δ = 0



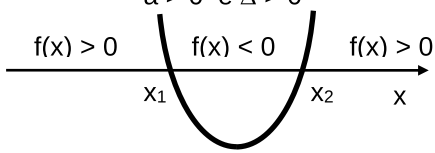
a > 0 e Δ = 0



a < 0 e Δ > 0



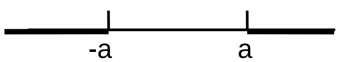
a > 0 e Δ > 0



7.3 Inequações modulares

São expressões do tipo: $|x| \geq a \Rightarrow x \geq a$ ou $x \leq -a$ $\quad$ $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$

Solução gráfica:



7.4 Inequações simultâneas ou sistema de inequações

S_2

São inequações do tipo: $\underbrace{\mathbf{f(x) \le g(x)}}_{S_1} \le \mathbf{h(x)}$ ou $\begin{cases} \mathbf{f(x) > 0} \rightarrow S_1 \\ \mathbf{gx) \le 0} \rightarrow S_2 \end{cases}$

A solução deste sistema será a intersecção S_1 e S_2., isto é, $S_1 \cap S_2$.

7.5 Inequações produto ou quociente

Chamam-se inequações produto aquelas redutíveis a forma **f(x) . g(x) > 0** (ou <, ≤, ≥ e ≠), onde f(x) e g(x) são funções de variável x. Para resolver, faz-se o estudo do sinal de f(x) e g(x) e aplica-se a regra dos sinais.

Chamam-se inequações quociente aquelas redutíveis a forma $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ (ou <, ≤, ≥ e ≠), onde f(x) e g(x) são funções de variável x.

Para resolver, faz-se o estudo do sinal de f(x) e g(x) e aplica-se a regra dos sinais, observando, apenas, que o denominador não pode ser nulo, ou seja, $g(x) \neq 0$.

Exercícios

83. Resolva as inequações:

a) $3x - 4 \geq 0$

b) $-5x - 1 < 0$

c) $3 - 4x > x - 7$

d) $\frac{x}{4} - \frac{3.(x-1)}{10} \leq 1$

e) $\begin{cases} 3x - 1 > 0 \\ -x - 2 > 0 \end{cases}$

f) $x^2 + 14x + 49 > 0$

g) $-3x^2 + 5x - 7 < 0$

h) $(x^2 - 25).(3x - 6) < 0$

i) $\frac{-x^2 + 9x - 20}{2x - 6} \geq 0$

j) $\frac{x + 15}{x^2 - 10x + 25} \leq 1$

k) $\begin{cases} x^2 + 16x - 80 < 0 \\ 2x + 7 \geq 0 \end{cases}$

l) $6 \leq x^2 + 4x + 1 < 3x + 3$

m) $| x - 5 | < 2$

n) $| x + 6 | - 1 > 0$

84. Resolva as inequações do 2º grau, no conjunto R:

a) $x^2 - 5x + 6 \leq 0$

b) $x^2 - 7x + 6 \geq 0$

c) $x^2 - 6x < 0$

d) $x^2 - 4x + 4 \geq 0$

e) $x^2 - x - 2 < 0$

f) $x^2 - 1 \geq 0$

85.(UEMT) A solução do sistema $\begin{cases} 3x + 2 < 7 - 2x \\ 48x < 3x + 10 \\ 11 - 2(x-3) > 1 - 3(x-5) \end{cases}$ é o conjunto de todos os números reais x, tais que:

a) $-1 < x < 0$
b) $-1 < x < \frac{1}{3}$
c) $-1 < x < 1$
d) $-1 < x < \frac{4}{9}$
e) $-1 < x < \frac{2}{9}$

86. As figuras 1 e 2 mostram as funções f(x) e g(x) representadas pelos seus gráficos cartesianos.

Fig. 1

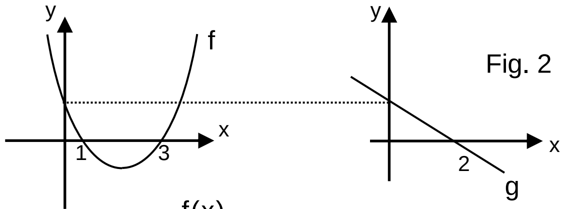


Fig. 2

Qual a solução da inequação $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$?

87.(PUC-MG) O conjunto solução da inequação $\frac{3x-2}{x-3} \leq 1$ é $S = \{x \in R \mid a \leq x < b\}$.

O valor de $\left|\frac{b}{a}\right|$ é:

a) $\frac{3}{2}$
b) $\frac{5}{2}$
c) 3
d) 5
e) 6

88. (PUC-MG) A solução da inequação $\frac{3}{3 - 2x - x^2} < 1$ é o conjunto de valores de x, tais que:

a) $-3 < x < -2$ ou $0 < x < 1$
b) $x < -3$ ou $-2 < x < 0$ ou $x > 1$
c) $x < -2$ ou $x > 0$
d) $-3 < x < 1$
e) $x < -3$ ou $x > 0$

89. (FUVEST) O conjunto solução de $(-x^2 + 7x - 15).(x^2 + 1) < 0$ é:

a) $\varnothing$
b) [3,5]
c) R
d) [–1, 1]
e) R_+

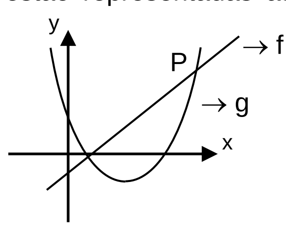
90. (MACK-SP) O conjunto solução de $1 < |x - 3| < 4$ é o conjunto dos números x tais que:

a) $4 < x < 7$ ou $-1 < x < 2$
b) $-1 < x < 7$ ou $-3 < x < -1$
c) $-1 < x < 7$ ou $2 < x < 4$
d) $0 < x < 4$
e) $-1 < x < 4$ ou $2 < x < 7$

91. (FEI-SP) Se $|x + 1| \le |2x - 3|$, então:

a) $x \ge \frac{2}{3}$
b) $x \le \frac{2}{3}$ ou $x \ge 4$
c) $x \le 0$ ou $x \ge 3$
d) não existe $x \in R$ que satisfaça a desigualdade
e) $0 \le x \le \frac{2}{3}$

92. (UERJ) No sistema de coordenadas cartesianas estão representadas as funções $f(x) = 4x - 4$ e $g(x) = 2x^2 - 12x + 10$.



Com base nos dados, determine:

a) as coordenadas do ponto P.
b) o conjunto solução da inequação $\frac{g(x)}{f(x)} < 0$, $f(x) \neq 0$.