XII - INTRODUÇÃO A GEOMETRIA

Assim como o homem foi aprimorando as técnicas de contagem, necessárias nos seu negócios, ele foi desenvolvendo, também por questões comerciais, um dos ramos mais importantes da matemática: a geometria.

O prefixo grego *geo* quer dizer terra, e o sufixo *metria* significa medida. Assim, o vocábulo *geometria*, tem, como significado literal, medida da terra. Porém, assim como *democracia* (governo do povo), a concepção do termo foi mudando, como que ganhando uma “definição” mais adequada às circunstâncias históricas.

Há indícios de que, desde 2000 a.C., os babilônios desenvolveram um considerável conhecimento geométrico. Os agrimensores usavam-no para medir terras, os construtores para fazer edificações. Uma prova disso são as pirâmides construídas perto do rio Nilo.

Por volta de 600 a.C. os matemáticos gregos começaram a sistematizar os conhecimentos geométricos da época. Ordenando a grande quantidade de conhecimentos que os egípcios haviam adquirido ao longo do tempo, um matemático grego chamado Euclides, por volta de 300 a.C. deu ordem lógica a esses conhecimentos e trabalhou na descoberta das propriedades das figuras geométricas. O vasto universo de propriedades, teoremas e definições estudadas hoje, nos ensinos fundamental, médio e superior, desde as mais básicas até as mais complexas, foram agrupadas num volume de 13 obras de Euclides, conhecido como “Os Elementos”.

A “formalização” da geometria euclidiana, que teve contribuição e aprimoramento (em outras obras) de matemáticos mais recentes, como o alemão David Hilbert, pode ser entendida também como a oficialização dos teoremas estudados. Ou seja, o agrupamento de “Os Elementos” tem, de certa forma, valor de “documento oficial” da geometria plana euclidiana.

EUCLIDES DE ALEXANDRIA

Hoje, todos os dias vemos figuras que têm nomes próprios em Geometria. Podemos medi-las, compará-las e descobrir algumas propriedades dessas figuras.

Ao observarmos as janelas das casas percebemos que a maioria delas tem a forma de um quadrado ou retângulo, outras vezes com formas circulares.

Os carros apresentam seus vidros com formas variadas, os traseiros geralmente tem a forma de um trapézio, os laterais podem ser triângulos, retângulos ou trapézios. Alguns carros utilitários apresentam vidros laterais na forma de paralelogramo.

Os relógios de parede, na sua maioria, apresentam forma de um círculo, isto é o seu contorno é uma circunferência e os ponteiros estão fixados no centro dessa circunferência.

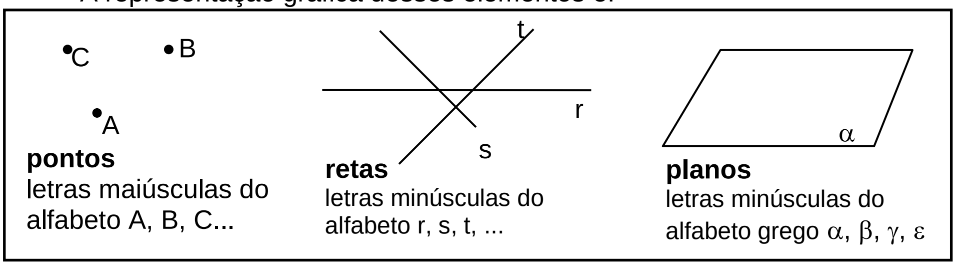
Considerações básicas sobre ponto, reta e plano

A geometria é uma ciência que se baseia nos conceitos básicos de ponto, reta e plano e no conjunto de propostas evidentes chamadas postulados ou axiomas.

Os entes ponto, reta e plano não se definem. É através da nossa experiência e pela imagem que temos de cada um deles que sabemos o que representam.

A partir desses três elementos são construídas as demais figuras geométricas.

A representação gráfica desses elementos é:



Esses elementos relacionam-se entre si através de certas propriedades não demonstráveis chamadas postulados ou axiomas. Entre os postulados da geometria plana, é importante gravar que:

a) **Postulado da Existência**
- Existem ponto reta e plano.
- Numa reta, bem como fora dela, existem infinitos pontos.
- Num plano, bem como fora dele, existem infinitos pontos.

b) **Postulados da Determinação**
- Dois pontos distintos determinam uma única reta.
- Três pontos não-colineares determinam um único plano.
- Uma reta e um ponto fora dela determinam um plano.
- Duas retas paralelas distintas determinam um plano.
- Duas retas concorrentes determinam um plano.

c) **Postulado da Inclusão**
Uma reta que possui dois pontos distintos em um plano, está contida nesse plano.

d) **Postulados da Divisão**
- Um ponto de uma reta, divide-a em duas regiões denominadas semi-retas. O ponto é a origem das semi-retas, e elas são chamadas opostas.
- Uma reta de um plano divide-o em duas regiões denominadas semi-planos. A reta é a origem das semi-planos, e eles são chamados opostos.
- Um plano divide o espaço em duas regiões denominados semi-espaços. O plano é a origem dos semi-espaços, e eles são chamados opostos.

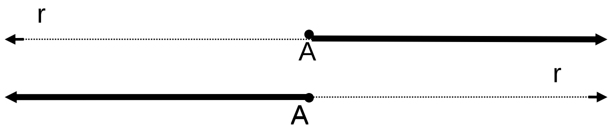
e) **Postulado da Intersecção**
Se dois planos distintos têm um ponto em comum, então eles têm uma única reta em comum passando por esse ponto.

f) **Postulado das Paralelas**
Dado um ponto P e uma reta r, existe, e é única, a reta que passa por P e é paralela a r.

Retas

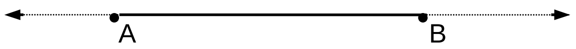
SUBCONJUNTOS DA RETA

a) **Semi reta (de origem A):** é cada um dos dois conjuntos de pontos em que o ponto A divide a reta, incluindo o próprio ponto A.



b) **Segmento de reta:** é o conjuntos de todos os pontos da reta situados entre dois pontos distintos A e B, incluindo os próprios pontos A e B.

Notação: $\overline{AB}$



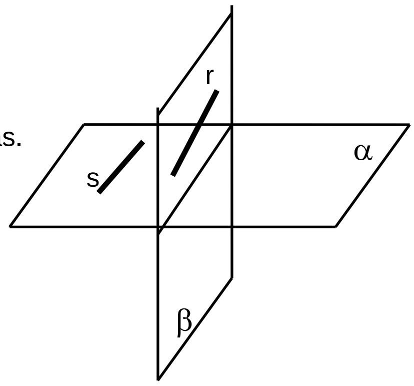
LEMBRE-SE: A medida do segmento $\overline{AB}$ é denotada por AB, isto é, se o segmento de reta é 3 cm, escrevemos: AB = 3 cm.

Dois segmentos ($\overline{AB}$ e $\overline{CD}$) que possuem medidas iguais são chamados **congruentes**, e representa-se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$

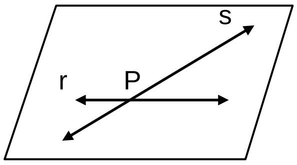
POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS RETAS

Duas retas distintas podem ser:

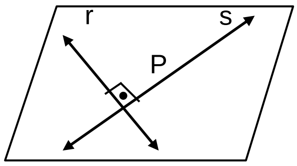
a) **reversas:** quando não existe um plano que contém as duas retas.



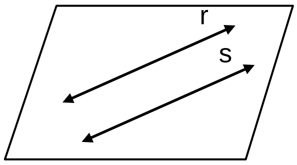
b) **coplanares**: quando existe um plano que contém as duas retas. As retas coplanares podem ser:



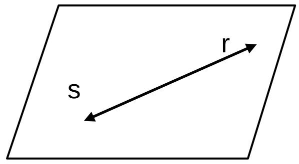
$r \cap s = \{ P \}$
concorrentes



$r \cap s = \{ P \}$ e $r \perp s$
concorrentes perpendiculares



$r \cap s = \varnothing$
paralelas

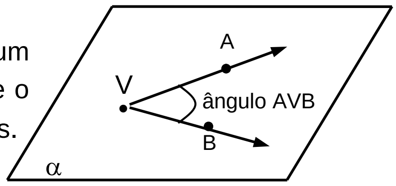


$r \cap s = r = s$
coincidentes

LEMBRE-SE: As retas reversas, da mesma forma que as paralelas, não tem ponto em comum, porém as retas reversas não são coplanares, isto é, não estão no mesmo plano

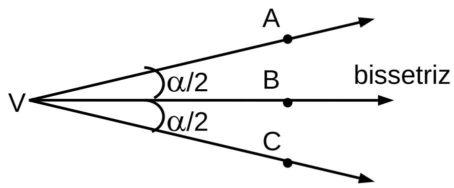
Ângulos

Sejam $\overrightarrow{VA}$ e $\overrightarrow{VB}$ duas semi retas de mesma origem, num plano α. Ângulo é, por definição, cada uma das regiões em que o plano α fica dividido por essas semi- retas, incluindo as semi-retas.



BISSETRIZ DE UM ÂNGULO

É a semi-reta de origem no vértice do ângulo, que o divide em dois outros ângulos de mesma medida (congruentes).



MEDIDAS DE ÂNGULOS

A medida de qualquer ente geométrico (figura, segmento, ângulo, etc...) exige sempre um padrão de medida apropriado à natureza do ente a ser medido.

A principal unidade usada para medir ângulos é o grau, e representa-se por °.

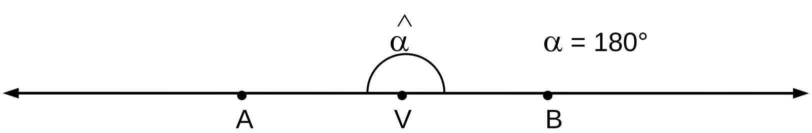
Para se obter um ângulo de 1 grau (1°) dividi-se o ângulo de uma volta completa em 360 partes congruentes.

A unidade grau subdivide-se em unidades menores que são minuto e o segundo, de tal modo que: cada grau é formado por 60 minutos: $1° \rightarrow 60'$

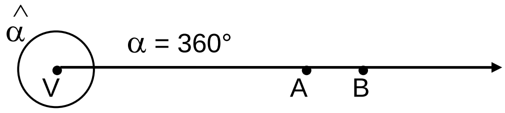
cada minuto é formado por 60 segundos: $1' \rightarrow 60''$

PRINCIPAIS ÂNGULOS

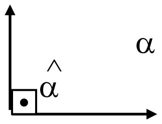
a) ângulo raso ou de meia volta $\rightarrow$ é aquele em que os lados são duas semi-retas opostas, isto é, tem mesma origem e sentidos contrários. A medida do ângulo raso é 180° (cento e oitenta graus).



b) ângulo de volta completa $\rightarrow$ é aquele em que os lados são duas semi-retas coincidentes; seus pontos ocupam todo o plano. A medida do ângulo de volta completa é 360° (trezentos e sessenta graus).

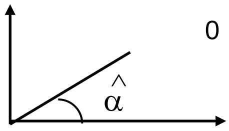


c) ângulo reto → é o ângulo correspondente a metade do ângulo raso ou de meia volta. Sua medida é exatamente 90° (noventa graus).



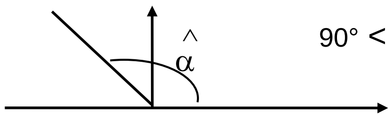
$\hat{\alpha} = 90°$

d) ângulo agudo → é o ângulo menor que o reto. Sua medida está entre zero e 90° (noventa graus).



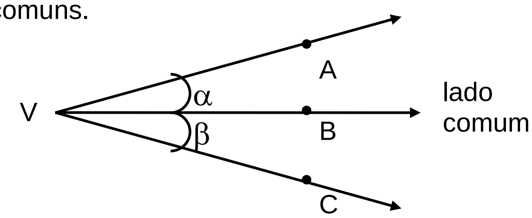
$0 < \hat{\alpha} < 90°$

e) ângulo obtuso → é o ângulo maior que o reto e menor que o raso. Sua medida está entre 90° e 180°.

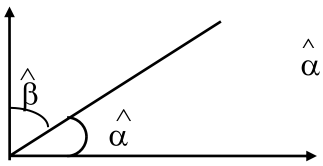


$90° < \hat{\alpha} < 180°$

f) ângulos adjacentes ou consecutivos → são dois ângulos que tem o mesmo vértice, um lado comum e não tem pontos interiores comuns.

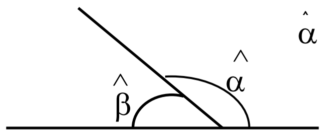


g) ângulos complementares → são dois ângulos cuja soma das medidas é 90°. Dizemos que cada um deles é o complemento do outro.



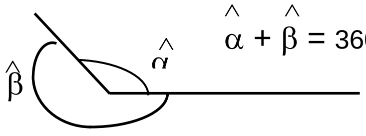
$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90°$

h) ângulos suplementares → são dois ângulos cuja soma das medidas é 180°. Dizemos que cada um deles é o suplemento do outro.



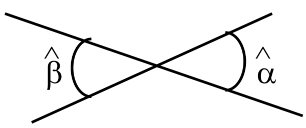
$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180°$

i) ângulos replementares → são dois ângulos cuja soma das medidas é 360°. Dizemos que cada um deles é o replemento do outro.



$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 360°$

j) ângulos opostos pelo vértice (o.p.v.) → são dois ângulos que tem apenas o vértice em comum, e tais que a união dos lados forma duas retas concorrente, isto é, duas retas que possuem apenas um ponto comum.



$\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ são o.p.v.

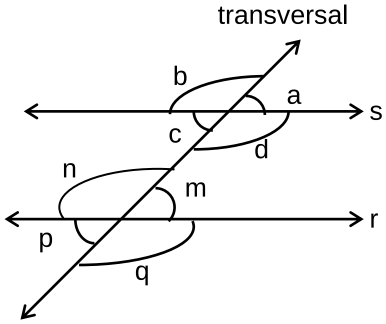
Lembre-se:

- Dois ângulos o.p.v. são sempre congruentes, isto é, têm a mesma medida.
- Duas retas concorrentes que formam quatro ângulos retos são chamadas **retas perpendiculares.**

RETAS PARALELAS CORTADAS POR UMA TRANSVERSAL

Dadas duas retas paralelas, chama-se reta transversal qualquer reta que intercepte ambas as retas paralelas. Essa transversal determina, na intersecção com uma das paralelas, quatro ângulos e, na intersecção com a outra paralela, mais quatro ângulos.

Na figura, certos pares de ângulos recebem nome especiais:



- ângulos correspondentes→ **a** e **m**, **b** e **n,** **c** e **p,** **d** e **q.**
- ângulos alternos internos→ **c** e **m,** **d** e **n.**
- ângulos alternos externos→ **a** e **p,** **b** e **q.**
- ângulos colaterais internos→ **d** e **m, c** e **n**.
- ângulos colaterais externos→ **a** e **q, b** e **p.**

EXERCÍCIOS

01. Assinale verdadeiro ou falso:

a) ( ) Três pontos distintos sempre determinam três retas distintas.

b) ( ) Três pontos colineares e distintos dois a dois determinam uma única reta.

c) ( ) Três pontos distintos determinam um único plano.

d) ( ) Três pontos não colineares determinam um único plano.

e) ( ) Três pontos sempre são colineares.

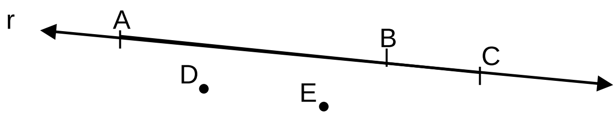
f) ( ) Três pontos sempre são coplanares.

g) ( ) Quatro pontos coplanares determinam um único plano.

h) ( ) Se o ponto P de uma reta r pertence a um plano α, então a reta r está contida em α.

02. Observe o desenho a seguir e assinale as afirmações verdadeiras:

01. A reta r contém $\overline{AB}$.
02. $A \in r$ e $A \in \overline{AB}$.
04. $A \in r$ e $D \in r$.
08. $\overline{BC}$ está contido em r.
16. $\overline{AB} = \overline{BC}$
32. $\overline{AB} \subset \overleftrightarrow{AB}$
64. $\overline{AB} \subset \overline{BC}$



03. Sejam A, B e C três pontos colineares de modo que as semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são opostas e o ponto C distinto de O e B pertence à semi-reta $\overrightarrow{OB}$. Então:

a) C pode pertencer à semi-reta $\overrightarrow{OA}$;

b) C é o ponto médio de $\overline{BC}$;

c) A pertence à semi-reta $\overrightarrow{BC}$;

d) A intersecção das semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{BC}$ se não for vazia é a própria semi-reta $\overrightarrow{OA}$;

e) O ponto B pode não pertencer à semi-reta $\overrightarrow{OC}$.

04. Some os valores correspondentes as afirmações verdadeiras.

01. Um segmento de reta é uma parte limitada da reta.
02. Uma semi-reta é uma parte ilimitada da reta.
04. Entre dois pontos distintos de uma reta, por mais próximos que sejam, existe outro ponto dessa reta.
08. Um segmento de reta tem um número finito de pontos.
16. Com paciência é possível contar todos os pontos que existem num segmento de reta.

05. Um ângulo mede a metade de seu complemento, então esse ângulo mede:

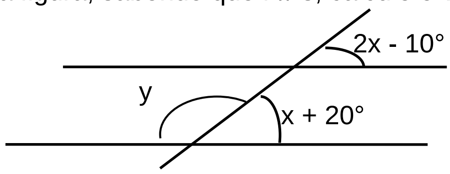
a) 90° b) 60° c) 45° d) 30° e) 15°

06. Calcule as medidas x e y de dois ângulos complementares, sabendo que $4x - y = 10°$.

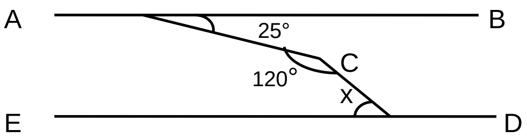
07. O triplo do complemento de um ângulo, aumentado em 50°, é igual ao suplemento do ângulo. Determine a medida do ângulo, em graus.

08. A soma de um ângulo com a terça parte do seu complemento resulta 46°. Determine o suplemento desse ângulo.

09. Na figura, sabendo que r // s, calcule o valor do ângulo y.

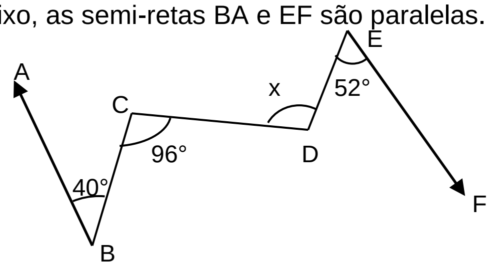


10. Na figura, sabendo que AB // DE, determine a medida do ângulo x.



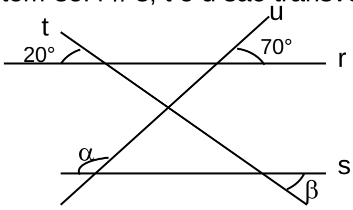
11. Na figura abaixo, as semi-retas BA e EF são paralelas. O ângulo x vale:

a) 180°
b) 108°
c) 118°
d) 128°
e) 80°

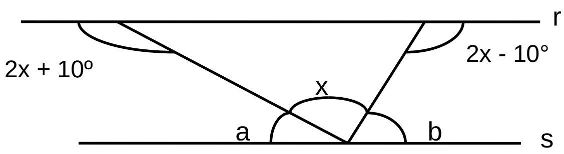


12. (FCC) Na figura a seguir, tem-se: r // s; t e u são transversais. O valor de $\alpha + \beta$ é:

a) 140°
b) 130°
c) 120°
d) 100°
e) 90°

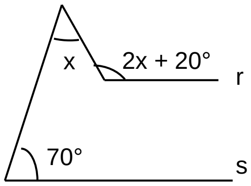


13. Sabendo que as retas r e s são paralelas, calcule:
a) a medida do ângulo x.
b) a medida dos ângulos a e b.

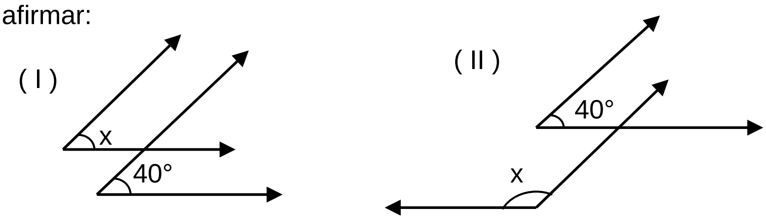


14. (FEI-SP) Na figura ao lado, as retas r e s são paralelas.

A medida do ângulo indicada com x é:
a) 70°
b) 50°
c) 60°
d) 85°
e) 55°



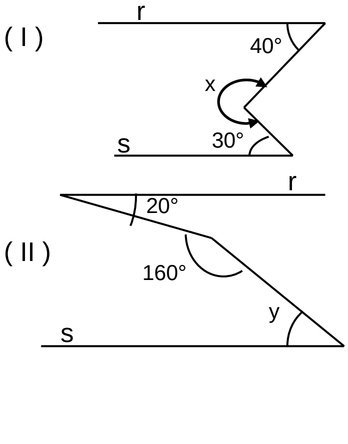
15. As figuras abaixo representam pares de ângulos de lados respectivamente paralelos. Assim, é correto afirmar:



01. Na figura I, o ângulo de medida x é agudo.
02. Na figura I, x = 40°.
04. Na figura II, o ângulo de medida x é obtuso.
08. Na figura II, x é igual 100°.
16. A soma dos ângulos x da figura I e II é igual a um ângulo raso.

16. Sobre as figuras ao lado, onde r // s, é correto afirmar:

01. Na figura I, $\hat{x}$ = 70°
02. Na figura I, $\hat{x}$ = 290°
04. Na figura I, $\hat{x}$ é ângulo obtuso
08. Na figura II, $\hat{y}$ é ângulo agudo
16. Na figura II, $\hat{y}$ = 20°
32. Na figura II, $\hat{y}$ = 40°



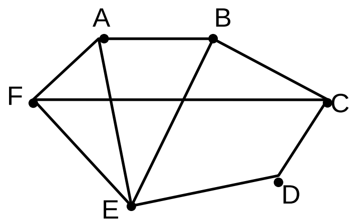
XIII. FIGURAS GEOMÉTRICAS

Denomina-se figura geométrica qualquer conjunto de pontos agrupados.
A figura geométrica que tem todos os pontos em um mesmo plano chama-se figura geométrica plana.
As figuras geométricas em que nem todos os pontos estão em um mesmo plano, são chamadas de figuras geométricas não planas ou espaciais.

POLÍGONOS

Chama-se de **polígonos** as regiões planas cujos contornos são formados por segmentos de retas. Em todos os polígonos têm-se os seguintes elementos:

- **lados:** são segmentos de reta que formam o contorno: $\overline{AB}, \overline{AB}, \overline{CD},$ etc.
- **vértices:** são os pontos comuns a dois lados consecutivos A, B, C, etc.
- **diagonais:** são os segmentos que unem dois vértices não consecutivos: $\overline{AE}, \overline{BE}, \overline{FC}$ etc.

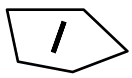


Os polígonos recebem nomes de acordo com o número de seus lados. Os mais conhecidos são:

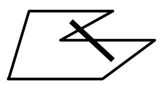
3	triângulos	9	eneágono
4	quadriláteros	10	decágono
5	pentágono	11	undecágono
6	hexágono	12	dodecágono
7	heptágono	15	pentadecágono
8	octógono	20	icoságono

Os polígonos podem ser:

convexos $\rightarrow$ são aqueles que, para quaisquer dois pontos internos, o segmento de reta que os une não intercepta os lados.



côncavos $\rightarrow$ são aqueles que, existem dois pontos internos que o segmento de reta que os une intercepta os lados.



regulares $\rightarrow$ são aqueles que possuem todos os lados de mesma medida e os ângulos internos iguais. Por exemplo: quadrado, triângulo eqüilátero, hexágono, etc.

PROPRIEDADES DE UM POLÍGONO DE N LADOS

a) Soma dos ângulos internos $\Rightarrow$ $\mathbf{Si = (n - 2) . 180°}$

b) Soma dos ângulos externos (só para os convexos) $\Rightarrow$ $\mathbf{Se = 360°}$

c) Número de diagonais $\Rightarrow$ $\mathbf{D = \dfrac{n.(n-3)}{2}}$

PERÍMETRO E ÁREA DE POLÍGONOS

Perímetro é a soma das medidas dos lados de um polígono. Nos polígonos regulares, o perímetro é calculado multiplicando-se o numero de lados pelo comprimento deste.

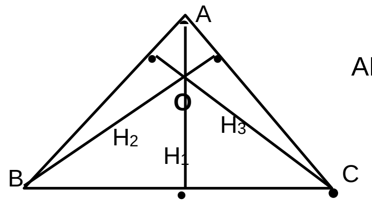
Área é a medida da região definida pelo polígono.

Triângulos

São polígonos de três lados.

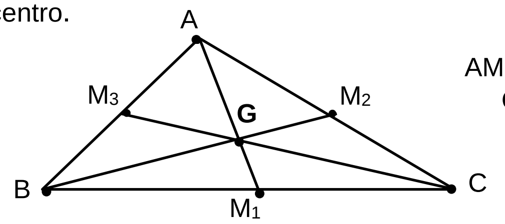
ELEMENTOS LINEARES DOS TRIÂNGULOS

a) altura→ é o segmento que une um vértice ao lado oposto, sendo perpendicular ao mesmo. A intersecção das alturas chama-se ortocentro.



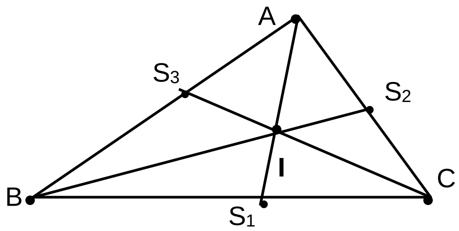
AH_1, BH_2, CH_3 → alturas
O → ortocentro

b) mediana→ é o segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto. A intersecção das medianas chama-se baricentro.



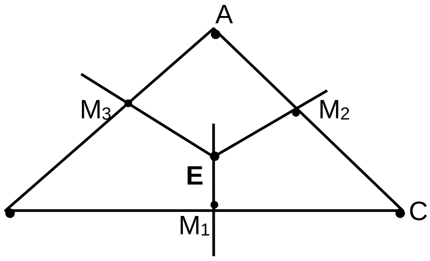
AM_1, BM_2, CM_2 → medianas
G → baricentro

c) bissetriz interna→ é o segmento, contido no triângulo, que divide o ângulo interno em dois ângulos iguais. A intersecção das bissetrizes chama-se incentro.



AS_1, BS_2, CS_3 → bissetrizes
I → incentro

d) mediatriz→ é a reta perpendicular ao lado, passando pelo ponto médio do mesmo. A intersecção das mediatrizes chama-se circuncentro.

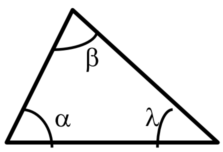


AM_1, BM_2, CM_3 → mediatrizes
E → circuncentro

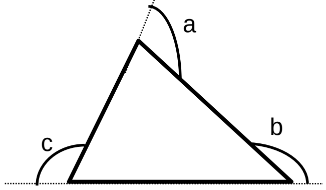
PROPRIEDADES ANGULARES

Os triângulos apresentam as seguintes propriedades angulares:

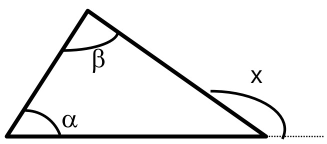
- soma dos ângulos internos Si = 180°
- soma dos ângulos externos Se = 360°
- cada ângulo externo é igual a soma dos dois ângulos internos não adjacentes.



$Si = \alpha + \beta + \gamma$



$Se = a + b + c$



$x = \alpha + \beta$

CLASSIFICAÇÃO E PROPRIEDADES DOS TRIÂNGULOS

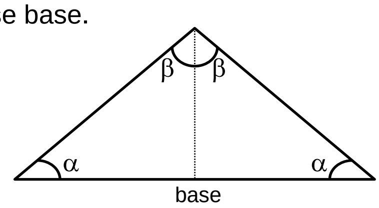
a) triângulo acutângulo→ todos os ângulos internos são agudos.

b) triângulo obtusângulo→ um ângulo interno é obtuso e os outros dois são agudos.

c) triângulo isósceles → tem dois lados iguais e o terceiro chama-se base.

Propriedades:

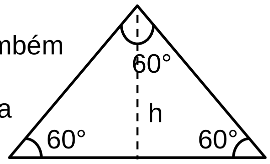
- Os dois ângulos adjacentes a base são iguais.
- A mediana traçada em relação a base é também altura e bissetriz interna.



d) triângulo equilátero → tem os três lados iguais e também os três ângulos internos mediando 60° cada um.

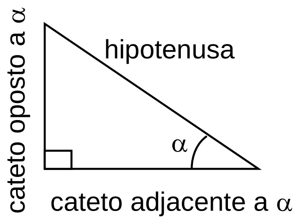
Propriedades:

- A mediana traçada em relação a qualquer um dos lados é também bissetriz interna e altura.
- O baricentro G é também incentro e circuncentro, isto é, os centros da circunferência inscrita e circunscrita coincidem.
- O raio da circunferência circunscrita é o dobro do raio da circunferência inscrita.



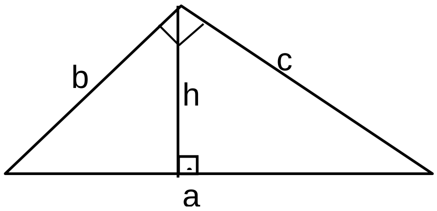
e) triângulo retângulo → um ângulo interno é reto e os outros dois são agudos. Os lados que determinam o ângulo interno são chamados de **catetos** e o lado oposto ao ângulo reto chama-se **hipotenusa.**

Todo o triângulo retângulo pode ser inscrito numa semicircunferência cujo diâmetro é igual a hipotenusa do triângulo.



TEOREMA DE PITÁGORAS

Seja o triângulo retângulo ao lado:

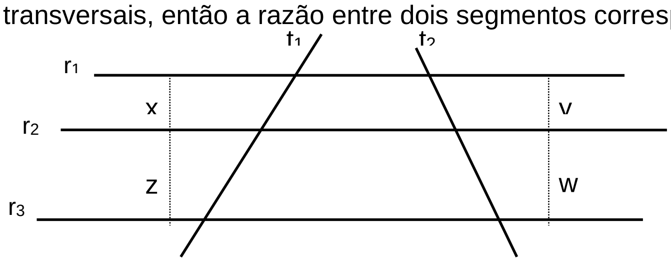


Num triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos (teorema de Pitágoras)

$$a^2 = b^2 + c^2$$

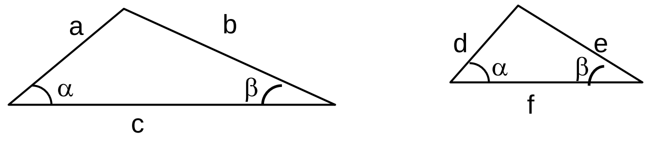
TEOREMA DE TALES E SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

O Teorema de Tales afirma que se um conjunto (feixe) de retas paralelas intercepta duas transversais, então a razão entre dois segmentos correspondentes quaisquer é constante.

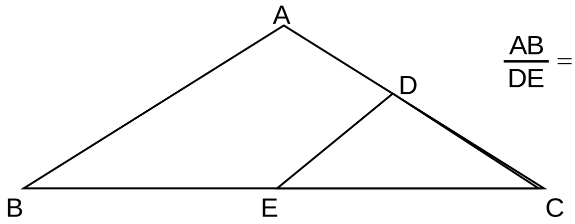


$$\frac{x}{y} = \frac{z}{w} = K$$

A partir do teorema de Tales podemos afirmar que dois triângulos são semelhantes se os ângulos correspondentes forem congruentes então os lados correspondentes serão proporcionais.



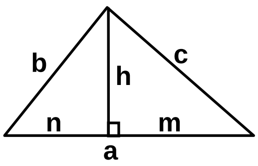
$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k$$ Constante de proporcionalidade



$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC} = K$$

ÁREA E PERÍMETRO DE UM TRIÂNGULO QUALQUER

$P = a + b + c$ $\quad\quad S = \dfrac{a \times h}{2}$



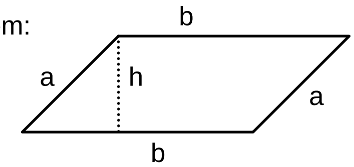
Quadriláteros

São polígonos de quatro lados e a soma dos ângulos internos é 360°.

PRINCIPAIS QUADRILÁTEROS

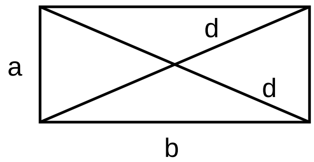
a) paralelogramo → são quadriláteros que possuem:
- lados opostos iguais
- ângulos opostos iguais
- diagonais que se cortam ao meio.

$P = 2a + 2b$ $\quad\quad S = b.h$



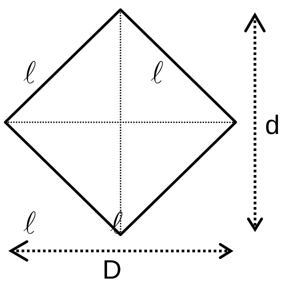
b) retângulo → são quadriláteros que possuem:
- lados opostos iguais
- ângulos opostos iguais
- diagonais que se cortam ao meio.
- os quatro ângulo internos são retos.

$P = 2a + 2b$ $\quad\quad S = b.a$ $\quad\quad d^2 = b^2 + a^2$



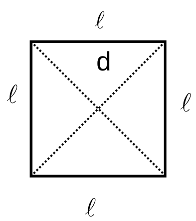
c) losango → são quadriláteros que possuem:
- lados opostos iguais
- ângulos opostos iguais
- diagonais que se cortam ao meio.
- os quatro lados são iguais.

$P = 4\ \ell$ $\quad\quad S = \dfrac{D \times d}{2}$ $\quad\quad \ell^2 = \dfrac{D^2 + d^2}{4}$



d) quadrado → são quadriláteros que possuem:
- lados e ângulos iguais.
- diagonais são perpendiculares.

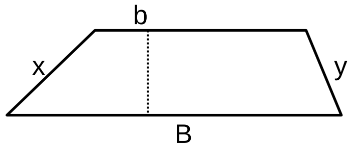
$P = 4\ell$ $\quad\quad S = \ell^2$ $\quad\quad d = \ell.\sqrt{2}$



e) trapézios → são quadriláteros que apresentam apenas dois lados paralelos. Podem ser:

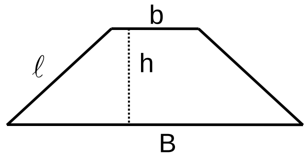
trapézio escaleno → os lados paralelos não são iguais.

$P = B + b + x + y \qquad S = \dfrac{(B+b)\times h}{2}$



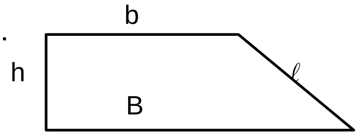
trapézio isósceles → os lados não paralelos são iguais

$P = B + b + 2\ell \qquad S = \dfrac{(B+b)\times h}{2}$



trapézio retângulo → um lado é perpendicular aos lados paralelos.

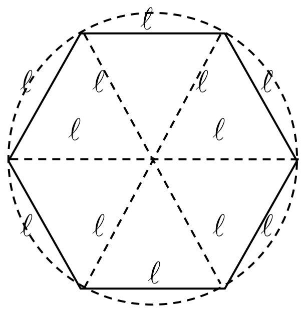
$P = B + b + h + \ell \qquad S = \dfrac{(B+b)\times h}{2}$



Hexágonos regulares

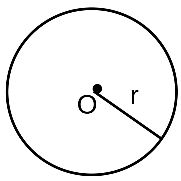
É o polígono regular de seis lados.
É equivalente a seis triângulos equiláteros.

$R = \ell \qquad P = 6\ell \qquad S = \dfrac{3.\ell^2\sqrt{3}}{2}$

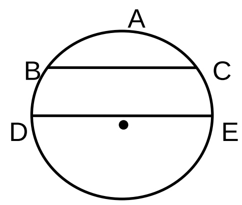


Circunferência

É o lugar geométrico dos pontos de um plano eqüidistante de um ponto dado do mesmo plano. A esta distância dá-se o nome de raio, e o ponto dado é o centro.



ELEMENTOS DA CIRCUNFERÊNCIA



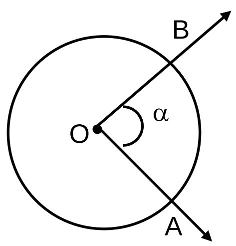
a) arco → é qualquer porção da circunferência limitada por dois de seus pontos.

b) corda → é o segmento de reta que une dois pontos da circunferência → BC.

c) diâmetro → qualquer corda que passa pelo centro → DE.

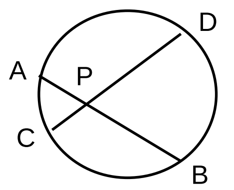
d) ângulo central → é todo o ângulo cujo vértice coincide com o centro da circunferência.

$$\alpha = \overset{\frown}{AB}$$



A medida de um ângulo central é igual à medida do arco que ele enxerga.

RELAÇÕES MÉTRICAS NO CÍRCULO

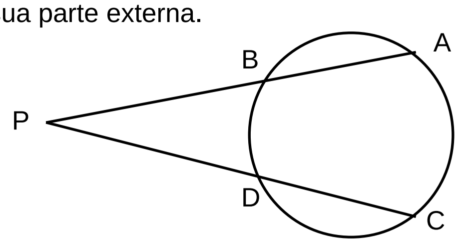


a) relação entre duas cordas → quando duas cordas se cruzam no interior de um círculo, o produto das medidas dos dois segmentos determinados sobre essas cordas é igual ao produto das medidas dos segmentos determinados sobre a outra

$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$

b) relação métrica das secantes → quando duas secantes se cortam externamente a um círculo, o produto da medida da secante inteira pela medida de sua parte externa é igual ao produto da medida da outra secante pela medida de sua parte externa.

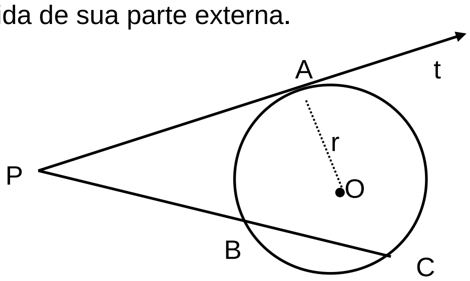
$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$



c) relação métrica entre secante e tangente → quando, de um ponto exterior, traçamos uma tangente e uma secante a um círculo, a medida da tangente é a média proporcional entre a medida da secante inteira e a medida de sua parte externa.

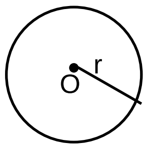
$\overline{PA}^2 = \overline{PB} \cdot \overline{PC}$

onde t ⊥ OA



ÁREA DO CÍRCULO E SUAS PARTES

a) círculo $P = 2\pi\ r$ $S = \pi\ r^2$

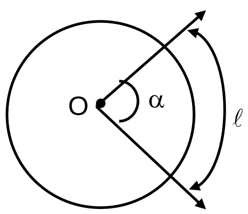


b) setor circular

$\ell = \alpha.\ r$ (α em radianos)

S = $\dfrac{\alpha}{360°}\pi.r^2$ (α em graus)

S = $\dfrac{\alpha}{2}r^2$ (α em radianos)



EXERCÍCIOS

01. Qual é o polígono que podemos construir com o menor número de lados?

02. Qual o polígono convexo que tem 90 diagonais?

03. Qual é o polígono cuja soma dos ângulos internos é 1260°?

04. Qual o polígono regular que tem 6 diagonais passando pelo seu centro?

05. Um polígono regular tem 170 diagonais. Quantas passam pelo centro?

06. Um polígono regular possui 30 diagonais que não passam pelo seu centro. Quanto mede cada ângulo interno dele?

07. Calcule o perímetro de um decágono regular que tem 0,42 m de lado?

08. Num triângulo ABC, o ângulo A é o triplo do ângulo B e o ângulo C é a metade de B. Calcule os ângulos desse triângulo.

09. A medida de dois ângulos agudos de um triângulo diferem entre si em 50°. Determine a medida desses ângulos.

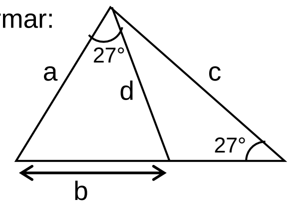
10. Os ângulos de um triângulo medem (2x + 10), 3x, (3x – 20) em graus. Esse triângulo pode ser classificado como:

a) equilátero
b) acutângulo
c) retângulo
d) obtusângulo
e) isósceles

11. (ACAFE) Num triângulo isósceles, a base mede 3 cm, e cada lado congruente mede y. Se o ângulo oposto a base mede 120°, então y vale:

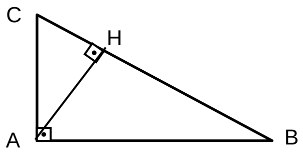
a) $\sqrt{3}$ b) $-\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{3}$ d) $-3\sqrt{3}$ e) 2

12.(UFS - 98) Com base na figura pode-se afirmar:



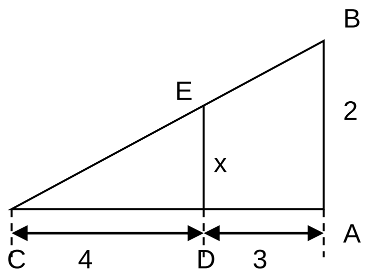
a) $d^2 = ac$
b) $b^2 = da$
c) $ac = bd$
d) $ad = cd$
e) $bc = ad$

13. (FUVEST) Na figura, HC = 9 m e AH = 12 m. A medida de $\overline{AB}$ é, em metros:



a) 15
b) 20
c) 25
d) 30
e) 35

14. (UNG-SP) Na figura abaixo, o segmento AB é paralelo ao segmento DE. O valor de x é:



a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{8}{3}$

c) $\frac{2}{7}$

d) $\frac{8}{7}$

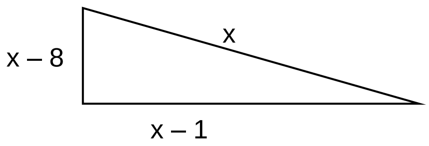
e) 1

15. Os lados de um triângulo ABC medem 3 cm, 7 cm e 9 cm. Calcule os lados de um segundo triângulo semelhante ao primeiro, cujo perímetro mede 38 cm.

a) 8 cm, 14 cm e 16 cm
b) 6 cm, 14 cm e 18 cm
c) 8 cm, 13 cm e 17 cm
d) 10 cm, 13 cm e 15 cm
e) 5 cm, 14 cm e 19 cm

16. Num triângulo, o menor lado mede 5 cm. Sabendo-se que o triângulo tem como medidas de seus lados três número inteiros e consecutivos, qual é o perímetro desse triângulo?

17. (UNIFOR-CE) No triângulo representado abaixo, as medidas dos lados estão dadas em metros:



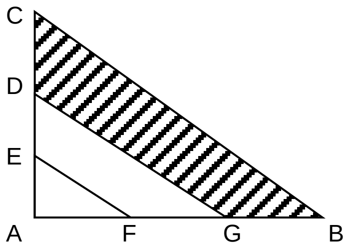
A área desse triângulo, em metros quadrados, é:

a) 30
b) 27
c) 24
d) 20
e) 18

18. (UNIFOR-CE) Os pontos D, E, F e G dividem os lados $\overline{CA}$ e $\overline{AB}$ do triângulo retângulo ABC em três partes congruentes, conforme mostra a figura.

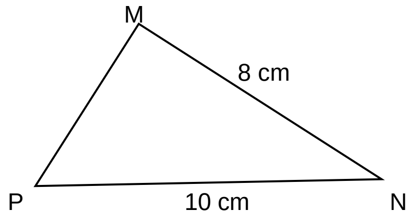
Se S é a área do triângulo ABC, então a área da região hachurada equivale a:

a) $\frac{8}{9}.S$
b) $\frac{7}{9}.S$
c) $\frac{2}{3}.S$
d) $\frac{5}{9}.S$
e) $\frac{4}{9}.S$



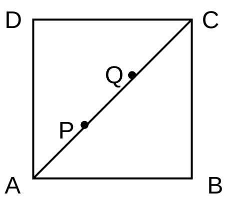
19. (UFF-RJ) Considere o triângulo PMN, retângulo em M, representado na figura a seguir.
A área, em cm² do triângulo obtido unindo-se os pontos médios de $\overline{PM}$, $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$ é:

a) 4
b) 6
c) 12
d) 20
e) 24



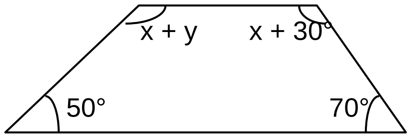
20. (UFMT) Os lados do quadrado ABCD medem 3 cm e os pontos P e Q dividem a diagonal AC em três partes iguais. A distância do ponto P ao vértice B é:

a) $\sqrt{8}$
b) $\sqrt{6}$
c) $\sqrt{5}$
d) $2\sqrt{3}$
e) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

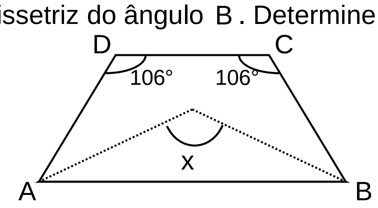


21. Num trapézio isósceles, os ângulos da mesma base são congruentes. Se um dos ângulos mede 74°, determine a medida dos outros ângulos desse trapézio.

22. Determine as medidas x e y no trapézio a seguir.



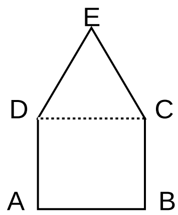
23. A figura a seguir é um trapézio isósceles. Sabendo que $\overline{AM}$ está contido na bissetriz do ângulo $\hat{A}$ e $\overline{BM}$ está contido na bissetriz do ângulo $\hat{B}$. Determine a medida x indicada.



24. Num terreno de 12 m de comprimento, a medida da largura é igual a $\frac{1}{3}$ da medida do comprimento. Quantos metros de extensão terá um muro que irá cercar esse terreno?

25. Um retângulo e um quadrado têm perímetros iguais. Os lados do retângulo medem 7,2 cm e 10,6 cm. Calcule o lado do quadrado.

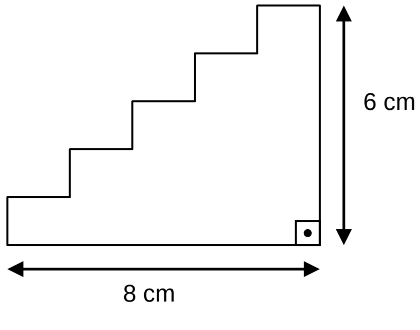
26. Na figura ao lado o perímetro do quadrado ABCD é 20 cm.
Qual é o perímetro da figura sabendo que CDE é um triângulo eqüilátero?



27. O quarto de uma casa é retangular e suas medidas são 3,5 m por 3 m. Querendo colocar rodapé em todo o contorno do quarto, descontada a porta que mede 0,9 m, responda:
a) Quantos metros deverão ser comprados se o colocador pede que se compre 0,5 m a mais para cada 10 m necessários?
b) Qual o preço a ser pago ao colocador, se este cobra R$ 12,00 por metro colocado?

28. (UEPA) O perímetro da figura abaixo é:

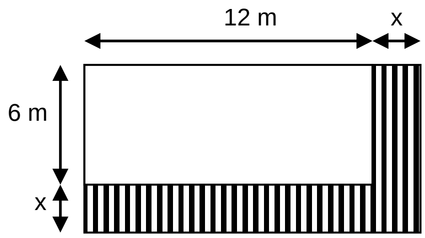
a) 24 cm
b) 26 cm
c) 28 cm
d) 30 cm
e) 36 cm



29. Um piso de cerâmica é quadrado e tem 0,15 m de lado. Quantos pisos serão necessários para cobrir uma área retangular de 9 m de comprimento por 5 de largura?

30. Uma sala retangular tem 8 m de comprimento por 6 metros de largura. As paredes tem uma altura de 2,75 m. As paredes desta sala deverão ser pintadas com uma tinta que rende 10 m^2 por lata de tinta. Desconsiderando a porta e as janelas e eventuais perdas de tinta, quantas latas de tinta deverão ser compradas?

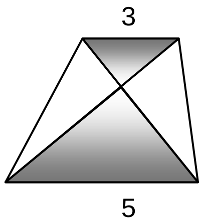
31.(UNIFOR-CE) Um pátio retangular de 6 m por 12 m foi ampliado em 88 m^2, com acréscimo de uma faixa retangular de largura x, conforme mostra a figura abaixo:



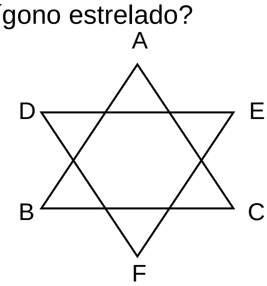
O comprimento x, em metros, é:
a) 6
b) 5,5
c) 5
d) 4,5
e) 4

32. Determine a área de um losango, sabendo que a soma das medidas de suas diagonais vale 72 cm e que uma é o triplo da outra.

33. (MACK-SP) A altura do trapézio é 4; então a diferença entre as áreas dos triângulos assinalados é:
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5



34. (Covest-PE) Todos os triângulos da figura abaixo são equiláteros, e o hexágono central é regular. Se AB = 3, qual é a área do polígono estrelado?
a) $2\sqrt{3}$
b) $3\sqrt{3}$
c) $\sqrt{3}$
d) $4\sqrt{3}$
e) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$



35. Um cano tem 1 polegada de diâmetro. Qual é em mm o raio e o comprimento da circunferência de contorno do cano? (Dado: 1 polegada ≅ 25 mm)

36. Uma roda de bicicleta tem um diâmetro de 50 cm. Qual a distância percorrida, em cm, pela bicicleta quando esta tiver dado 800 voltas completas?

37. Uma praça circular tem diâmetro de 100 m. Qual é a área ocupada pela praça?

38. Determine o aumento das áreas das figuras nas seguintes situações:
a) Aumentado em 5 unidades o comprimento do lado de um quadrado.
b) Aumentando em 4 unidades o diâmetro de um círculo.
c) Dobrando a altura de um triângulo eqüilátero.

39. Calcule a área do círculo inscrito no hexágono regular, cujo lado mede $6\sqrt{3}$ m.

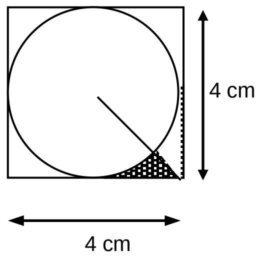
a) 9π m²
b) 18π m²
c) $18\sqrt{3}\ \pi$ m²
d) 81π m²
e) $81\sqrt{3}\ \pi$ m²

40. (ITA - SP) A razão entre as áreas de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência, e de um hexágono regular, cuja apótema mede 10 cm, circunscrito a esta mesma circunferência é:

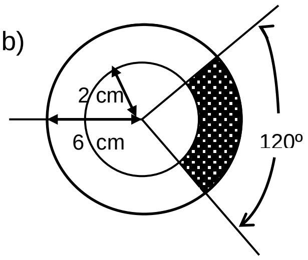
a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{3}{8}$ e) $\frac{3}{8}$

41. Calcule, para cada figura, a área da região destacada, em cm².

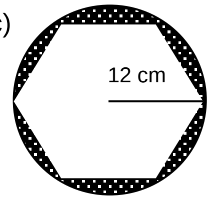
a)



b)

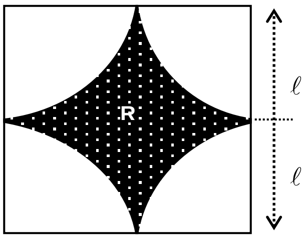


c)



42. (CESGRANRIO) A região hachurada R da figura é limitada por arcos de circunferência centrados nos vértices do quadrado de lado 2ℓ. A área de R é:

a) $\frac{\pi}{2}\ell^2$
b) $(\pi - 2\sqrt{2})\ell^2$
c) $(\pi - \frac{4}{3})\ell^2$
d) $(4 - \pi)\ell^2$
e) $\sqrt{2}\ \ell^2$

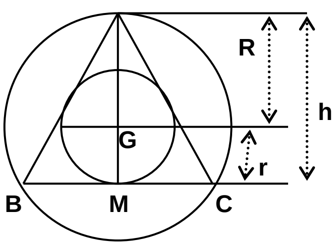


DESAFIOS:

1. Num eclipse total do sol, o disco lunar cobre exatamente o disco solar, o que comprova que o ângulo sob o qual vemos o sol é o mesmo sob o qual vemos a lua. Considerando que o raio da lua é 1738 km e que a distância da lua ao sol é 400 vezes a da terra a lua, calcule o raio do sol.

2. No triângulo equilátero ABC, indicado na figura, o raio da circunferência inscrita é igual a 45 cm.

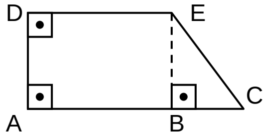
a) Calcule o raio R da circunferência circunscrita.
b) Determine a altura h do triângulo ABC.



3. (FUVEST) Um avião levanta vôo para ir da cidade A à cidade B, situada a 500 km de distância. Depois de voar 250 km em linha reta, o piloto descobre que a rota está errada e, para corrigi-la, ele altera a direção de vôo de um ângulo de 90°.
Se a rota não estivesse sido corrigida, a que distância ele estaria de B após ter voado os 500 km previstos?

4.(FUVEST) Dois irmãos herdaram um terreno com a seguinte forma e medidas:

AD = 20 m
AB = 60 m
BC = 16 m



Para dividir o terreno em duas partes de mesma área, eles usaram uma reta perpendicular a $\overline{AB}$. Para que a divisão seja feita corretamente, a distância dessa reta ao ponto A, em metros, deverá ser:

a) 31
b) 32
c) 33
d) 34
e) 35

5. (UFSC) Na figura abaixo, as circunferências de centros A e B têm raios de 9 cm e 6 cm, respectivamente, e a distância entre os centros é 25 cm. A reta t é uma tangente interior às circunferências nos pontos C e D. Calcule, em cm, a medida do segmento CD.