

# Es05A: Applicazioni non-lineari di amplificatori operazionali

Gruppo 1.AC  
Matteo Rossi, Bernardo Tomelleri  
4 dicembre 2021

## Misura componenti dei circuiti

Resistenze [k $\Omega$ ]	$R$	$\sigma R$	Capacità [nF]	$C$	$\sigma C$
$R_1^Q$	100.6	0.8	$C_T$	1.00	0.04
$R_1^T$	9.94	0.08	$C_F$	1.00	0.04
$R_2^T$	2.19	0.03	$C_1$	96	4
$R_2^A$	9.92	0.08	$C_2$	1.00	0.04
$R_3$	9.94	0.08			
$R_4$	9.94	0.08			

Tabella 1: Valori di resistenza e capacità misurate per i componenti dei circuiti studiati.

Resistenze [ $\Omega$ ]	$R$	$\sigma R$	Capacità [nF]	$C$	$\sigma C$
$R_1^Q$	99.8	0.8	$C_T$	1.00	0.04
$R_1^T$	9.94	0.08	$C_F$	1.00	0.04
$R_2^T$	2.19	0.03	$C_1$	99	4
$R_2^A$	9.87	0.08	$C_2$	1.00	0.04
$R_3$	10.01	0.08			
$R_4$	9.91	0.08			

Tabella 2: Valori di resistenza e capacità misurate per i componenti dei circuiti studiati.

Dove gli apici  $Q$ ,  $T$  e  $A$  indicano i diversi valori delle resistenze che condividono lo stesso nome rispettivamente nei circuiti: amplificatore di carica, trigger di Schmitt e multivibratore astabile.

Riportiamo per completezza anche i valori delle tensioni di alimentazione continue per l'op-amp misurate con il multimetro

$$V_{CC} = 4.99 \pm 0.03\text{V}$$

$$V_{EE} = -4.99 \pm 0.03\text{V}$$

Non è stato facile misurare i valori di capacità dei condensatori nel circuito con il multimetro, che a volte con i soli puntali collegati legge un rumore di fondo intorno ai  $7 \pm 1$  nF, abbastanza alto da saturare il fondo scala da 2 nF con cui si vorrebbero misurare i valori delle capacità  $C_T$ ,  $C_F$  e  $C_2$ .

Per tutto il resto della trattazione come ampiezze dei segnali si intendono misurate non “picco - picco”, a meno che non venga esplicitato altrimenti.

## Nota sul metodo di fit

Per determinare i parametri ottimali e le rispettive covarianze si è implementato in Python un algoritmo di fit basato sui minimi quadrati mediante la funzione `curve_fit` della libreria SciPy.

## 1 Circuito amplificatore di carica

### 1.a Progettazione del circuito

Si è costruito un amplificatore di carica a partire da un op-amp TL081CP come quello in fig. 1

In cui abbiamo indicato i sotto-circuiti di cui è composto, da sinistra verso destra come: “iniettore/rivelatore di carica”, “circuito formatore/shaper” (passa-basso/integratore attivo) e “discriminatore/comparatore”.

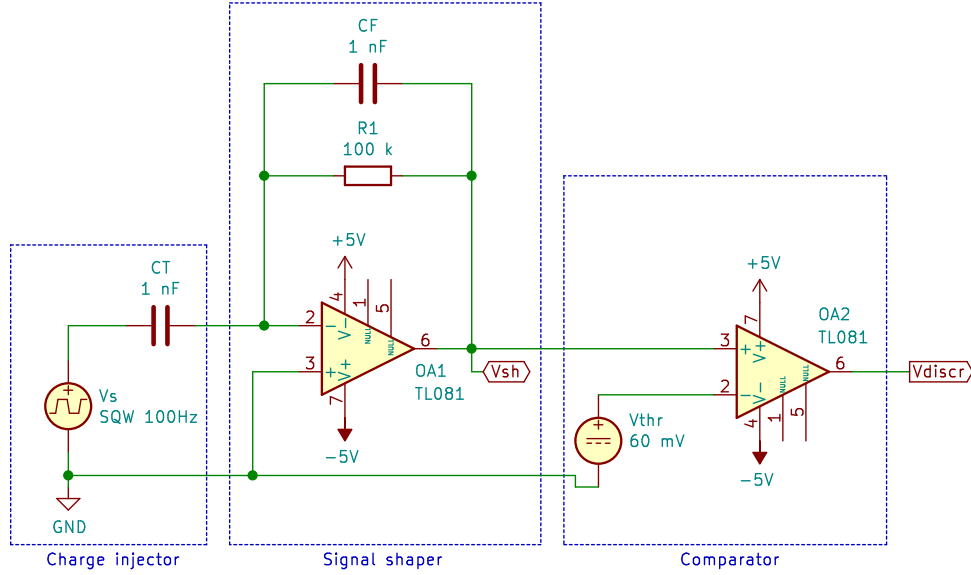


Figura 1: Schema circuitale dell'amplificatore di carica costruito.

### 1.b Funzionamento di iniettore e shaper

Si è inviato all'ingresso di entrambi i circuiti un'onda quadra di ampiezza  $V_s = 999 \pm 8 \text{ mV}$  e frequenza fissata a  $f = 100.0 \pm 1.6 \text{ Hz}$ , che corrisponde ad una carica  $Q_{in} = C_T \cdot 2V_s = 1.98 \pm 0.08 \text{ nC}$ , proporzionale al "salto" di tensione dal livello alto a basso (e viceversa) dell'onda, più semplicemente alla sua ampiezza picco-picco  $V_s^{pp} = 2V_s \Rightarrow Q_{in} = C_T \cdot V_s^{pp}$ .

Dunque abbiamo trovato come segnale in uscita dal circuito formatore un segnale che dopo un breve transiente diventa un esponenziale decrescente, con ampiezza iniziale  $V_{sh}(t=0) = 2007 \pm 18 \text{ mV}$  e con la stessa frequenza  $99.9 \pm 1.6 \text{ Hz}$  dell'onda quadra. Riportiamo in figura l'immagine acquisita dall'oscilloscopio con dettaglio sul transiente al fronte di discesa dell'onda quadra.

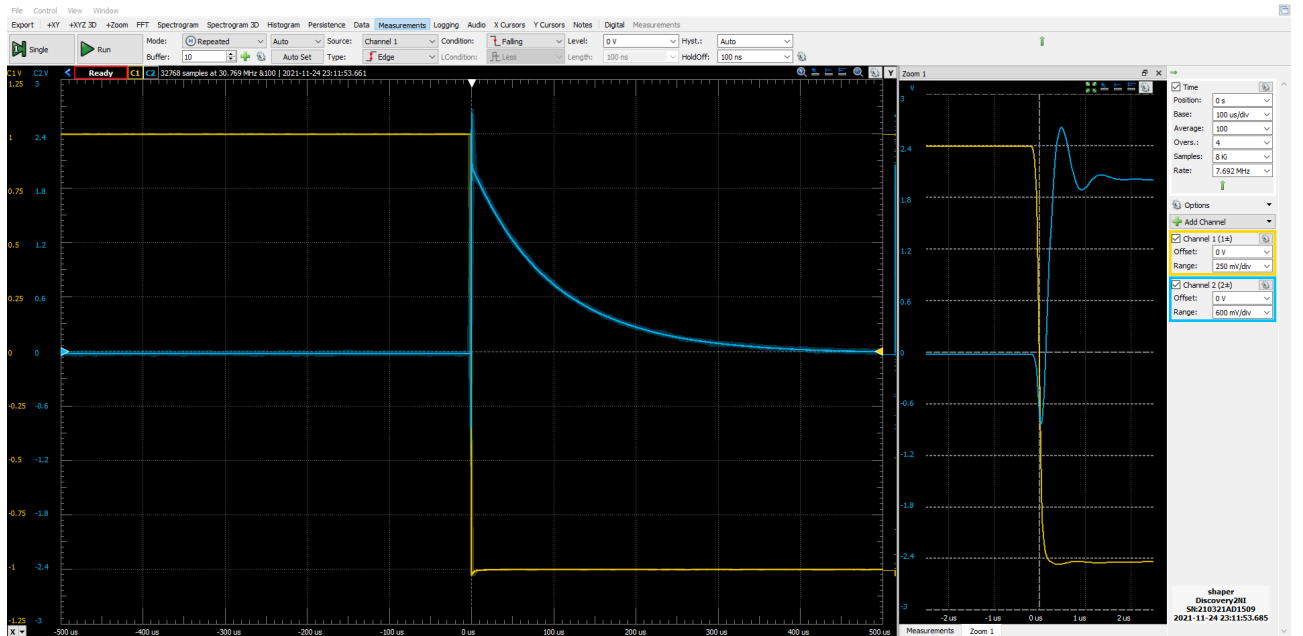


Figura 2: Acquisizione del segnale in uscita dal circuito formatore con un'onda quadra in ingresso  $V_s = 1 \text{ V}$ ,  $f = 100 \text{ Hz}$

Assumendo iniezione di carica istantanea sulle armature dei condensatori  $C_T$  e  $C_F$ , il segnale in uscita dal

sotto-circuito formato da  $C_T$  e dal formatore è legato al segnale in ingresso dalla relazione<sup>1</sup>

$$V_{sh}(t) = \frac{Q_{in}}{C_F} e^{-t/\tau} = 2V_s(t) \frac{C_T}{C_F} e^{-t/\tau} \quad (1)$$

$$\tau = R_1 C_F \quad (2)$$

Per i circuiti in esame i valori delle capacità sono  $C_T \approx C_F = 1 \text{ nF}$  e  $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$ , per cui possiamo semplificare il rapporto  $C_T/C_F \approx 1$ , da cui ricaviamo come valori attesi

$$V_{sh}(t) = 2V_s(t) e^{-t/\tau}$$

$$\tau = R_1 C_F = 100 \pm 4 \text{ }\mu\text{s}$$

Quindi complessivamente come tensione in uscita  $V_{sh}(t)$  ci aspettiamo di osservare una serie di picchi seguiti da decrescite esponenziali di segno alternante con l'onda quadra in ingresso e di ampiezza doppia.

Questo risulta compatibile con quanto si è osservato dall'oscilloscopio, che riportiamo per chiarezza in fig. 3

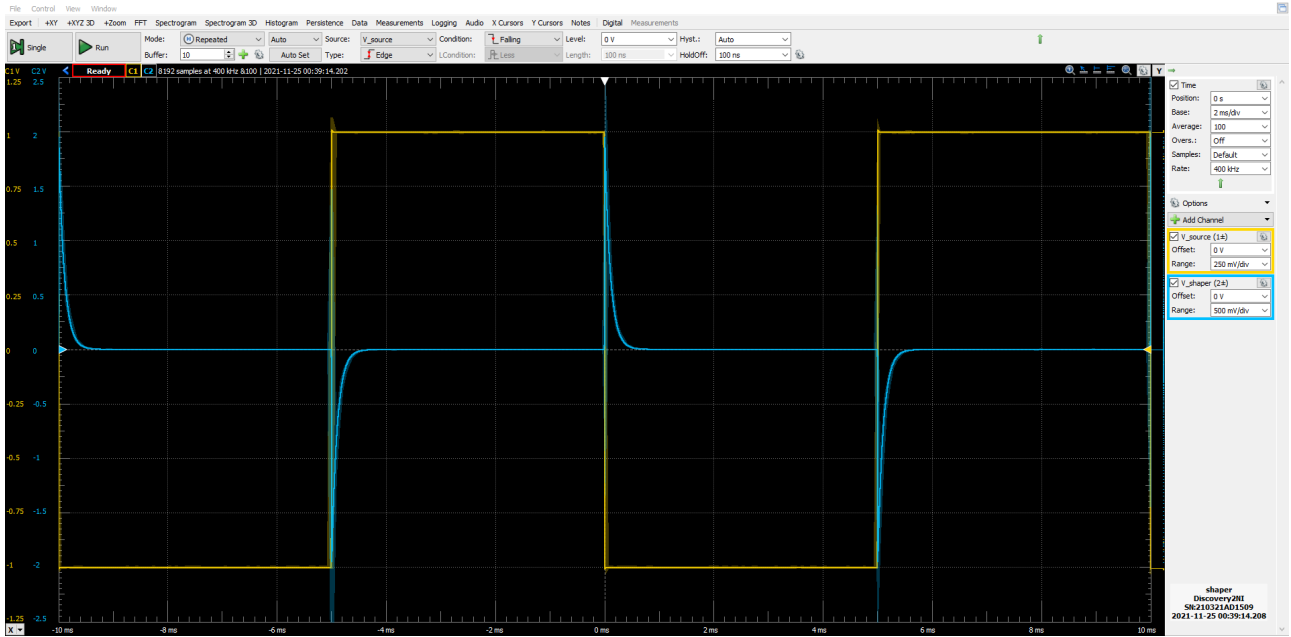


Figura 3: Onda quadra in ingresso  $V_s = 1 \text{ V}$ ,  $f = 100 \text{ Hz}$  su CH1 e segnale in uscita dal circuito formatore  $V_{sh}$  su CH2.

Dunque possiamo controllare che la forma d'onda esponenziale sia compatibile con quanto atteso dalla (1) tramite un fit ai punti campionati dall'AD2, di cui riportiamo brevemente i risultati

$$V_{sh}(t = 0) = 2021 \pm 2 \text{ mV}$$

$$\tau = 101.88 \pm 0.03 \text{ }\mu\text{s}$$

$$\chi^2/\text{ndof} = 2774/4086$$

$$\text{cov}_{\text{norm}} = -0.75$$

Da cui vediamo come non solo la misura di ampiezza iniziale sia compatibile con il valore misurato, ma anche il tempo caratteristico di smorzamento  $\tau$  risulta pienamente in accordo con il valore atteso dai componenti del circuito.

## 1.d Funzionamento del discriminatore

Il sotto-circuito discriminatore è un comparatore con tensione di soglia misurata con l'oscilloscopio  $V_{thr} = 51.9 \pm 0.4 \text{ mV}$  e fornita dal generatore di tensione (con valore nominale 60 mV) W2 collegato all'ingresso invertente del secondo OpAmp.

Supponiamo di essere sempre in regime di saturazione per l'OpAmp ideale e come prima assumiamo iniezione istantanea di carica sui condensatori. Grazie al fatto che le tensioni di alimentazione sono pari in modulo  $V_{CC} = -V_{EE}$  possiamo prendere come segnale atteso in uscita

$$V_{discr}(t) = V_{CC} \text{sgn}[V_{sh}(t) - V_{thr}]. \quad (3)$$

Più esplicitamente, ricordando che  $V_{sh}$  ha ampiezza (iniziale) doppia rispetto all'ampiezza in ingresso  $V_s$  (o proporzionale a  $V_s^{pp}$ )

<sup>1</sup>Per una derivazione più rigorosa di questo risultato si confronti l'appendice in calce al documento.

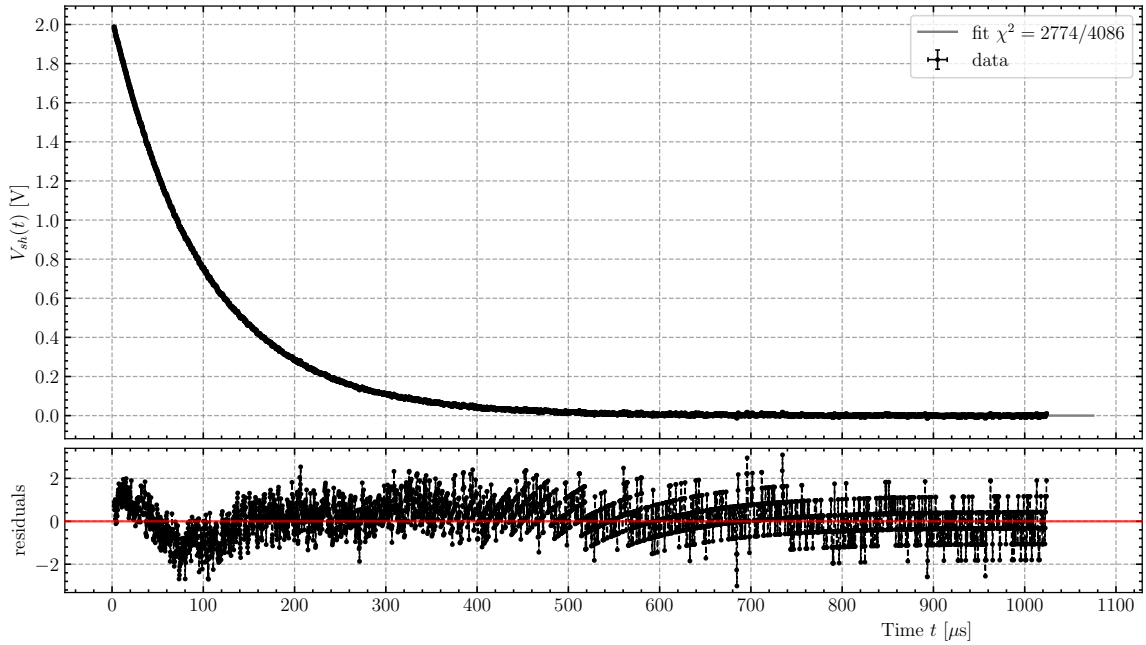


Figura 4: Fit con esponenziale decrescente al segnale in uscita dal circuito formatore  $V_{sh}$

- se  $V_s^{pp} < V_{thr} \implies V_{discr} = V_{EE}$  costante.
- se  $V_s^{pp} \geq V_{thr}$ , ci aspettiamo (in un periodo dell'onda quadra di durata  $T = 9.99 \pm 0.16$  ms)

$$V_{discr}(t) = \begin{cases} V_{CC} & 0 < t < ToT \\ V_{EE} & ToT < t < T \end{cases}$$

In cui  $ToT$  è il tempo in cui il picco esponenzialmente decrescente è maggiore della tensione di soglia  $V_{sh}(t) = \frac{Q_{in}}{C_F} e^{-t/\tau} \geq V_{thr}$ , appunto il “Time-over-Threshold”.

$$ToT = \tau \log \left( \frac{Q_{in}}{C_F V_{thr}} \right) = \tau \log \left( \frac{C_T V_s^{pp}}{C_F V_{thr}} \right) = \tau \log \left( \frac{C_T}{C_F} \frac{2V_s}{V_{thr}} \right). \quad (4)$$

Mantenendo lo stesso segnale in ingresso al circuito del punto precedente (con ampiezza ben oltre la soglia  $V_s \gg V_{thr}$ ) riportiamo il segnale visualizzato all'oscilloscopio in uscita dal discriminatore in fig. 5.

Risulta già chiaro dal dettaglio a destra, in corrispondenza del fronte di discesa dell'onda quadra, come il segnale in uscita non abbia né livelli basso e alto simmetrici rispetto a 0 V, né pendenza uguale (idealmente infinita) nel passaggio tra questi due, al contrario di quanto atteso dal nostro modello semplificato.

Possiamo caratterizzare il segnale  $V_{discr}(t)$  trovato come un impulso di tensione con livello basso  $V_{OL}$  e livello alto  $V_{OH}$  di durata  $T_{OH}$  che si ripete periodicamente con la stessa frequenza dell'onda quadra in ingresso  $V_s(t)$ . Riportiamo le misure dirette effettuate con i cursori delle tensioni di saturazione del comparatore e una misura del tempo “alto” dell'impulso definita in maniera compatibile con la funzione automatica di misura “PosWidth” (cioè come il tempo in cui la tensione si trova al di sopra della metà del valore positivo dell'impulso, che quindi tenderà a dare una sovrastima per la pendenza visibilmente non ideale dei fronti d'onda).

$$\begin{aligned} V_{OH} &= 4.38 \pm 0.03 \text{ V} \\ V_{OL} &= -3.53 \pm 0.02 \text{ V} \\ T_{OH} &= 382 \pm 5 \text{ μs} \end{aligned}$$

Osserviamo quindi che i valori di saturazione alta e bassa misurati non sono compatibili con quelli attesi, ma sono entrambi inferiori (in modulo). Questo può essere dovuto al fatto che in realtà il TL081 in regime di saturazione produce al massimo tensioni entro il suo (Maximum Output) *Voltage swing* riportato come valore tipico nel datasheet  $V_{OM,typ} = 13.5$ , sensibilmente inferiore rispetto al valore di tensione di alimentazione tipico a cui è riferito  $V_{CC,typ} = 15$  V.

Quindi, volendo ragionare per analogia ci aspettiamo un'escursione massima tra le tensioni di saturazione (date le nostre tensioni di alimentazione a  $\pm 5$  V)  $V_{OM} = 13.5 \cdot V_{CC}/V_{CC,typ} = 13.5/3 = 4.5$  V, che risulta sicuramente più vicino a quanto abbiamo misurato.

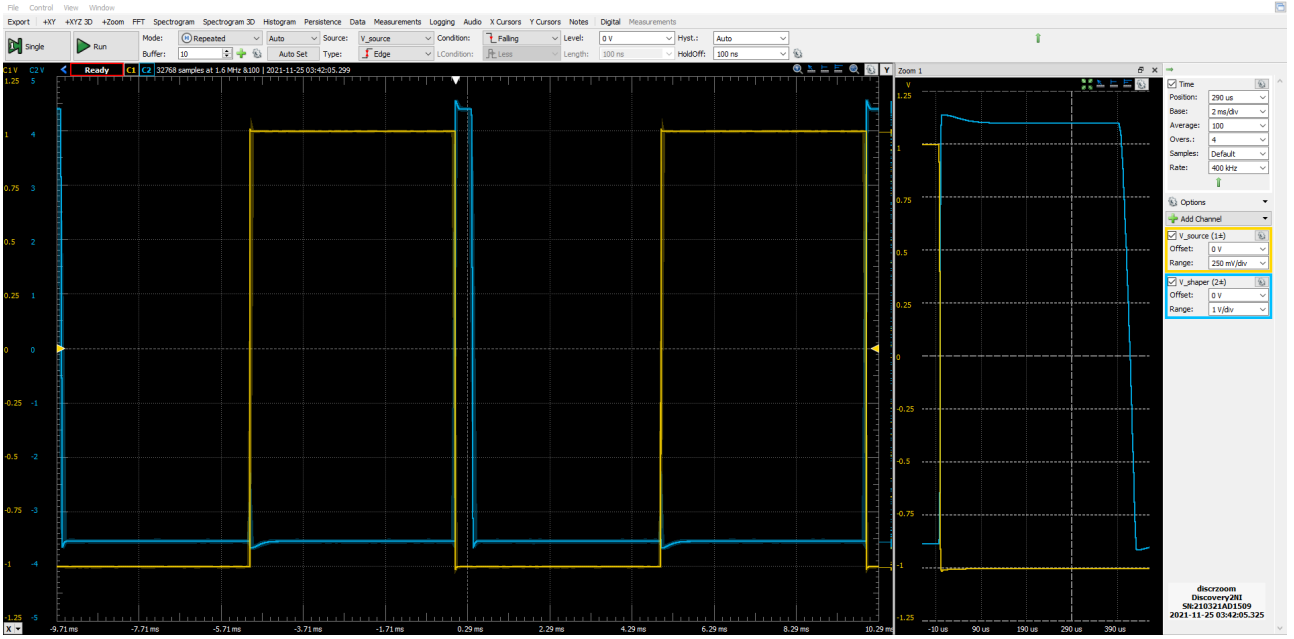


Figura 5: Acquisizione del segnale in uscita dal circuito comparatore con un'onda quadra in ingresso  $V_s = 1$  V,  $f = 100$  Hz

### 1.e Durata impulso per carica di test

Abbiamo scelto come ampiezza per l'onda quadra  $V_s = 999 \pm 8$  mV e frequenza  $f = 100.0 \pm 1.6$  kHz, dunque come carica iniettata  $Q_{in} = C_T \cdot 2V_s = 1.98 \pm 0.08$  nC. Si è scelta una frequenza abbastanza bassa, con periodo corrispondente a  $1/f = T \gg \tau$  di modo che tra una iniezione di carica e l'altra (cioè tra ogni semiperiodo dell'onda quadra  $V_s(t)$ ) i condensatori abbiano tempo di scaricarsi, così da poter considerare indipendente ogni iniezione di carica dalla precedente.

L'impulso in uscita ha durata pari a  $382 \pm 5$  μs in un circuito e  $378 \pm 5$  μs nel secondo.

Per quanto riguarda il valore atteso per la durata dell'impulso, possiamo confrontare i due valori trovati per il tempo "alto" con il valore atteso di Time-over-Threshold

$$ToT = \tau \log \left( \frac{C_T}{C_F} \frac{2V_s}{V_{thr}} \right) = 370 \pm 15 \text{ μs}$$

Che risulta compatibile con quanto abbiamo trovato sperimentalmente entro l'incertezza associata.

### 1.f Andamento di TOT al variare di $Q_{in}$

Provando con varie ampiezze del segnale in ingresso  $V_s$ , il comportamento osservato per i due circuiti è essenzialmente lo stesso: per ampiezze maggiori dei 50 mV non sono presenti particolari deformazioni nel segnale in uscita rispetto all'impulso atteso in uscita dal comparatore.

Riducendo l'ampiezza al di sotto dei 50 mV il segnale in uscita inizia a deformarsi, assumendo la forma di una parabola con concavità rivolta verso il basso, la cui massima tensione raggiunta diminuisce in maniera proporzionale all'ampiezza in ingresso.

Questo comportamento si osserva fino a circa 20 mV, quando il segnale in uscita dal comparatore non è più apprezzabilmente diverso dalla tensione di saturazione del trigger.

Il fronte di salita all'uscita del discriminatore è sicuramente limitato dallo slew-rate finito dell'amplificatore, per cui effettivamente ci aspettiamo un tempo di salita dell'impulso in ingresso dell'ordine dei

$$t_{oh} = V_{discr}^{pp} / SR = 7.9 / 13 \approx 0.7 \text{ μs}$$

che è in ottimo accordo con quanto si trova da una misura diretta (con i cursori) della durata del fronte di salita dell'impulso in uscita  $t_{oh} = 717 \pm 10$  μs.

Mentre il fronte di discesa è meno ripido perché corrisponde alla transizione del discriminatore sulla discesa esponenziale di  $V_{sh}(t)$ , che ha una derivata "piccola" in prossimità della soglia. Questo infatti lascia presumere che esista un intervallo temporale durante il quale l'uscita di  $V_{discr}(t)$  è in regime lineare. Possiamo provare a darne una stima come il tempo necessario perché l'onda  $V_{sh}(t)$  decada esponenzialmente dalla tensione di soglia

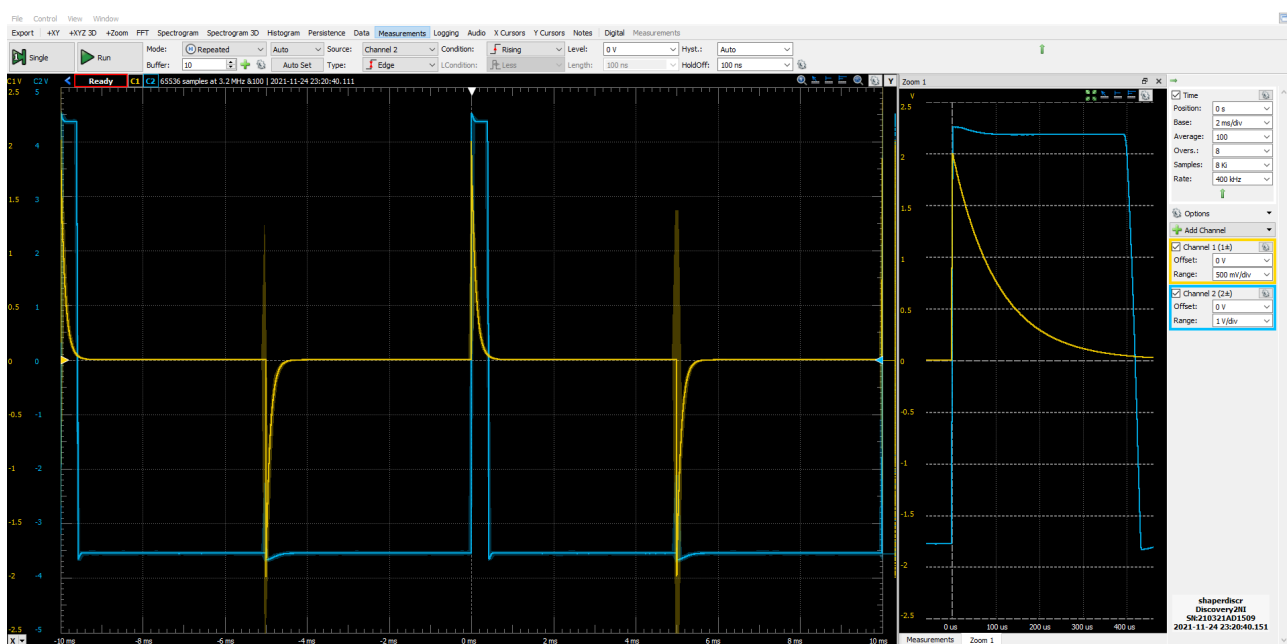


Figura 6: Acquisizione del segnale in uscita dal circuito discriminatore con un'onda quadra in ingresso  $V_s = 1\text{ V}$ ,  $f = 100\text{ Hz}$

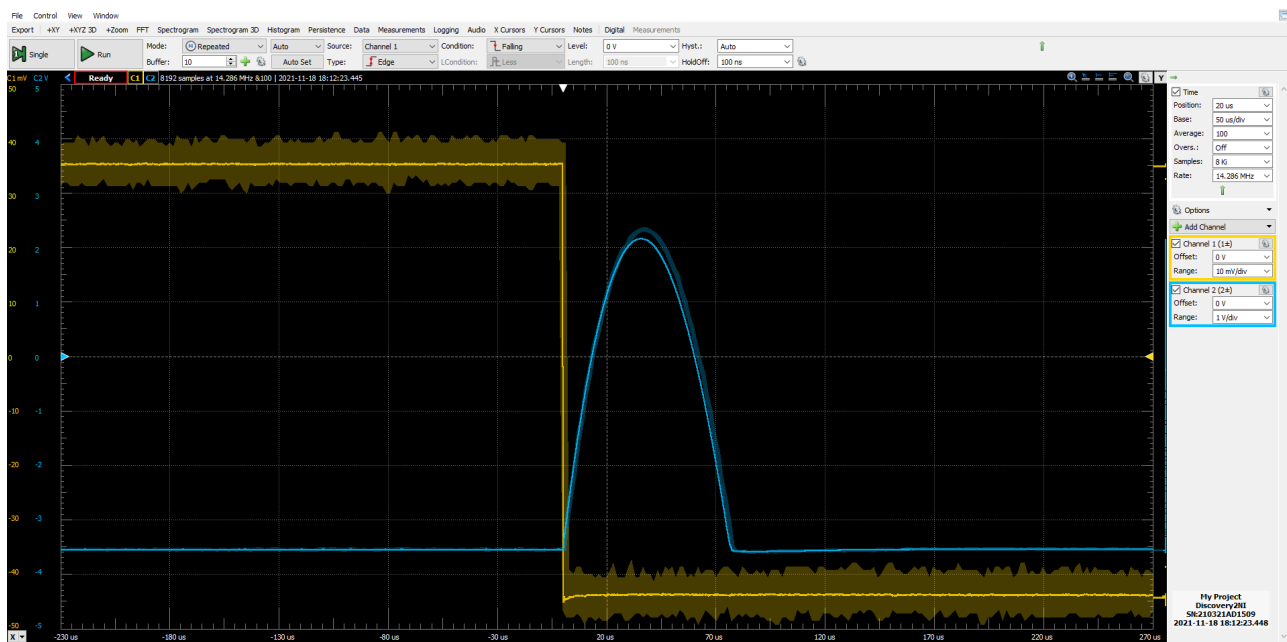


Figura 7: Acquisizione del segnale in uscita dal circuito discriminatore con un'onda quadra in ingresso  $V_s = 30\text{ mV}$ ,  $f = 100\text{ Hz}$

$V_{thr}$  al minimo valore per cui osserviamo un segnale  $V_{discr}(t)$  alla tensione di saturazione positiva  $V_{OH}$  in uscita (discussa meglio in sezione 1.g)

$$t_{ol} = \tau \ln \left( \frac{V_{thr}}{V_{min}} \right) = 35.9 \pm 1.5 \mu s \quad (5)$$

che risulta compatibile con la durata del fronte di discesa dell'onda in uscita dal discriminatore, misurata anche stavolta con i cursori  $t_{ol} = 36.3 \pm 0.5 \mu s$ .

A testimonianza di questa possibile transizione al regime lineare abbiamo studiato la forma del segnale in uscita, per ampiezze dell'onda quadra prossime alla soglia. In cui è possibile riconoscere il transiente in uscita

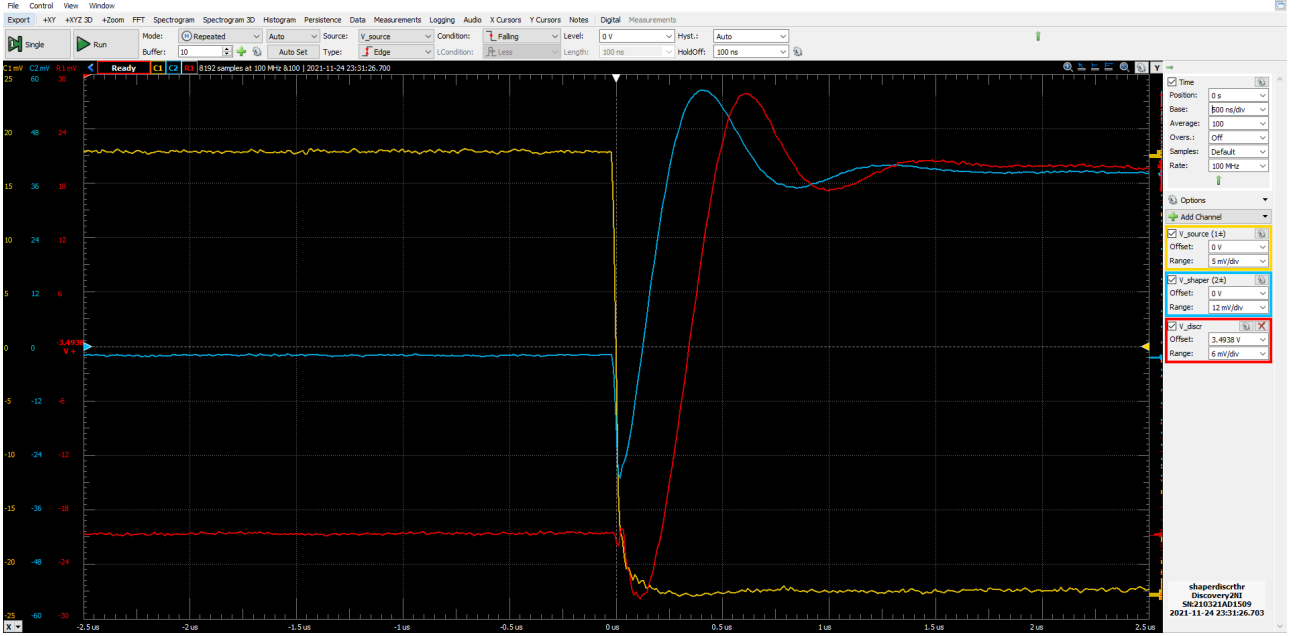


Figura 8: Acquisizione del segnale in uscita dal circuito discriminatore con un'onda quadra in ingresso  $V_s = 20 \text{ mV}$ ,  $f = 100 \text{ Hz}$

dallo shaper visto in fig. 2 amplificato dal secondo OpAmp in regime lineare.

### 1.g Minima ampiezza di carica per cui si attiva il comparatore

Per ottenere una misura di ampiezza minima di carica per cui si registra un segnale che raggiunga la soglia  $V_{OH}$  in uscita dal discriminatore abbiamo variato l'ampiezza del segnale in ingresso  $V_s$  dal generatore di forme d'onda, dunque abbiamo misurato con i cursori l'ampiezza critica trovata per i due circuiti studiati:

$$V_{min} = 40.5 \pm 0.3 \text{ mV}$$

$$V_{min} = 43.6 \pm 0.4 \text{ mV}$$

che corrispondono alle quantità di carica minima per gli amplificatori di  $Q_{min} = C_T \cdot 2V_{min} = \{80, 87\} \pm 3 \text{ pC}$ .

### 1.h Confronto con i valori attesi

Abbiamo eseguito un fit con legge logaritmica per l'andamento delle misure del Time-over-Threshold al variare dell'ampiezza di carica in ingresso  $Q_{in}$ , di cui riportiamo i risultati

$$\begin{aligned} V_{thr} &= 40.7 \pm 0.2 \text{ mV} & \tau &= 106.51 \pm 0.3 \mu s \\ \chi^2/\text{ndof} &= 0.6/8 & \text{cov}_{\text{norm}} &= 0.82 \end{aligned}$$

Ritroviamo che il valore del tempo di smorzamento  $\tau$  è compatibile con il valore atteso dai componenti del circuito. e che la tensione di soglia trovata dal fit è compatibile con il valore di ampiezza del segnale in ingresso  $V_{min}$  corrispondente alla minima ampiezza di carica del punto precedente.

## 2 Trigger di Schmitt

Abbiamo costruito un trigger di Schmitt o comparatore con isteresi a partire dall'OpAmp TL081CP come in fig. 10.

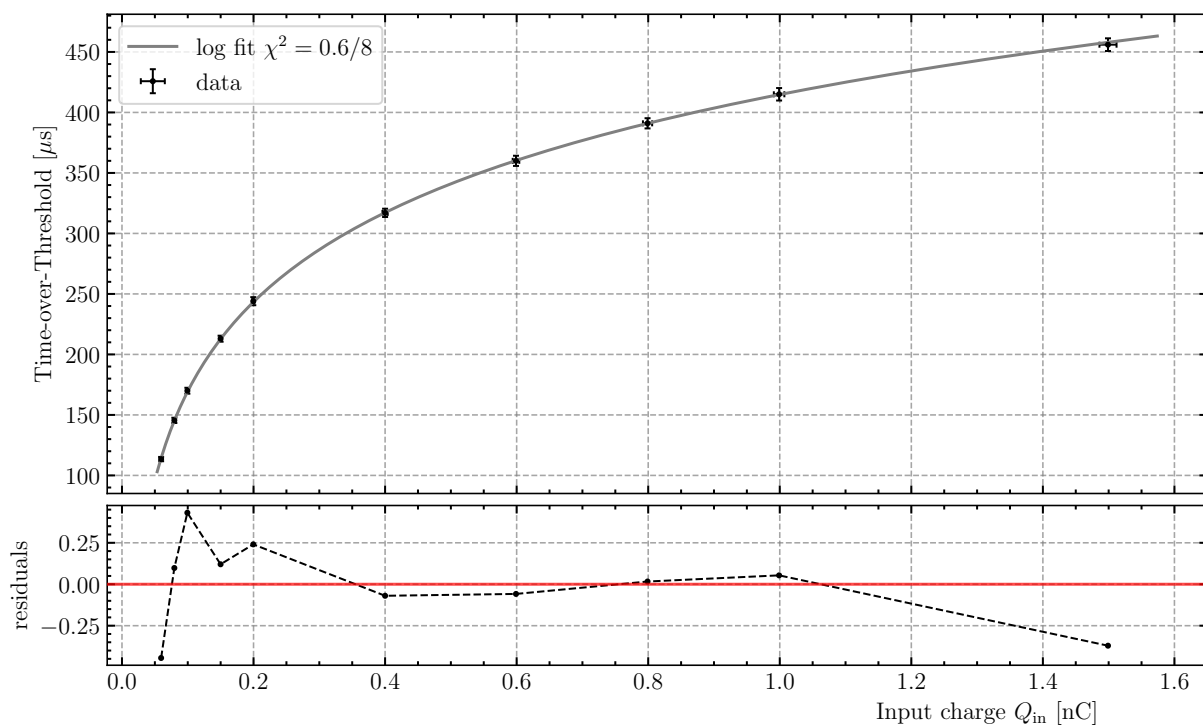


Figura 9: Fit logaritmico del  $ToT$  in funzione dell'ampiezza di carica in ingresso  $Q_{in}$

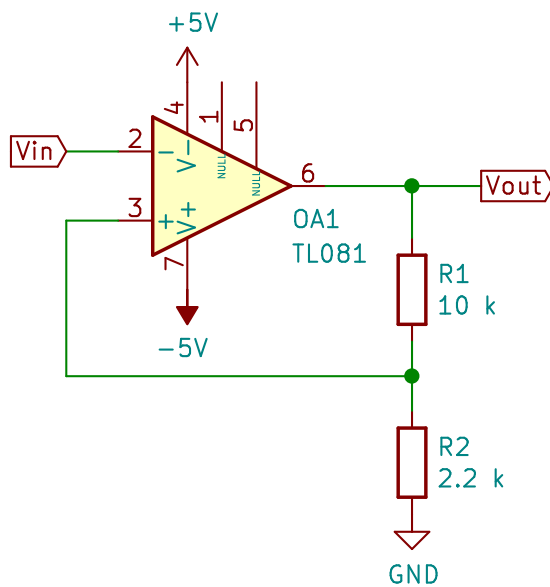


Figura 10: Schema circuitale del trigger di Schmitt costruito.



## 2.a Risposta ad un'onda sinusoidale

Abbiamo inviato all'ingresso invertente dell'OpAmp un'onda sinusoidale di ampiezza  $V_s = 999 \pm 8$  mV e frequenza  $f = 100.0 \pm 1.6$  Hz. Si osserva immediatamente che né le due tensioni di saturazione, né tantomeno le tensioni di soglia sono uguali in valore assoluto. È per questo motivo che l'onda quadra in uscita dal trigger ha una componente continua positiva, quindi la sua traccia visualizzata all'oscilloscopio risulta traslata verso l'alto.

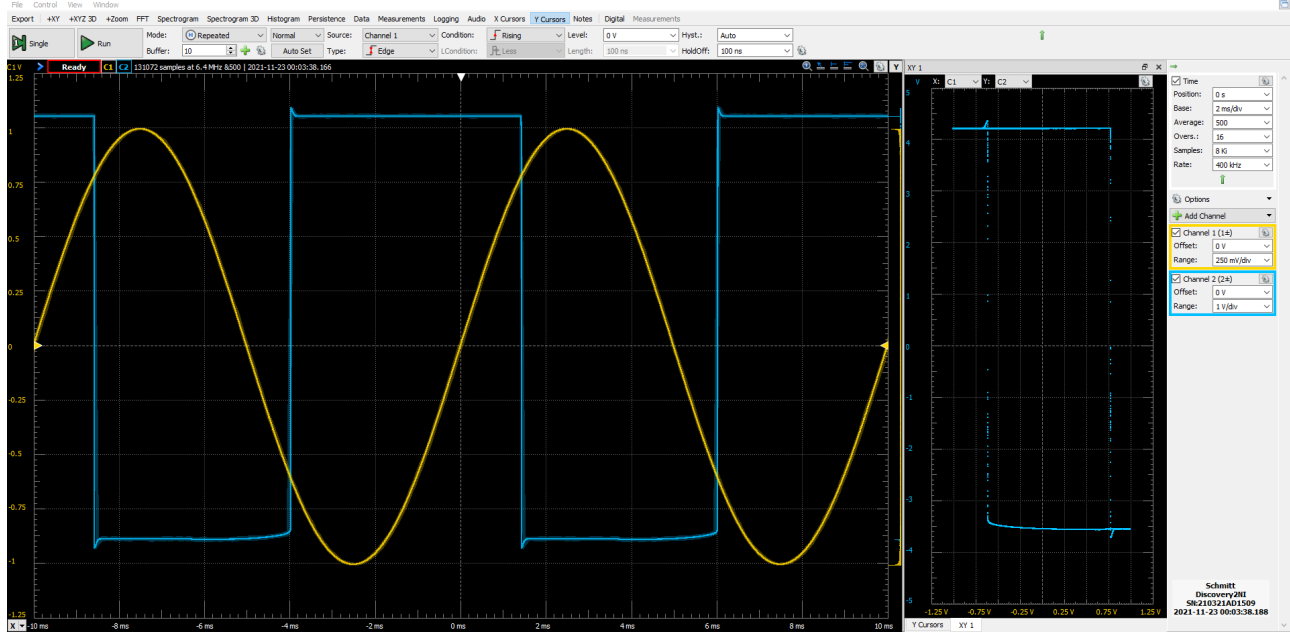


Figura 11: Risposta del trigger di Schmitt ad un segnale sinusoidale di ampiezza  $V_s = 1$  V e frequenza  $f = 100$  Hz.

La stessa asimmetria si riscontra nel grafico XY dei segnali in ingresso e uscita dal circuito, in cui le 2 rette di transizione verticali corrispondono ai valori delle tensioni di soglia  $V_{TL}$  e  $V_{TH}$  del trigger. Queste non sono simmetriche rispetto a 0 V, ma risultano traslate verso destra.

## 2.b Saturazione dell'OpAmp

Abbiamo misurato le tensioni di saturazione dell'OpAmp direttamente dai valori alto  $V_{OH}$  e basso  $V_{OL}$  - pressoché costanti- che assume l'onda quadra in uscita dal trigger tramite i cursori:

$$\begin{aligned} V_{OH} &= 4.28 \pm 0.04 \text{ V} \\ V_{OL} &= -3.66 \pm 0.03 \text{ V} \end{aligned}$$

Per il secondo circuito abbiamo trovato, allo stesso modo

$$\begin{aligned} V_{OH} &= 4.21 \pm 0.04 \text{ V} \\ V_{OL} &= -3.53 \pm 0.03 \text{ V} \end{aligned}$$

## 2.c Tensioni di soglia e funzionamento del trigger

Ora abbiamo inviato in ingresso al circuito (nonché all'ingresso invertente dell'OpAmp) un'onda sinusoidale di ampiezza  $1999 \pm 15$  mV e frequenza fissata a  $1000 \pm 16$  Hz.

Dalle intersezioni tra i canali in ingresso ed uscita abbiamo misurato le tensioni per cui si verificano le transizioni basso-alto  $V_{TH}$  e alto-basso  $V_{TL}$  nel primo trigger

$$\begin{aligned} V_{TH} &= -617 \pm 5 \text{ mV} \\ V_{TL} &= 775 \pm 6 \text{ mV} \end{aligned}$$

Per il secondo circuito invece abbiamo preso una media pesata dei punti che giacciono sulle 2 linee verticali che si formano nelle transizioni del ciclo di isteresi visto nel grafico XY di fig. 12.

$$\begin{aligned} V_{TH} &= -611.6 \pm 0.5 \text{ mV} \\ V_{TL} &= 780.4 \pm 0.5 \text{ mV} \end{aligned}$$

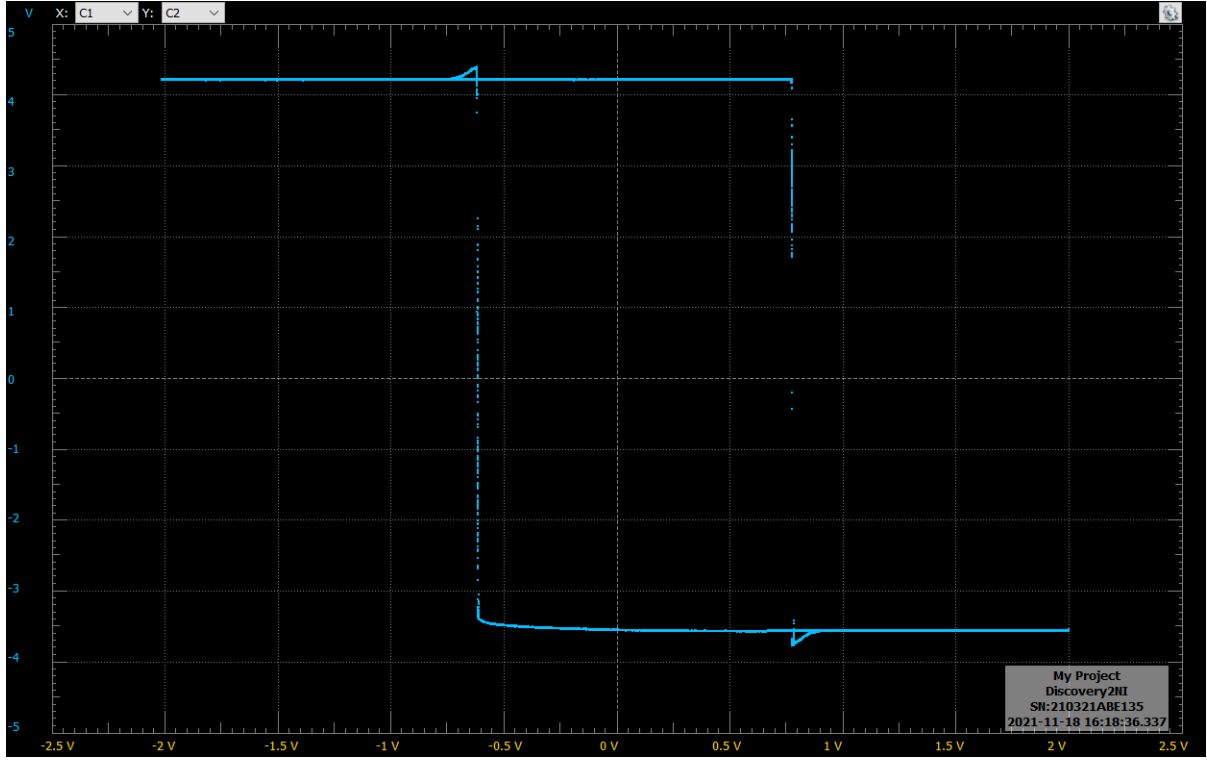


Figura 12: Visualizzazione XY del seno di ampiezza  $V_s = 2$  V e frequenza 100 Hz in ingresso e del segnale in uscita dal trigger di Schmitt.

Supponiamo che l'OpAmp si comporti come il comparatore/discriminatore già visto nell'amplificatore di carica, quindi che la differenza  $v_d = v_+ - v_-$  sia abbastanza grande da far sì che si trovi sempre in regime non lineare. In piena analogia con quanto discusso nella sezione 1.d, come segnale in uscita dal comparatore ci aspettiamo

$$V_{\text{out}} = V_{CC} \operatorname{sgn}(v_+ - v_-).$$

Inoltre, dal momento che l'ingresso non-invertente è collegato all'uscita del partitore di tensione costituito da  $R_1$  e  $R_2$ , abbiamo

$$v_+ = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{\text{out}} = \beta V_{\text{out}}$$

dove abbiamo implicitamente definito il coefficiente di partizione  $\beta := \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ . Quindi mettendo tutto insieme

$$V_{\text{out}} = V_{CC} \operatorname{sgn}(\beta V_{\text{out}} - V_s).$$

Da cui vediamo che la tensione in uscita dal comparatore sarà al livello “alto” (i.e.  $V_{\text{out}} = V_{CC}$ ) quando  $V_{\text{out}} > V_s/\beta$  e “basso” (cioè  $V_{\text{out}} = -V_{CC}$ ) nel caso complementare  $V_{\text{out}} < V_s/\beta$ . Queste condizioni definiscono le tensioni di soglia per cui ci aspettiamo avvengano le transizioni:  $V_s = \pm V_{\text{trn}}$ , dove

$$V_{\text{trn}} = \beta V_{CC} = \frac{V_{CC}}{1 + R_1/R_2} = 0.90 \pm 0.03 \text{ V} \quad (6)$$

Possiamo spiegare il funzionamento del trigger di Schmitt in termini di feedback positivo, che ne regola il comportamento tramite il controllo del segnale in ingresso. Se la tensione  $V_s$  è minore di  $V_{TH} < 0$  V il segnale in uscita rimane alto. Al crescere della tensione del segnale in ingresso fino al valore di soglia  $V_s \geq V_{TL} \implies V_{\text{out}} \mapsto -V_{CC}$  il segnale in uscita dal circuito salta repentinamente dal livello alto a basso. Dunque  $V_{\text{out}}$  rimane basso fintanto che la tensione in ingresso non diminuisce al di sotto della soglia opposta  $V_s \leq V_{TH} \implies V_{\text{out}} \mapsto V_{CC}$ , per cui il segnale in uscita sale velocemente al livello alto.

Il che corrisponde esattamente a quanto si riesce ad osservare visualizzando i segnali in ingresso ed uscita con l'oscilloscopio in fig. 11.

## 2.d Limiti fisici del circuito

Si osserva che il circuito si comporta come discriminatore con isteresi per frequenze sufficientemente basse; più precisamente possiamo individuare una frequenza limite  $f_L$ , oltre la quale il trigger smette di funzionare. Il

valore di questa frequenza limite dipende anche dall'ampiezza dell'onda che si invia all'ingresso, per esempio nel caso in cui l'ampiezza sia  $V_s = 1$  V si trova  $f_L \approx 90$  kHz, mentre per  $V'_s = 2$  V la frequenza limite aumenta fino a  $f'_L \approx 700$  kHz. Riportiamo di seguito le misure della frequenza trovate da uno scan con Network per i due circuiti in queste due configurazioni:

$$f_L = 92.6 \pm 0.1 \text{ kHz}$$

$$f'_L = 680 \pm 4 \text{ kHz}$$

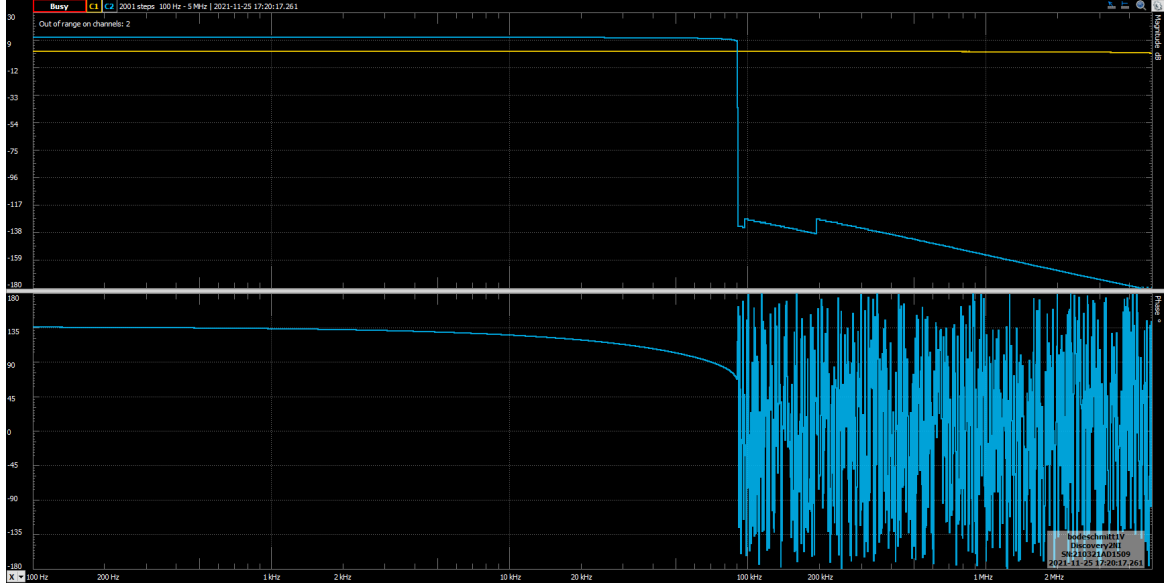


Figura 13: Analisi in frequenza del trigger di Schmitt, con ampiezza del segnale in ingresso fissata ad 1 V, l'unico punto di interesse si trova a circa 90 kHz, frequenza oltre alla quale il circuito non ha più il comportamento atteso.

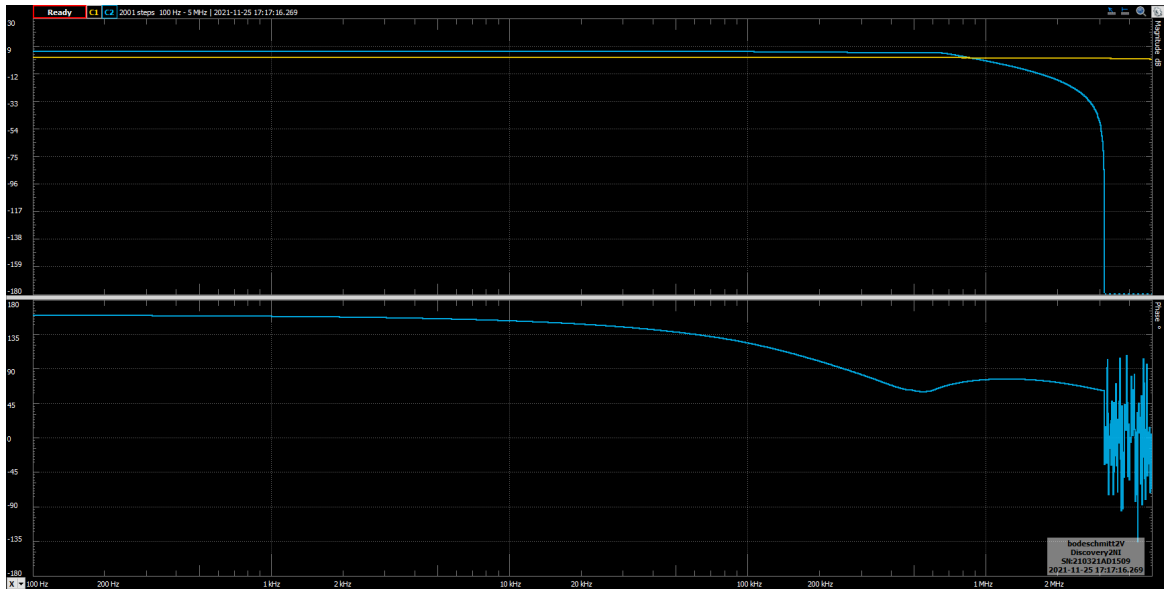


Figura 14: Risposta in frequenza del trigger di Schmitt, con ampiezza del segnale in ingresso fissata a 2 V, a partire dai 700 kHz osserviamo una deviazione dall'andamento atteso.

Per frequenze maggiori di  $\sim 10$  kHz la pendenza della transizione del segnale in uscita da “alto” a “basso” e viceversa comincia ad essere limitata dallo slew-rate dell'OpAmp. Per cui dal fronte d'onda tra le transizioni dello stato del trigger abbiamo scelto di misurare direttamente lo slew-rate del TL081

$$SR = 11.1 \pm 0.3 \text{ V}/\mu\text{s}$$

$$SR = 11.3 \pm 0.3 \text{ V}/\mu\text{s}$$

Effettivamente, affinché l'OpAmp possa funzionare correttamente come discriminatore con isteresi, occorre che il tempo minimo di salita e discesa siano molto minori rispetto al periodo dei segnali in ingresso e in uscita:

$$T \gg 2t_{\min}, \quad t_{\min} = \frac{V_{\text{out}}^{pp}}{\text{SR}} \approx 0.7 \mu\text{s} \implies \frac{1}{T} = f \ll 700 \text{ kHz}. \quad (7)$$

che risulta in accordo con quanto si è trovato sperimentalmente.

Variando l'ampiezza del segnale in ingresso  $V_s$  si osserva che l'ampiezza del segnale in uscita rimane pressoché uguale a  $V_{\text{out}}^{pp} = V_{OH} - V_{OL} = 7.94 \pm 0.04$  fino a una soglia inferiore intorno a 800 mV, al di sotto della quale l'uscita è costante al valore di saturazione  $V_{OH}$ . Infatti per quanto abbiamo visto, affinché il circuito possa compiere il ciclo di isteresi, l'ampiezza (picco-picco) del segnale in ingresso deve essere maggiore della base del rettangolo di isteresi  $V_s^{pp} \geq 2V_{\text{trn}}$ . In realtà, per via dell'asimmetria delle tensioni di soglia, è necessario che  $V_s$  abbia ampiezza superiore alla soglia  $V_{TL}$ , in modulo la più alta delle due; come si è visto dall'esperimento.

Notiamo infine che al diminuire dell'ampiezza dell'onda in ingresso (a partire dal massimo valore generabile di  $V_{s,\text{max}} = 5 \text{ V}$  fino a soglia  $V_s \approx V_{TL} \approx 800 \text{ mV}$ ) corrispondono un aumento della componente continua (da un minimo di circa 560 mV ad un massimo valore registrato di 1.5 V) e del duty cycle (a partire da un valore minimo di  $50.6 \pm 1.1\%$  fino a  $65.6 \pm 1.2\%$  per valori di  $V_s$  molto vicini alla soglia) nell'onda quadra in uscita dal circuito.

### 3 Multivibratore astabile

Il circuito in fig. 15 è costituito da un trigger di Schmitt con un filtro passa-basso RC collegato all'ingresso invertente dell' OpAmp.

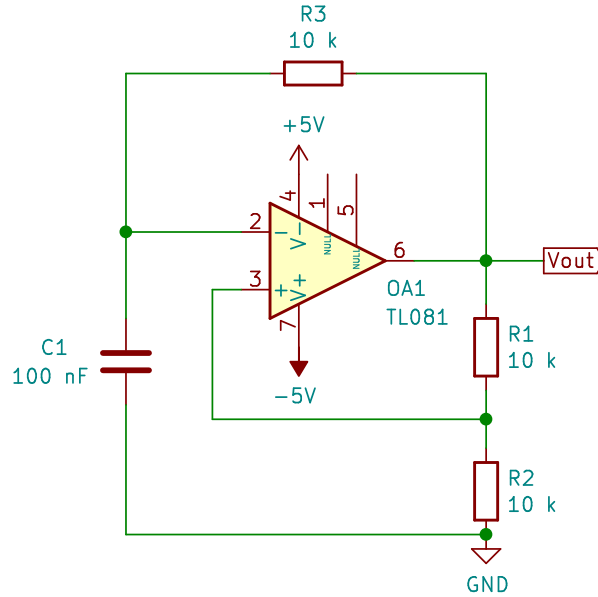


Figura 15: Schema circuitale del multivibratore astabile costruito.

#### 3.a Funzionamento del circuito

Per spiegarne il funzionamento è fondamentale studiare il comportamento del condensatore collegato all'ingresso negativo dell'OpAmp  $C_1$ . Questo si carica fino a raggiungere la stessa d.d.p. al terminale positivo dell'operazionale, a questo punto il trigger cambia rapidamente stato da alto a basso e, di conseguenza, la tensione all'ingresso non-invertente si abbassa. Dunque il condensatore comincia a scaricarsi fino a che la d.d.p. ai suoi capi non raggiunge la stessa tensione ora presente all'ingresso non invertente dell'amplificatore operazionale. Il ciclo quindi si ripete generando un'onda quadra in uscita, il cui periodo di oscillazione è proporzionale al doppio del tempo caratteristico  $\tau = R_3 C_1$  in cui il condensatore è in grado di caricarsi/scaricarsi.

Più precisamente, una volta definite

$$q = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0.502 \pm 0.003$$

$$\tau = R_3 C_1 = 95 \pm 4 \mu\text{s}$$

Abbiamo come valori attesi per i tempi caratteristici alto  $t_H$  e basso  $t_L$  ed il periodo  $T$  dell'onda quadra generata dal multivibratore:

$$t_H = \tau \ln \left( \frac{1 - q \frac{V_{OL}}{V_{OH}}}{1 - q} \right) = 1.04 \pm 0.04 \text{ ms} \quad (8)$$

$$t_L = \tau \ln \left( \frac{1 - q \frac{V_{OH}}{V_{OL}}}{1 - q} \right) = 1.16 \pm 0.05 \text{ ms} \quad (9)$$

$$(10)$$

Conseguentemente il valore del periodo e duty-cycle atteso valgono:

$$T = t_H + t_L = 2.20 \pm 0.06 \text{ ms} \quad (11)$$

$$\text{dc} = \frac{t_H}{T} = 47 \pm 2 \% \quad (12)$$

### 3.c Studio dei segnali in ingresso e uscita

Osservando il segnale in uscita  $V_{\text{out}}(t)$  ci si aspetta di trovare un'onda quadra di ampiezza picco-picco  $\sim 8 \text{ V}$ , periodo  $T = 2.15 \pm 0.03 \text{ ms}$  e duty-cycle 50%. Effettivamente come tensioni di saturazione alta  $V_{OH}$  e bassa  $V_{OL}$  dell'onda si è misurato

$$\begin{cases} V_{OH} &= 4.18 \pm 0.04 \text{ V} \\ V_{OL} &= -3.47 \pm 0.03 \text{ V} \end{cases} \Rightarrow V_{\text{out}}^{pp} = 7.65 \pm 0.05$$

Mentre come  $v_+(t)$  ci aspettiamo un'onda della stessa forma di  $V_{\text{out}}(t)$ , ma ridotta in ampiezza di un fattore di partizione  $q \approx 0.5$ . Questo corrisponde all'andamento osservato di questi due segnali, che riportiamo in fig. 16

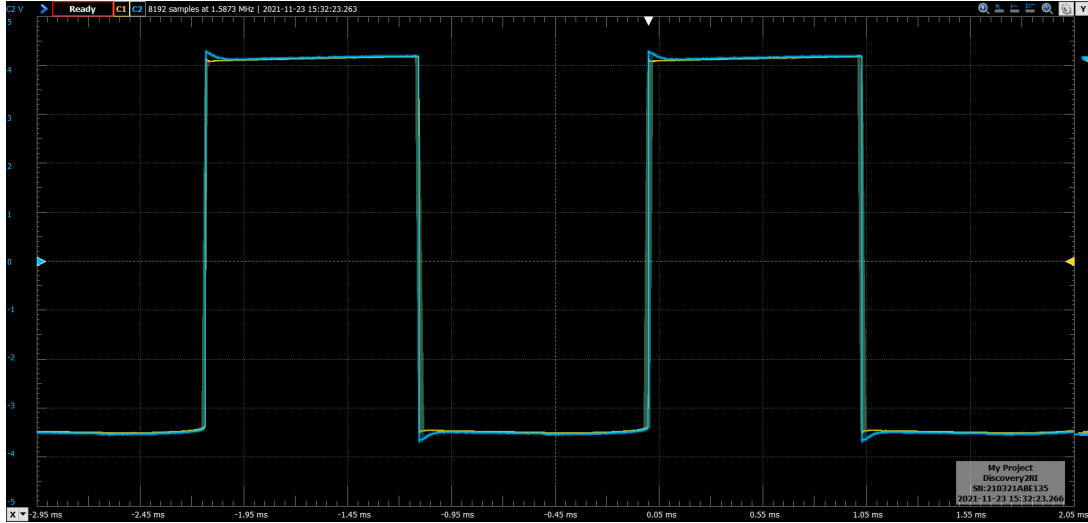


Figura 16: Fermo immagine preso dall'oscilloscopio dell'andamento nel tempo dei segnali  $v_+(t)$  (CH1) e  $V_{\text{out}}(t)$  (CH2).

Osservando  $v_-(t)$ , infine, ci si aspetta di vedere un segnale “a pinna di squalo”, caratteristico del processo di carica/scarica del condensatore e con la stessa ampiezza di  $v_+(t)$ , data dalle tensioni di transizione per il comparatore/trigger di Schmitt, come riportato in fig. 17.

### 3.d Misure di periodo e duty cycle

Per misurare il periodo dell'onda quadra  $V_{\text{out}}(t)$  e la durata dei tempi in cui è in saturazione positiva  $t_H$  (e negativa  $t_L$ ) si è fatto uso dei cursori sull'asse X:

$$t_H = 1.03 \pm 0.02 \text{ ms}$$

$$t_L = 1.12 \pm 0.02 \text{ ms}$$

$$T = 2.14 \pm 0.01 \text{ ms}$$

$$t_H = 1.00 \pm 0.02 \text{ ms}$$

$$t_L = 1.08 \pm 0.02 \text{ ms}$$

$$T = 2.09 \pm 0.16 \text{ ms}$$

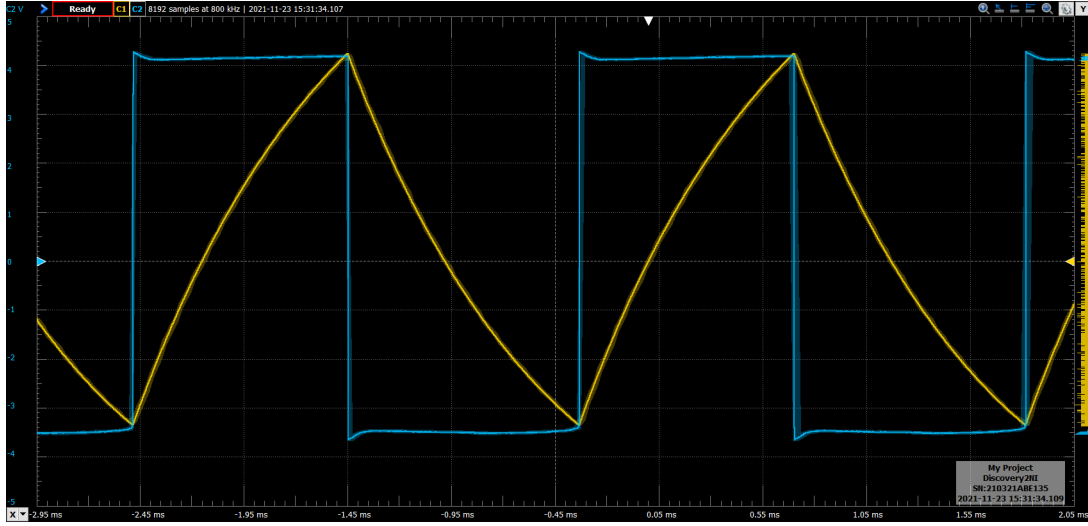


Figura 17: Fermo immagine preso dall'oscilloscopio dell'andamento nel tempo dei segnali  $v_-(t)$  (CH1) e  $V_{out}$  (CH2).

Da queste abbiamo ricavato la nostra miglior stima del duty-cycle dell'onda quadra generata dal multivibratore

$$\begin{aligned} dc &= \frac{t_H}{T} = 47.9 \pm 1.0 \% \\ dc &= \frac{t_H}{T} = 48.2 \pm 0.9 \% \end{aligned}$$

Le misure dei tempi in saturazione positiva, negativa e del periodo dei segnali studiati risultano compatibili con i loro valori attesi, per cui lo è anche il duty cycle.

### 3.e Limite massimo in frequenza del generatore

Secondo il nostro modello il periodo dell'onda quadra generata è direttamente proporzionale a (e anche dello stesso ordine di)  $\tau = R_3 C_1$ , per cui se ne vogliamo aumentare la frequenza sarà sufficiente ridurre il valore della resistenza  $R_3$  o della capacità  $C_1$ . Effettivamente abbiamo osservato un aumento di un fattore 10 nella frequenza del treno d'impulsi generato, a seguito di una riduzione di  $C_1$  ed  $R_3$  dello stesso fattore, in accordo con quanto ci si aspetta di vedere per una decimazione del tempo caratteristico di carica/scarica  $\tau$ .

L'aumento della massima frequenza generabile non è però l'unico effetto che si osserva per via della modifica di  $\tau$ : l'onda quadra in uscita risulta distorta, specialmente intorno ai fronti di salita e discesa che sono visibilmente limitati in pendenza, come si vede in fig. 18.

In piena analogia con quanto visto nella sezione 2.d, quando il semi-periodo dell'uscita si avvicina all'ordine dei  $\mu s$ , cioè il tempo minimo che l'OpAmp reale impiega per le transizioni di stato dell'onda quadra di ampiezza picco-picco  $V_{out}^{pp} \sim 8$  V, il segnale in uscita presenta fronti di salita e discesa limitati dallo slew-rate dell'OpAmp, che non riesce a passare abbastanza rapidamente da uno stato all'altro.

Per verificare che l'effetto di distorsione predominante sia dovuto allo slew-rate dell'OpAmp, come per il trigger di Schmitt abbiamo misurato (con i cursori) dalla pendenza dei fronti di salita dell'onda in uscita  $SR = 11.2 \pm 0.3$  V/s. Questo è compatibile con l'intervallo di valori tipici riportato nel datasheet ( $SR_{min} = 8$  V/ $\mu s$  –  $SR_{typ} = 13$  V/ $\mu s$ ) in particolare ci aspettiamo che l'onda quadra generata inizi ad essere distorta per valori del periodo dell'onda prossimi a  $T_{min} \approx 1.4$   $\mu s$ , compatibilmente con quanto abbiamo osservato.

Riducendo ulteriormente i valori di resistenza e capacità ( $R_3 \approx 220$   $\Omega$ ,  $C_1 \approx 1$  nF) si osservano deviazioni ancora più pronunciate dall'onda quadra attesa in uscita, che possono essere dovute al fatto che il TL081 ha guadagno finito e dipendente dalla frequenza di lavoro, a differenza di quanto presuppone il nostro modello.

## 4 Multivibratore monostabile

Il multivibratore monostabile riportato in fig. 20 è simile al circuito precedente, ma ha uno stato stabile (quello alto) e uno instabile, per cui viene utilizzato come generatore di impulsi. In effetti si è costruito il circuito a partire dallo stesso trigger di Schmitt invertente, aggiungendo però un sotto-circuito di trigger all'ingresso positivo dell'OpAmp e il diodo  $D_1$  in parallelo al condensatore  $C_1$  del filtro passa-basso.

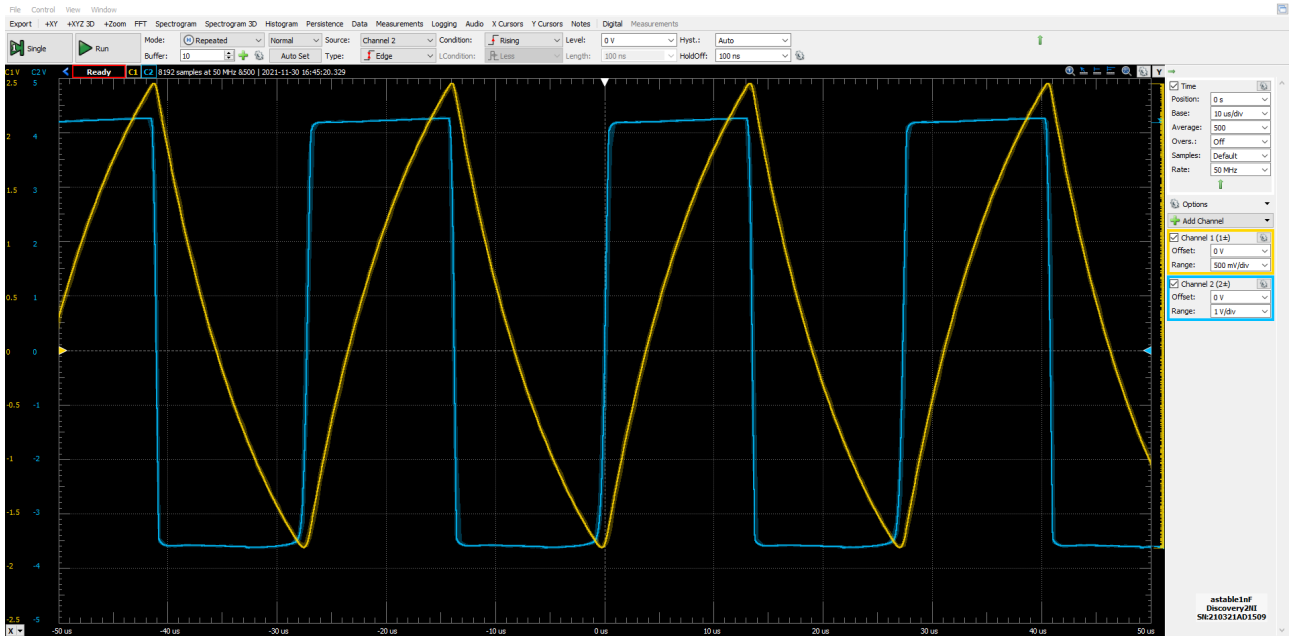


Figura 18: Fermo immagine preso dall'oscilloscopio dell'andamento nel tempo dei segnali  $v_-(t)$  (CH1) e  $V_{out}(t)$  (CH2) quando il periodo dell'onda generata  $T \sim \tau \approx 36 \mu s$  è ridotto di un fattore di circa 10 rispetto alla configurazione originale del circuito.

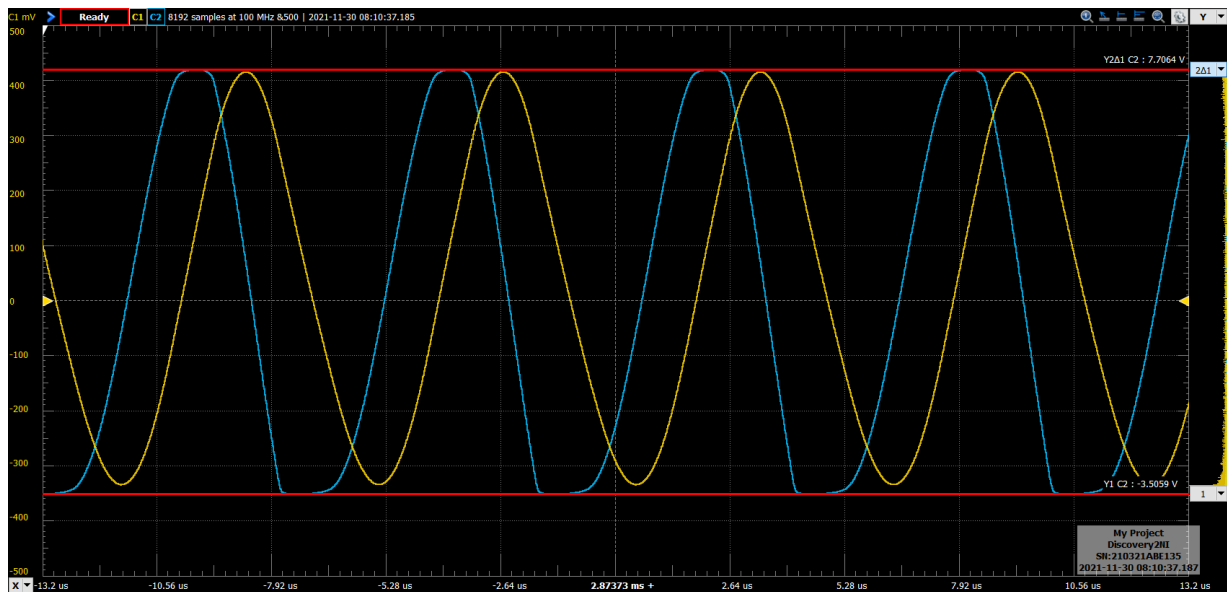


Figura 19: Fermo immagine preso dall'oscilloscopio dell'andamento nel tempo dei segnali  $v_-(t)$  (CH1) e  $V_{out}(t)$  (CH2) quando il periodo dell'onda generata  $T \approx 4 \mu s$  è prossimo ai limiti possibili per il circuito.

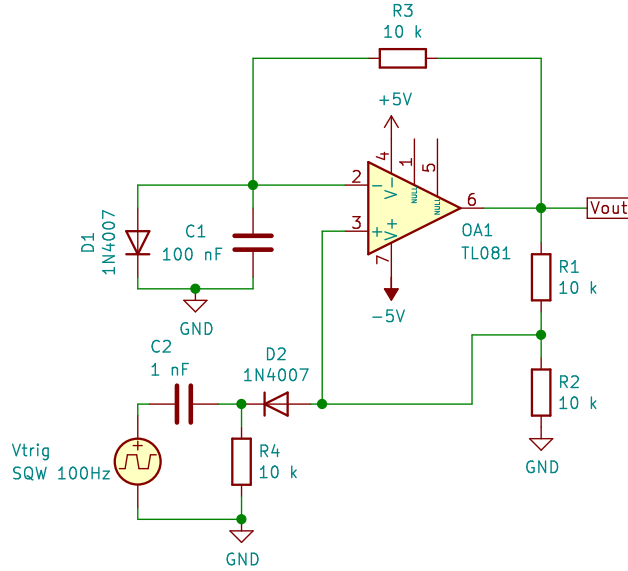


Figura 20: Schema circuitale del multivibratore monostabile costruito.

#### 4.a Studio dei segnali in ingresso e uscita

La presenza del diodo in parallelo al condensatore  $C_1$  limita la tensione ai suoi capi  $V_C = v_-$ , per cui ci aspettiamo di avere  $V_C \leq V_\gamma \approx 0.7$  V, come si trova effettivamente in fig. 21.

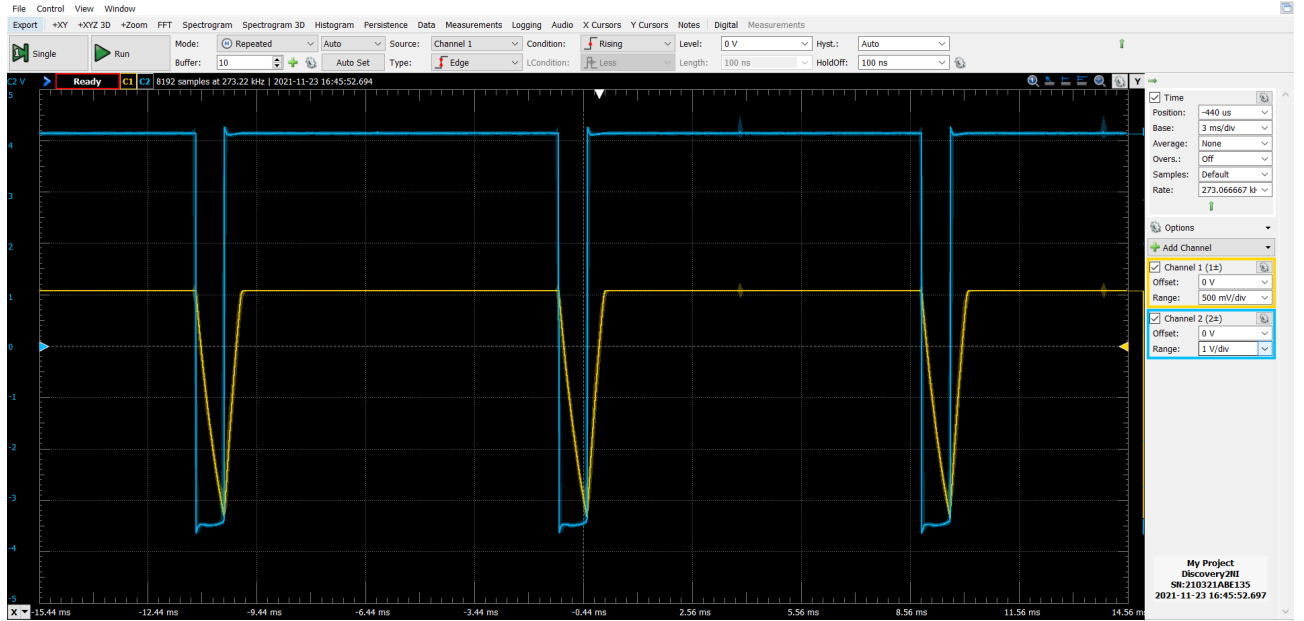


Figura 21: Acquisizione all'oscilloscopio dell'andamento nel tempo dei segnali  $v_-(t)$  (CH1) e  $V_{out}(t)$  (CH2).

È per questo che lo stato con l'uscita a livello alto è stabile, cioè da quest'ultimo il sistema non passa spontaneamente allo stato instabile; quello con uscita a livello basso. Dunque per innescare la transizione di stato  $V_{out} = V_{OH} \mapsto V_{OL}$  è necessario un circuito di trigger, che faccia abbassare  $v_+$  al di sotto di  $v_- \sim V_\gamma$ .

In assenza di  $V_{trig}$ , come per il multivibratore astabile, all'ingresso non-invertente dell'OpAmp ci aspettiamo di trovare come segnale  $v_+(t)$  la stessa forma d'onda presente all'uscita, ma ridotta in ampiezza di un fattore di partizione  $q = \frac{R_2}{R_2 + R_1} \approx 0.5$ . Ora però a questa si sovrappongono i picchi di differenza di potenziale che portano il circuito nello stato instabile sopra descritto; dopo un tempo caratteristico (proporzionale a  $\tau = R_3 C_1$ ) il multivibratore torna nella configurazione stabile, generando così un treno di impulsi negativi/un'onda quadra con duty-cycle prossimo a uno. Questo è in linea con quanto si vede in fig. 22.



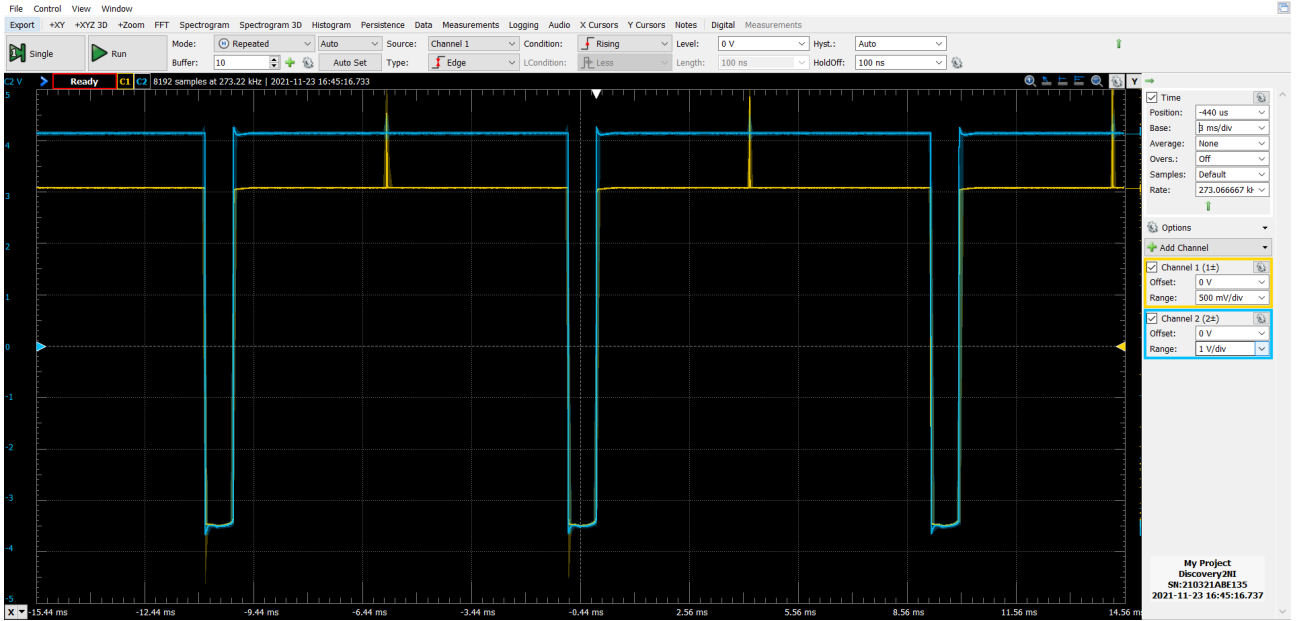


Figura 22: Acquisizione all'oscilloscopio dell'andamento nel tempo dei segnali  $v_+(t)$  (CH1) e  $V_{out}(t)$  (CH2).

#### 4.b Durata dell'impulso generato

Si è inviata all'ingresso del circuito di trigger un'onda quadra di ampiezza  $V_{trig} = 1.99 \pm 0.02$  V e frequenza  $100 \pm 1.6$  Hz.

Dunque abbiamo misurato coi cursori le tensioni di saturazione dell'uscita e  $V_\gamma$  dal livello di tensione costante a cui si trova  $v_-$  quando il circuito è nello stato stabile:

$$\begin{aligned} V_{OH} &= 4.12 \pm 0.04 \text{ V} & V_{OH} &= 4.14 \pm 0.04 \text{ V} \\ V_{OL} &= -3.56 \pm 0.03 \text{ V} & V_{OL} &= -3.49 \pm 0.03 \text{ V} \\ V_\gamma &= 547 \pm 6 \text{ mV} & V_\gamma &= 549 \pm 6 \text{ mV} \end{aligned}$$

E sempre con i cursori si sono misurati i tempi per cui il segnale  $V_{out}$  rimane "basso" in ciascun circuito:

$$\begin{aligned} t_L &= 767 \pm 10 \text{ } \mu\text{s} \\ t_L &= 784 \pm 10 \text{ } \mu\text{s} \implies dc = 1 - \frac{t_L}{T} = 92.2 \pm 1.5\% \end{aligned}$$

Il valore atteso per la durata dell'impulso nello stato instabile è legato al tempo caratteristico in cui si scarica il condensatore  $C_1$  dalla

$$t_{L,exp} = \tau \ln \left( \frac{1 - V_\gamma/V_{OL}}{1 - q} \right) = 0.80 \pm 0.03 \text{ } \mu\text{s} \quad (13)$$

Questo risulta compatibile entro l'incertezza con la durata dell'impulso misurata in uscita dal multivibratore.

#### 4.c Analisi del funzionamento del circuito

Se il condensatore  $C_1$  è inizialmente scarico e  $V_{out} = V_{OH}$ , allora il condensatore in parallelo a  $D_1$  si carica fino a quando la d.d.p. tra le sue armature  $V_C \approx V_\gamma$ . Quindi, poiché  $v_- \approx V_\gamma$  e  $v_+ = \frac{R_2}{R_1+R_2} V_{out} \approx 2$  V, l'uscita rimane a livello "alto".

Se il condensatore è inizialmente carico (con tensione massima  $v_- \leq V_\gamma$ ) e se  $V_{out} = V_{OL}$ , allora si scarica fintanto che vale  $v_- \geq v_+ \approx -1.7$  V. Una volta scarico alla fine dell'impulso, poiché l'OpAmp è in regime non-lineare, l'uscita commuta rapidamente (entro i limiti imposti dallo slew-rate) a  $V_{out} = V_{OH}$ ; il condensatore torna a caricarsi e il circuito ritorna alla configurazione stabile ( $v_- \approx V_\gamma$ ) concludendo il ciclo.

Il sotto-circuito di trigger, formato dal passa-alto  $R_4 + C_2$  con il diodo  $D_2$  in cascata, invia all'ingresso non-invertente dell'OpAmp dei picchi di differenza di potenziale. Questi sono generati grazie al condensatore  $C_2$ , che elimina la componente continua dell'onda quadra  $V_{trig}(t)$ , di cui ci interessano solamente i fronti ripidi in discesa (e meno in salita). Infatti è la discesa di  $V_{trig}$  a generare l'impulso negativo in uscita dal multivibratore, mentre il fronte di salita è responsabile per i picchi di tensione positiva che osserviamo in fig. 23

La risalita del treno d'impulsi in  $V_{out}(t)$  deve avvenire mentre  $V_{trig}(t)$  è ancora costante nel semi-periodo negativo, prima che torni "alto". Poiché questa risalita si verifica nel momento in cui  $v_-(t)$  assume il suo valore

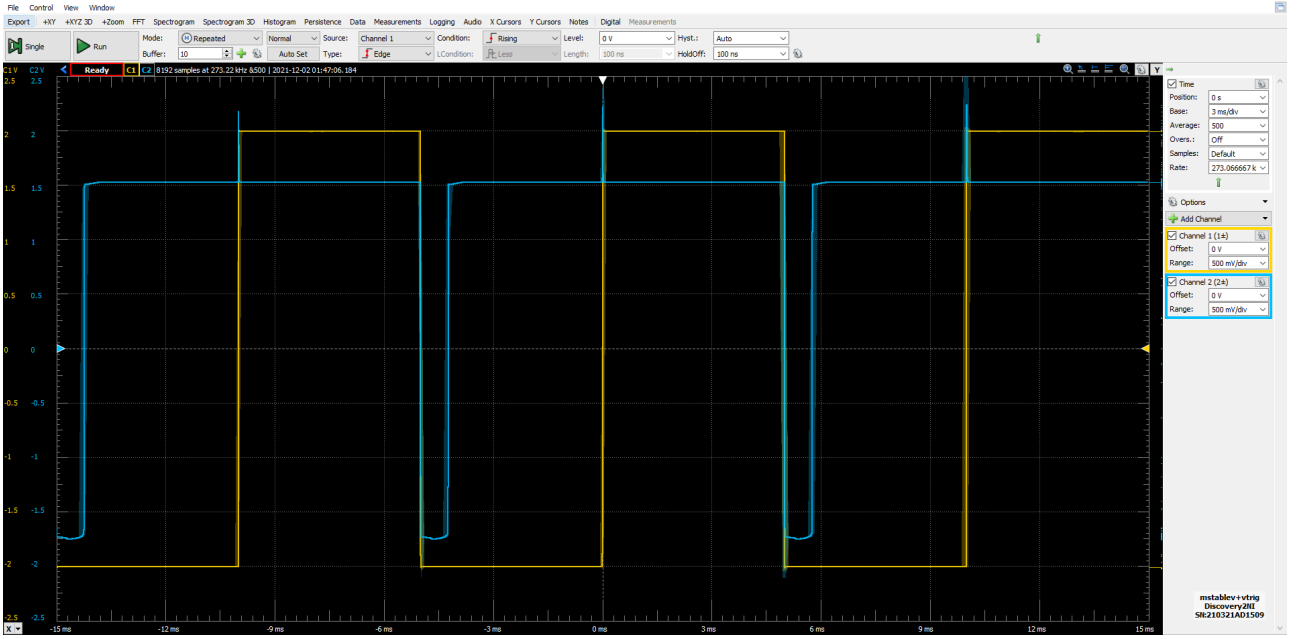


Figura 23: Acquisizione all'oscilloscopio dell'andamento nel tempo dei segnali  $V_{\text{trig}}(t)$  (CH1) e  $v_+(t)$  (CH2).

minimo  $v_- \approx \frac{1}{2}V_{OL}$  che fa “scattare” il comparatore,  $C_1$  deve avere il tempo necessario di caricarsi prima che possa partire una nuova scarica, dunque un nuovo impulso negativo.

Si è quindi tenuta fissa l'ampiezza di  $V_{\text{trig}}$  e se ne è variata la frequenza. Si osserva che la durata dell'impulso in  $V_{\text{out}}$  rimane (entro le incertezze di misura) indipendente dalla frequenza del segnale di trigger, fino a quando la durata dell'impulso è minore del semi-periodo di  $V_{\text{trig}}$ . Al di sopra di questa frequenza critica (sperimentalmente abbiamo trovato  $f_{\text{crit}} \approx 1 \text{ kHz}$ ) il circuito smette di funzionare correttamente per durate dell'impulso superiori a  $\frac{1}{2}T_{\text{trig}} \approx 0.5 \text{ ms}$  per via dei tempi di carica del condensatore  $C_1$ , come si può vedere in fig. 24.

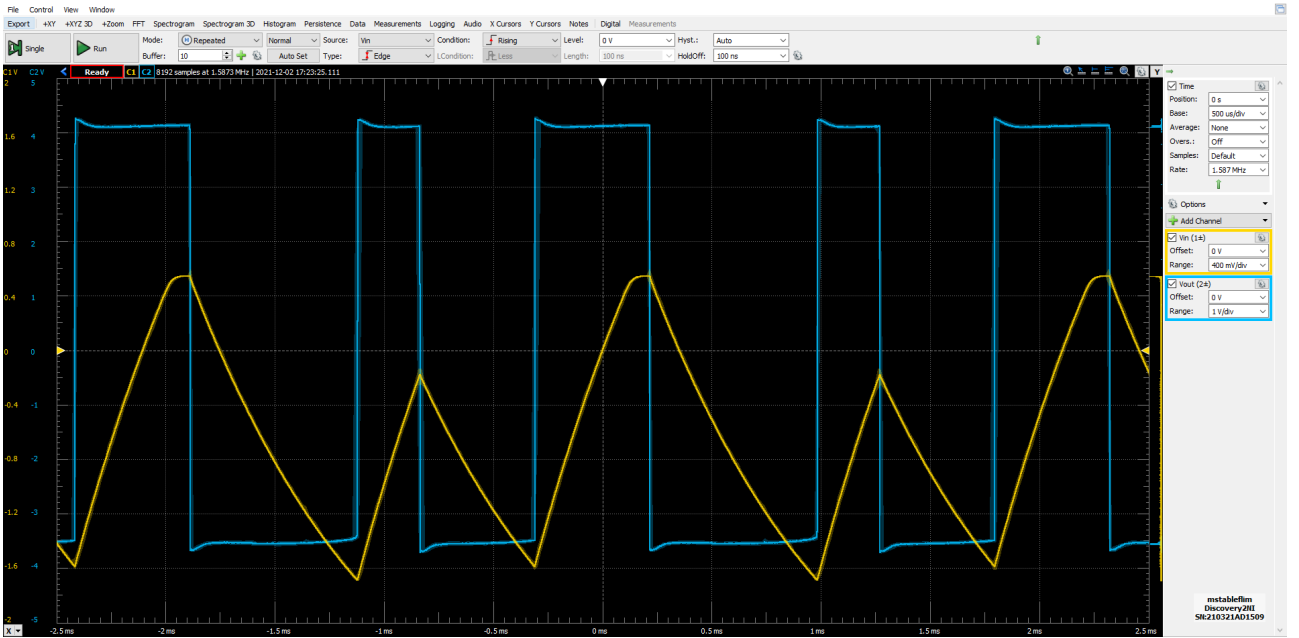


Figura 24: Acquisizione all'oscilloscopio dell'andamento nel tempo dei segnali  $v_-(t)$  (CH1) e  $V_{\text{out}}(t)$  (CH2) alla frequenza limite per cui è possibile pilotare il multivibratore monostabile.

Si è variato il duty-cycle dell'onda  $V_{\text{trig}}(t)$  tenendo fissate frequenza ed ampiezza. Non abbiamo riscontrato una apprezzabile dipendenza della durata dell'impulso in  $V_{\text{out}}(t)$  dal duty cycle per il range esplorato tra l'1% e il 99%, come era ragionevole aspettarsi, visto che utilizziamo solamente i fronti di transizione dell'onda quadra.

Infine abbiamo mantenuto costanti frequenza e duty-cycle di  $V_{\text{trig}}(t)$  e ne abbiamo variato l'ampiezza. La durata dell'impulso in  $V_{\text{out}}(t)$  risulta (entro le incertezze sperimentali) indipendente dall'ampiezza del segnale di trigger per valori di  $V_{\text{trig}}$  maggiori di una certa soglia. Si è misurato con i cursori l'ampiezza minima al di

sotto della quale il multivibratore non riesce a compiere la transizione alto-basso, che risulta

$$V_{\text{trig}}^{\text{min}} = 768 \pm 6 \text{ mV}$$

In effetti, se  $V_{\text{trig}}$  è minore di questa soglia ci aspettiamo che  $v_+(t)$ , quindi gli impulsi prodotti dal trigger sovrapposti al segnale in uscita dal partitore, non siano abbastanza grandi da rendere  $v_d = v_+ - v_- < 0 \text{ V}$  e quindi far commutare il discriminatore; perciò  $V_{\text{out}}$  rimane fisso alla tensione di saturazione alta, che corrisponde a quanto si è osservato dall'esperimento.

## Conclusioni e commenti finali

Si è riusciti a costruire e studiare alcuni dei circuiti più semplici e noti che fanno uso di amplificatori operazionali in regime non lineare, tra cui: un amplificatore di carica, un trigger di Schmitt e due multivibratori; uno astabile e uno monostabile.

In particolare siamo riusciti a descrivere e verificare sperimentalmente il funzionamento dei circuiti e a caratterizzarne tempi e frequenze caratteristici; dunque anche i limiti fisici in frequenza, ampiezza e duty-cycle sia per i segnali in ingresso che nella risposta all'uscita.

## Dichiarazione

I firmatari di questa relazione dichiarano che il contenuto della relazione è originale, con misure effettuate dai membri del gruppo, e che tutti i firmatari hanno contribuito alla elaborazione della relazione stessa.

## Appendice

Consideriamo il circuito formato dal condensatore  $C_T$  e dal sotto-circuito di formazione. La trasformata di Laplace della funzione di trasferimento che lega  $V_s$  a  $V_{sh}$  per un amplificatore invertente con impedenze complesse è:

$$\tilde{A}(s) = -\frac{\left(\frac{1}{R_1} + sC_F\right)^{-1}}{\frac{1}{sC_T}} = -\frac{C_T}{C_F} \frac{s}{s + \frac{1}{\tau}}$$

con  $\tau := R_1 C_F$ . In ingresso inviamo un'onda quadra di periodo  $\mathcal{T} = 2T$  (per il principio di causalità la consideriamo nulla per tempi  $t < 0$ ) che possiamo scrivere come

$$V_{in}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k f(t - kT)$$

dove abbiamo definito  $f(t) := V_s [\theta(t) - \theta(t - T)]$ , la cui trasformata di Laplace è del tipo

$$\tilde{f}(s) = V_s \left[ \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} \right]$$

Per cui possiamo riscrivere la trasformata dell'onda quadra in ingresso

$$\tilde{V}_{in}(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \tilde{f}(s) e^{-kTs} = \tilde{f}(s) \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-kTs}$$

ed arrivare alla risposta del circuito in trasformata di Laplace dal prodotto di convoluzione

$$\tilde{V}_{sh}(s) = \tilde{A}(s) \tilde{V}_{in}(s) = \tilde{A}(s) \tilde{f}(s) \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-kTs} = \tilde{g}(s) \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-kTs} = \mathcal{L} \left[ \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k g(t - kT) \right] (s)$$

In cui abbiamo introdotto la trasformata della funzione di Green del sistema

$$\tilde{g}(s) = -V_s \frac{C_T}{C_F} \left[ \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} - \frac{e^{-sT}}{s + \frac{1}{\tau}} \right]$$

la cui anti-trasformata ha espressione

$$g(t) = -V_s \frac{C_T}{C_F} \left[ e^{-t/\tau} \theta(t) - e^{-(t-T)/\tau} \theta(t - T) \right]$$

Da cui deduciamo la risposta del circuito nel dominio del tempo:

$$V_{sh}(t) = -V_s \frac{C_T}{C_F} \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-\frac{t-kT}{\tau}} \theta(t - kT) - \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-\frac{t-(k+1)T}{\tau}} \theta(t - (k+1)T) \right\} \quad (14)$$

$$= -V_s \frac{C_T}{C_F} \left\{ e^{-\frac{t}{\tau}} \theta(t) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k e^{-\frac{t-kT}{\tau}} \theta(t - kT) \right\} \quad (15)$$

Finalmente, trascurando il transiente iniziale ( $k = 0$ ) e supponendo che<sup>2</sup>  $\tau \ll T$ , possiamo sviluppare l'eq. (15) per avere la forma d'onda attesa in uscita dallo shaper

$$\begin{aligned} V_{sh}(t) &\approx 2V_s \frac{C_T}{C_F} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k e^{-\frac{t-kT}{\tau}} \theta(t - kT) \\ &\approx 2V_s \frac{C_T}{C_F} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k e^{-\frac{t-kT}{\tau}} \chi_{[kT, (k+1)T]}(t) \end{aligned} \quad (16)$$

---

<sup>2</sup>Qui stiamo assumendo che la somma sia ben definita, come si può verificare dal fatto che vale (a meno di costanti fisiche)

$$\sum_{k \geq 0} \theta(t - k) e^{-(t-k)} = \sum_{k=0}^{\lfloor t \rfloor} e^{-(t-k)} \leq \frac{e}{e-1} e^{-\{t\}}.$$