

# Es05A: Applicazioni non-lineari di amplificatori operazionali

Gruppo 1.AC  
Matteo Rossi, Bernardo Tomelleri

25 novembre 2021

## Misura componenti dei circuiti

Resistenze [k $\Omega$ ]	$R$	$\sigma R$	Capacità [nF]	$C$	$\sigma C$
$R_1^Q$	100.6	0.8	$C_T$	1.00	0.04
$R_1^T$	9.94	0.08	$C_F$	1.00	0.04
$R_2^T$	2.19	0.03	$C_1$	96	4
$R_2^S$	9.94	0.08	$C_2$	1.00	0.04
$R_3$	9.92	0.08			
$R_4$	9.94	0.08			

Tabella 1: Valori di resistenza e capacità misurate per i componenti dei circuiti studiati.

Resistenze [ $\Omega$ ]	$R$	$\sigma R$	Capacità [nF]	$C$	$\sigma C$
$R_1^Q$	99.8	0.8	$C_T$	1.00	0.04
$R_1^T$	9.94	0.08	$C_F$	1.00	0.04
$R_2^T$	2.19	0.03	$C_1$	99	4
$R_2^A$	9.87	0.08	$C_2$	1.00	0.04
$R_3^A$	10.01	0.08			
$R_4^M$	9.91	0.08			

Tabella 2: Valori di resistenza e capacità misurate per i componenti dei circuiti studiati.

Riportiamo per completezza anche i valori delle tensioni di alimentazione continue per l'op-amp misurate con il multimetro

$$V_{CC} = 4.99 \pm 0.03\text{V}$$

$$V_{EE} = -4.99 \pm 0.03\text{V}$$

Non è stato facile misurare i valori di capacità dei condensatori nel circuito con il multimetro, che a volte con i soli puntali collegati legge un rumore di fondo intorno ai  $7 \pm 1$  nF, abbastanza alto da saturare il fondo scala da 2 nF con cui si vorrebbero misurare i valori delle capacità  $C_T$ ,  $C_F$  e  $C_2$ .

Per tutto il resto della trattazione come ampiezze dei segnali si intendono misurate non “picco - picco”, a meno che non venga esplicitato altrimenti.

## Nota sul metodo di fit

Per determinare i parametri ottimali e le rispettive covarianze si è implementato in Python un algoritmo di fit basato sui minimi quadrati mediante la funzione `curve_fit` della libreria SciPy.

## 1 Circuito amplificatore di carica

### 1.a Progettazione del circuito

Si è costruito un amplificatore di carica a partire da un op-amp TL081CP come quello in figura 1

In cui abbiamo indicato i sotto-circuiti di cui è composto, da sinistra verso destra come: “iniettore/rivelatore di carica”, “circuito formatore/shaper” (passa-basso/integratore attivo) e “discriminatore/comparatore”.

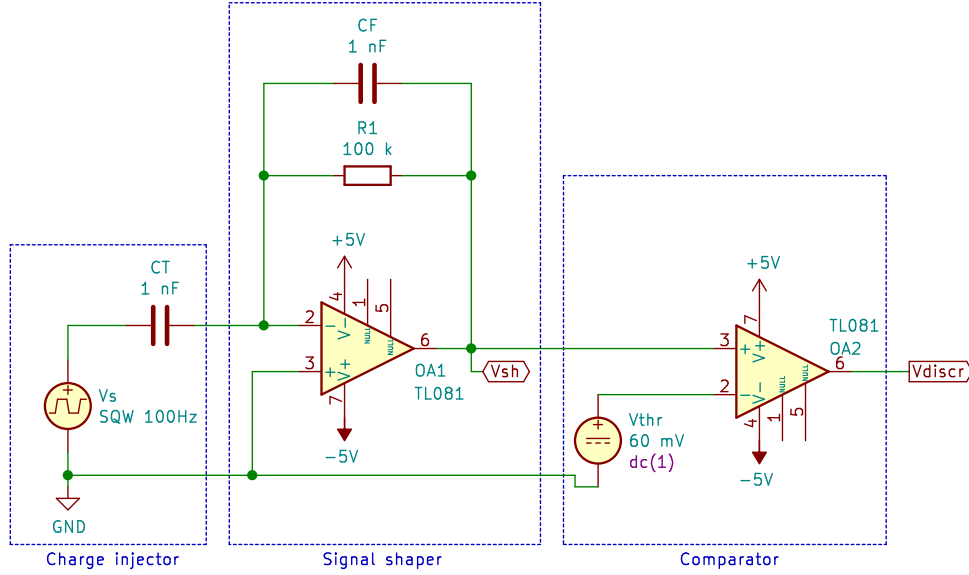


Figura 1: Schema circuitale dell'amplificatore di carica costruito.

### 1.b Funzionamento di iniettore e shaper

Si è inviato all'ingresso di entrambi i circuiti un'onda quadra di ampiezza  $V_s = 999 \pm 8 \text{ mV}$  e frequenza fissata a  $f = 100.0 \pm 1.6 \text{ Hz}$ , che corrisponde ad una carica  $Q_{in} = C_T \cdot 2V_s = 1.98 \pm 0.08 \text{ nC}$ , proporzionale al "salto" di tensione dal livello alto a basso (e viceversa) dell'onda, più semplicemente alla sua ampiezza picco-picco  $V_s^{pp} = 2V_s \implies Q_{in} = C_T \cdot V_s^{pp}$ .

Dunque abbiamo trovato come segnale in uscita dal circuito formatore un segnale che dopo un breve transiente diventa un esponenziale decrescente, con ampiezza iniziale  $V_{sh}(t=0) = 2007 \pm 18 \text{ mV}$  e con la stessa frequenza  $99.9 \pm 1.6 \text{ Hz}$  dell'onda quadra. Riportiamo in figura l'immagine acquisita dall'oscilloscopio con dettaglio sul transiente al fronte di discesa dell'onda quadra.

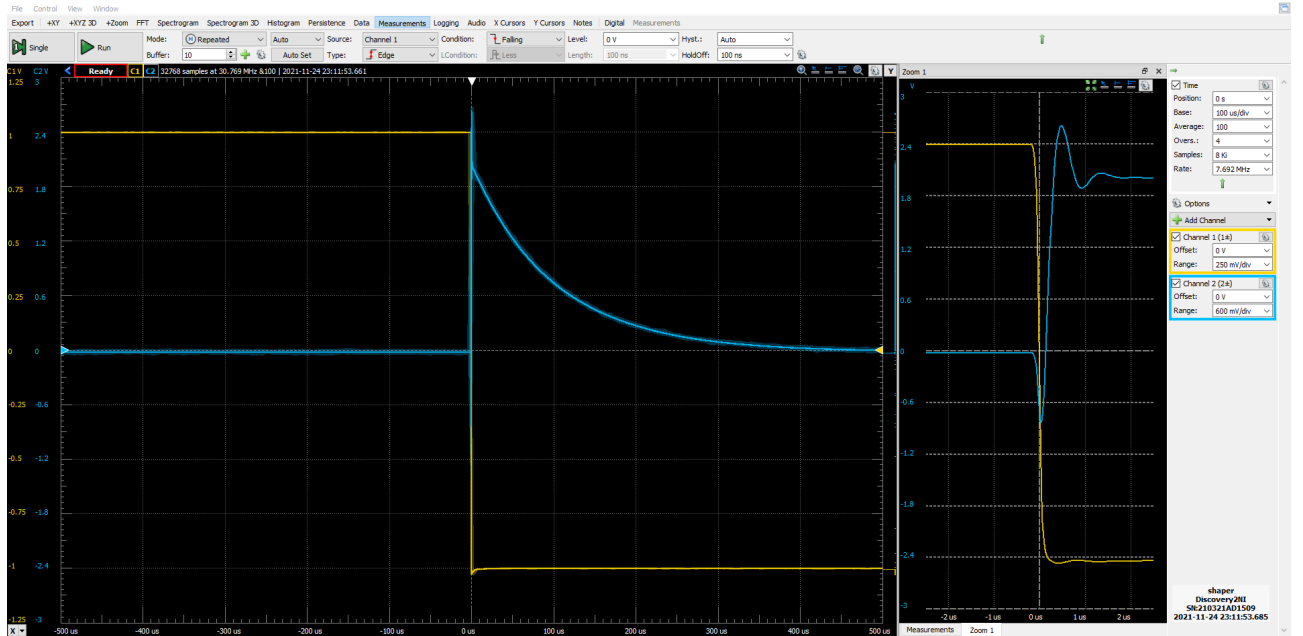


Figura 2: Acquisizione del segnale in uscita dal circuito formatore con un'onda quadra in ingresso  $V_s = 1 \text{ V}$ ,  $f = 100 \text{ Hz}$

Assumendo iniezione di carica istantanea sulle armature dei condensatori  $C_T$  e  $C_F$ , il segnale in uscita dal

sotto-circuito formato da  $C_T$  e dal formatore è legato al segnale in ingresso dalla relazione

$$V_{sh}(t) = \frac{Q_{in}}{C_F} e^{-t/\tau} = 2V_s(t) \frac{C_T}{C_F} e^{-t/\tau} \quad (1)$$

$$\tau = R_1 C_F \quad (2)$$

Per i circuiti in esame i valori delle capacità sono  $C_T \approx C_F = 1$  nF e  $R_1 = 100$  k $\Omega$ , per cui possiamo semplificare il rapporto  $C_T/C_F \approx 1$ , da cui ricaviamo come valori attesi

$$V_{sh}(t) = 2V_s(t) e^{-t/\tau}$$

$$\tau = R_1 C_F = 100 \pm 4 \mu s$$

Quindi complessivamente come tensione in uscita  $V_{sh}(t)$  ci aspettiamo di osservare una serie di picchi seguiti da decrescite esponenziali di segno alternante con l'onda quadra in ingresso e di ampiezza doppia.

Questo risulta compatibile con quanto si è osservato dall'oscilloscopio, che riportiamo per chiarezza in figura 3

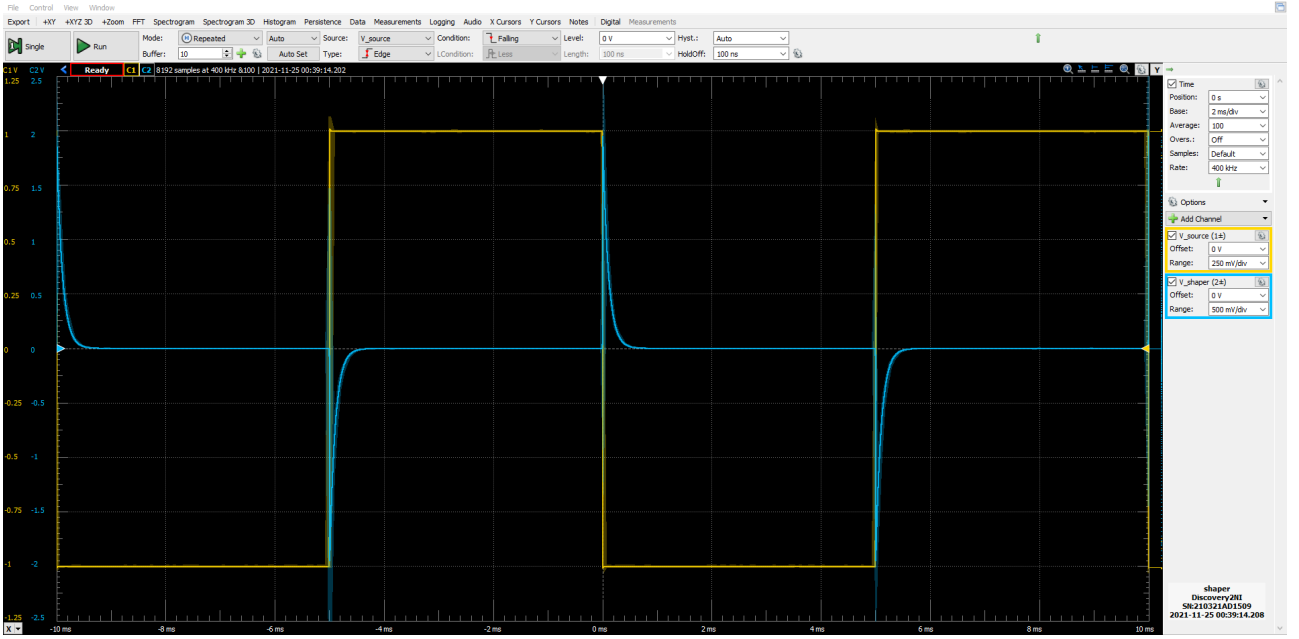


Figura 3: Onda quadra in ingresso  $V_s = 1$  V,  $f = 100$  Hz su CH1 e segnale in uscita dal circuito formatore  $V_{sh}$  su CH2.

Dunque possiamo controllare che la forma d'onda esponenziale sia compatibile con quanto atteso dalla (1) tramite un fit ai punti campionati dall'AD2, di cui riportiamo brevemente i risultati

$$V_{sh}(t=0) = 2024 \pm 2 \text{ mV} \quad \tau = 101.90 \pm 0.03 \mu s$$

$$\chi^2/\text{ndof} = 2774/4086 \quad \text{cov}_{\text{norm}} = -0.73$$

Da cui vediamo come non solo la misura di ampiezza iniziale sia compatibile con il valore misurato, ma anche il tempo caratteristico di smorzamento  $\tau$  risulta pienamente in accordo con il valore atteso dai componenti del circuito.

## 1.d Funzionamento del discriminatore

Il sotto-circuito discriminatore è un comparatore con tensione di soglia  $V_{thr} = 60 \pm 0.4$  mV fornita dal generatore di tensione W2 collegato all'ingresso invertente del secondo OpAmp.

Supponiamo di essere sempre in regime di saturazione per l'OpAmp ideale e come prima assumiamo iniezione istantanea di carica sui condensatori  $C_T$  e  $C_F$ . Grazie al fatto che le tensioni di alimentazione sono pari in modulo  $V_{CC} = -V_{EE}$  possiamo prendere come segnale atteso in uscita

$$V_{discr}(t) = V_{CC} \text{sgn}[V_{sh}(t) - V_{thr}]. \quad (3)$$

Più esplicitamente, ricordando che  $V_{sh}$  ha ampiezza (iniziale) doppia rispetto all'ampiezza in ingresso  $V_s$  (o proporzionale a  $V_s^{pp}$ )

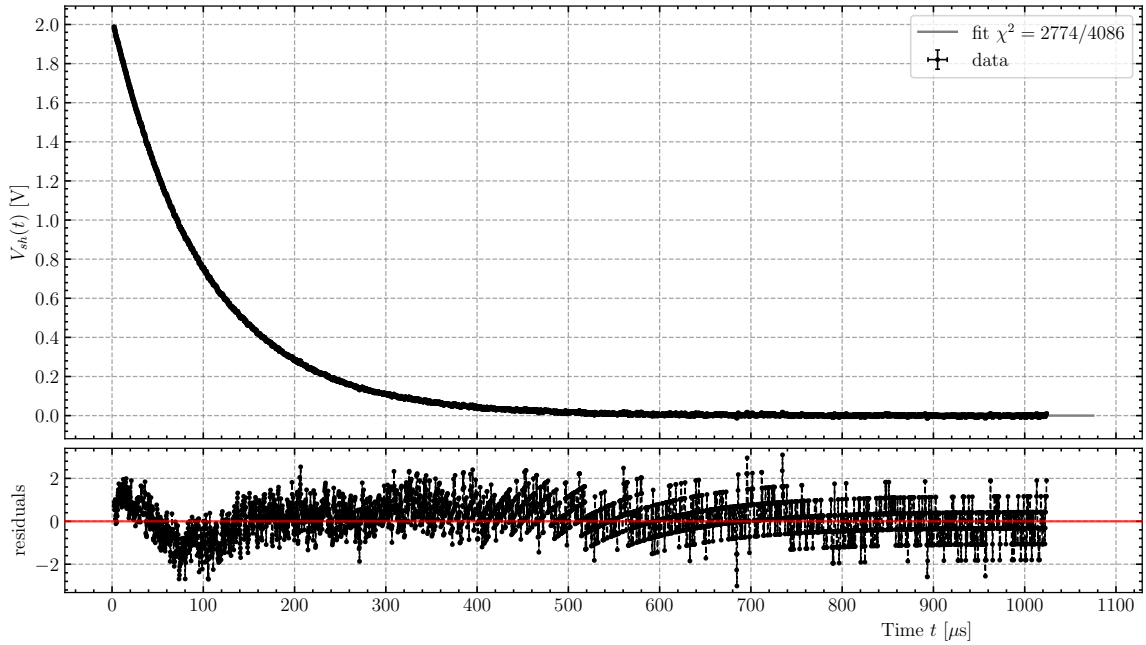


Figura 4: Fit con esponenziale decrescente al segnale in uscita dal circuito formatore  $V_{sh}$

- se  $V_s^{pp} < V_{thr} \implies V_{discr} = V_{EE}$  costante.
- se  $V_s^{pp} \geq V_{thr}$ , ci aspettiamo (in un periodo dell'onda quadra di durata  $T = 9.99 \pm 0.16$  ms)

$$V_{discr}(t) = \begin{cases} V_{CC} & 0 < t < ToT \\ V_{EE} & ToT < t < T \end{cases}$$

In cui  $ToT$  è il tempo in cui il picco esponenzialmente decrescente è maggiore della tensione di soglia  $V_{sh}(t) = \frac{Q_{in}}{C_F} e^{-t/\tau} \geq V_{thr}$ , appunto il “Time-over-Threshold”.

$$ToT = \tau \log \left( \frac{Q_{in}}{C_F V_{thr}} \right) = \tau \log \left( \frac{C_T V_s^{pp}}{C_F V_{thr}} \right) = \tau \log \left( \frac{C_T}{C_F} \frac{2V_s}{V_{thr}} \right). \quad (4)$$

Mantenendo lo stesso segnale in ingresso al circuito del punto precedente (con ampiezza ben oltre la soglia  $V_s \gg V_{thr}$ ) riportiamo il segnale visualizzato all'oscilloscopio in uscita dal discriminatore in figura 5. Risulta già chiaro dal dettaglio a destra, in corrispondenza del fronte di discesa dell'onda quadra, come il segnale in uscita non ha né livelli basso e alto simmetrici rispetto a 0 V, né pendenza uguale (idealmente infinita) nel passaggio tra questi due, al contrario di quanto atteso dal nostro modello semplificato.

Possiamo caratterizzare il segnale  $V_{discr}$  trovato come un impulso di tensione con livello basso  $V_{OL}$  e livello alto  $V_{OH}$  di durata  $T_{OH}$  che si ripete periodicamente con la stessa frequenza dell'onda quadra in ingresso  $V_s(t)$ . Riportiamo le misure dirette effettuate con i cursori delle tensioni di saturazione del comparatore e una misura del tempo “alto” dell'impulso definita in maniera compatibile con la funzione automatica di misura “PosWidth” (cioè come il tempo in cui la tensione si trova al di sopra della metà del valore positivo dell'impulso).

$$\begin{aligned} V_{OH} &= 4.38 \pm 0.03 \text{ V} \\ V_{OL} &= -3.53 \pm 0.02 \text{ V} \\ T_{OH} &= 416 \pm 5 \text{ μs} \end{aligned}$$

Osserviamo quindi che i valori di saturazione alta e bassa misurati non sono compatibili con quelli attesi, ma sono entrambi inferiori (in modulo). Questo può essere dovuto al fatto che in realtà il TL081 in regime di saturazione produce al massimo tensioni entro il suo (Maximum Output) *Voltage swing* riportato come valore tipico nel datasheet  $V_{OM} = 13.5$ , sensibilmente inferiore rispetto al valore di tensione di alimentazione tipico a cui è riferito  $V_{CC} = 20$  V.

Quindi, volendo ragionare per analogia ci aspettiamo un escursione massima tra le tensioni di saturazione (date le nostre tensioni di alimentazione a  $\pm 5$  V)  $V_{OM} = 13.5/3 = 4.5$  V, che risulta sicuramente più vicino a quanto abbiamo trovato.

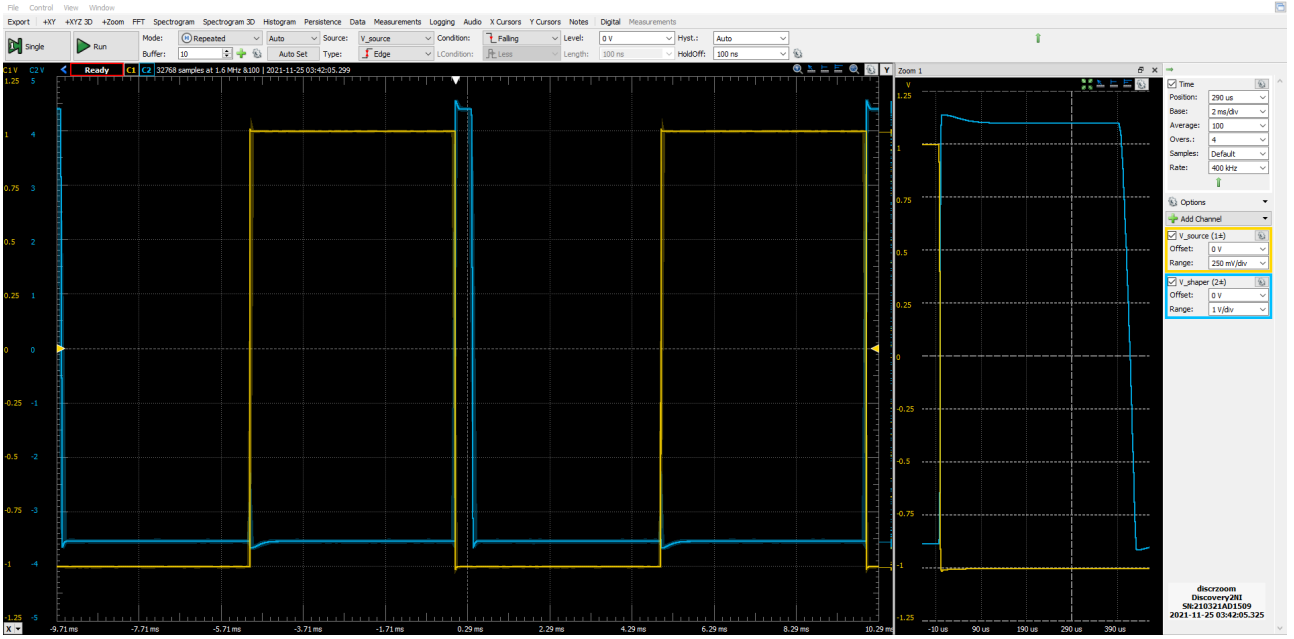


Figura 5: Acquisizione del segnale in uscita dal circuito comparatore con un'onda quadra in ingresso  $V_s = 1\text{ V}$ ,  $f = 100\text{ Hz}$

### 1.e Durata impulso per carica di test

Abbiamo misurato per  $V_s = 999 \pm 8\text{ mV}$  di ampiezza dell'onda quadra in ingresso, frequenza  $f = 100.0 \pm 1.6\text{ kHz}$ , dunque come carica  $Q_{in} = C_T \cdot 2V_s = 1.98 \pm 0.08\text{ nC}$ .

L'impulso in uscita ha durata pari a  $415 \pm 5\text{ }\mu\text{s}$  in un circuito e  $410 \pm 5\text{ }\mu\text{s}$  nel secondo.

Per quanto riguarda il valore atteso per la durata dell'impulso, possiamo confrontare i due valori trovati per il tempo "alto" con il valore atteso di Time-over-Threshold

$$ToT = R_1 C_F \log \left( \frac{C_T}{C_F} \frac{2V_s}{V_{thr}} \right) = 350 \pm 14\text{ }\mu\text{s}$$

### 1.f Andamento di TOT al variare di $Q_{in}$

Provando con varie ampiezza in ingresso, in entrambi i circuiti si sono verificati i medesimi risultati: per ampiezze dei segnali in ingresso maggiori dei  $50\text{ mV}$  non sono presenti particolari deformazioni nel segnale in uscita; al di sotto dei  $50\text{ mV}$  invece il segnale in uscita inizia a deformarsi, assumendo la forma di una parabola rovesciata che si sposta verso il basso più diminuiamo l'ampiezza in ingresso; questo comportamento si osserva fino a circa  $30\text{ mV}$ , quando il segnale in uscita diventa impercettibile e scompare.

## 2 Trigger di Schmitt

### 2.a Risposta ad un'onda sinusoidale

### 2.b Saturazione dell'OpAmp

$$V_{S+} = 4.21 \pm 0.04\text{ V}$$

$$V_{S-} = -3.53 \pm 0.03\text{ V}$$

### 2.c Tensioni di soglia e funzionamento del trigger

Abbiamo inviato in ingresso all'amplificatore un'onda sinusoidale di ampiezza  $1999 \pm 15\text{ mV}$  e frequenza  $1000 \pm 16\text{ Hz}$ . Dalle intersezioni tra i due canali abbiamo misurato le transizioni basso-alto (OH) e alto-basso (OL)

$$V_{OH} = 617 \pm 5\text{ mV}$$

$$V_{OL} = 782 \pm 6\text{ mV}$$

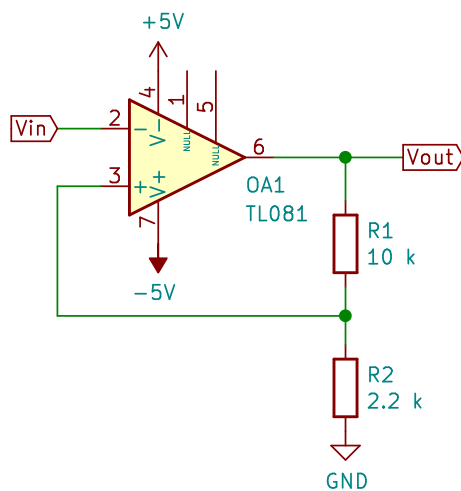


Figura 6: Schema circuitale del trigger di Schmitt costruito.

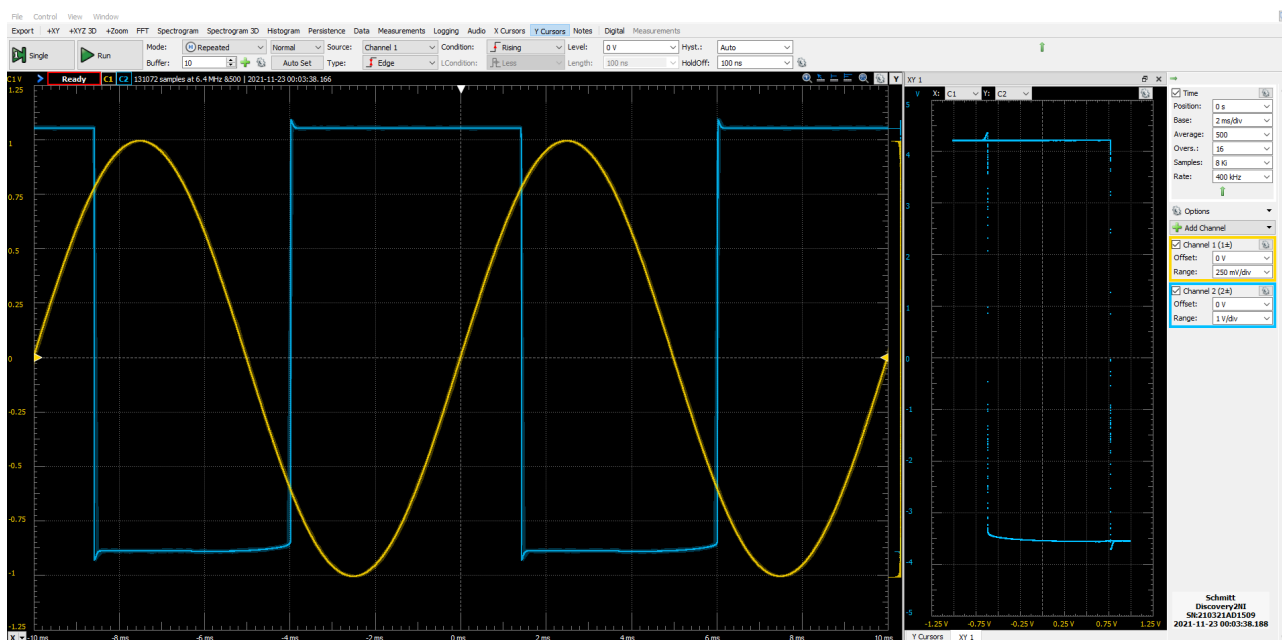


Figura 7: risposta ad un segnale sinusoidale di ampiezza 1 V e frequenza 100 Hz del trigger di schmitt

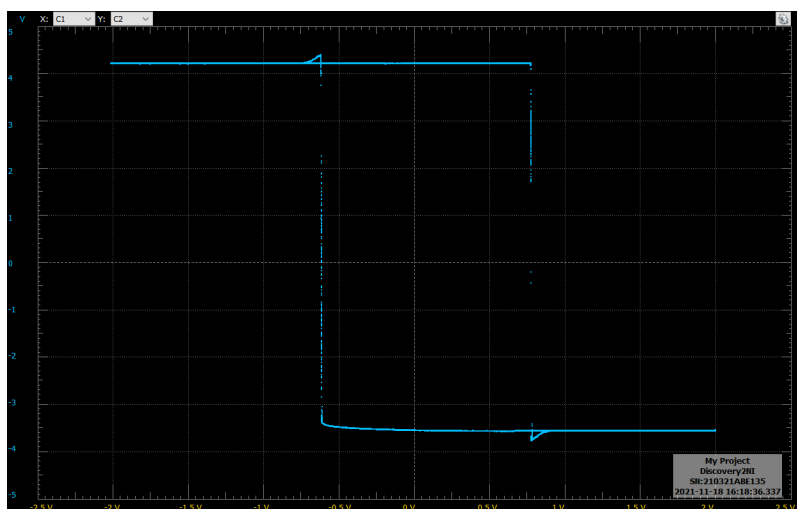


Figura 8: risposta ad un segnale sinusoidale di ampiezza 2 V e frequenza 100 Hz del trigger di schmitt, visto nel piano XY in cui il segnale in ingresso è sulle x e il segnale in uscita sulle y

Per il secondo circuito invece è stata fatta una media pesata sui punti sulle 2 linee verticali che si formano nel grafico XY (ovviamente una per ogni linea).

$$V_{OH} = 611.6 \pm 0.5 \text{ mV}$$

$$V_{OL} = 780.4 \pm 0.5 \text{ mV}$$

## 2.d Limiti fisici del circuito

$$F_L = 92.6 \pm 0.1 \text{ kHz}$$

$$SR = 11.1 \pm 0.3 \text{ kHz}$$

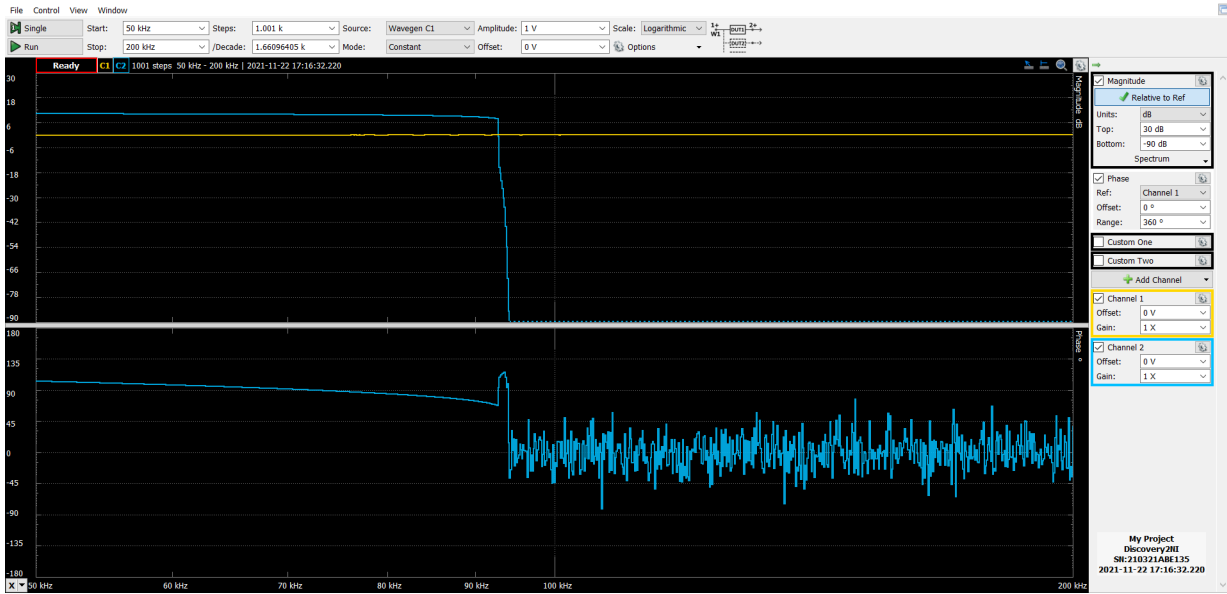


Figura 9: analisi in frequenza del trigger di schmitt, in particolare l'unico punto di interesse si trova a circa 90 kHz, punto in cui smette di funzionare

## 3 Multivibratore astabile

### 3.a Funzionamento del circuito

$$\beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$T = 2R_3C_1 \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)$$

### 3.c Studio dei segnali in ingresso e uscita

Si è inviato all'ingresso del filtro passa-alto un segnale triangolare di ampiezza  $v_{in} = 200 \pm 2 \text{ mV}$  e frequenza  $f = 100.0 \pm 1.6 \text{ Hz}$ .

### 3.d Misure di periodo e duty cycle

$$DC = 0.482 \pm 0.013$$

$$T = 2.15 \pm 0.02 \text{ ms}$$

$$T_{atteso} = 2.17 \pm DACALCOLARE \text{ ms}$$

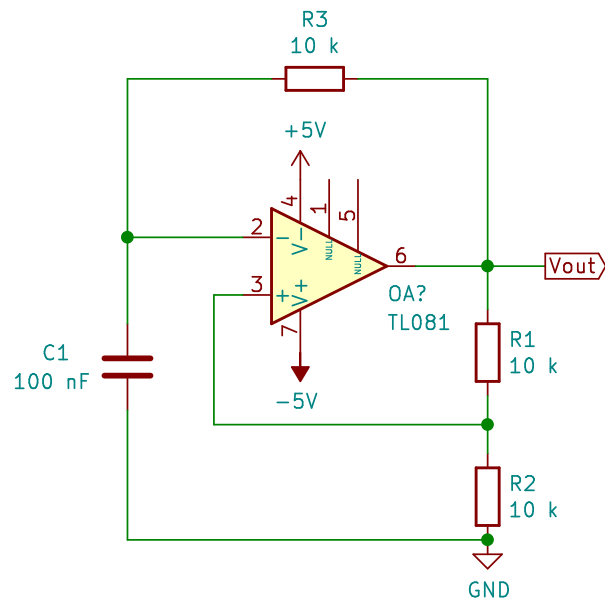


Figura 10: Schema circuitale del multivibratore astabile costruito.

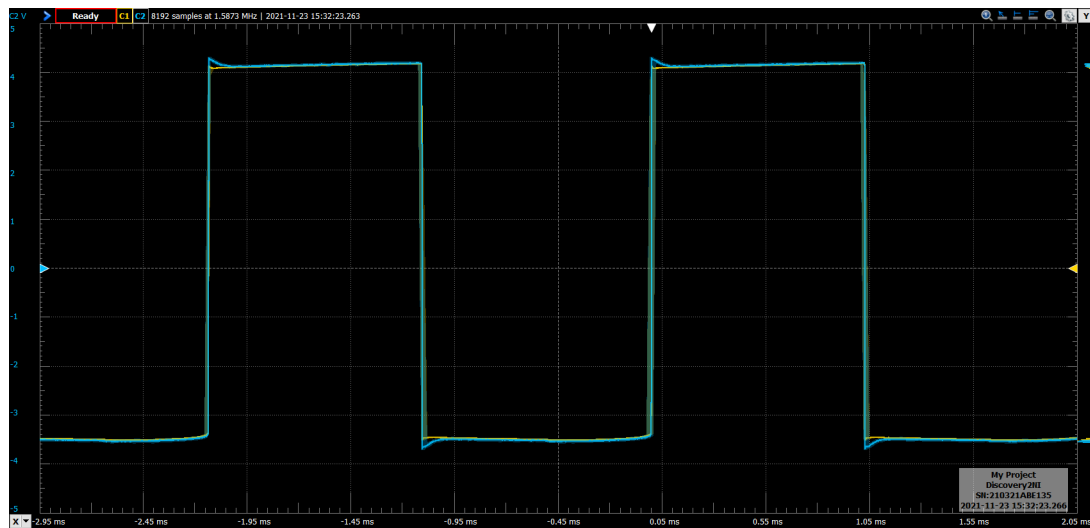


Figura 11: Grafico segnale in  $V_+$  e segnale in  $V_{out}$

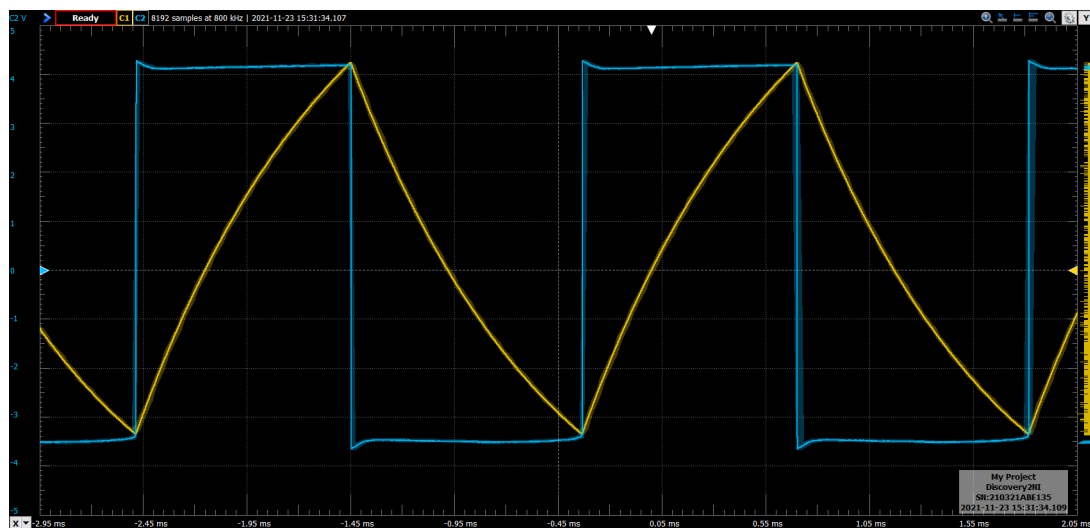


Figura 12: Grafico segnale in  $V_-$  e segnale in  $V_{out}$



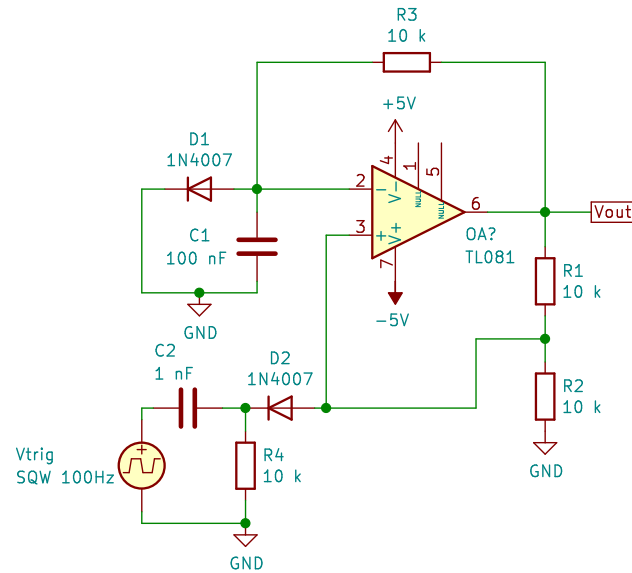


Figura 13: Schema circuitale del multivibratore monostabile costruito.

### 3.e Limite massimo in frequenza del generatore

## 4 Multivibratore monostabile

### 4.a Studio dei segnali in ingresso e uscita

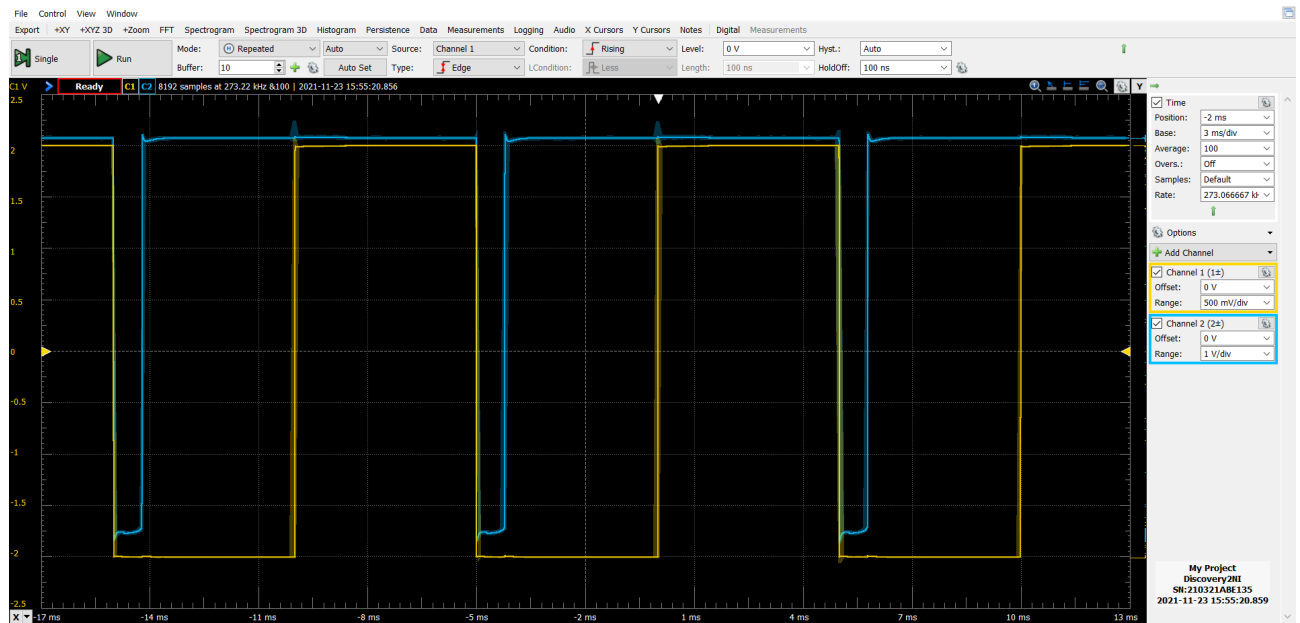


Figura 14: Grafico segnale in ingresso e  $V_{out}$

### 4.b Durata dell'impulso generato

$$V_{S-} = 3.49 \pm 0.03V$$

$$V_{OL} = \frac{V_{S-}}{\beta} = 6.99V$$

$$\Delta = C_1 R_3 \ln\left(\frac{1 - \frac{V_{OL}}{V_{S-}}}{1 - \beta}\right) = 782 \pm DACALCOLARE \mu s$$



Figura 15: Grafico segnale in  $V_+$  e  $V_{out}$

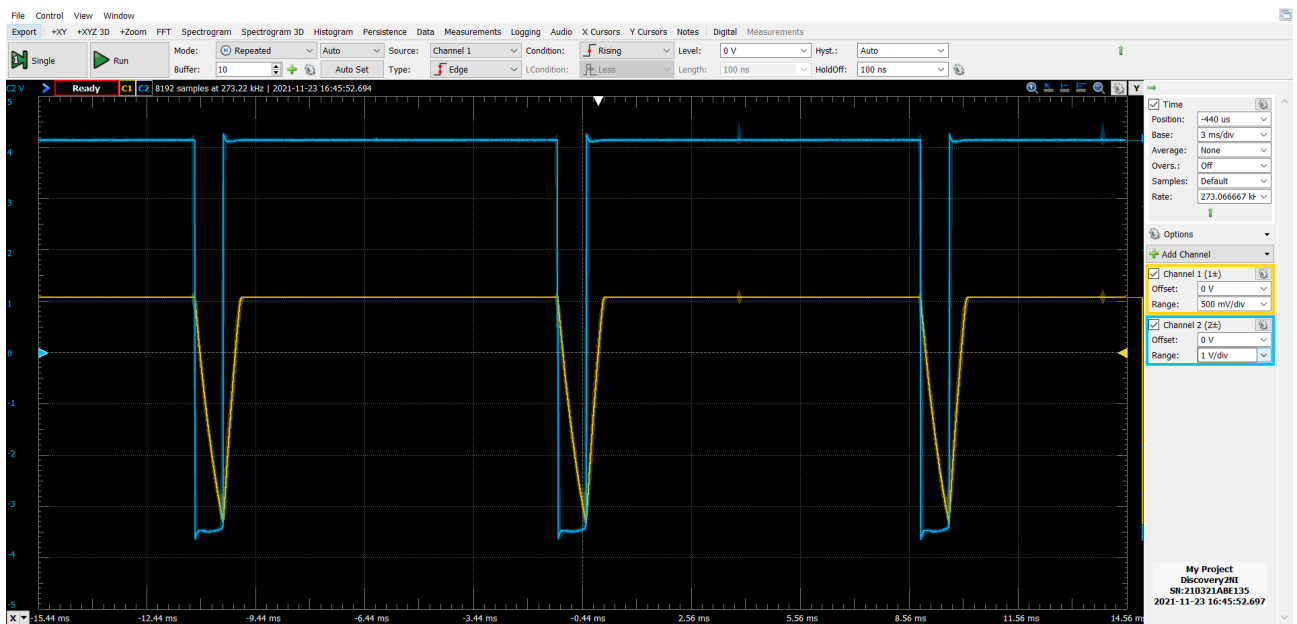


Figura 16: Grafico segnale in  $V_-$  e  $V_{out}$

Dalla misura diretta ricavo

$$\Delta = 779 \pm 10 \text{ } \mu\text{s}$$

#### 4.c Analisi del funzionamento del circuito

##### Appendice

Consideriamo il sotto-circuito formato dal condensatore  $C_T$  e dal circuito di formazione. La funzione di trasferimento che lega  $V_{in}$  a  $V_{sh}$  è data di fatto da quella di un amplificatore invertente con impedenze complesse: in trasformata di Laplace

$$\tilde{A}(s) = -\frac{\left(\frac{1}{R_1} + sC_F\right)^{-1}}{\frac{1}{sC_T}} = -\frac{C_T}{C_F} \frac{s}{s + \frac{1}{\tau}}$$

con  $\tau := R_1 C_F$ . In ingresso abbiamo un'onda quadra di periodo  $2T$  (che prendiamo nulla per tempi negativi) che possiamo scrivere come

$$V_{in}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k f(t - kT) \quad \text{dove} \quad f(t) = V_0 [\theta(t) - \theta(t - T)]$$

In trasformata di Laplace si ha

$$\tilde{f}(s) = V_0 \left[ \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} \right]$$

da cui

$$\tilde{V}_{in}(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \tilde{f}(s) e^{-kTs} = \tilde{f}(s) \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-kTs}$$

La risposta del circuito in trasformata è

$$\tilde{V}_{sh}(s) = \tilde{A}(s) \tilde{V}_{in}(s) = \tilde{A}(s) \tilde{f}(s) \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-kTs} = \tilde{g}(s) \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-kTs} = \mathcal{L} \left[ \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k g(t - kT) \right] (s)$$

Ora

$$\tilde{g}(s) = -V_0 \frac{C_T}{C_F} \left[ \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} - \frac{e^{-sT}}{s + \frac{1}{\tau}} \right]$$

da cui, anti-trasformando

$$g(t) = -V_0 \frac{C_T}{C_F} \left[ e^{-t/\tau} \theta(t) - e^{-(t-T)/\tau} \theta(t - T) \right]$$

Ma allora la risposta del circuito nel dominio del tempo è

$$\begin{aligned} V_{sh}(t) &= -V_0 \frac{C_T}{C_F} \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-\frac{t-kT}{\tau}} \theta(t - kT) - \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-\frac{t-(k+1)T}{\tau}} \theta(t - (k+1)T) \right\} \\ &= -V_0 \frac{C_T}{C_F} \left\{ e^{-\frac{t}{\tau}} \theta(t) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k e^{-\frac{t-kT}{\tau}} \theta(t - kT) \right\} \end{aligned}$$

ovvero, ignorando il transiente iniziale e supponendo  $\tau \ll T^1$ ,

$$\begin{aligned} V_{sh}(t) &\approx 2V_0 \frac{C_T}{C_F} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k e^{-\frac{t-kT}{\tau}} \theta(t - kT) \\ &\approx 2V_0 \frac{C_T}{C_F} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k e^{-\frac{t-kT}{\tau}} \chi_{[kT, (k+1)T]}(t) \end{aligned} \quad (5)$$

---

<sup>1</sup>La buona definizione della somma è assicurata dal fatto che (tralasciando le costanti fisiche)

$$\sum_{k \geq 0} \theta(t - k) e^{-(t-k)} = \sum_{k=0}^{\lfloor t \rfloor} e^{-(t-k)} \leq \frac{e}{e-1} e^{-\{t\}}.$$

## Conclusioni e commenti finali

Si è riusciti a costruire e studiare alcuni dei circuiti più comuni che si possono realizzare con un amplificatore operazionale, tra cui: due filtri attivi, passa-basso e passa-alto, un amplificatore di tensione invertente (e uno non). In particolare siamo riusciti ad apprezzare il differente comportamento dei circuiti (anche in regime non lineare) dare una stima di guadagno, impedenza di ingresso e frequenze caratteristiche della loro risposta in frequenza.

## Dichiarazione

I firmatari di questa relazione dichiarano che il contenuto della relazione è originale, con misure effettuate dai membri del gruppo, e che tutti i firmatari hanno contribuito alla elaborazione della relazione stessa.