Es02A: Circuito RC – Filtri passivi

Gruppo 1.AC
Matteo Rossi, Bernardo Tomelleri

16 ottobre 2021

Filtro passa-basso

1.a Progettazione circuito RC passa–basso

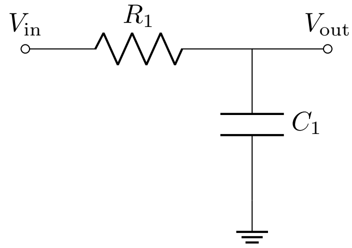

Figura 1: Schema di massima del passa–basso.

1.b Scelta della frequenza di taglio

La frequenza nominale di taglio è stata fissata a $f_1 = 7337\text{Hz} \;\; \Rightarrow |A_v(3\,\text{kHz})| = 0.93 \;\; |A_v(30\,\text{kHz})| = 0.23$

Abbiamo scelto $\underline{f_{1\text{teo}}} = 6.0$ kHz, così da attenuare il segnale a 3.0 kHz di un fattore ~ 1 e quello a 30 kHz di un fattore $1/\sqrt{1+(30/6)^2} \approx 1/5$, per avere un fattore di soppressione di circa 4. Siamo giunti a questa scelta attraverso le seguenti considerazioni:

Dette $f_l = 3.0$ kHz e $f_h = 30$ kHz definiamo il fattore di soppressione del filtro come il rapporto tra le attenuazioni attese alle due frequenze di interesse:

$$\mathcal{S}^2(f_1) := \frac{|A(f_l)|^2}{|A(f_h)|^2} = \frac{f_1^2 + f_l^2}{f_1^2 + f_h^2}$$

questa è una funzione decrescente di f_1 con massimo in $f_1 = 0$ Hz pari a $\mathcal{S}(f_1 = 0) = f_l/f_h$; Però la scelta $f_1 = 0$ Hz oltre a non essere realizzabile praticamente avrebbe $A(f) \sim 0$ per tutte le frequenze di nostro interesse ($\geq$ 3kHz) su cui il circuito avrebbe sempre lo stesso comportamento, che va contro a quanto vogliamo.

Idealmente vorremmo f_1 il più "piccola" possibile, ma non minore di f_l per ridurre attenuazioni e sfasamenti indesiderati del segnale a bassa frequenza, ma "sufficientemente" minore di f_h affinché il segnale ad alta frequenza venga apprezzabilmente "tagliato". Ovverosia $f_l \ll f_1 \ll f_h$; però, dal momento che $f_h = 10 \cdot f_l$ tra i due estremi di frequenza c'è solo un ordine di grandezza, siamo costretti a cercare un compromesso ragionevole: $f_l \leq f_1 \leq f_h$.

Visto che il filtro raggiunge un fronte di discesa di pendenza modesta (-20 dB/decade) soltanto quando $f \gg f_1$ scegliamo f_1 decisamente più lontana da $f_h = 5 \cdot f_1$ che da $f_l = \frac{1}{2} f_1$: di modo che il segnale a f_h venga adeguatamente soppresso, mentre quello a f_l rimanga il più possibile indisturbato.

Infine la scelta tra i valori disponibili di R_1 e C_1 ci ha portato alla frequenza di taglio nominale più vicina a quella teorica di $f_1 = 7.3 \pm 0.3$ kHz.

1.c,1.d Scelta dei componenti

I valori nominali scelti sono $R_1 = 2 \pm 1\%$ kΩ $\;C_1 = 10 \pm 10\%$ nF.

Affinché il passa basso non venga perturbato dal carico a valle $R_\text{L} = 100$ kΩ, l'impedenza in uscita dal circuito $Z_\text{out}(\omega)$ dev'essere trascurabile rispetto a quella del carico.

$$|Z_\text{out}| = \left| \left(\frac{1}{R_1} + j\omega C_1 \right)^{-1} \right| \ll R_\text{L} \implies R_1 \ll R_\text{L} \sqrt{1 + \omega^2 R_1^2 C_1^2} = R_\text{L} \sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_1}\right)^2}.$$

Dunque dobbiamo avere

$$R_1 \ll 100\ \mathrm{k\Omega}\ \sqrt{1+\left(\frac{f_l}{f_1}\right)^2} \approx 110\ \mathrm{k\Omega}.$$

Abbiamo quindi scelto $R_{1\mathrm{teo}} = 2.0\ \mathrm{k\Omega}$. Per cui prendiamo $C_{1\mathrm{teo}} = \dfrac{1}{2\pi R_{1\mathrm{teo}} f_{1\mathrm{teo}}} \approx 8.0\ \mathrm{nF}$.

1.e Misura di C_1

$$C_1 = 10.9 \pm 0.4\mathrm{nF}$$

Compatibile entro la tolleranza con il valore nominale.

1.f Calcolo della frequenza di taglio e delle attenuazioni attese

$$\begin{aligned} f_1 &= 7.3 \pm 0.3 \\ |A_v(3\,\mathrm{kHz})| &= 0.93 \pm 0.04 \\ |A_v(30\,\mathrm{kHz})| &= 0.24 \pm 0.01 \end{aligned}$$

3 Misura A_v

Dalla misura delle ampiezze dei segnali di ingresso/uscita e del loro sfasamento si ottiene:

$f \pm \sigma(f)$ [kHz]	$V_{\mathrm{in}} \pm \sigma(V_{\mathrm{in}})$ [V]	$V_{\mathrm{out}} \pm \sigma(V_{\mathrm{out}})$ [V]	$A_v \pm \sigma(A_v)$	$\varphi \pm \sigma(\varphi)$
3.00 ± 0.06	1 ± 0.05	0.93 ± 0.05	0.93 ± 0.07	0.38 ± 0.01
7.34 ± 0.15	1 ± 0.05	0.72 ± 0.04	0.72 ± 0.06	1.32 ± 0.04
30.0 ± 0.6	1 ± 0.05	0.25 ± 0.01	0.25 ± 0.02	0.77 ± 0.02

Tabella 1: (3) Amplficazione e sfasamento del filtro passa-basso a bassa ed alta frequenza ed alla frequenza nominale di taglio.

4 Risposta in frequenza

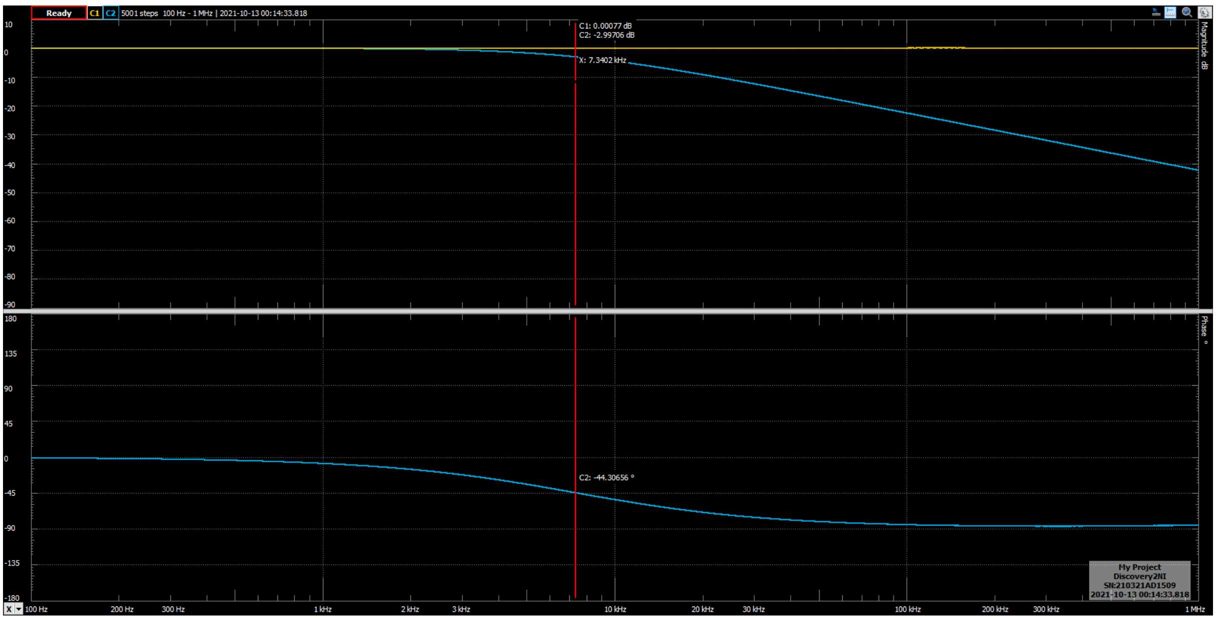

Figura 2: Plot di Bode per il filtro passa-basso.

5.a Stima della frequenza di taglio (metodo a)

La nostra stima della frequenza per cui $A_v(\mathrm{dB})$ = -3 dB è

$$f_{1A} = 7336 \pm 6\ \mathrm{kHz}$$

5.b Misura della frequenza di taglio (metodo b)

Dal fit a bassa frequenza ($f \ll f_1$) otteniamo

$$A_1(\text{mdB}) = -17.91 \pm 0.18 \quad \chi^2 = 243 \quad d.o.f. = 873$$

Ad alta frequenza ($f \gg f_1$) la retta di best-fit al plot di Bode in ampiezza ha i seguenti parametri:

$$\text{intercetta} = 75.928 \pm 0.008 \quad \text{pendenza} = -19.6747 \pm 0.0016 \quad \text{correlazione} = -0.997 \quad \chi^2 = 1647 \quad d.o.f. = 1746$$

Dall'intersezione delle due rette stimiamo per la frequenza di taglio il valore

$$f_{1B} = 7246 \pm 8 \text{ Hz}$$

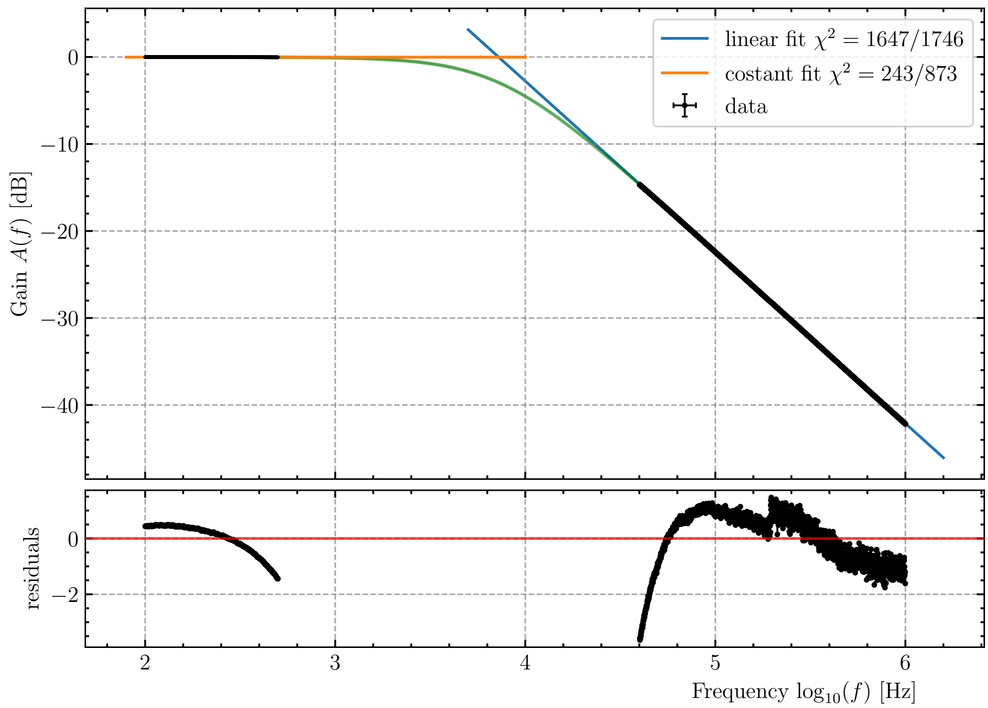

Figura 3: Fit al plot di bode per trovare la frequenza di corner. In verde i punti non utilizzati nel fit.

5.c Misura della frequenza di taglio (metodo c)

Dal fit complessivo del modulo della funzione di trasferimento

$$|T(f)| = A(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_1}\right)^2}} \tag{1}$$

otteniamo per l' amplificazione di centro-banda e per la frequenza di taglio i seguenti valori:

$$A_1(\text{mdB}) = -19.1 \pm 0.3 \quad f_{1C} = 7428.8 \pm 0.9\text{Hz} \quad \chi^2 = 1614 \quad d.o.f. = 4997$$

5.d Confronto misure-predizione

Commentare l' accordo tra le varie stime di f_1 ed il valore atteso.

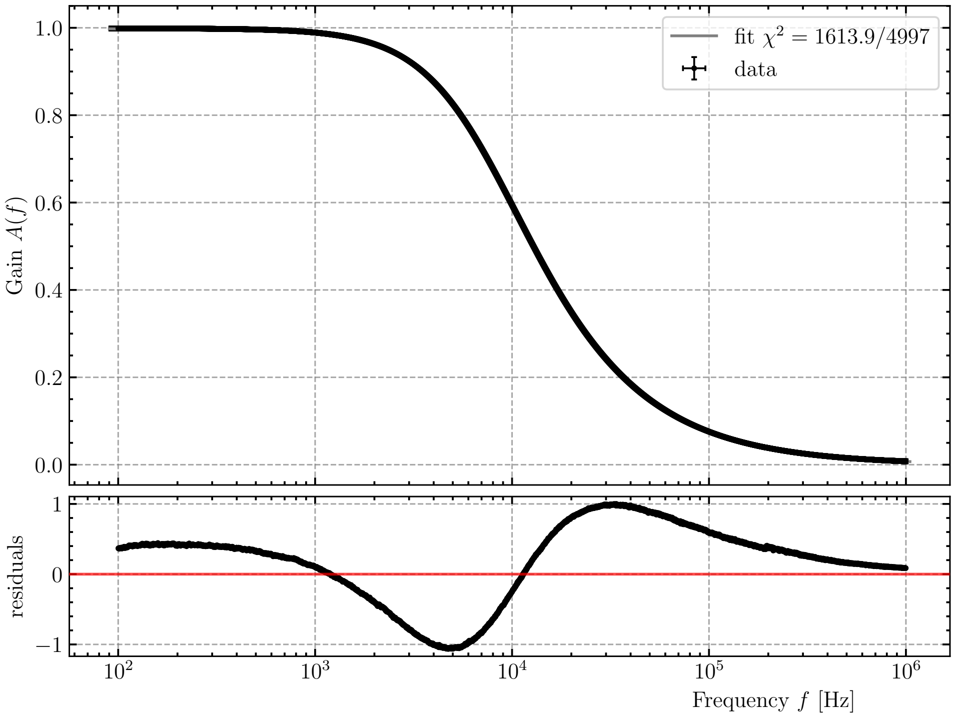

Figura 4: Fit complessivo al plot di bode con l'espressione per l'attenuazione (1).

6 Risposta del filtro ad un gradino

Il fronte del segnale di uscita ha un tempo di salita, misurato con i cursori, di

$$t_r = 47 \pm 2 \text{ µs}$$

da cui

$$f_1 = \ln(9) R_1 C_1 \approx \frac{2.2}{2\pi t_r} = 7.4 \pm 0.3 \text{ kHz}$$

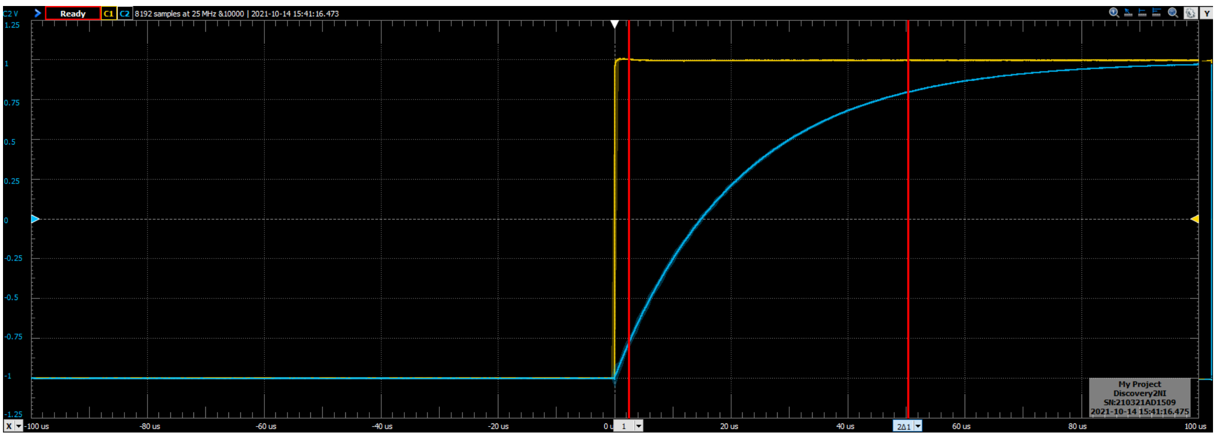

Figura 5: (6) Risposta del filtro passa-basso ad un gradino di tensione.

7.a Impedenze di ingresso/uscita

L'impedenza in ingresso al circuito in 1 è data da:

$$Z_{\text{in}}(\omega) = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} = R_1 \left(1 - j\frac{1}{\omega R_1 C_1}\right) = R_1 \left(1 - j\frac{\omega_1}{\omega}\right)$$

A bassa frequenza ($f \ll f_1$) il termine costante è trascurabile, per cui

$$Z_{\text{in}}(f) \approx -jR_1 \frac{f_1}{f}$$

Poiché l'impedenza del condensatore $Z_{C_1} \to \infty$ per $f \to 0$ il filtro si comporta come un circuito aperto.

Ad alta frequenza ($f \gg f_1$) è il termine costante a dominare, quindi

$$Z_{\text{in}} \approx R$$

cioè, nel limite opposto ($Z_{C_1} \to 0$ per $f \to \infty$) il condensatore si comporta come un corto-circuito, quindi il filtro ha impedenza puramente reale.

Alla frequenza di taglio vale

$$Z_{\text{in}} = R_1(1-j).$$

Mentre come impedenza in uscita abbiamo:

$$Z_{\text{out}}(\omega) = \left(\frac{1}{R_1} + j\omega C_1\right)^{-1}.$$

7.b Effetti dovuti all' accoppiamento con un carico

(Qui è richiesto che valutiate l' amplificazione di centro-banda e la frequenza di taglio nel caso in cui il carico sia rispettivamente 100 e 10 kΩ)

$$\begin{aligned} R_L = 100\,k\Omega \quad &\Longrightarrow A_1 = 0.712 \quad f_1 = 7450 \\ R_L = 10\,k\Omega \quad &\Longrightarrow A_1 = 0.766 \quad f_1 = 8761 \end{aligned}$$

Filtro passa-banda

8.a Misura dei componenti

$$R_1 = 1.99 \pm 0.02 \text{ k}\Omega \quad C_1 = 10.9 \pm 0.4 \text{ nF}$$

8.b Filtro passa-basso, stima della frequenza di taglio

Dalla risposta in frequenza risulta

$$A_1(\text{mdB}) = -19.1 \pm 0.3, \quad f_1 = 7336 \pm 6 \text{ Hz}$$

9.a Misura dei componenti

$$R_2 = 1.990 \pm 0.016 \text{ k}\Omega \quad C_2 = 95 \pm 4 \text{ nF}$$

per cui il valore atteso della frequenza di taglio del filtro passa alto è $f_2 = \frac{1}{2\pi R_2 C_2} = 0.84 \pm 0.03$ kHz

9.b Filtro passa-alto, stima della frequenza di taglio

Dalla risposta in frequenza risulta

$$A_2(\text{mdB}) = -14.19 \pm 0.05, \quad f_2 = 839 \pm 7 \text{ Hz}$$

10.a Filtro passa-banda, risposta in frequenza

La nostra stima dell'amplificazione di centro-banda e delle frequenze di taglio (per cui il guadagno si riduce di 3 dB rispetto a centro-banda) è

$$A(\text{dB}) = -6.525 \pm 0.007 \quad f_L = 383.4 \pm 0.5\text{Hz} \quad f_H = 16.06 \pm 0.03\text{kHz}$$

10.b Interpolazione del plot di Bode

Dal fit del plot di Bode in ampiezza si ha

$$A(\text{dB}) = \ldots \pm \ldots \quad f_L = \ldots \pm \ldots \quad f_H = \ldots \pm \ldots \quad \chi^2 = \ldots \quad d.o.f. = \ldots$$

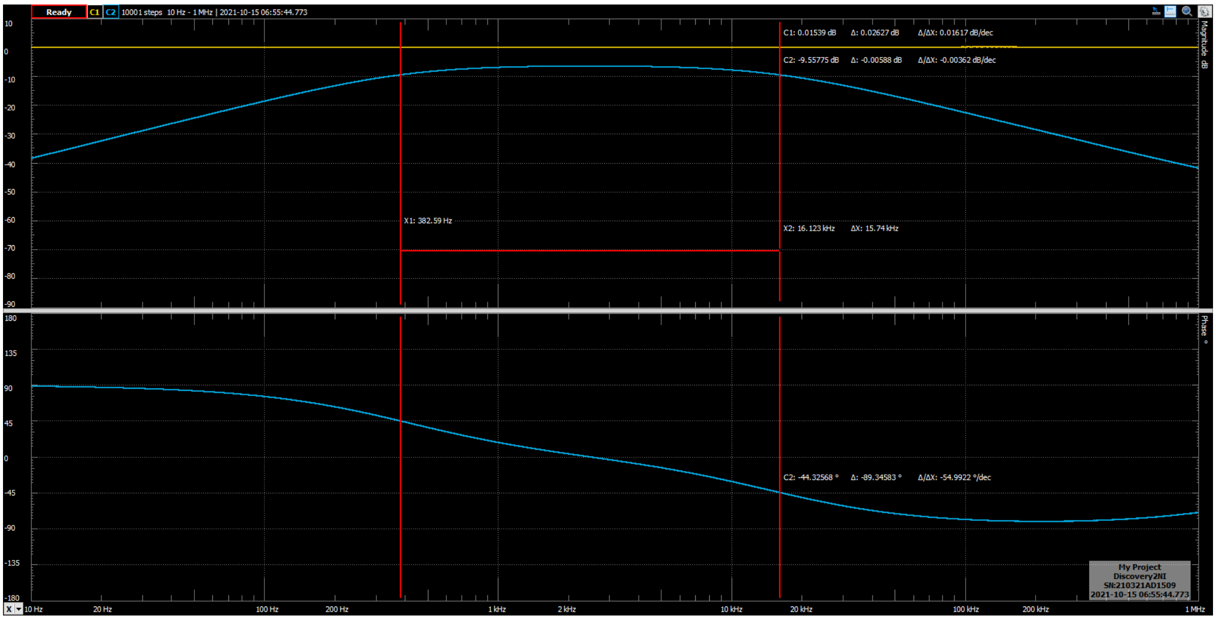

Figura 6: (4) Plot di Bode per il filtro passa-banda.

10.c Differenze

A differenza dei circuiti RC studiati prima, non possiamo considerare indipendenti i sotto-circuiti che compongono il passa-banda; infatti il comportamento reale del circuito è sensibilmente diverso da quanto previsto in approssimazione di stadi indipendenti.

In particolare a centro banda (i.e. nell'intervallo di frequenza $f_2 \leq f \leq f_1$) l'attenuazione non è più in ottima approssimazione unitaria, ma è minore di $A_{\mathrm{max}}(f) \approx -6.0$ dB/dec.

Le frequenze di taglio misurate f_L e f_H non sono compatibili con quelle ottenute separatamente nell'analisi dei singoli circuiti. Più precisamente la frequenza più bassa (del passa alto) è pressoché dimezzata $f_L > f_2$, mentre la frequenza più alta (del passa basso) è più che raddoppiata $f_H > f_1$.

D'altra parte, una ragionevole richiesta per assicurare l'indipendenza dei due circuiti collegati in serie è che si abbia $|Z_{\mathrm{out},1}| \ll |Z_{\mathrm{in},2}|$ ad ogni frequenza (e indipendentemente da questa). Riportiamo le impedenze in questione:

$$|Z_{\mathrm{out},1}| = \left|\frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C_1}\right|^2 = \frac{R_1^2}{1+\omega^2 R_1^2 C_1^2} \qquad |Z_{\mathrm{in},2}|^2 = \left|\frac{1 + j\omega R_2 C_2}{j\omega C_2}\right|^2 = \frac{1+\omega^2 R_2^2 C_2^2}{\omega^2 C_2^2}$$

Ora $|Z_{\mathrm{out},1}| \leq 1/(\omega C_1)$ con $|Z_{\mathrm{out},1}| \sim 1/(\omega C_1)$ per $f \gg f_1$ e $|Z_{\mathrm{in},2}| \geq 1/(\omega C_2)$ con $|Z_{\mathrm{out},1}| \sim 1/(\omega C_2)$ per $f \ll f_2$. Quindi per poter considerare indipendenti i due circuiti è sicuramente una buona idea imporre la condizione

$$|Z_{\mathrm{out},1}| \leq \frac{1}{\omega C_1} \ll \frac{1}{\omega C_2} \leq |Z_{\mathrm{in},2}| \implies C_2 \ll C_1.$$

Mentre per i valori di capacità scelti vale la condizione opposta $C_2 \approx 10 \cdot C_1$.

10.d Dipendenza dai valori delle resistenze

Se indichiamo con $A_1(f)$ e $A_2(f)$ le attenuazioni del passa-basso e del passa-alto, l'attenuazione attesa in uscita dai due circuiti collegati in cascata è

$$A = \left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{1}{A_1 A_2}\right)^{-1} = \frac{A_1 A_2}{A_1 A_2 \frac{R_1}{R_2} + 1} \tag{2}$$

Nel nostro caso vale $R_1 = R_2$ (entro l'incertezza) per cui come attenuazione di centro banda, dove avevamo $A_1 \approx A_2 \approx 1$, ci aspettiamo di avere $A_{\mathrm{cb}} = \frac{1}{2}$. Questo è compatibile con il valore che abbiamo misurato (prima in dB) $A_{\mathrm{cb}} = 0.4702 \pm 0.0004 \approx \frac{1}{2}$

Per avere una risposta in frequenza del circuito complessivo il più possibile uguale al prodotto delle funzioni di trasferimento dei due sotto-circuiti avremmo dovuto scegliere $R_1 \ll R_2$ ($Z_{\mathrm{out},1} \ll Z_{\mathrm{in},2}$. Infatti l'attenuazione attesa a centro banda vista in (2) sotto queste ipotesi diventa $A_{\mathrm{cb}} \approx A_1 A_2 \approx 1$.

10.e Andamento della fase

Idealmente, se la funzione di trasferimento complessiva $T(\omega)$ per il passa banda è il prodotto delle funzioni di trasferimento dei due circuiti in cascata:

$$T_1(\omega) = -\frac{1}{1 + j\omega/\omega_1} \qquad T_2(\omega) = \frac{1}{1 - j\omega_2/\omega}$$

ci aspettiamo (per le regole di moltiplicazione sui complessi) che lo sfasamento totale in uscita sia pari alla somma degli sfasamenti prodotti dai singoli sotto-circuiti:

$$T(\omega) = T_1(\omega)T_2(\omega) = |T_1|\, e^{i(\omega t + \varphi_1)}\, |T_2|\, e^{i(\omega t + \varphi_2)} = |T_1|\, |T_2|\, e^{i(\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)} = |T_1|\, |T_2|\, e^{i(\omega t + \varphi)}$$

per cui $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}\,\{T_1(\omega)\}}{\mathrm{Re}\,\{T_1(\omega)\}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}\,\{T_2(\omega)\}}{\mathrm{Re}\,\{T_2(\omega)\}}\right)$ che corrispondono rispettivamente a

$$\varphi_1(\omega) = \arctan -\frac{\omega}{\omega_1} \qquad \varphi_2(\omega) = \arctan \frac{\omega_2}{\omega}$$

Effettivamente le misure di sfasamento in uscita dal passa-banda risultano in accordo con l'andamento atteso

$$\varphi_2 + \varphi_1 = \varphi(f) = \arctan \frac{f_2}{f} - \arctan \frac{f}{f_1} \tag{3}$$

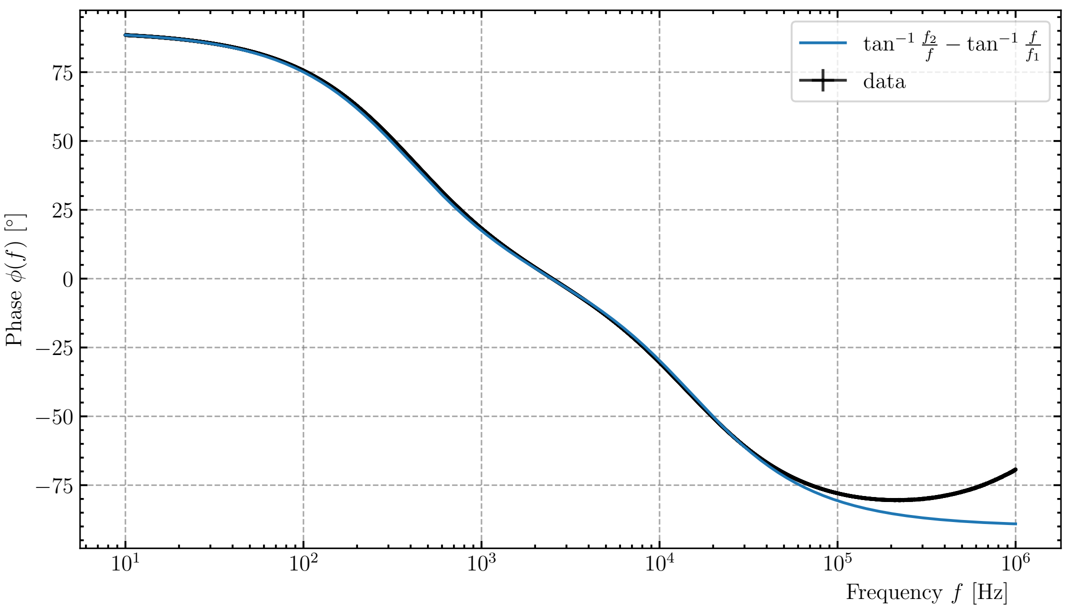

Figura 7: Grafico dello sfasamento misurato per il filtro passa-banda al variare della frequenza in scala semilogaritmica.

Conclusioni e commenti finali

Inserire eventuali commenti e conclusioni finali

Dichiarazione

I firmatari di questa relazione dichiarano che il contenuto della relazione è originale, con misure effettuate dai membri del gruppo, e che tutti i firmatari hanno contribuito alla elaborazione della relazione stessa.