

# Es02A: Circuito RC – Filtri passivi

Gruppo 1.AC  
Matteo Rossi, Bernardo Tomelleri

21 ottobre 2021

## Filtro passa-basso

### 1.a Progettazione circuito RC passa-basso

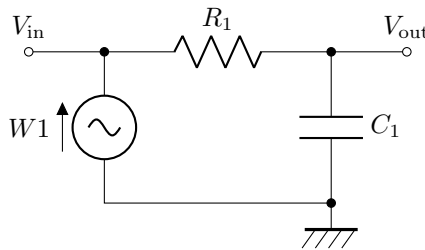


Figura 1: Schema di massima del passa-basso.

### 1.b Scelta della frequenza di taglio

La frequenza nominale di taglio è stata fissata a  $f_1 = 7337\text{Hz} \Rightarrow |A_v(3\text{kHz})| = 0.93 \quad |A_v(30\text{kHz})| = 0.23$

Abbiamo scelto  $f_{1\text{teo}} = 6.0\text{kHz}$ , così da attenuare il segnale a  $3.0\text{kHz}$  di un fattore  $\sim 1$  e quello a  $30\text{kHz}$  di un fattore  $1/\sqrt{1 + (30/6)^2} \approx 1/5$ , per avere un fattore di soppressione di circa 4. Siamo giunti a questa scelta attraverso le seguenti considerazioni:

Dette  $f_l = 3.0\text{kHz}$  e  $f_h = 30\text{kHz}$  definiamo il fattore di soppressione del filtro come il rapporto tra le attenuazioni attese alle due frequenze di interesse:

$$\mathcal{S}^2(f_1) := \frac{|A(f_l)|^2}{|A(f_h)|^2} = \frac{f_1^2 + f_l^2}{f_1^2 + f_h^2}$$

questa è una funzione decrescente di  $f_1$  con massimo in  $f_1 = 0\text{Hz}$  pari a  $\mathcal{S}(f_1 = 0) = f_l/f_h$ ; Però la scelta  $f_1 = 0\text{Hz}$  oltre a non essere realizzabile praticamente avrebbe  $A(f) \sim 0$  per tutte le frequenze di nostro interesse ( $\geq 3\text{kHz}$ ) su cui il circuito avrebbe sempre lo stesso comportamento, che va contro a quanto vogliamo.

Idealmente vorremmo  $f_1$  il più “piccola” possibile, ma non minore di  $f_l$  per ridurre attenuazioni e sfasamenti indesiderati del segnale a bassa frequenza, ma “sufficientemente” minore di  $f_h$  affinché il segnale ad alta frequenza venga apprezzabilmente “tagliato”. Ovverosia  $f_l \ll f_1 \ll f_h$ ; però, dal momento che  $f_h = 10 \cdot f_l$  tra i due estremi di frequenza c’è solo un ordine di grandezza, siamo costretti a cercare un compromesso ragionevole:  $f_l \leq f_1 \leq f_h$ .

Visto che il filtro raggiunge un fronte di discesa di pendenza modesta ( $-20\text{dB/decade}$ ) soltanto quando  $f \gg f_1$  scegliamo  $f_1$  decisamente più lontana da  $f_h = 5 \cdot f_1$  che da  $f_l = \frac{1}{2}f_1$ : di modo che il segnale a  $f_h$  venga adeguatamente soppresso, mentre quello a  $f_l$  rimanga il più possibile indisturbato.

Infine la scelta tra i valori disponibili di  $R_1$  e  $C_1$  ci ha portato alla frequenza di taglio nominale più vicina a quella teorica di  $f_1 = 7.3 \pm 0.3\text{kHz}$ .

### 1.c,1.d Scelta dei componenti

I valori nominali scelti sono  $R_1 = 2 \pm 1\% \text{ k}\Omega$   $C_1 = 10 \pm 10\% \text{ nF}$ .

Affinché il passa basso non venga perturbato dal carico a valle  $R_L = 100\text{ k}\Omega$ , l’impedenza in uscita dal circuito  $Z_{\text{out}}(\omega)$  dev’essere trascurabile rispetto a quella del carico.

$$|Z_{\text{out}}| = \left| \left( \frac{1}{R_1} + j\omega C_1 \right)^{-1} \right| \ll R_L \implies R_1 \ll R_L \sqrt{1 + \omega^2 R_1^2 C_1^2} = R_L \sqrt{1 + \left( \frac{f}{f_1} \right)^2}.$$

Dunque dobbiamo avere

$$R_1 \ll 100 \text{ k}\Omega \sqrt{1 + \left(\frac{f_l}{f_1}\right)^2} \approx 110 \text{ k}\Omega.$$

Abbiamo quindi scelto  $R_{1\text{teo}} = 2.0 \text{ k}\Omega$ . Per cui prendiamo  $C_{1\text{teo}} = \frac{1}{2\pi R_{1\text{teo}} f_{1\text{teo}}} \approx 8.0 \text{ nF}$ .

### 1.e Misura di $C_1$

$$C_1 = 10.9 \pm 0.4 \text{ nF}$$

Compatibile entro la tolleranza con il valore nominale.

### 1.f Calcolo della frequenza di taglio e delle attenuazioni attese

$$\begin{aligned} f_1 &= 7.3 \pm 0.3 \text{ kHz} \\ |A_v(3 \text{ kHz})| &= 0.93 \pm 0.04 \\ |A_v(30 \text{ kHz})| &= 0.24 \pm 0.01 \end{aligned}$$

## 3 Misura $A_v$

Dalla misura delle ampiezze dei segnali di ingresso/uscita e del loro sfasamento si ottiene:

$f \pm \sigma(f)$ [kHz]	$V_{\text{in}} \pm \sigma(V_{\text{in}})$ [V]	$V_{\text{out}} \pm \sigma(V_{\text{out}})$ [mV]	$A_v \pm \sigma(A_v)$	$\varphi \pm \sigma(\varphi)$
$3.00 \pm 0.06$	$1.000 \pm 0.011$	$937 \pm 11$	$0.93 \pm 0.02$	$0.38 \pm 0.01$
$7.34 \pm 0.15$	$1.000 \pm 0.011$	$721 \pm 11$	$0.72 \pm 0.03$	$0.77 \pm 0.02$
$30.0 \pm 0.6$	$1.000 \pm 0.011$	$246 \pm 10$	$0.25 \pm 0.04$	$1.32 \pm 0.04$

Tabella 1: (3) Amplificazione e sfasamento del filtro passa-basso a bassa ed alta frequenza ed alla frequenza nominale di taglio.

## 4 Risposta in frequenza

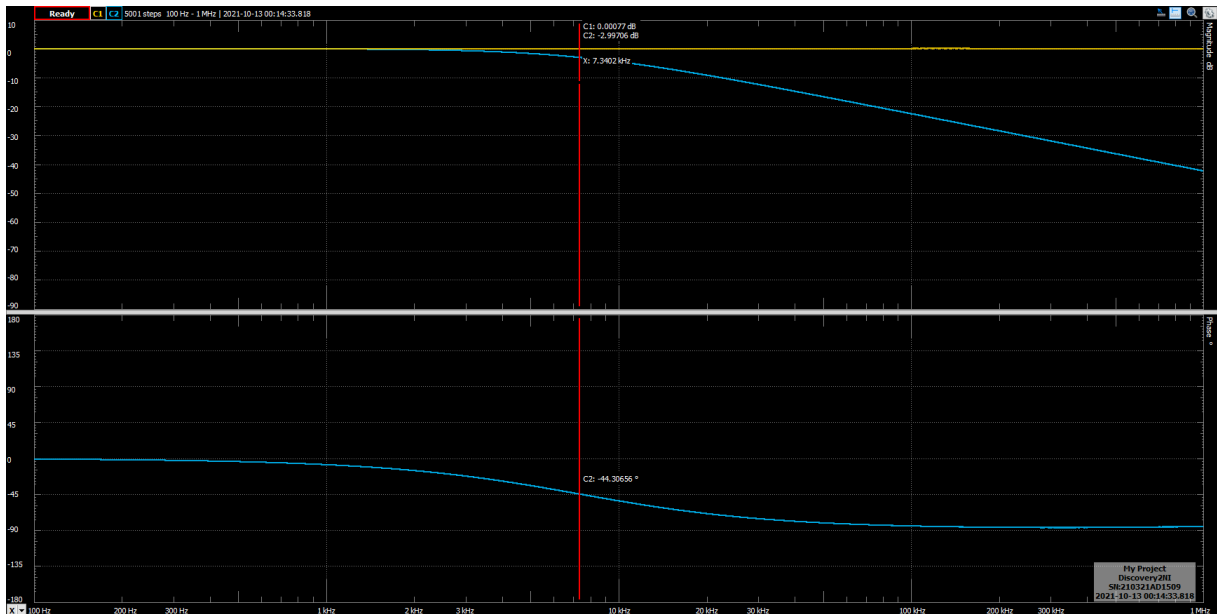


Figura 2: Plot di Bode per il filtro passa-basso.

### 5.a Stima della frequenza di taglio (metodo a)

La nostra stima della frequenza per cui  $A_v(\text{dB}) = -3 \text{ dB}$  è

$$f_{1A} = 7336 \pm 6 \text{ Hz}$$

## 5.b Misura della frequenza di taglio (metodo b)

Dal fit a bassa frequenza ( $f \ll f_1$ ) otteniamo

$$A_1(\text{dB}) = (-17.91 \pm 0.18) \times 10^{-3} \quad \chi^2 = 243 \quad d.o.f. = 873$$

Ad alta frequenza ( $f \gg f_1$ ) la retta di best-fit al plot di Bode in ampiezza ha i seguenti parametri:

intercetta =  $75.928 \pm 0.008$  pendenza =  $-19.6747 \pm 0.0016$  correlazione =  $-0.997$   $\chi^2 = 1647$   $d.o.f. = 1746$

Dall'intersezione delle due rette stimiamo per la frequenza di taglio il valore

$$f_{1B} = 7246 \pm 8 \text{ Hz}$$

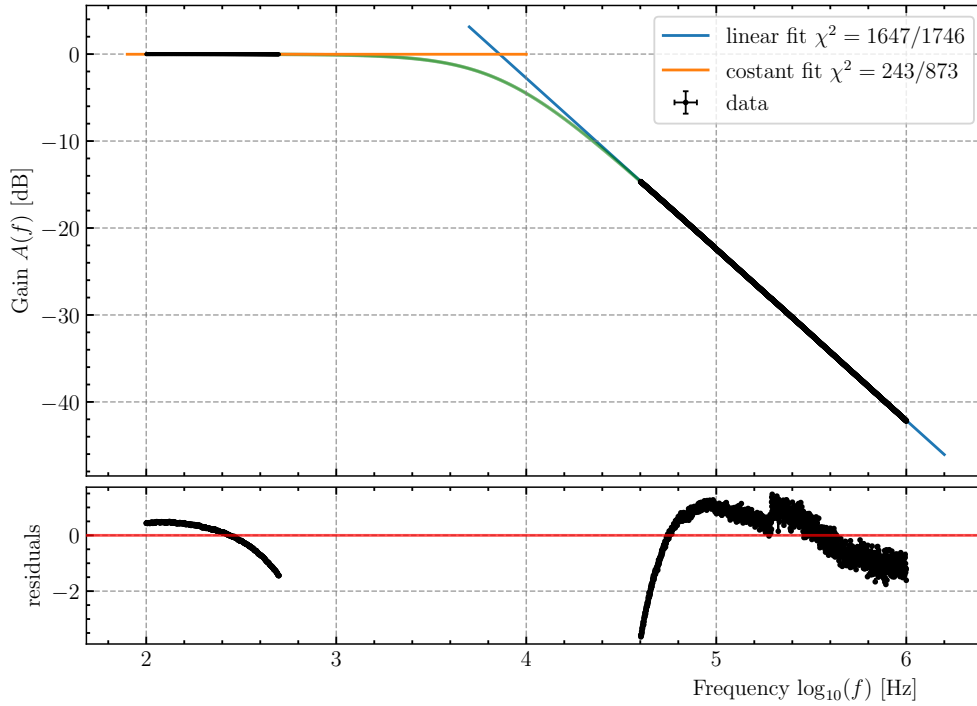


Figura 3: Fit al plot di bode per trovare la frequenza di corner. In verde i punti non utilizzati nel fit.

## 5.c Misura della frequenza di taglio (metodo c)

Dal fit complessivo del modulo della funzione di trasferimento

$$|T(f)| = A(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_1}\right)^2}} \quad (1)$$

otteniamo per l'amplificazione di centro-banda e per la frequenza di taglio i seguenti valori:

$$A_1(\text{dB}) = (-19.1 \pm 0.3) \times 10^{-3} \quad f_{1C} = 7428.8 \pm 0.9 \text{ Hz} \quad \chi^2 = 1614 \quad d.o.f. = 4997$$

## 5.d Confronto misure-predizione

Le misure delle frequenze di taglio trovate con i 3 diversi metodi sono tutte compatibili con il valore atteso dalle misure di  $R_1$  e  $C_1$  visto in 1.f; ma non compatibili entro le relative incertezze tra loro. In particolare la misura più precisa è quella ottenuta tramite fit complessivo (metodo c) mentre quella più vicina al valore atteso è quella ottenuta direttamente dal plot di Bode generato dall'AD2 (metodo a).

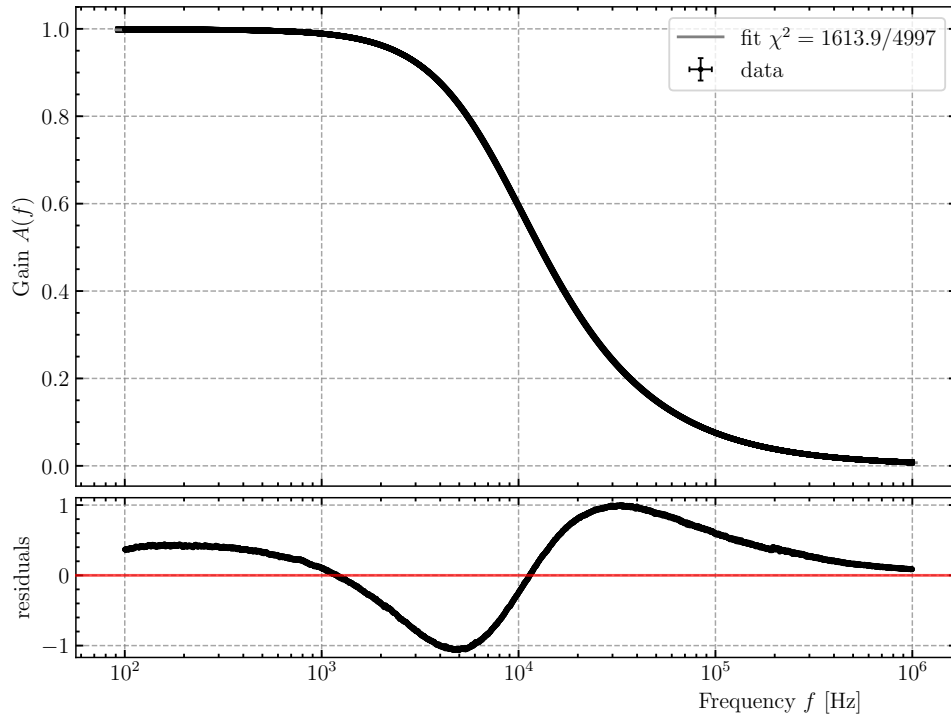


Figura 4: Fit complessivo al plot di bode con l'espressione per l'attenuazione (1).

## 6 Risposta del filtro ad un gradino

Il fronte del segnale di uscita ha un tempo di salita, misurato con i cursori, di

$$t_r = 47 \pm 2 \text{ } \mu\text{s}$$

da cui

$$f_1 = \ln(9)R_1C_1 \approx \frac{2.2}{2\pi t_r} = 7.4 \pm 0.3 \text{ kHz}$$

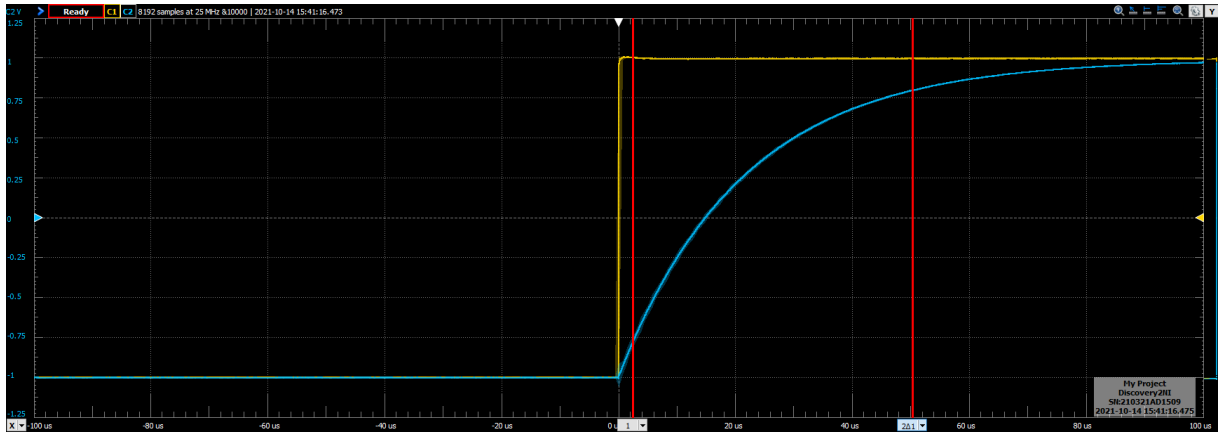


Figura 5: (6) Risposta del filtro passa-basso ad un gradino di tensione.

## 7.a Impedenze di ingresso/uscita

L'impedenza in ingresso al circuito in 1 è data da:

$$Z_{\text{in}}(\omega) = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} = R_1 \left( 1 - j \frac{1}{\omega R_1 C_1} \right) = R_1 \left( 1 - j \frac{\omega_1}{\omega} \right)$$

A bassa frequenza ( $f \ll f_1$ ) il termine costante è trascurabile, per cui

$$Z_{\text{in}}(f) \approx -jR_1 \frac{f_1}{f}$$

Poiché l'impedenza del condensatore  $Z_{C_1} \rightarrow \infty$  per  $f \rightarrow 0$  il filtro si comporta come un circuito aperto.

Ad alta frequenza ( $f \gg f_1$ ) è il termine costante a dominare, quindi

$$Z_{in} \approx R$$

cioè, nel limite opposto ( $Z_{C_1} \rightarrow 0$  per  $f \rightarrow \infty$ ) il condensatore si comporta come un corto-circuito, quindi il filtro ha impedenza puramente reale.

Alla frequenza di taglio vale

$$Z_{in} = R_1(1 - j).$$

Mentre come impedenza in uscita abbiamo:

$$Z_{out}(\omega) = \left( \frac{1}{R_1} + j\omega C_1 \right)^{-1}.$$

## 7.b Effetti dovuti all' accoppiamento con un carico

L' amplificazione di centro-banda e la frequenza di taglio nel caso in cui il carico sia rispettivamente 100 e 10 k $\Omega$ :

$$\begin{aligned} R_L = 100 \text{ k}\Omega &\implies A_1 = 0.98 \quad f_1 = 7450 \text{ Hz} \\ R_L = 10 \text{ k}\Omega &\implies A_1 = 0.83 \quad f_1 = 8761 \text{ Hz} \end{aligned}$$

Si vede dal circuito equivalente di Thèvenin che la tensione ai capi del condensatore è quella in uscita dal partitore di tensione  $V_{C_1} = R_L / (R_1 + R_L) V_{in} \implies A_1 = R_L / (R_1 + R_L)$  e che la resistenza a cui si trova in serie  $C_1$  è il parallelo  $R_1 || R_2 = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$  che alza la frequenza di taglio rispetto al valore atteso senza carico  $f_{1L} = \frac{1}{2\pi(R_1 || R_2)C_1} \geq \frac{1}{2\pi R_1 C_1} = f_1$ .

## Filtro passa-banda

### 8.a Misura dei componenti

$$R_1 = 1.98 \pm 0.02 \text{ k}\Omega \quad C_1 = 10.8 \pm 0.4 \text{ nF} \quad f_1 = 7442 \pm 351 \text{ Hz}$$

### 8.b Filtro passa-basso, stima della frequenza di taglio

Dalla fit con la funzione di trasferimento del passa basso risulta: Il valore della frequenza di taglio vale invece:

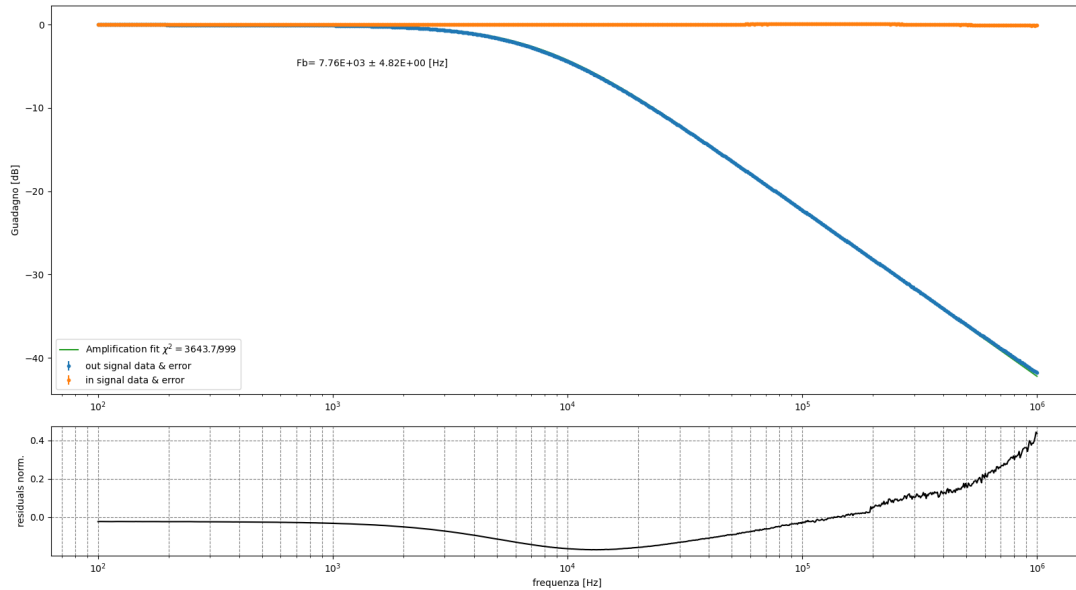


Figura 6: Fit con il modello della funzione di trasferimento per il filtro passa basso

$$f_1 = 7.76 \pm 0.01 \text{ kHz}$$

che è compatibile con i valori attesi.

Il guadagno a centro banda vale:

$$A_1 = (-61 \pm 5) \times 10^{-3} \text{ dB}$$

## 9.a Misura dei componenti

$$R_2 = 1.98 \pm 0.02 \text{ k}\Omega \quad C_1 = 97.6 \pm 3.9 \text{ nF} \quad f_1 = 821 \pm 41 \text{ Hz}$$

## 9.b Filtro passa-alto, stima della frequenza di taglio

Dal fit con modello la funzione di trasferimento di un filtro passa alto risulta: Il valore della frequenza di taglio

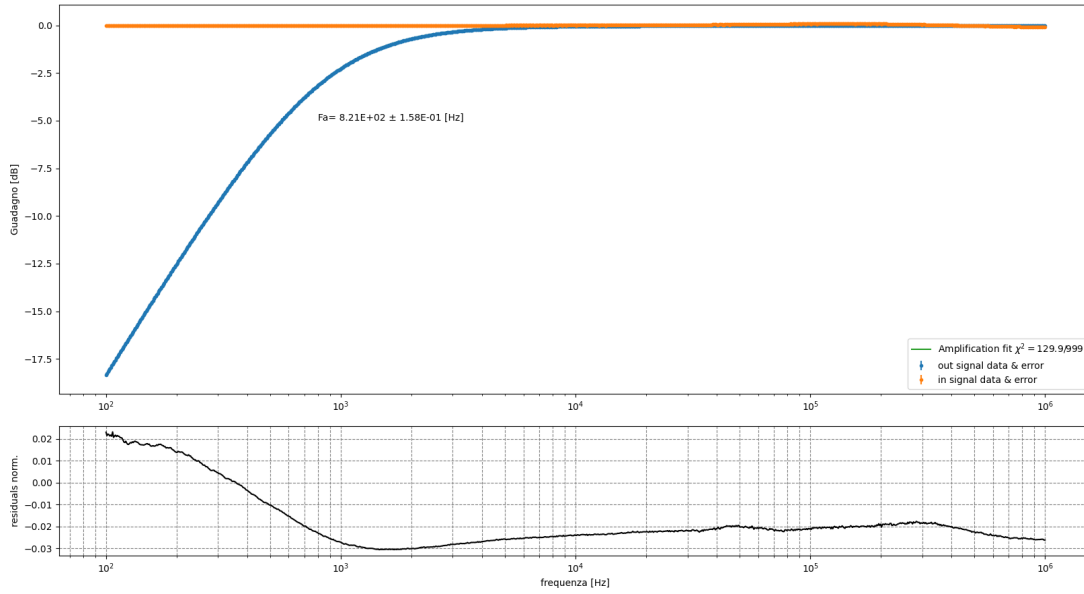


Figura 7: Fit con il modello della funzione di trasferimento per il filtro passa alto

ricavata dal fit vale:

$$f_2 = 821.3 \pm 0.2 \text{ Hz}$$

Il guadagno a centro banda vale:

$$A_2 = (-25.1 \pm 0.2) \times 10^{-3} \text{ dB}$$

## 10.a Filtro passa-banda, risposta in frequenza

La nostra stima dell'amplificazione di centro-banda e delle frequenze di taglio (per cui il guadagno si riduce di 3 dB rispetto a centro-banda) è

$$A(\text{dB}) = -6.505 \pm 0.006 \quad f_L = 380 \pm 4 \text{ Hz} \quad f_H = 16.29 \pm 0.16 \text{ kHz}$$

## 10.b Fit della funzione di trasferimento

Utilizzando come modello il modulo della funzione di trasferimento per il passa banda  $\frac{1}{\sqrt{(c + \frac{f_a}{f_b} + 1)^2 + (x/fb - fa/x)^2}}$

con  $c = \frac{R_1}{R_2}$  si ottiene

## 10.c Differenze

A differenza dei circuiti RC studiati prima, non possiamo considerare indipendenti i sotto-circuiti che compongono il passa-banda; infatti il comportamento reale del circuito è sensibilmente diverso da quanto previsto in approssimazione di stadi indipendenti.

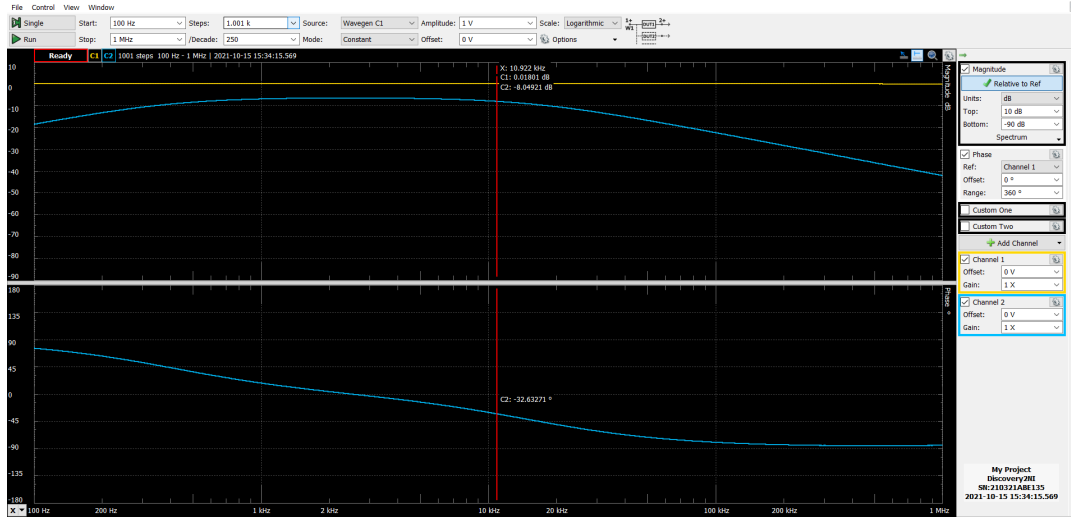


Figura 8: (4) Immagine del network analyzer per il filtro passa-banda.

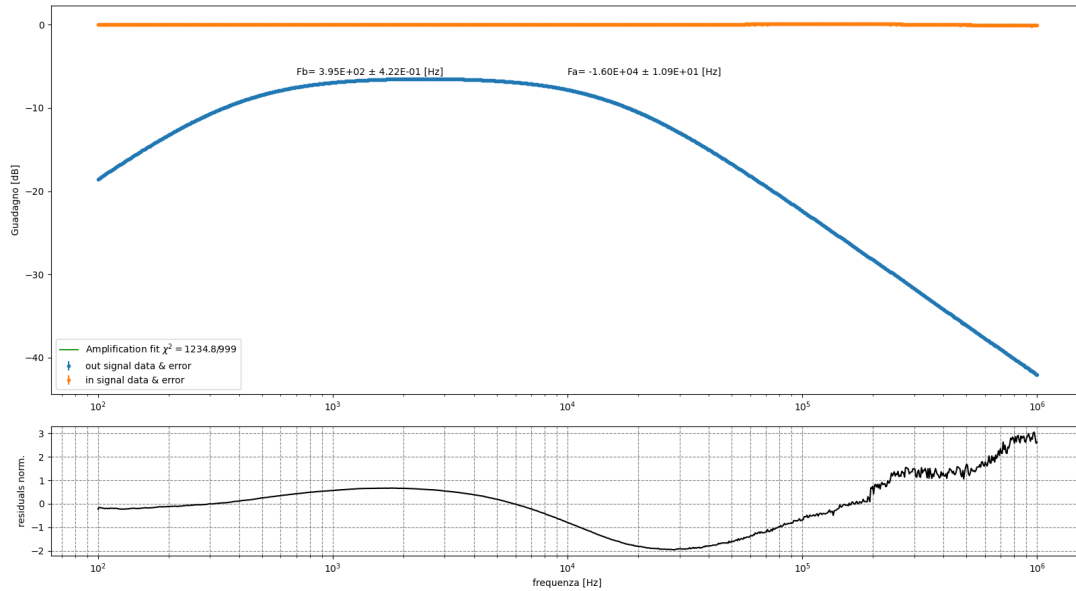


Figura 9: Fit con il modello della funzione di trasferimento per il filtro passa banda

In particolare a centro banda (i.e. nell'intervallo di frequenza  $f_2 \leq f \leq f_1$ ) l'attenuazione non è più in ottima approssimazione unitaria, ma è minore di  $A_{\max}(f) \approx -6.0$  dB/dec.

Le frequenze di taglio misurate  $f_L$  e  $f_H$  non sono compatibili con quelle ottenute separatamente nell'analisi dei singoli circuiti. Più precisamente la frequenza più bassa (del passa alto) è pressoché dimezzata  $f_L > f_2$ , mentre la frequenza più alta (del passa basso) è più che raddoppiata  $f_H > f_1$ .

D'altra parte, una ragionevole richiesta per assicurare l'indipendenza dei due circuiti collegati in serie è che si abbia  $|Z_{\text{out},1}| \ll |Z_{\text{in},2}|$  ad ogni frequenza (e indipendentemente da questa). Riportiamo le impedenze in questione:

$$|Z_{\text{out},1}| = \left| \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C_1} \right|^2 = \frac{R_1^2}{1 + \omega^2 R_1^2 C_1^2} \quad |Z_{\text{in},2}|^2 = \left| \frac{1 + j\omega R_2 C_2}{j\omega C_2} \right|^2 = \frac{1 + \omega^2 R_2^2 C_2^2}{\omega^2 C_2^2}$$

Ora  $|Z_{\text{out},1}| \leq 1/(\omega C_1)$  con  $|Z_{\text{out},1}| \sim 1/(\omega C_1)$  per  $f \gg f_1$  e  $|Z_{\text{in},2}| \geq 1/(\omega C_2)$  con  $|Z_{\text{out},1}| \sim 1/(\omega C_2)$  per  $f \ll f_2$ . Quindi per poter considerare indipendenti i due circuiti è sicuramente una buona idea imporre la condizione

$$|Z_{\text{out},1}| \leq \frac{1}{\omega C_1} \ll \frac{1}{\omega C_2} \leq |Z_{\text{in},2}| \implies C_2 \ll C_1.$$

Mentre per i valori di capacità scelti vale la condizione opposta  $C_2 \approx 10 \cdot C_1$ .

## 10.d Dipendenza dai valori delle resistenze

Se indichiamo con  $A_1(f)$  e  $A_2(f)$  le attenuazioni del passa-basso e del passa-alto, l'attenuazione attesa in uscita dai due circuiti collegati in cascata è

$$A = \left( \frac{R_1}{R_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \right)^{-1} = \frac{A_1 A_2}{A_1 A_2 \frac{R_1}{R_2} + 1} \quad (2)$$

Nel nostro caso vale  $R_1 = R_2$  (entro l'incertezza) per cui come attenuazione di centro banda, dove avevamo  $A_1 \approx A_2 \approx 1$ , ci aspettiamo di avere  $A_{cb} = \frac{1}{2}$ . Questo è compatibile con il valore che abbiamo misurato (prima in dB)  $A_{cb} = 0.4702 \pm 0.0004 \approx \frac{1}{2}$

Per avere una risposta in frequenza del circuito complessivo il più possibile uguale al prodotto delle funzioni di trasferimento dei due sotto-circuiti avremmo dovuto scegliere  $R_1 \ll R_2$  ( $Z_{out,1} \ll Z_{in,2}$ ). Infatti l'attenuazione attesa a centro banda vista in (2) sotto queste ipotesi diventa  $A_{cb} \approx A_1 A_2 \approx 1$ .

## 10.e Andamento della fase

Idealmente, se la funzione di trasferimento complessiva  $T(\omega)$  per il passa banda è il prodotto delle funzioni di trasferimento dei due circuiti in cascata:

$$T_1(\omega) = -\frac{1}{1 + j\omega/\omega_1} \quad T_2(\omega) = \frac{1}{1 - j\omega_2/\omega}$$

ci aspettiamo (per le regole di moltiplicazione sui complessi) che lo sfasamento totale in uscita sia pari alla somma degli sfasamenti prodotti dai singoli sotto-circuiti:

$$T(\omega) = T_1(\omega)T_2(\omega) = |T_1| e^{i(\omega t + \varphi_1)} |T_2| e^{i(\omega t + \varphi_2)} = |T_1| |T_2| e^{i(\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)} = |T_1| |T_2| e^{i(\omega t + \varphi)}$$

per cui  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \tan^{-1} \left( \frac{\text{Im}\{T_1(\omega)\}}{\text{Re}\{T_1(\omega)\}} \right) + \tan^{-1} \left( \frac{\text{Im}\{T_2(\omega)\}}{\text{Re}\{T_2(\omega)\}} \right)$  che corrispondono rispettivamente a

$$\varphi_1(\omega) = \arctan -\frac{\omega}{\omega_1} \quad \varphi_2(\omega) = \arctan \frac{\omega_2}{\omega}$$

Effettivamente le misure di sfasamento in uscita dal passa-banda risultano in accordo con l'andamento atteso

$$\varphi_2 + \varphi_1 = \varphi(f) = \arctan \frac{f_2}{f} - \arctan \frac{f}{f_1} \quad (3)$$

almeno fino a frequenze dell'ordine di  $10^5$  Hz dove i punti iniziano a deviare dal modello man mano che ci si avvicina alla banda passante dell'AD2 ( $\sim 9$  MHz). Questo può essere dovuto alle capacità parassite tra i fili, i componenti e la basetta che ad alta frequenza non sono trascurabili, a differenza di quanto presuppone il nostro modello.

## Conclusioni e commenti finali

Si è riusciti a realizzare dei filtri RC passivi del primo ordine (o “a un polo”) e ad apprezzarne il differente comportamento in vari regimi, quando usati separatamente, collegati in cascata e connessi a carichi resistivi di diverso valore.

## Dichiarazione

I firmatari di questa relazione dichiarano che il contenuto della relazione è originale, con misure effettuate dai membri del gruppo, e che tutti i firmatari hanno contribuito alla elaborazione della relazione stessa.



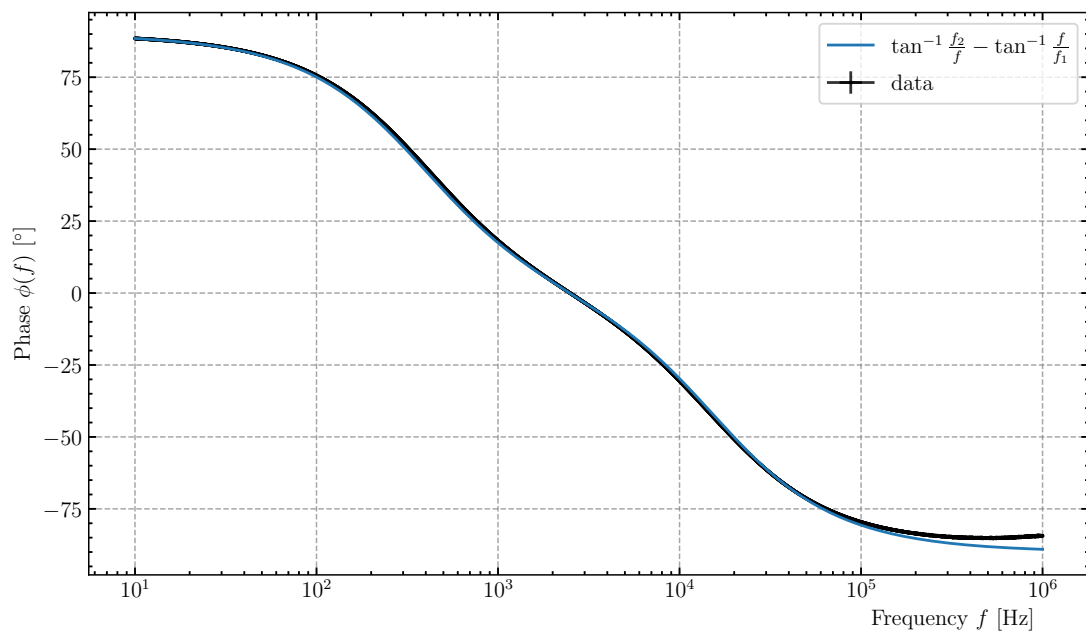


Figura 10: Grafico dello sfasamento misurato per il filtro passa-banda al variare della frequenza in scala semi-logaritmica.