

# Es12: Misura del rapporto $h/e$ per effetto fotoelettrico

Gruppo 1.AC  
Matteo Rossi, Bernardo Tomelleri

28 marzo 2022

## 1 Scopo dell'esperienza

Scopo dell'esperienza è verificare l'effetto fotoelettrico e la dipendenza lineare tra energia e frequenza dei fotoni, dunque da questa ricavare una stima del rapporto tra la costante di Planck e la carica dell'elettrone  $h/e$  utilizzando il metodo del potenziale frenante (implementato per la prima volta da R.A. Millikan, 1914-16).

## 2 Metodo di misura del potenziale frenante

L'effetto fotoelettrico prevede che un elettrone può essere estratto da un metallo assorbendo un fotone con energia superiore al lavoro di estrazione  $W_0$  e venire emesso con energia cinetica pari a

$$E = h\nu - W_0 \quad (1)$$

dove  $\nu$  è la frequenza della radiazione elettromagnetica incidente sul metallo e  $h\nu$  l'energia trasportata da ogni fotone di cui è costituita.

Nel nostro apparato sperimentale i *fotoelettroni*, i.e. gli elettroni estratti per effetto fotoelettrico dal catodo di una cella fotoelettrica Leybold 5587 determinano una *fotocorrente* verso l'anodo, che collegiamo all'ingresso di un picoamperometro (mod. Keithley 595: Quasistatic C-V Meter) per riuscire a misurarne l'intensità  $I_{ph}$ .

Questi elettroni vengono ‘frenati’ da un campo elettrico di verso concorde al loro moto, generato da una tensione regolabile  $V_{bias}$  applicata tra anodo e catodo, al fine di trovare la differenza di potenziale critica  $V_0$  per cui l'intensità di corrente  $I_{ph}(V_{bias})$  si annulla. La barriera di potenziale  $eV_0$  corrispondente alla tensione che arresta il flusso di fotoelettroni ci fornisce quindi una stima della massima energia cinetica da essi raggiunta, che possiamo mettere in relazione alla frequenza della radiazione incidente (per conservazione dell'energia eq. (1))

$$V_0 = \frac{h}{e}\nu - \frac{W_0}{e} \quad (2)$$

Questa è proprio la relazione lineare tra energia e frequenza che intendiamo verificare, tramite cui possiamo stimare il valore del rapporto  $h/e$  a partire dal coefficiente angolare della retta di best-fit.

Assumendo come valori esatti  $e = 1.602176634 \times 10^{-19}$  C e  $h = 6.62607015 \times 10^{-34}$  Js il valore atteso del loro rapporto è

$$\left(\frac{h}{e}\right)_{\text{exp}} = 4.14 \times 10^{-15} \text{ Vs} \quad (3)$$

### 2.1 Sovrapposizione di correnti spurie

In realtà il nostro apparato è racchiuso da una scatola metallica per schermarlo dalla luce e dal rumore elettronico ambientale, ma la misura di  $h/e$  è affetta da diverse fonti di errore sistematico.

La corrente  $I(V_{bias})$  che misuriamo tra anodo e catodo in realtà è il risultato di una combinazione con altre correnti “inverse” (cioè associate alla migrazione di elettroni dall'anodo verso il catodo) alla photocorrente catodica, che continuano a essere presenti anche per valori di  $V_{bias} > V_0$ .

Queste ci permettono al più di ricavare una stima preliminare dell'ordine di grandezza di  $V_0$ , ricercando la transizione fra il regime in cui misuriamo  $I > 0$  o  $I \sim 0$  dalle curve corrente-tensione ottenute al variare della lunghezza d'onda (di cui riportiamo un esempio in fig. 1).

Ipotizziamo che queste correnti siano dovute alla sovrapposizione di vari effetti di natura diversa:

1. emissione di fotoelettroni dall'anodo, dovuta a imperfezioni nel sistema di illuminazione del catodo che può investire anche l'anodo (schematizzato in fig. 2);

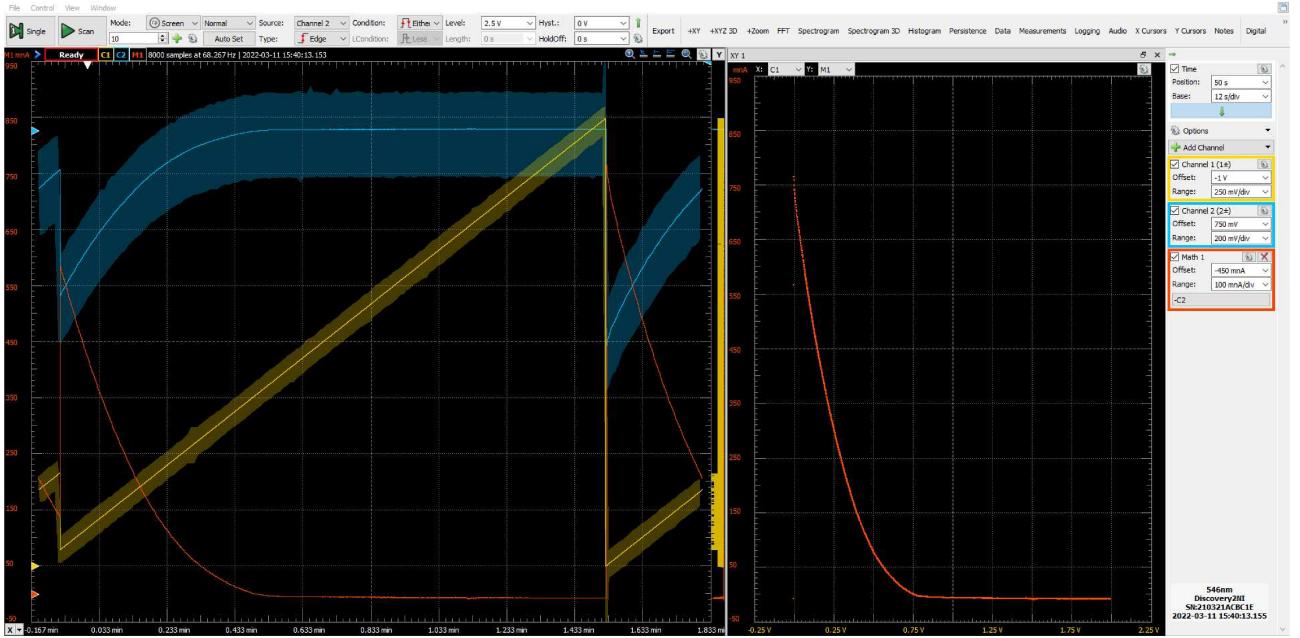


Figura 1: Acquisizione della curva tensione  $V_{\text{bias}}(t)$  (CH1) corrente (Math1 in  $\text{mmA} = \text{pA}$ ) per lunghezza d'onda 546 nm, in cui si vede un ginocchio verso  $I = 0$  intorno a  $V_0 \approx 0.75 \text{ V}$

2. estrazione di elettroni dall'anodo per effetto termoionico (corrente oscura).
3. connessione ohmica tra gli elettrodi dovuta al non perfetto isolamento delle guaine di rivestimento dei cavi.

Nonostante ci aspettiamo contributi di gran lunga minoritari rispetto alla photocorrente in assenza di bias tra gli elettrodi, già da adesso notiamo come i primi due crescano con la tensione di frenamento (per questi elettroni il campo elettrico è accelerante) diventando sempre più significativi, specialmente per tensioni prossime a quella di azzeramento  $V_0$  dove  $I_{ph}$  si estingue.

Per poter ovviare a queste contaminazioni date dalle correnti inverse  $I = I_{ph} + I_{\text{inv}}$ , ne teniamo conto misurandone l'intensità, la quale supponiamo per semplicità linearmente dipendente dalla tensione di bias

$$I_{\text{inv}} = bV + I_0 \quad (4)$$

per cui ci aspettiamo che i parametri  $b$  e  $I_0$  non dipendano dalla frequenza della luce incidente, ma puramente dalle caratteristiche fisiche della cella fotoelettrica. Nel caso particolare la corrente inversa fosse di natura puramente ohmica ci aspettiamo proporzionalità diretta  $I_{\text{inv}} \propto V_{\text{bias}}$  e offset  $I_0$  nullo.

Assumendo una distribuzione di Fermi-Dirac per gli elettroni liberi nella banda di conduzione del catodo, senza tenere conto dell'interazione con i fotoni, possiamo modellare l'andamento della photocorrente in funzione della tensione di frenamento come una legge di potenza che si annulla<sup>1</sup> in  $V_0$

$$I_{ph} = (V_0 - V)^{3/2} \theta(V_0 - V)$$

Dunque possiamo ottenere una misura più attendibile della tensione di azzeramento -per ogni valore della lunghezza d'onda- tramite fit alla corrente complessiva, con un modello del tipo:

$$I(V) = I_{ph} + I_{\text{inv}} = a(V_0 - V)^\alpha \theta(V_0 - V) + bV + I_0 \quad (5)$$

Come prima è ragionevole assumere che l'esponente  $\alpha$  sia indipendente dalle caratteristiche della luce incidente (visto che fisicamente dipende dalla densità degli stati elettronici del metallo nella banda di conduzione e da effetti legati all'interazione dei fotoelettroni con il bulbo della fotocella).

Mentre il parametro  $a$ , legato alla normalizzazione della photocorrente, dovrebbe racchiudere la dipendenza dalla frequenza della luce incidente, poiché vi dipendono sia l'intensità spettrale della lampada nella banda di selezione del filtro, che la sezione d'urto dell'effetto fotoelettrico alla corrispondente energia.

---

<sup>1</sup>indicando con  $\theta(x)$  la funzione gradino di Heaviside  $\theta(x) := \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

### 3 Descrizione delle misure

Nella realizzazione pratica dell'esperimento la radiazione luminosa è inizialmente emessa secondo uno spettro -praticamente- continuo da una lampada a LED, viene collimato da un diaframma circolare, dunque focalizzato da un paio di lenti convergenti prima di essere filtrato e incidere sul catodo della fotocella (come visto in fig. 2).

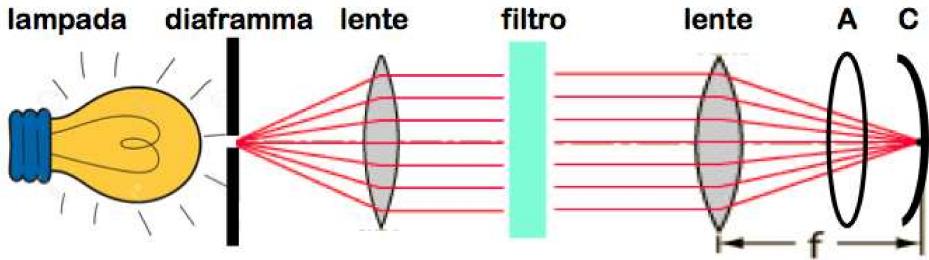


Figura 2: Rappresentazione schematica dell'apparato di illuminazione della fotocella

Per variare la frequenza  $\nu$  della radiazione che illumina la cella fotoelettrica utilizziamo 4 filtri di tipo interferenziale, per cui la luce trasmessa non è monocromatica, ma viene dispersa intorno al valore nominale centrale secondo una distribuzione di intensità spettrale pressoché uniforme su intervalli di larghezza  $FWHM \approx 10 \text{ nm}$  attorno alla lunghezza d'onda centrale  $CWL$ .

Teniamo conto della dispersione dello spettro incidente associando alla lunghezza d'onda centrale (riportata nei rispettivi datasheet) un'incertezza pari alla deviazione standard della curva di trasmissione a partire dalla larghezza a metà altezza  $FWHM$  (anch'essa tabulata) secondo la formula

$$\lambda \pm \sigma_\lambda = CWL \pm FWHM / \sqrt{12}$$

Per variare la tensione  $V_{bias} \in [0, 2] \text{ V}$ , intervallo entro il quale ci aspettiamo di trovare la tensione di frenamento critica  $V_0$ , generiamo in WG1 una rampa di tensione compresa tra i due estremi e la misuriamo con il CH1 dell'oscilloscopio di un AD2 secondo lo schema in fig. 3. Con il secondo canale misuriamo contemporaneamente quella generata dal convertitore corrente-tensione all'uscita del picoamperometro: nel nostro setup il fattore di conversione vale  $\kappa = 1 \text{ nA/V}$  ( $\pm 0.4\%$  dato dall'incertezza sulla lettura della corrente) per cui misuriamo  $I = \kappa V_{CH2} = V \cdot 10^{-9} \text{ [A]}$

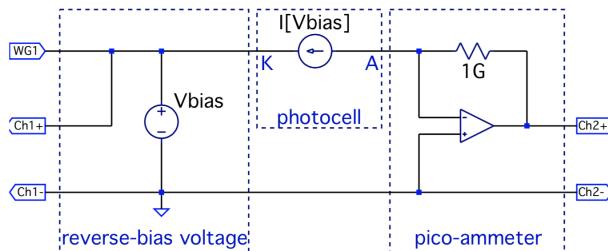


Figura 3: Schema del circuito equivalente per la misura dell'energia cinetica dei fotoelettroni.

Finalmente usiamo la funzionalità di plot XY dell'oscilloscopio per ottenere i grafici della corrente che attraversa la fotocella in funzione della tensione di bias (come riportato a destra di fig. 1 in rosso le ordinate Math1, sulle ascisse  $V_{bias}$  misurata da CH1).

#### 3.1 Misura della corrente inversa

Per effettuare la misura della corrente inversa abbiamo acquisito i dati come sopra con la lampada accesa, con la sola differenza che il vano della fotocella è stato opportunamente oscurato con un setto opaco, ricavando così l'andamento della corrente inversa in funzione della tensione di bias nello stesso intervallo di misura della fotocorrente riportato in fig. 4

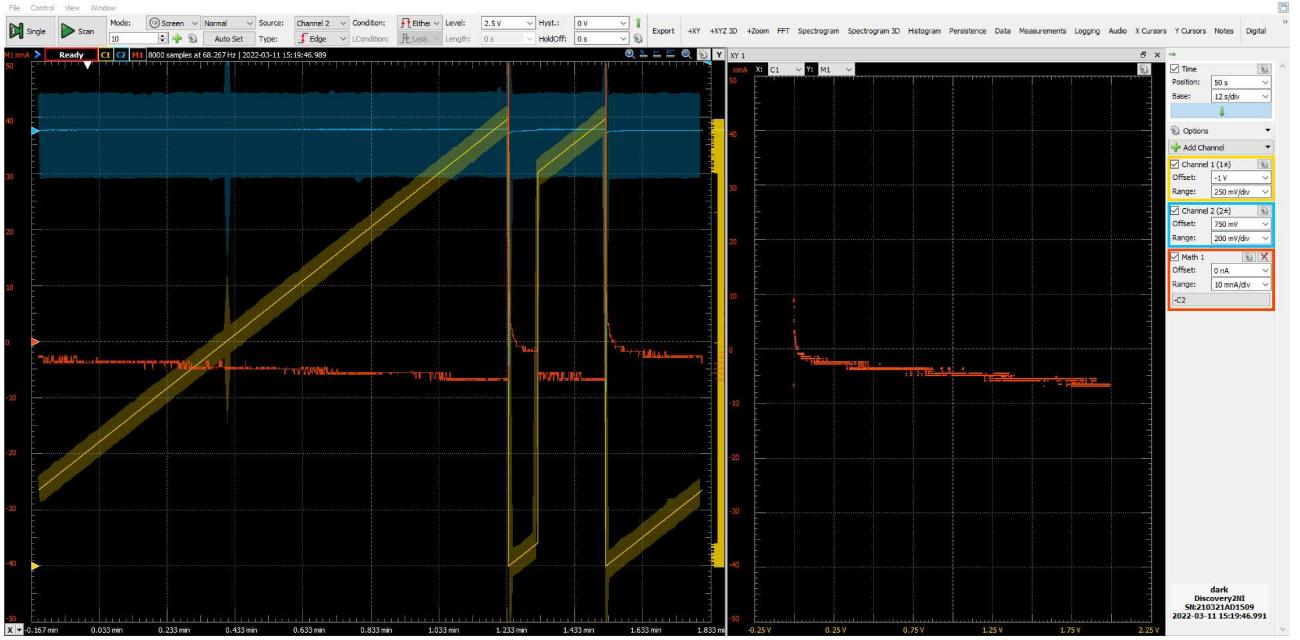


Figura 4: Stampa a schermo dell’oscilloscopio per la misura della corrente senza luce incidente sulla cella fotoelettrica. Una volta superato il transiente iniziale all’inizio della rampa di tensione è già possibile notare un andamento lineare dei dati.

$\lambda$ [nm]	$\sigma(\lambda)$ [nm]	$\nu$ [THz]	$\sigma(\nu)$ [THz]	$V_0$ [V]	$\sigma(V_0)$ [V]
450	3	667	4	1.20	0.03
499	3	601	4	0.99	0.03
546	3	549	3	0.76	0.03
577	3	520	3	0.64	0.03

Tabella 1: Stime preliminari della tensione di frenamento critica  $V_0$  trovate al variare della frequenza della luce incidente sulla fotocella

## 4 Analisi dati e stima del rapporto $h/e$

Abbiamo ottenuto una stima preliminare della tensione di azzeramento  $V_0$  estraendo dalle curve corrente-tensione i valori di  $V_{bias}$  per cui la corrente anodica  $I$  si discosta meno di due barre d’errore dalla corrente di buio misurata senza luce incidente, di cui riportiamo i risultati in tabella 1

4.1

Dunque si è riusciti a stimare il valore del rapporto  $h/e$  con un fit lineare dell’andamento di  $V_0$  in funzione di  $\nu$ , propagando opportunamente gli errori sulle frequenze (in questo caso le incertezze sulla variabile indipendente non sono trascurabili, in quanto  $\frac{h}{e}\sigma_\nu \sim \sigma_{V_0}$ ) che riportiamo in fig. 5

### 4.1 Metodo della corrente inversa

Per studiare la corrente inversa eseguiamo un fit lineare sia sui dati acquisiti per la corrente inversa senza luce incidente sia sui punti delle curve della fotocorrente nella regione in cui  $V_{bias} > V_0$  per ciascun valore di lunghezza d’onda studiato. Riportiamo i risultati dei fit in fig. 6 e tabella 2

$\lambda$ [nm]	$b$ [pA/V]	$I_0$ [pA]	$\chi^2/\text{ndof}$	norm. cov.
-	$-2.58 \pm 0.10$	$-1.78 \pm 0.13$	92/7945	-0.858
$450 \pm 3$	$-3.5 \pm 0.8$	$-2.3 \pm 1.4$	8/2495	-0.997
$499 \pm 3$	$-1.9 \pm 1.0$	$-4.6 \pm 1.7$	6/1689	-0.997
$546 \pm 3$	$-1.5 \pm 1.0$	$-4.8 \pm 1.7$	11/1689	-0.997
$577 \pm 3$	$-1.7 \pm 1.0$	$-4.5 \pm 1.7$	5/1688	-0.997

Tabella 2: Risultati dei fit lineari per la misura della corrente inversa al variare della lunghezza d’onda della radiazione incidente

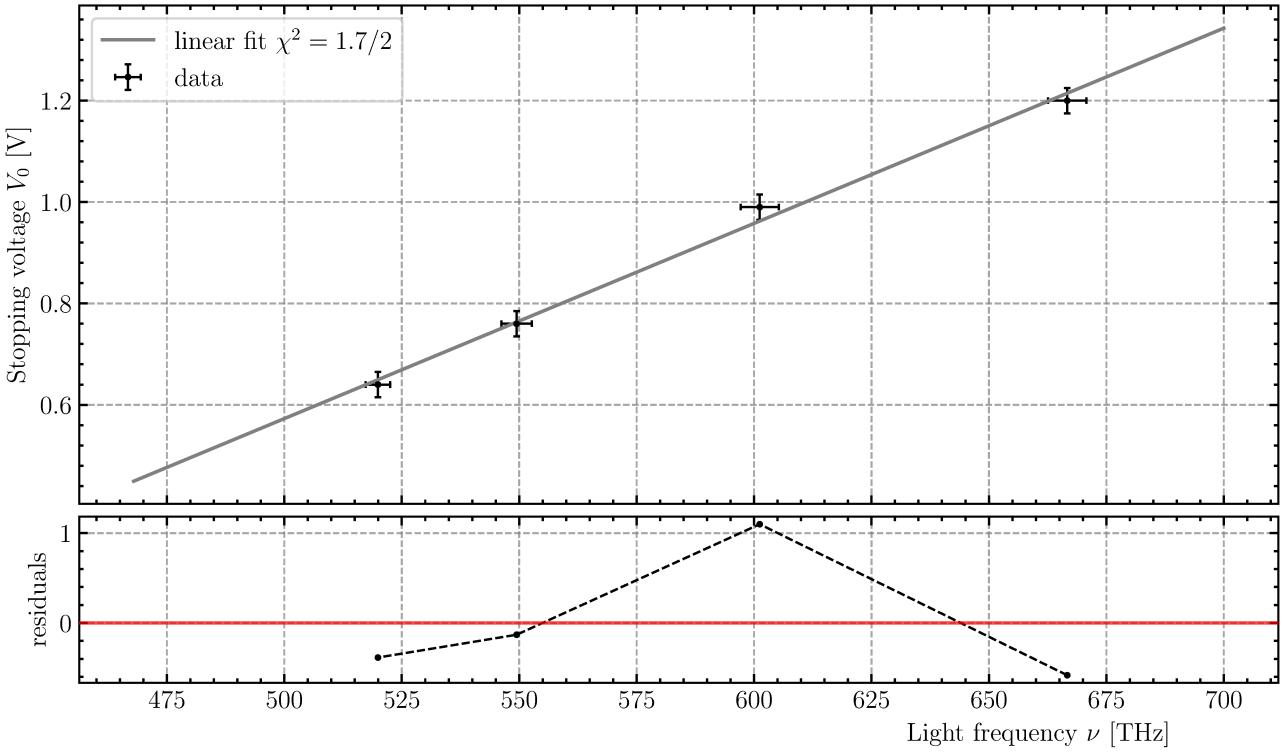


Figura 5: Grafico con retta di best-fit e residui normalizzati con i valori di  $V_0(\nu)$  stimati in maniera grossolana dalle curve corrente-tensione.

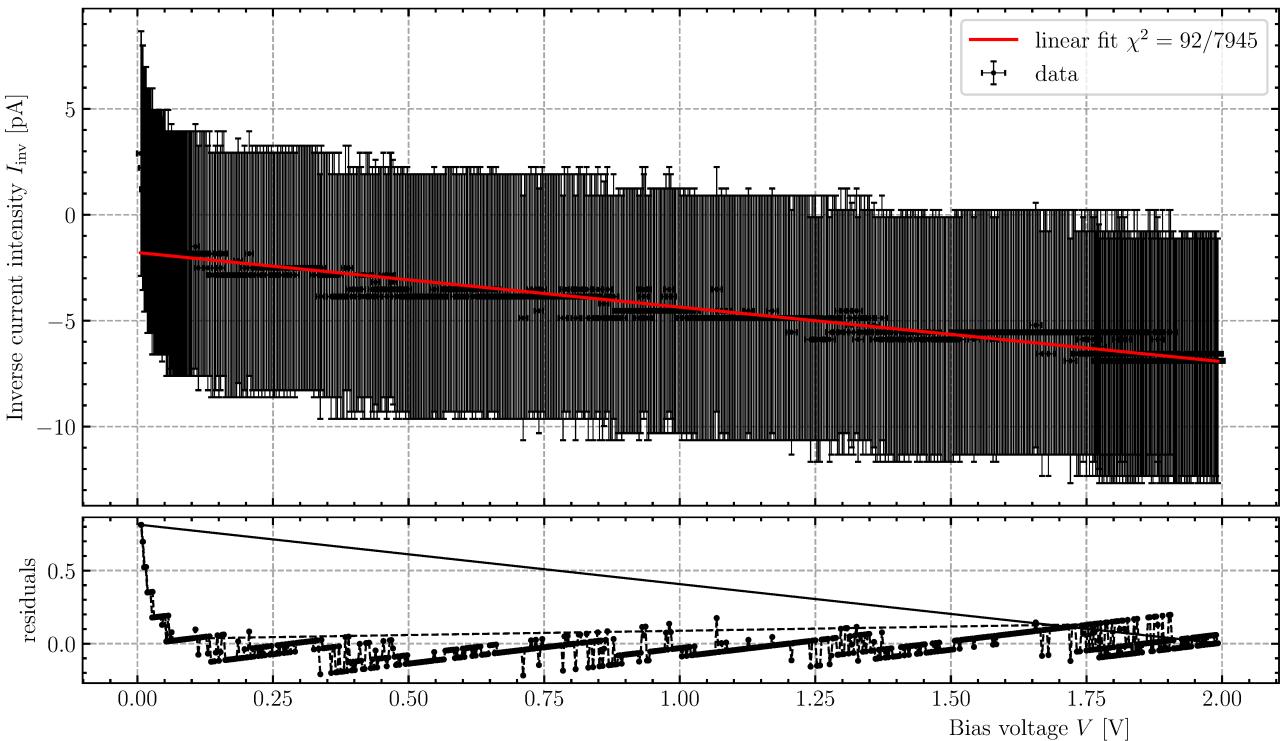


Figura 6: Fit lineare all'andamento della corrente inversa  $I_{\text{inv}}$  in funzione della rampa di potenziale di frenamento  $V_{\text{bias}}$  in assenza di illuminazione

$\lambda$ [nm]	$a$ [pA/V $^\alpha$ ]	$V_0$ [mV]	$\alpha$ [arb. un.]	$b$ [pV]	$I_0$ [pA]	$\chi^2/\text{ndof}$
$450 \pm 3$	$492 \pm 3$	$1273 \pm 2$	$2.264 \pm 0.007$	$-4.4 \pm 0.5$	$-0.6 \pm 0.8$	599/7817
$499 \pm 3$	$756 \pm 4$	$1061 \pm 2$	$2.441 \pm 0.009$	$-3.1 \pm 0.4$	$-2.5 \pm 0.6$	555/7817
$546 \pm 3$	$1066 \pm 6$	$863 \pm 3$	$2.547 \pm 0.012$	$-2.6 \pm 0.3$	$-2.9 \pm 0.4$	368/7817
$577 \pm 3$	$1595 \pm 8$	$751 \pm 3$	$2.603 \pm 0.016$	$-2.4 \pm 0.2$	$-3.2 \pm 0.3$	210/7817

Tabella 3: Risultati dei fit alle curve corrente-tensione con eq. (5) lasciando tutti i parametri liberi.

6.1

Da cui notiamo che, in primo luogo  $I_0$  non risulta compatibile con 0, né indipendente dalla lunghezza d'onda della luce incidente, ma che nonostante questo il modello lineare continua a descrivere fedelmente l'andamento dei dati.

Anche per quanto riguarda il parametro  $b$ , i valori trovati dai 4 fit lineari sulle fotocorrenti non risultano costanti al variare di  $\lambda$ , ma comunque compatibili tra loro entro non più di due barre d'errore.

Prendendo una media pesata di questi si ottiene:

$$b = \frac{\sum_i b_i / \sigma_i^2}{\sum_i 1 / \sigma_i^2} \pm \frac{1}{\sqrt{\sum_i 1 / \sigma_i^2}} = -2.1 \pm 0.5 \quad (6)$$

che risulta compatibile con il valore trovato dal fit sui dati senza luce incidente.

Dunque possiamo ottenere dal fit lineare in assenza di illuminazione una stima attendibile della resistenza equivalente percepita tra anodo e catodo

$$1 / |b| = 388 \pm 16 \text{ G}\Omega$$

che risulta dello stesso ordine di grandezza atteso per via del cattivo schermaggio tra gli elettrodi dovuto alle imperfezioni nelle guaine isolanti dei cavi ( $R \sim 10^{11-12} \Omega$ ).

Per provare a spiegare la dipendenza dei parametri del fit dalla frequenza del fascio incidente notiamo che per le lunghezze d'onda più corte (per fotoni più energetici) ci si aspetta che la tensione di azzeramento  $V_0$  sia più elevata, dunque che la corrente tenda più lentamente al suo valore asintotico. Ipotizziamo che questo diverso andamento della corrente, dunque di  $I_{\text{inv}}$ , al variare della lunghezza d'onda sia responsabile per la dipendenza osservata dei parametri di fit da  $\lambda$ .

Da un primo fit con eq. (5) alle curve di fotocorrente acquisite, lasciando tutti i parametri liberi si ottengono i risultati riassunti in tabella 3 e fig. 7

Da cui possiamo osservare come tutti i parametri del fit assumono andamento monotono in funzione della lunghezza d'onda, benché nel nostro modello solamente i primi due dovrebbero racchiudere la dipendenza dalle caratteristiche della luce incidente. In particolare, i valori ottimali di  $a$ ,  $\alpha$  e  $b$  risultano monotoni crescenti in funzione di  $\lambda$ , mentre i parametri  $V_0$  e  $I_0$  (fortemente anticorrelati rispettivamente ad  $a$  -  $\alpha$  e  $b$ ) hanno andamento monotono decrescente.

Supponiamo quindi che gli  $\alpha$  di best-fit risultino tutti sistematicamente maggiori di  $3/2$  e non compatibili tra di loro poiché nel nostro modello consideriamo gli elettroni liberi nel metallo e non teniamo conto delle successive interazioni dei fotoelettroni con il bulbo della fotocella.

## 4.2 Dipendenza dei parametri ottimali dall'intervallo di misura

Anche una volta fissati i valori di  $I_0$  e  $b$  dai risultati ottenuti nella sezione precedente si è notato che la stima dei valori del potenziale frenante critico  $V_0$  e dell'esponente  $\alpha$  continuavano ad esibire un'apprezzabile dipendenza dall'intervallo di tensioni di bias considerate nei fit della fotocorrente.

Considerando valori di  $V_{\text{bias}} \sim 0$ , oltre a quelle vicine al ginocchio in  $V_0$ , si è visto che il valore dell'esponente  $\alpha$  assume un andamento monotono crescente in funzione della lunghezza d'onda in maniera analoga a quello osservato per i parametri  $a$  e  $b$ . Viceversa, restringendo sempre di più i dati alla regione in cui  $V_{\text{bias}} \sim V_0$ , i valori ottimali di  $\alpha$  assumono valori tendenzialmente minori (di non più del 20%) di quelli in tabella 3, ma con andamento difficilmente prevedibile ed estremamente sensibile a variazioni dell'intervallo di misura.

Si è scelto quindi di fissare il valore di  $\alpha$  come media pesata dei valori ottimali stimati dai fit prendendo in considerazione l'intero range di tensioni esplorato, dunque di eseguire un nuovo fit simultaneo ai 4 dataset lasciando liberi solamente i restanti parametri dipendenti dalla frequenza della luce incidente:  $V_0$  e  $a$ .

Dal primo fit simultaneo con  $\alpha$  parametro libero si trova, dalla media pesata dei valori ottimali (come in eq. (6))

$$\alpha = 2.481 \pm 0.005$$

dunque riportiamo i risultati del secondo fit simultaneo a due parametri, da cui si sono ottenute le nostre misure più accurate della tensione di azzeramento della fotocorrente  $V_0$  in tabella 4 e fig. 8

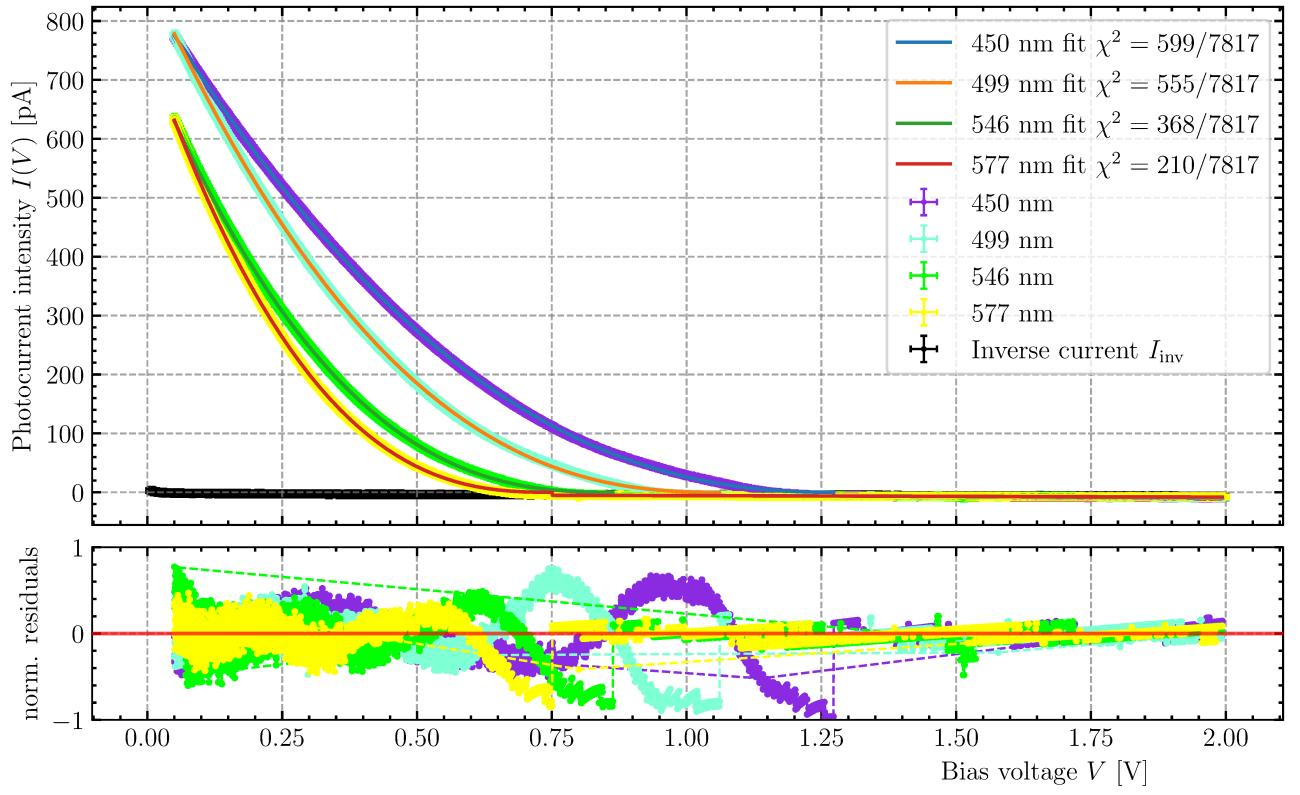


Figura 7: Grafico dei fit con legge di potenza eq. (5) e residui normalizzati per le curve delle photocorrenti acquisite in funzione del potenziale di frenamento  $V_{bias}$

$\nu$ [THz]	$a$ [pA/V <sup>2.481</sup> ]	$V_0$ [mV]	$\chi^2/\text{ndof}$	norm. cov.
$667 \pm 4$	$411.9 \pm 0.6$	$1345.6 \pm 0.6$	$2070/7820$	-0.976
$601 \pm 4$	$739 \pm 1$	$1072.1 \pm 0.5$	$806/7820$	-0.978
$549 \pm 3$	$1097 \pm 2$	$848.9 \pm 0.5$	$522/7820$	-0.983
$520 \pm 3$	$1644 \pm 4$	$728.8 \pm 0.5$	$505/7820$	-0.977

Tabella 4: Risultati dei fit con leggi di potenza con esponente  $\alpha$  fissato al variare della lunghezza d'onda  $\lambda$  della radiazione incidente

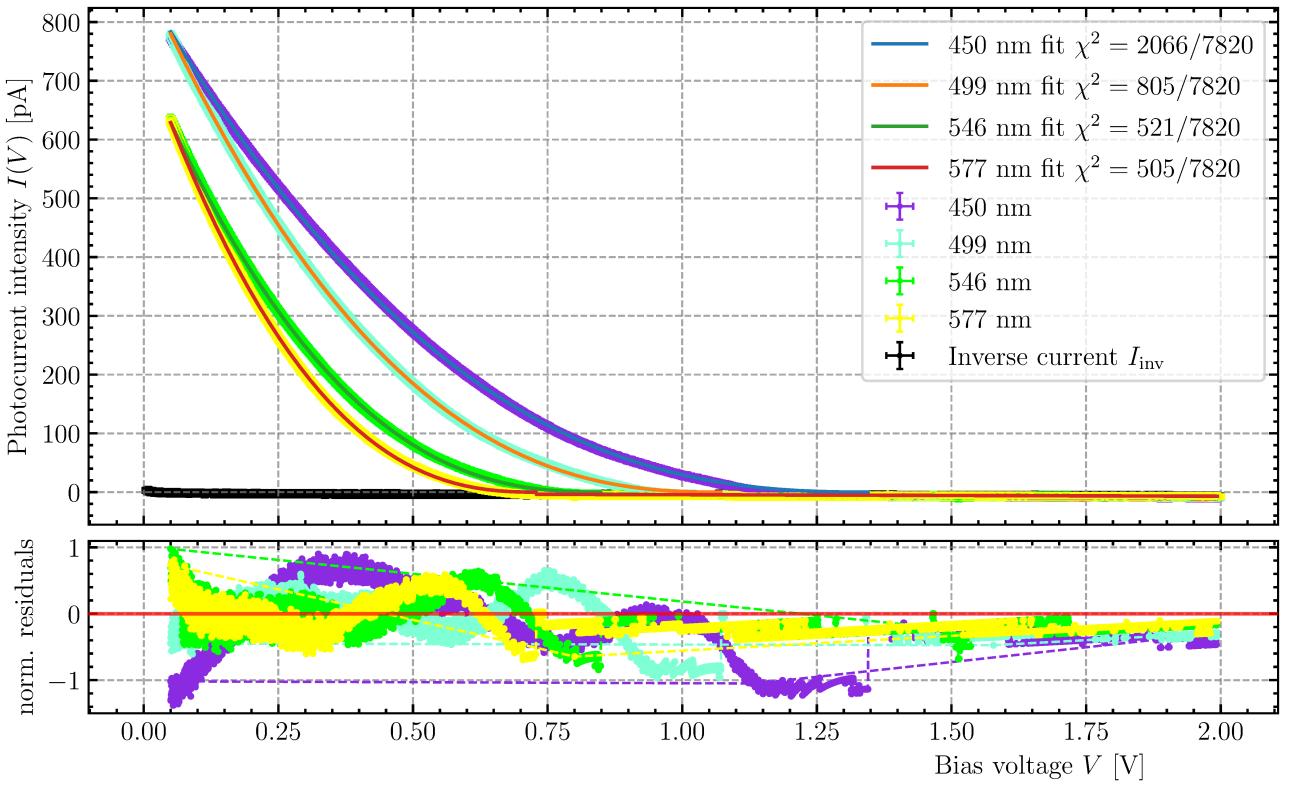


Figura 8: Grafico del fit simultaneo con legge di potenza ( $\alpha$  fissato) e residui normalizzati per le curve delle photocorrenti acquisite in funzione della tensione  $V_{\text{bias}}$

Metodo	$h/e$ [V s]	$W_0/e$ [V]	$\chi^2/\text{ndof}$	norm. cov.
Prel.	$3.9 \pm 0.2$	$1.35 \pm 0.12$	1.7/2	-0.995
$I_{\text{inv}}$	$4.21 \pm 0.13$	$1.46 \pm 0.21$	0.1/2	-0.971

Tabella 5: Risultati dei fit lineari per la misura del rapporto  $h/e$  ottenuti dai due metodi impiegati: la stima preliminare e quello della corrente inversa

Finalmente, dai valori di  $V_0$  ricavati fissando l'esponente  $\alpha$  al suo valore ottimale proponiamo un fit lineare con la relazione inversa della eq. (2)

$$\nu = \frac{e}{h} V_0 - W_0/h \quad (7)$$

dal momento che ora  $\frac{h}{e}\sigma_\nu \gg \sigma_{V_0}$ , per cui possiamo trascurare le incertezze su  $V_0$  nel fit ai minimi quadrati (i cui risultati si riportano in fig. 9 e tabella 5).

Da cui otteniamo come valore del rapporto  $h/e = 4.21 \pm 0.13$  V s, che è compatibile entro l'incertezza con il valore atteso.

### 4.3 Effetto fotoelettrico sull'anodo e lavoro di estrazione

Dal datasheet della cella fotoelettrica sappiamo che questa è composta da un anodo in lega di platino e rodio, che è una spira di 3 cm e da un catodo in potassio rivestito di ossido d'argento, costituito da un arco delle dimensioni di 4 cm.

Per minimizzare il contributo alla corrente inversa dato dall'emissione di fotoelettroni dall'anodo quando viene investito dagli aloni del fascio di luce incidente si è ridotta l'apertura del diaframma così che la sua immagine, messa a fuoco al centro del catodo, abbia dimensioni molto inferiori al raggio dell'anodo.

Non solo: il potassio -come tipico per i metalli alcalini- ha lavoro di estrazione  $W_{0,K} \approx 2.15$  eV più basso di quello di altri metalli, come il platino  $W_{0,\text{Pt}} \approx 5.29$  eV con cui è stato realizzato l'anodo sempre per questo motivo.

Dalla nostra analisi i risultati ottenuti per  $W_0$  risultano compatibili con il valore dell'intercetta attesa dal datasheet della fotocella e in particolare risultano anche in accordo con il valore del lavoro di estrazione del potassio. Prendendo nuovamente la media pesata dei valori ottimali come in eq. (6) infatti abbiamo

$$W_0/e = 1.37 \pm 0.08 \text{ V} \implies W_0 = 2.19 \pm 0.12 \text{ eV}$$

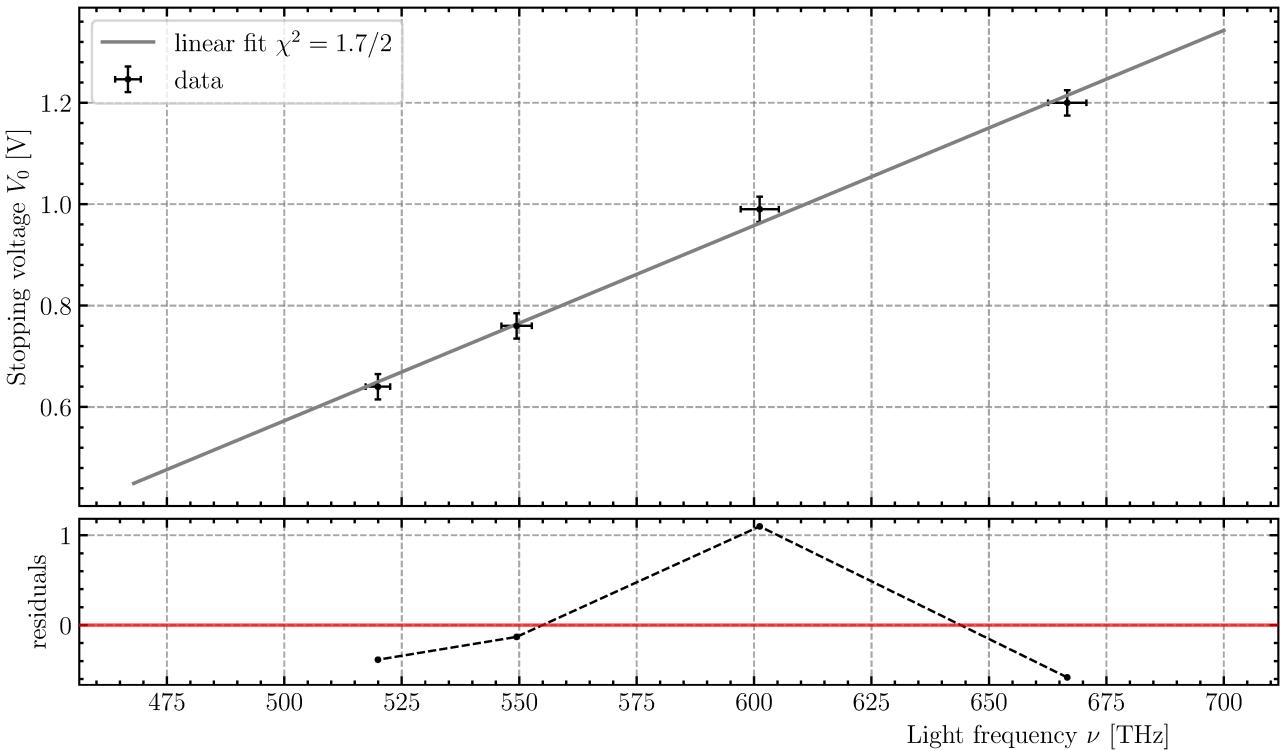


Figura 9: Grafico con retta di best-fit e residui normalizzati per la relazione inversa eq. (7).

#### 4.4 Nota sul metodo di fit

Per determinare i parametri ottimali e le rispettive covarianze si è implementato in Python un algoritmo di fit basato sui minimi quadrati mediante la funzione `curve_fit` della libreria SciPy.

#### Conclusioni e commenti finali

Si è riusciti a dare una stima ragionevole del rapporto  $h/e$  tramite due varianti del metodo del potenziale frenante. Nonostante la semplicità della procedura già da una stima preliminare si è riusciti ad ottenere un valore con scarto dell'8% circa. Con il metodo della corrente inversa si riesce a migliorare significativamente la precisione (incertezza relativa del 3%) e l'accuratezza (scarto del 2%) della misura dello stesso rapporto, seppure questo richieda particolare attenzione nelle procedure di fit.

#### Dichiarazione

I firmatari di questa relazione dichiarano che il contenuto della relazione è originale, con misure effettuate dai membri del gruppo, e che tutti i firmatari hanno contribuito alla elaborazione della relazione stessa.

## Indice dei commenti

---

- 1.1 5
- 1.2 Qual è il criterio quantitativo che avete seguito per trovare V<sub>0</sub>? È quello per cui I=0?
- 4.1 ok
- 6.1 I<sub>0</sub> è inserito per tener conto di eventuali offset nelle scale di tensione dell'AD2.