LABORATORIO DI FISICA 3

De erroribus.
Incertitudo rei vitiat actum

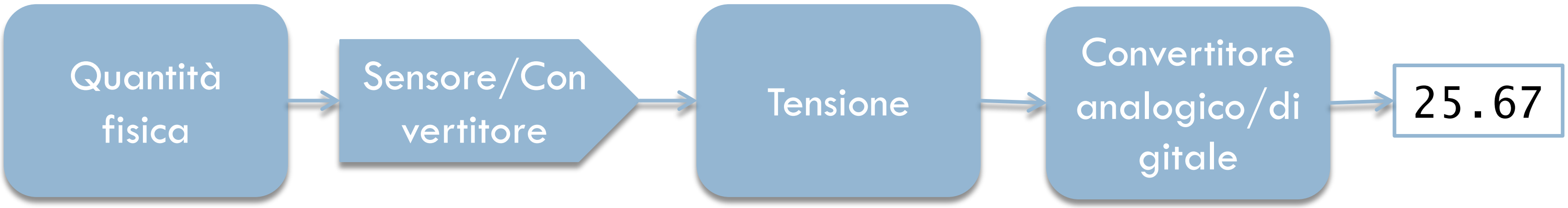
ESERCITAZIONE 00

Proff. Forti, Nicolò, Roda

Qualche commento sugli errori

- La stima degli errori di misura è parte essenziale della misura.
  - E parte essenziale del processo mentale per ridurre gli errori di misura ed effettuare misure più accurate
- Bisogna imparare a valutarli “velocemente”, concentrandosi sulla parte più importante.
- Scopo è riuscire a **valutare l’errore con un errore del 25% o meglio.** Esempio:
  - 9.4 ± 0.2 oppure ± 0.15 oppure ± 0.25 non sono misure sostanzialmente diverse, tutte intorno al 2%.
  - 9.4 ± 0.5 invece è diversa, al 5%.
  - 9.4 ± 1 è molto peggio, al 10%.
  - 9.4 ± 0.2456 non ha senso → attenti al numero di cifre nell’errore
    - PS: non mi dite: “ma excel mi mette tante cifre”…
  - Normalmente l’errore ha 1, massimo 2 cifre significative.
- Sempre necessario un cross-check sul risultato finale
- Misure tipiche hanno errori tra il 5% e il 20%. Se sono molto maggiori o minori è bene riflettere e capire perché.

Sorgenti di errori



- Risoluzione → lettura dello strumento (cifra meno significativa, generalmente dovuta ai bit del convertitore)
  - Tipicamente casuale e scorrelato da tutto
- Rumore, non linearità, ripetibilità, offset, …
  - Dipende dallo strumento, dalla scala, dalla temperatura…
  - Non facile da valutare. Normalmente dato con una percentuale sulla lettura nel manuale dello strumento
- Calibrazione assoluta → errore sul legame al campione di misura
  - Tipicamente sistematico e massimamente correlato
  - Rilevante solo per misure di precisione

Passaggi

1. Valutazione errore di misura della misura diretta con uno strumento
   - Non sempre ovvia: i manuali sono criptici
   - Puo' dipendere dalle condizioni di misura: per esempio, quanto bene so allineare i cursori dell'oscilloscopio in caso di rumore ?
   - Come si combinano le varie sorgenti di errore ?
   - Essere prudenti, ma senza eccedere. Sempre cercare di effettuare una misura precisa "quanto serve"
2. Propagazione dell'errore alla quantità di interesse
   - Di norma si effettua la somma in quadratura, assumendo la non correlazione degli errori.
   - Concettualmente semplice, ma è facile sbagliare, anche con formule semplici.
3. Fit o combinazione delle misure
   - Procedura più sofisticata, dipende dal problema.
   - Richiede un po' di software, lo discuteremo successivamente.

$$a \oplus b \equiv \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\sigma^2 = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_i^2$$

- Un buon sommario su wikipedia:
  http://en.wikipedia.org/wiki/Propagation_of_uncertainty

Esempi

- Misura di tensione:
  - ΔV= 0.5% + 1 cifra (+ errore calibrazione)
  - 1.673 V → 0.5%*1.673 = 0.008 $\oplus$ 0.001 → 0.008 = 0.5%
  - 0.167 V → 0.5%*0.167 = 0.0008$\oplus$ 0.001 → 0.0013 = 0.9%
    - Sarebbe come calcolare: $1.3 = 1 \oplus 0.8$
    - Calcolatrice ? Meno si usa e meglio è. $\sqrt{1+x^2} \approx 1 + \frac{1}{2}x^2 = 1 + \frac{1}{2}0.64 = 1.3$
    - Nel caso precedente

$$0.008 * \left[1 \oplus \frac{1}{8} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{64} = 1 + \frac{1}{128} = 1.007 \approx 1\right]$$

Trascurare

- Se ho varie sorgenti di errore quando posso trascurare la più piccola ?
  - Ricordiamo che non pretendiamo di calcolare l'errore al meglio del 25%.
- Se sommo lineare i due errori

$$a + b = a(1 + \frac{b}{a}) < 1.25a \implies \frac{b}{a} < 0.25$$

- Se sommo quadratico

$$a \oplus b = a\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} < 1.25a \implies \frac{b^2}{a^2} < 2 \cdot 0.25 \implies \frac{b}{a} < 0.7$$

- Se uno dei due errori è minore del 70% dell'altro si può trascurare nella somma quadratica

Potenze e rapporti

- Non vi fate fregare dalle potenze.
  - Cercate di lavorare sempre con numeri tra 0.1 e 100, usando l'unità di misura opportuna.
  - Non 10^{-7} s ma 100 ns, oppure 0.1 μs
- Usate a proposito l'errore relativo e quello assoluto.
  - Nelle somme e sottrazioni si sommano gli errori assoluti
  - Nei prodotti e rapporti si sommano gli errori relativi
  - Se moltiplico per una costante si moltiplica l'errore assoluto, mentre l'errore relativo non cambia.

$$R = \frac{V}{I} \qquad \frac{\sigma_R}{R} = \frac{\sigma_V}{V} \oplus \frac{\sigma_I}{I}$$

$$z = ax + by \implies \sigma_z = a\sigma_x \oplus b\sigma_y$$

$$z = x^n y^m \implies \frac{\sigma_z}{z} = \frac{nx^{n-1}y^m\sigma_x + mx^n y^{m-1}\sigma_y}{x^n y^m} = n\frac{\sigma_x}{x} \oplus m\frac{\sigma_y}{y}$$

$$z = k\log_b x \implies \sigma_z = \frac{k}{\ln b}\frac{\sigma_x}{x}. \qquad \frac{20}{\ln 10} = 8.7\mathrm{dB}$$

AD2 – misure di tensione

per dettagli: https://digilent.com/reference/test-and-measurement/analog-discovery-2/reference-manual. sezione 9.1

- Misurando le tensioni con l'oscilloscopio si hanno vari contributi alla precisione con cui si misura la tensione:
  - Sulla singola acquisizione: risoluzione dell'ADC a 14bit ~ scala/2^{14} dove scale indica l'intervallo di tensioni misurate. L'ADC ha due guadagni (alto e basso guadagno) che automaticamente cambiano a seconda della scala scelta. In particolare se la scelta della scala è tale da coprire un intervallo DV= +/-2.6V si utilizza HighGain, per DV=+/- 29V si utilizza LowGain. In generale si può considerare un'incertezza di:

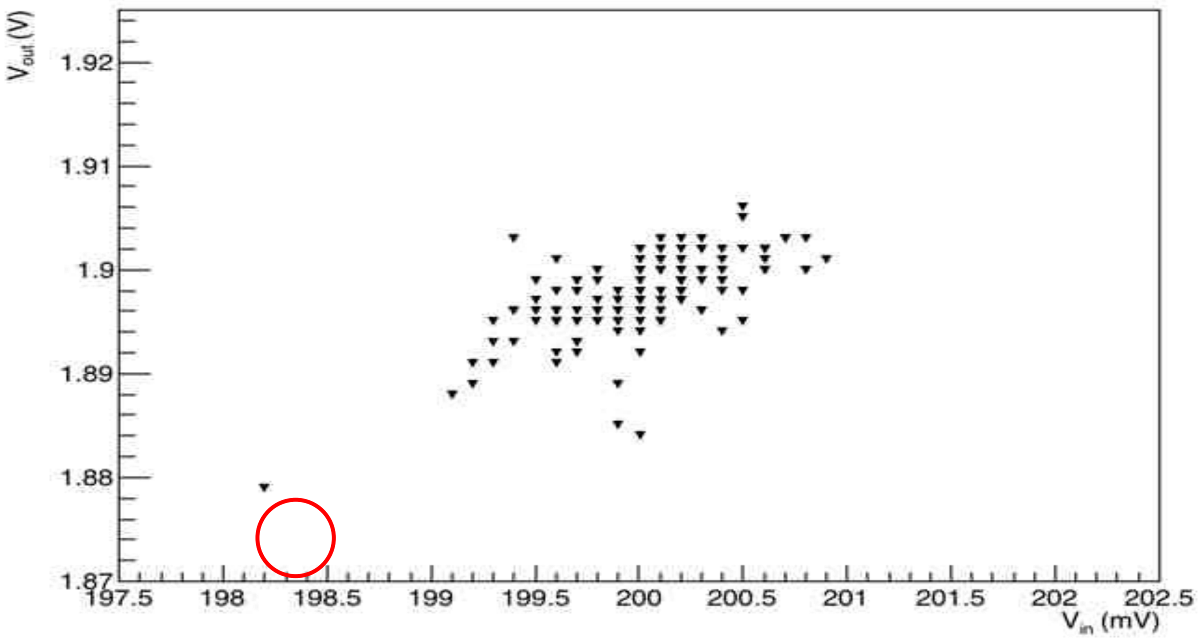
Range/Nadc= 0.5V*10/2^{14}

$$\begin{cases} 0.3\,\mathrm{mV}, \ \text{per fondo} - \text{scala} & \leq 0.5\,\mathrm{V/div} \\ 3\,\mathrm{mV} & \geq 1\,\mathrm{V/div} \end{cases}$$

  - Se si utilizzano i cursori → posizionamento cursori: errore ~ 0.1 div/$\sqrt{12}$ ≈ 0.6% divisione
  - misura analogica di tensione+calibrazione relativa DAC-ADC
    → errore relativo rms = 0.2%, max= 0.5% [vedi prossima slide]

Risultati da test su tutti gli AD2

misura analogica di tensione+calibrazione relativa DAC-ADC
→ errore relativo rms = 0.2%, max= 0.5%



Vin inviato con un generatore di tensione indipendete e riletto con vari AD2 (Vout)

AD2 – misure di tensione

per dettagli: https://digilent.com/reference/test-and-measurement/analog-discovery-2/reference-manual. sezione 9.1

- Misurando le tensioni con l'oscilloscopio si hanno vari contributi alla precisione con cui si misura la tensione:

  - Se la misura è rispetto ad un riferimento assoluto si tiene conto dell'incertezza di calibrazione

$$\begin{cases} 10\,\mathrm{mV}, & \mathrm{se\ fondo-scala} \le 0.5\,\mathrm{V} \\ 100\,\mathrm{mV} & \ge 1\,\mathrm{V} \end{cases}$$

➔ non si applica alle misure effettuate su circuiti i cui segnali di ingresso siano pilotati da Wavegen

$\sqrt{12}$

AD2 – misure di tempo/frequenza

- Ci sono 10 divisioni con 8192 campionamenti
- Time bin = **Δ**t = 1/f, con f = frequenza di sampling (quella visualizzata sull'oscilloscopio), **Δ**t ≥ 10 ns
  - se il riferimento temporale fissato da cursore occorre ``casualmente'' tra

    due campionamenti successivi, la sua posizione è definita con un

    errore max = **Δ**t /2

    ed una

    rms = **Δ**t $/\sqrt{12}$ (distribuzione piatta tra ± **Δ**t/2)
- A questo occorre sommare in quadratura l'incertezza nel

  posizionamento dei cursori

  → non meglio di 0.1 div = 1% della scala orizzontale

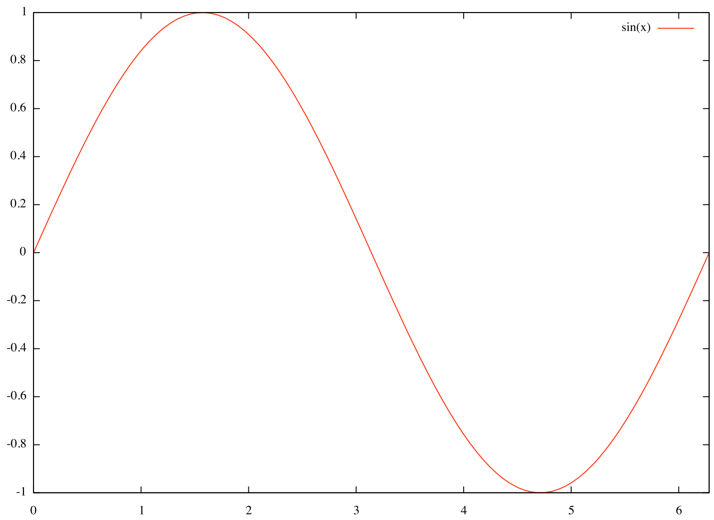
  ➔ dominante a meno che non si vada a fondo-scala ~ 10÷100 ns

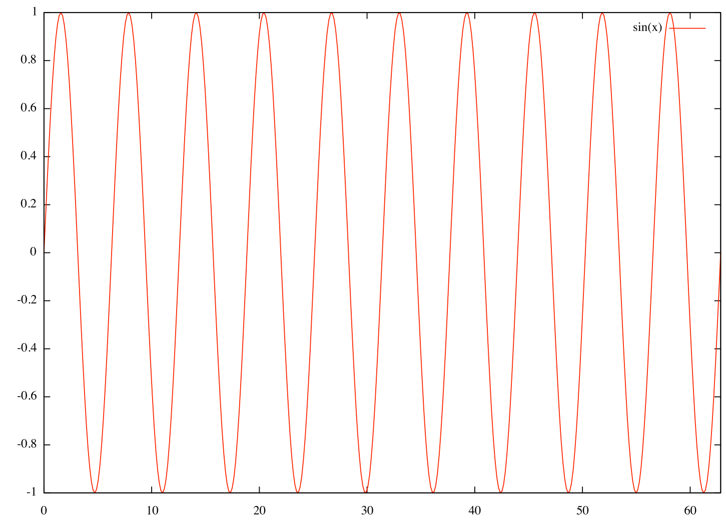
Misura di frequenza

- Misura del singolo periodo (su 10 divisioni).

$$f = \frac{N}{\Delta t}; \frac{\sigma_f}{f} = \frac{\sigma_{\Delta t}}{\Delta t}$$

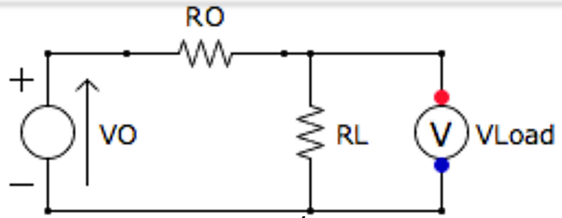
- Misura di N periodi (su 10 divisioni).
  - Serve ad alte frequenze dove c'è un errore che non scala.





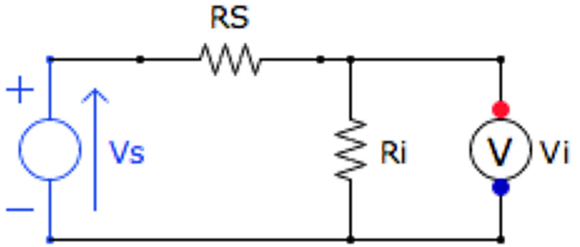
Componenti

- Individuate i componenti mediante il loro codice e, se possibile, verificatene il valore e stimatene l'errore.
- Sviluppate le tecniche per propagare gli errori.
- Attenzione quando ci sono **differenze**
- Esempio: misura resistenza di ingresso uscita di un circuito.



$$V_L = V_O \frac{R_L}{R_L + R_O} \implies \frac{R_O}{R_L} = \frac{V_O}{V_L} - 1$$

- Se ad es. $V_O/V_L = 1.5 \pm 5\%$, sarà $R_O/R_L = 0.5 \pm (1.5*0.05) = 0.5 \pm 0.075 = 0.5 \pm 15\%$ → $R_O = 0.5*R_L \pm 15\%$.



$$V_i = V_s \frac{R_i}{R_i + R_s} \implies \frac{R_s}{R_i} = \frac{V_s}{V_i} - 1$$

- Se invece ad es. $V_s/V_i = 2.0 \pm 5\%$, sarà $R_s/R_i = 1.0 \pm (2.0*0.05) = 1.0 \pm 0.1 = 1.0 \pm 10\%$ → $R_i = R_s/1.0 \pm 10\%$.

“Far tornare”

- Aumentare artificialmente gli errori per “far tornare” una misura non è lecito
- Se una misura “non torna” ci può essere un errore nella misura stessa o nel modello utilizzato.
  - Riflettere e discutere nella relazione le ipotesi in campo.
  - Riflettere se si può effettuare una misura con una tecnica diversa, magari più accurata
  - Meglio avere un risultato che non è compatibile con il modello utilizzato piuttosto che una misura con errori gonfiati per far tornare le cose.

Documentazione

- Per ogni dettaglio cercate nel manuale dell'AD2
- Per la parte di statistica, analisi dati, utilizzate la dispensa di Lab1 a cui siete già abituati (ad esempio discute l'utilizzo di absolute_sigma = true/false)

https://bitbucket.org/lbaldini/statnotes/downloads/