

Es10: Misura del rapporto carica-massa dell'elettrone e/m_e

Gruppo 1.AC
Matteo Rossi, Bernardo Tomelleri
29 marzo 2022

1 Scopo dell'esperienza

Si vuole misurare il rapporto e/m attraverso la misura del raggio di curvatura della traiettoria circolare di un fascio di elettroni immersi in un campo magnetico uniforme (generato da bobine in configurazione di Helmholtz) accelerati da una differenza di potenziale nota.

2 Metodo di misura

Consideriamo il campo magnetico prodotto da due bobine coassiali di raggio medio $r = 15.8$ cm, costituite da $N = 130$ spire collegate in serie e percorse da una stessa corrente di intensità I_{coil} da noi controllabile.

Si può calcolare il campo magnetico nella regione vicino al centro di ciascuna bobina dalla legge di Biot-Savart e, quando queste sono poste ad una distanza $a = r$ pari al loro raggio -cioè in configurazione di Helmholtz- si può ricavare un'espressione per il campo totale come sovrapposizione dei due campi

$$B = \frac{\mu_0 N r^2 I_{\text{coil}}}{\left[r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\mu_0 N}{r} I_{\text{coil}}. \quad (1)$$

Nel piano parallelo alle spire passante per il punto medio dell'asse congiungente i centri delle bobine (ovvero il piano della traiettoria degli elettroni) il campo magnetico è parallelo all'asse z delle spire ed ha valore massimo della componente lungo lo stesso asse:

$$Bz_{\text{MAX}} = 7.40 \times 10^{-4} \left[\frac{T}{A} \right] I_{\text{coil}} \quad (2)$$

Un catodo, riscaldato da un filamento incandescente alimentato con una tensione $V_{\text{heat}} = 6$ V emette elettroni per effetto termoionico. Gli elettroni vengono accelerati da una d.d.p. V_{acc} compresa tra 150 e 250 V e, all'uscita dal cannone elettronico urtano gli atomi del gas raro (He, a pressione di 10^{-1} Pa) presente nell'ampolla, i quali emettono la radiazione che consente di visualizzare il pennello elettronico e misurarne l'orbita.

Una volta liberati dal catodo, nella regione in cui supponiamo assente il campo elettrico V_{acc} , per la conservazione dell'energia vale

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = e V_{\text{acc}} \quad (3)$$

Per cui, assumendo che il campo magnetico sia statico e uniforme lungo z e che il fascio di elettroni abbia velocità ortogonale all'asse delle spire, ci aspettiamo che gli elettroni rimangano in moto circolare uniforme nel piano ortogonale $x - y$.

Dalla condizione di moto circolare di raggio R dovuto alla forza di Lorentz abbiamo che

$$m_e \frac{v^2}{R} = evB \implies v = \frac{e}{m_e} BR$$

Combinando l' eq. (3) con la precedente troviamo

$$v^2 = 2V_{\text{acc}} \frac{e}{m_e} \implies \left(\frac{e}{m_e} BR \right)^2 = 2V_{\text{acc}} \frac{e}{m_e}$$

Da cui otteniamo l'equazione tramite cui vogliamo stimare il rapporto

$$\frac{e}{m_e} = \frac{2V_{\text{acc}}}{(BR)^2}. \quad (4)$$

Dal momento che tutte le variabili nel RHS sono direttamente controllabili configurando le tensioni di alimentazione possiamo misurare il raggio della traiettoria R analizzando (come faremo ad esempio con un fit circolare) le fotografie del moto nel bulbo.

3 Descrizione delle misure

3.1 Orientazione delle bobine rispetto al campo magnetico terrestre

Usando le due bussole in dotazione abbiamo orientato l'apparato in modo che il campo magnetico generato dalle bobine abbia la stessa direzione del campo magnetico terrestre B_T , così da ridurre al minimo componenti del campo magnetico che ne ne possano modificare la direzione rispetto all'asse delle bobine (come evidenziato in fig. 1) dunque la traiettoria degli elettroni, rendendo il moto elicoidale anziché circolare.

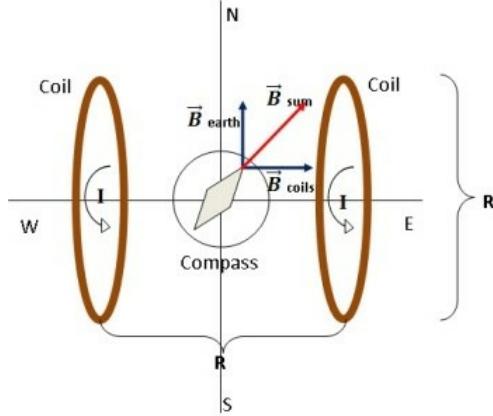


Figura 1: Disegno schematico delle due bobine viste dall'alto con il vettore di induzione magnetica generato dalle due bobine rispetto alla direzione Nord-Sud del campo magnetico terrestre

Introducendo una terza bussola (quella di un telefono dotato di gps) si è riusciti ad avere un risultato consistente, dato che le 2 bussole fornite non erano in accordo tra loro (probabilmente per usura di una di queste) per orientare l'apparato rispetto alla direzione di B_T .

3.2 Mappatura del campo magnetico lungo l'asse delle bobine

Per caratterizzare il campo magnetico lungo il piano del moto degli elettroni (il piano equidistante dalle 2 bobine) ne studiamo l'intensità al variare della distanza dall'asse delle bobine.

Per farlo ci serviamo di una sonda ad effetto hall con fattore di conversione di $\rho = 5.0 \pm 0.1 \text{ mV/G} = 50 \pm 1 \text{ V/T}$.

A partire da una misura iniziale della corrente di alimentazione delle spire

$$I_{\text{coil}} = 2.00 \pm 0.03 \text{ A}$$

tramite l'eq. (2) ci aspettiamo come massima intensità del campo magnetico $B_{MAX} = 1.48 \pm 0.02 \text{ mT}$.

Per cui il solo sensore Hall non è sufficientemente sensibile alle variazioni del campo magnetico (il sensore produrrebbe una d.d.p di circa 70 mV in corrispondenza di B_{MAX}). Si inserisce quindi tra la sonda e il multimetro un amplificatore-sottrattore con un coefficiente di amplificazione pari a $G = 11.1 \pm 0.1$, per cui facciamo riferimento all'equazione

$$B = \frac{\Delta V}{G\rho} \quad (5)$$

per convertire il valore letto dal multimetro (ΔV) in unità di campo magnetico (nel resto della trattazione useremo i Tesla, ricordando che $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$).

Dato che l'incertezza sulla lettura del multimetro risulta (da datasheet) pari a $0.7 \% + 1 \text{ digit}$ rispetto al contributo del $2 \% \oplus 1 \%$ derivante dal circuito sonda + amplificatore, non ne teniamo in considerazione nella stima dell'incertezza associata alle misure di ΔV .

Calibrare il circuito amplificatore-sottrattore aggiustando l'offset non è banale, essendo presente un campo magnetico residuo non si può semplicemente cambiare la resistenza del potenziometro finché il valore letto sul multimetro si annulli (così staremo solamente ponendo l'offset pari al valore in ingresso al sottrattore).

Di conseguenza abbiamo aggiustato l'offset in modo che dal multimetro si leggessero 2 valori di modulo uguale (compatibili entro l'incertezza) ma segno opposto ruotando la sonda di 180° , cioè misurando in verso opposto lo stesso campo d'induzione magnetica.

La sonda viene inserita nella guida rettilinea posta nel punto medio tra le due bobine e passante per il loro centro, orientando quindi il sensore nella direzione perpendicolare all'asse del campo magnetico generato. Ad alimentazione spenta misuriamo una tensione di $\Delta V_0 = 19.0 \pm 0.2 \text{ mV}$, corrispondente ad un campo magnetico

di $B_0 = 34.2 \pm 0.7$ μT , compatibile con l'intensità del campo magnetico terrestre (riportata da Wikipedia) $B_T \in [25, 65]$ μT .

Notiamo che questo contributo non risulta trascurabile rispetto all'incertezza associata a B_{MAX} , per cui ci aspettiamo che il campo magnetico misurato risulti maggiore di circa un 2 %, rendendo la nuova aspettativa di $B_{MAX} = 1.51 \pm 0.02$ mT.

Quindi, una volta alimentate le bobine con la stessa I_{coil} di prima, abbiamo registrato le misure di intensità del campo generato ottenute dal multimetro all'avanzare della sonda lungo la guida a passi regolari di circa un centimetro, che riportiamo in fig. 2.

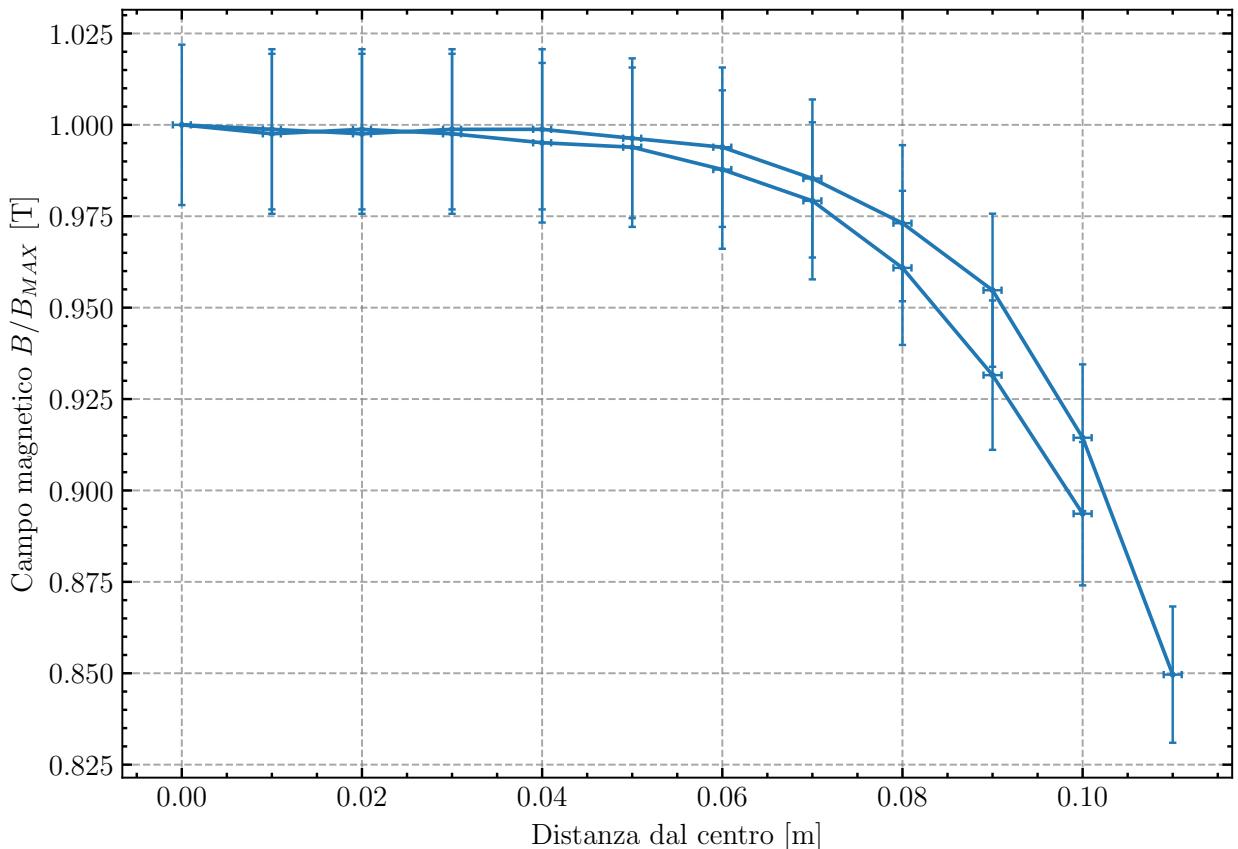


Figura 2: Andamento misurato dell'intensità del campo magnetico a metà tra le spire al variare della distanza dall'asse.

Il campo magnetico generato dalle bobine in realtà non è uniforme, ma presenta una dipendenza sia dalla distanza dall'asse r che dalla distanza dalle bobine lungo l'asse z , completamente trascurata nel nostro modello.

Confrontando il grafico teorico per $B_z(r)$ in fig. 3 normalizzato rispetto al valore massimo troviamo che la nostra mappatura del campo risulta quantomeno qualitativamente compatibile con il suo andamento atteso.

Notiamo esplicitamente come l'intensità del campo magnetico risulta essere costante (entro la sensibilità sperimentale) all'interno della zona che sarà poi occupata dal bulbo (che consideriamo come una sfera di raggio $R_{bulb} \approx 7$ cm con centro posto all'intersezione tra l'asse delle spire e il piano equidistante tra le medesime).

Osserviamo infine che la massima intensità del campo magnetico misurata, trovata in corrispondenza del centro delle spire, è pari a $B_{MAX} = 1.47 \pm 0.03$ mT, risultato compatibile con le aspettative entro l'incertezza.

3.3 Calibrazione dell'apparato per l'acquisizione delle traiettorie

Si è posizionata la fotocamera in modo tale che l'asse centrale dell'obiettivo coincidesse con il centro della sfera di vetro, così da minimizzare gli effetti di distorsione introdotti dalla rifrazione del bulbo (ci aspettiamo che un fascio di luce proveniente dal centro della sfera non subisca alcuna deviazione in uscita) sulla misura del raggio effettivo delle orbite.

Abbiamo prima scattato una foto (riportata in fig. 4) senza bulbo in cui si vedono i due righelli (risoluzione 1 mm) posizionati davanti ad una bobina ciascuno, per valutare gli effetti della geometria proiettiva, quindi ottenere un fattore di conversione pixel-cm.

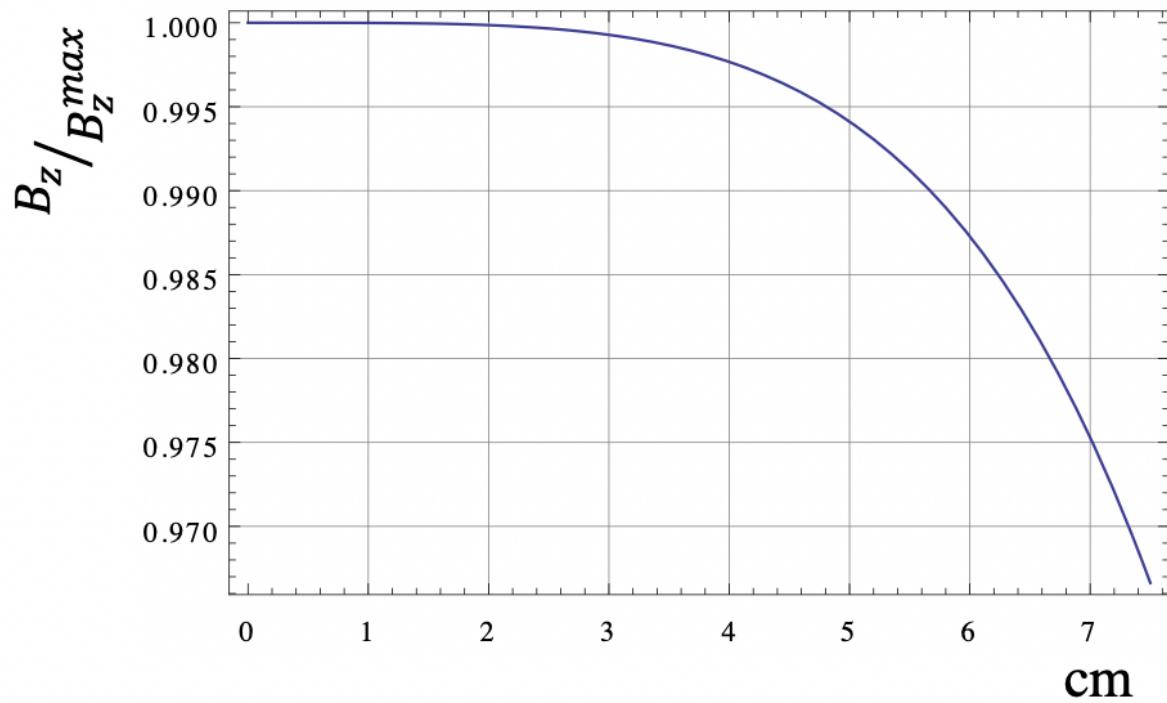


Figura 3: Andamento previsto per l'intensità del campo magnetico nel piano centrale tra le spire in funzione della distanza dal centro

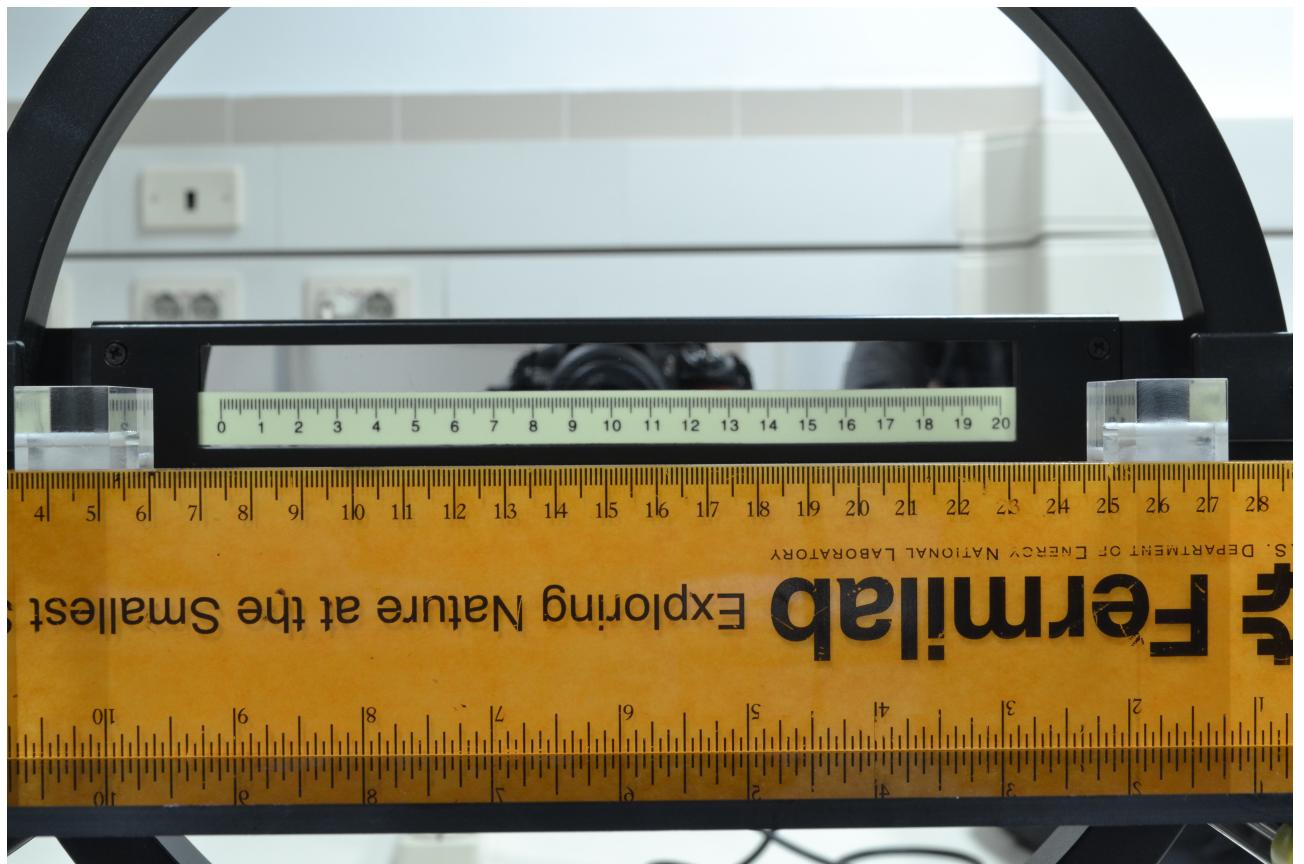


Figura 4: Foto di calibrazione in assenza di bulbo da cui si ricava il fattore di conversione per i dati da pixel a cm

Dunque se ne scatta una seconda, stavolta con il bulbo inserito, per dare una stima dell'ordine di grandezza atteso per gli effetti di distorsione del bulbo.

Una volta alimentato il dispositivo di emissione di elettroni con una tensione di 6 V e atteso il tempo necessario affinché il filamento si scaldasse fino a raggiungere la temperatura ottimale per cui il pennello elettronico diventa chiaramente visibile si è iniziata la presa dati.

Si sono scattate cioè diverse fotografie al variare della tensione di accelerazione V_{acc} e intensità di corrente I_{coil} , sempre facendo in modo che la traiettoria risultasse circolare e che il fascio di elettroni non venisse deviato dal vetro. Come ci si aspettava, aumentando V_{acc} aumenta il raggio di curvatura, mentre aumentando I_{coil} (quindi l'intensità del campo magnetico) il raggio dell'orbita si restringe.

Come impostazioni per la fotocamera abbiamo utilizzato un ISO di 400 e un tempo di esposizione di 10 secondi, per distinguere al meglio i limiti interni ed esterni del pennello elettronico, mantenendo la macchina fotografica nella stessa posizione rispetto all'apparato, in modo da poter applicare lo stesso fattore di scala pixel-cm per tutte le misure così effettuate.

3.4 Conversione pixel-unità di lunghezza

Se individuiamo un cono visivo per la fotocamera, diciamo che questo individua sul righello della bobina più vicina la distanza x e su quello più lontano una distanza y (in blu), possiamo stimare il rapporto x/y confrontando le scale graduate dei righelli fotografati in 4. Chiamiamo allora D_x , D_y , D_{xy} le distanze dalla fotocamera ai/tra i vari piani e D_{xe} la distanza tra il primo righello x e il piano del moto degli elettroni come nello schema in 5

Allora per similitudine deve valere che

$$\frac{y}{x} = \frac{D_y}{D_x} = 1 + \frac{D_{xy}}{D_x}.$$

Da cui troviamo una relazione tra il raggio misurato dal righello sul retro (y) e il raggio reale della traiettoria:

$$R = R_y \frac{D_x + D_{xe}}{D_x + D_{xy}} = R_y \left[\frac{D_{xe}}{D_{xy}} + \frac{x}{y} \left(1 - \frac{D_{xe}}{D_{xy}} \right) \right] = \gamma R_y.$$

Detto η il fattore di conversione tra pixel e i centimetri del righello y , abbiamo

$$R [\text{cm}] = \frac{\gamma}{\eta} R_y [\text{px}].$$

Dalle misure riportate nella scheda dell'esperienza si ottiene, associando un'incertezza di 1 mm a tutte le lunghezze appena definite

$$\gamma = (906 \pm 5) \times 10^{-3}$$

$$\eta = 141 \pm 6$$

3.5 Misura del raggio della traiettoria

Sulle foto acquisite come sopra si è effettuato un campionamento dei punti sull'arco interno e sull'arco esterno delle traiettorie (dato che il pennello elettronico ha uno spessore non trascurabile). Le coordinate dei pixel così ricavate sono state interpolate con un fit circolare per ottenere una stima dei raggi di curvatura.

Si è effettuato sulle stesse prese dati un fit ellittico; in tutte le fotografie i due semiassi risultano compatibili tra loro, quindi prendiamo come miglior stima del raggio quello ricavato dal fit circolare

Durante il campionamento dei punti abbiamo osservato come la metà destra della traiettoria "circolare" sia leggermente deviata verso il cannone di elettroni, per cui si è scelto di considerare nel fit solamente i punti lungo la prima metà della traiettoria (quindi solo il semicerchio sinistro compiuto dagli elettroni appena emessi, come visibile in fig. 6 e nella fotografia originale fig. 7).

Scegliamo di prendere come stima ottimale del raggio delle orbite la media del raggio del cerchio interno e di quello esterno, a cui si associa un'incertezza pari alla semi-dispersione tra i due valori estremi.

Le misure dei raggi sono state finalmente convertite in unità fisiche secondo quanto illustrato nella sezione 3.4, ne riportiamo in tabella 1 i valori trovati al variare della tensione di accelerazione.

4 Analisi dati e stima del rapporto e/m

Prendendo come valori esatti $e = 1.602176634 \times 10^{-19}$ C e $m_e = 9.10938370 \times 10^{-31}$ kg il valore atteso per il loro rapporto è

$$\left(\frac{e}{m_e} \right)_{\text{exp}} = 1.76 \times 10^{11} \text{ C/kg} \quad (6)$$

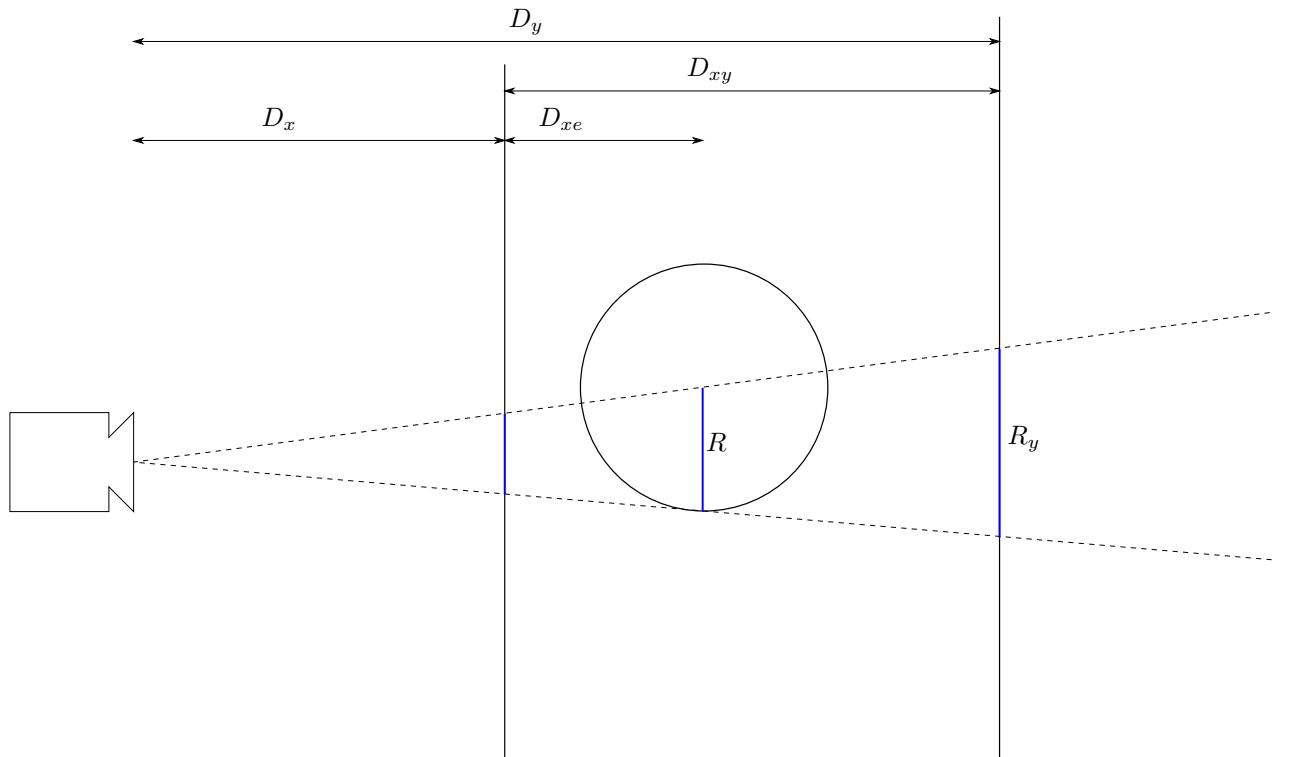


Figura 5: Schema geometrico dell'apparato di misura usato per la conversione $px \rightarrow \text{cm}$ e per la correzione degli effetti di geometria proiettiva.

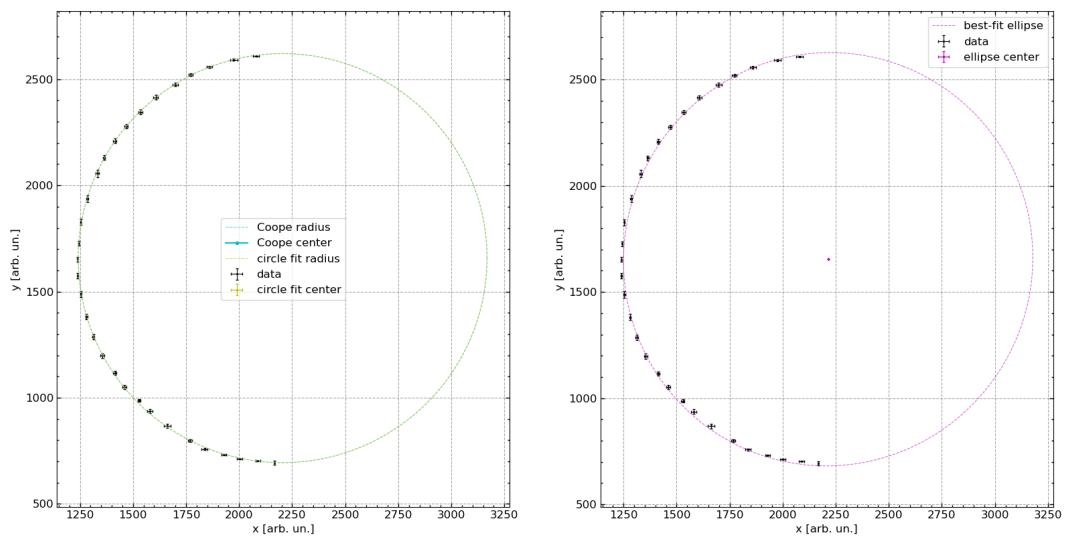


Figura 6: Grafico del fit circolare (ed ellittico) dei punti acquisiti, in questo caso rappresentanti l'orbita interna degli elettronni per la fotografia con $V_{\text{acc}} = 290 \text{ V}$ e $I_{\text{coil}} = 1.40 \pm 0.02 \text{ A}$.

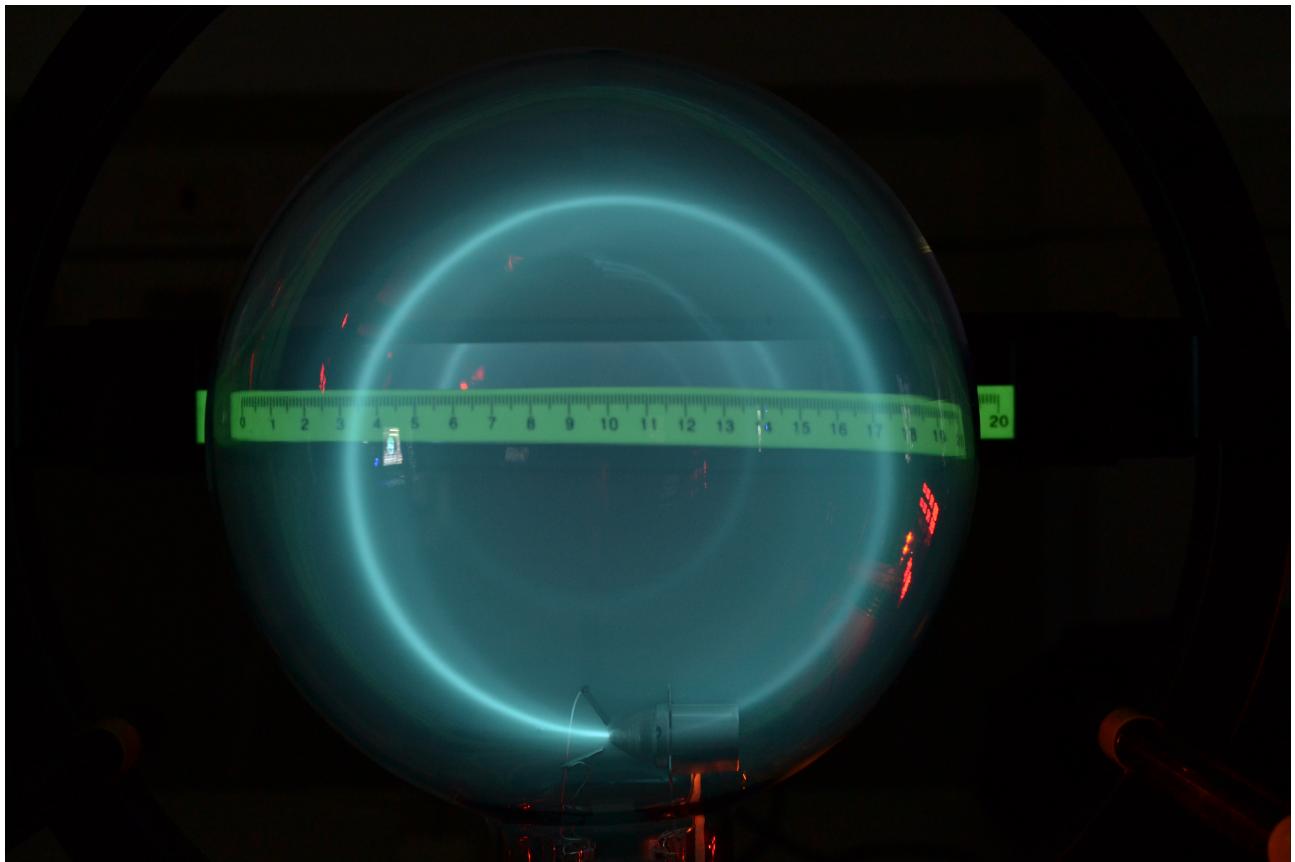


Figura 7: Fotografia dell'apparato sperimentale con $V_{acc} = 290$ V e $I_{coil} = 1.40 \pm 0.02$ A.

ΔV_{acc} [V]	Raggio [cm]	I_{coil} [A]
150 ± 1	4.2 ± 0.3	1.40 ± 0.02
170 ± 1	4.5 ± 0.3	
190 ± 1	4.8 ± 0.3	
210 ± 1	5.0 ± 0.3	
230 ± 1	5.2 ± 0.3	
250 ± 1	5.5 ± 0.3	
270 ± 1	5.7 ± 0.3	
290 ± 1	5.9 ± 0.3	

Tabella 1: Misure dei raggi estrapolati dalle traiettorie in funzione delle tensioni di accelerazione mantenendo I_{coil} fissa.

m_e/e [kg/C]	q [$T^2 m^2$]	χ^2/ndof	norm. cov.
$(152 \pm 3) \times 10^9$	$(-6 \pm 5) \times 10^{-11}$	0.1/6	-0.98

Tabella 2: Risultati del fit lineare per la misura del rapporto e/m_e

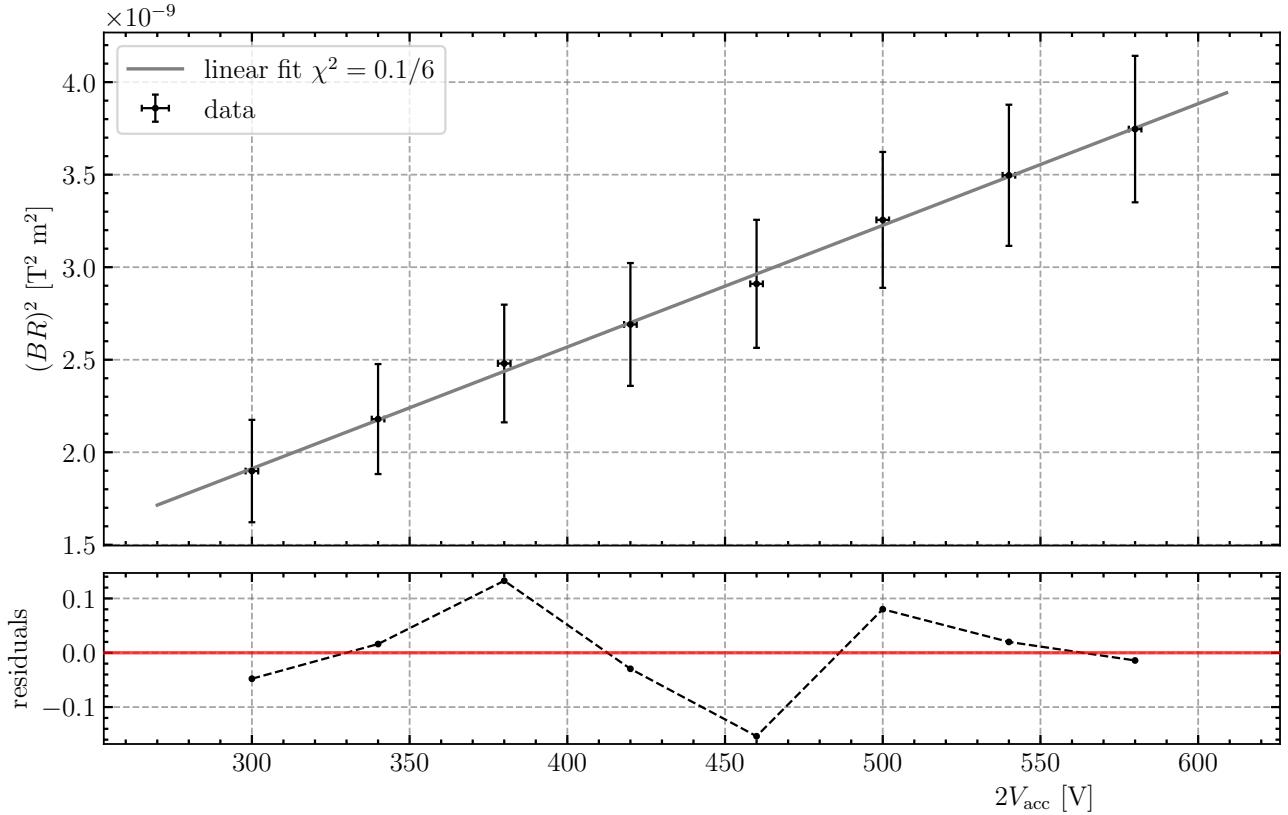


Figura 8: Grafico e residui del fit lineare in cui come modello è stata scelta quella una retta di coefficiente angolare $\frac{m}{e}$.

Una prima stima del rapporto e/m_e si è ottenuta come media pesata delle singole misure ottenute dalla eq. (4) e eq. (2), che risulta pari a

$$\frac{e}{m_e} = 1.55 \pm 0.07 \times 10^{11} \text{ C/kg}$$

Si inoltre effettuato un fit lineare usando come modello la funzione

$$(BR)^2 = \frac{m_e}{e} 2V_{\text{acc}} + q$$

di modo che le incertezze sulle ascisse ($2V_{\text{acc}}$) opportunamente propagate fossero trascurabili rispetto a quelle sulle ordinate ($(BR)^2$) i cui risultati sono riassunti in tabella 2 e fig. 8.

Dal reciproco del coefficiente della retta di best-fit si trova un valore del rapporto

$$\frac{e}{m_e} = 1.52 \pm 0.03 \times 10^{11} \text{ C/kg}$$

Né dal grafico dei residui del fit lineare in fig. 8, né dal grafico dell'andamento della media pesata al variare di V_{acc} (in fig. 9) si riesce ad apprezzare una dipendenza della stima del rapporto e/m_e dal raggio della traiettoria degli elettroni.

Le misure del rapporto $\frac{e}{m_e}$ ottenute dalle due procedure risultano compatibili tra di loro, ma distanti dal valore atteso con uno scarto del 14 % circa.

5 Valutazione degli effetti sistematici

5.1 Spessore del pennello elettronico

Un fattore che gioca un ruolo importante nella stima del raggio è lo spessore del pennello elettronico: quest'ultimo infatti ha uno spessore di circa 20 pixel già a partire dal cannone elettronico (prendendo lo spessore

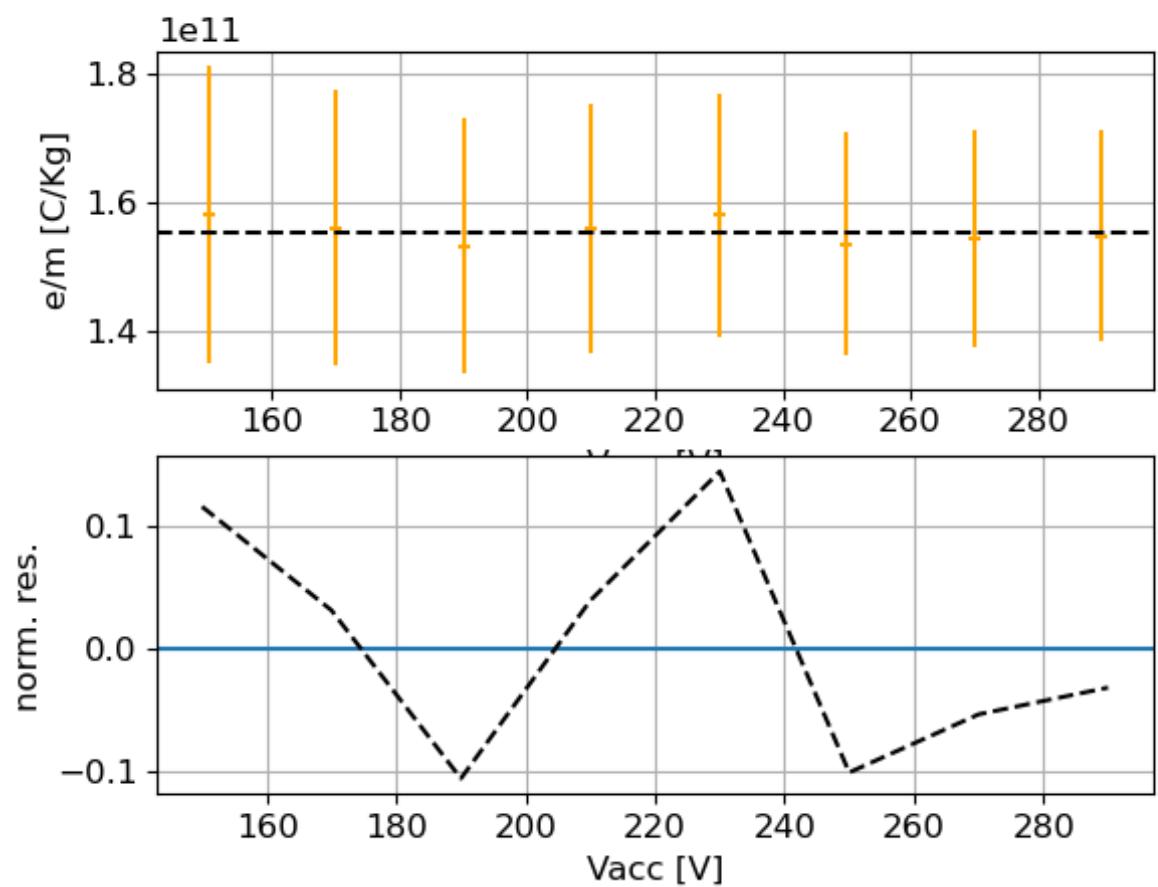


Figura 9: Grafico e residui della media pesata sulle singole misure di e/m_e

in un punto successivo della traiettoria è ancora più grande) che corrisponde a 1.4 mm. Per poter prendere le misure al meglio abbiamo diminuito l'ISO della fotocamera e aumentato il tempo di esposizione in modo che il raggio interno ed esterno del pennello (in pratica i punti che delimitano la parte più luminosa) fossero facilmente riconoscibili in qualunque punto della traiettoria. Dopodiché abbiamo fatto una media tra i raggi delle circonferenze che si trovavano singolarmente ed abbiamo utilizzato quel valore come raggio effettivo della traiettoria, e come incertezza abbiamo calcolato la loro semi-disersione attorno alla media.

5.2 Distorsione del bulbo di vetro

Dato che abbiamo posizionato la fotocamera allineata col centro del bulbo, ci si aspettava che il fit lineare evidenziasse una dipendenza del rapporto e/m in funzione del raggio dell'orbita: questo perché aumentando il raggio aumentava il numero di punti presenti nella zona di distorsione massima (quelli più lontani dal centro dell'ampolla; la zona di minima distorsione è invece quella più vicina al centro), andando così a compromettere il valore del raggio ricavato. Dal grafico dei residui del fit lineare invece notiamo che i residui dei singoli punti sono distribuiti casualmente attorno al modello, per cui anche se la distorsione è presente, non influenza i dati a tal punto da produrre deviazioni sistematiche apprezzabili.

5.3 Campo magnetico terrestre

Assumendo che gli unici contributi al campo magnetico totale derivino dalle bobine e dal campo magnetico terrestre, abbiamo orientato le bobine in modo che la direzione del campo magnetico generato e quello terrestre coincidessero. Abbiamo fatto particolare attenzione anche al verso della corrente, in modo che sia direzione che verso dei due campi coincidessero; il modulo del campo magnetico totale è quindi dato dalla somma delle 2 intensità. Avendo misurato il valore dell'intensità del campo magnetico terrestre abbiamo notato che non risulta essere trascurabile rispetto al valore dell'intensità di quello generato essendo maggiore della sua incertezza; di conseguenza durante l'analisi dati abbiamo considerato come campo magnetico totale:

$$B_{\text{tot}} = B_z + B_T$$

5.4 Disuniformità del campo magnetico sulla traiettoria

A partire da quanto in 3.2 e dalla dimensione del bulbo di vetro possiamo affermare che finché la traiettoria rientra all'interno dell'area compresa entro i 7 cm dal centro del bulbo, la disuniformità del campo magnetico è tale da poter essere trascurata, essendo una variazione compresa all'interno dell'incertezza del valore d'intensità massima. Dai datasheet reperibili online si trova che il diametro del bulbo è pari a 15.5 cm, e considerando le dimensioni e la posizione del cannone elettronico, possiamo affermare che tutte le traiettorie da noi analizzate sono comprese entro l'area con variazione di intensità del campo magnetico non apprezzabile e compresa nel valore dell'incertezza.

Conclusioni e commenti finali

Si è riusciti a dare una misura ragionevole del rapporto carica/massa dell'elettrone a partire da un'analisi delle fotografie della sua traiettoria in presenza di un campo magnetico uniforme, nonostante le diverse fonti di incertezza sistematica che caratterizzano il metodo sperimentale utilizzato.

Dichiarazione

I firmatari di questa relazione dichiarano che il contenuto della relazione è originale, con misure effettuate dai membri del gruppo, e che tutti i firmatari hanno contribuito alla elaborazione della relazione stessa.

Riferimenti bibliografici

- [1] I. D. Coope, Circle fitting by linear and nonlinear least squares, Department of Mathematics, University of Canterbury, Christchurch, New Zealand, N.60, May, 1992, https://ir.canterbury.ac.nz/bitstream/handle/10092/11104/coope_report_no69_1992.pdf?sequence=1&isAllowed=y