

Es10: Misura del rapporto carica-massa dell'elettrone e/m_e

Gruppo 1.AC
Matteo Rossi, Bernardo Tomelleri
28 marzo 2022

1 Scopo dell'esperienza

Si vuole misurare il rapporto e/m attraverso la misura del raggio di curvatura della traiettoria circolare di un fascio di elettroni immersi in un campo magnetico uniforme (generato da bobine in configurazione di Helmholtz) accelerati da una differenza di potenziale nota.

2 Metodo di misura

Consideriamo il campo magnetico prodotto da due bobine coassiali di raggio medio $r = 15.8$ cm, costituite da $N = 130$ spire collegate in serie e percorse da una stessa corrente di intensità I_{coil} da noi controllabile.

Si può calcolare il campo magnetico nella regione vicino al centro di ciascuna bobina dalla legge di Biot-Savart e, quando queste sono poste ad una distanza $a = r$ pari al loro raggio -cioè in configurazione di Helmholtz- si può ricavare un'espressione per il campo totale come sovrapposizione dei due campi

$$B = \frac{\mu_0 N r^2 I_{\text{coil}}}{\left[r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\mu_0 N}{r} I_{\text{coil}}. \quad (1)$$

Nel piano parallelo alle spire passante per il punto medio dell'asse congiungente i centri delle bobine (ovvero il piano della traiettoria degli elettroni) il campo magnetico è parallelo all'asse z delle spire ed ha valore massimo della componente lungo lo stesso asse:

$$Bz_{\text{MAX}} = 7.4010^{-4} \left[\frac{T}{A} \right] I_{\text{coil}} \quad (2)$$

Un catodo, riscaldato da un filamento incandescente alimentato con una tensione $V_{\text{heat}} = 6$ V emette elettroni per effetto termoionico. Gli elettroni vengono accelerati da una d.d.p. V_{acc} compresa tra 150 e 250 V e, all'uscita dal cannone elettronico urtano gli atomi del gas raro (He, a pressione di 10^{-1} Pa) presente nell'ampolla, i quali emettono la radiazione che consente di visualizzare il pennello elettronico e misurarne l'orbita.

Una volta liberati dal catodo, nella regione in cui supponiamo assente il campo elettrico V_{acc} , per la conservazione dell'energia vale

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = e V_{\text{acc}} \quad (3)$$

Per cui, assumendo che il campo magnetico sia statico e uniforme lungo z e che il fascio di elettroni abbia velocità ortogonale all'asse delle spire, ci aspettiamo che gli elettroni rimangano in moto circolare uniforme nel piano ortogonale $x - y$.

Dalla condizione di moto circolare di raggio R dovuto alla forza di Lorentz abbiamo che

$$m_e \frac{v^2}{R} = evB \implies v = \frac{e}{m_e} BR$$

Combinando l' eq. (3) con la precedente troviamo

$$v^2 = 2V_{\text{acc}} \frac{e}{m_e} \implies \left(\frac{e}{m_e} BR \right)^2 = 2V_{\text{acc}} \frac{e}{m_e}$$

Da cui otteniamo l'equazione tramite cui vogliamo stimare il rapporto

$$\frac{e}{m_e} = \frac{2\Delta V}{(BR)^2}. \quad (4)$$

Dal momento che tutte le variabili nel RHS sono direttamente controllabili configurando le tensioni di alimentazione possiamo misurare il raggio della traiettoria R analizzando (come faremo ad esempio con un fit circolare) le fotografie del moto nel bulbo.

3 Descrizione delle misure

3.1 Orientazione delle bobine rispetto al campo magnetico terrestre

Usando le due bussole in dotazione abbiamo per prima cosa orientato l'apparato in modo che il campo magnetico generato dalle bobine avesse la stessa direzione del campo magnetico terrestre: in questo modo non avremo componenti del campo magnetico che modificherebbero la traiettoria rendendo il moto elicoidale anziché circolare. Si è utilizzata anche la bussola di un telefono dotato di gps, dato che le 2 bussole non erano in accordo tra di loro, probabilmente per usura di una di queste; introducendo una terza bussola (quella del telefono) abbiamo eliminato la bussola malfunzionante e abbiamo orientato l'apparato usando le rimanenti.

3.2 Mappatura del campo magnetico lungo l'asse delle bobine

A questo punto si vuole misurare la variazione d'intensità del campo magnetico lungo il piano in cui avverrà il moto degli elettroni (il piano equidistante dalle 2 bobine) per verificare che non ci saranno effetti indesiderati che renderebbero l'analisi del moto più complicata dovuti alla non uniformità del campo magnetico nella regione di spazio che sarà poi occupata dal bulbo: questa zona può essere definita come una sfera di raggio di 7cm con centro corrispondente all'intersezione tra l'asse delle spire e il piano equidistante tra le medesime. Per farlo ci serviamo di una sonda ad effetto hall con fattore di conversione di $\rho = 5.0 \pm 0.1 \frac{\text{mV}}{\text{G}} = 50 \pm 1 \frac{\text{V}}{\text{T}}$. A questo punto abbiamo alimentato le bobine, facendo attenzione a non sovraccaricarle utilizzando una corrente maggiore di quella consigliata dal costruttore (2 A di corrente); abbiamo quindi misurato il valore della corrente di alimentazione:

$$I_{coil} = 2.00 \pm 0.03\text{A}$$

Facendo un veloce calcolo con l'equazione eq. (2) e con il valore misurato di I_{coil} ci si aspetta che l'intensità del campo magnetico massimo misurato dovrà essere $B_{MAX} = 1.48 \pm 0.02\text{mT}$; se ne deduce che quindi il sensore Hall da solo non è sufficiente per misurare approfonditamente le variazioni del campo magnetico (il sensore produrrebbe una d.d.p di circa 70 mV al massimo). Si è quindi inserito tra la sonda e il multmetro un amplificatore-sottrattore (da calibrare in modo da annullare l'offset) con un coefficiente di amplificazione pari a $G = 11.1 \pm 0.1$, da cui utilizzeremo l'equazione

$$B = \frac{\Delta V}{G\rho} \quad (5)$$

per convertire il valore letto dal multmetro (ΔV) in unità di campo magnetico (per comodità utilizzeremo Tesla, ricordando che $1\text{Gauss} = 10^{-4}\text{Tesla}$). Dato che l'errore sul valore letto dal multmetro è circa 0.7 % + 1 digit contro 2 % + 1 % derivante dal circuito sonda + Amplificatore, lo abbiamo trascurato, prendendo in considerazione solo quelli del circuito di amplificazione.

Il primo passo è stato quello di calibrare il circuito amplificatore-sottrattore, aggiustando l'offset in modo che diventasse nullo: essendo presente un campo magnetico residuo non si può semplicemente ruotare la manopola finché il valore letto sul multmetro non si annulla, in quanto significherebbe proprio che l'offset in quel caso vale l'opposto del valore in ingresso nel sottrattore. Di conseguenza abbiamo aggiustato l'offset in modo che dal multmetro si leggessero 2 valori di modulo uguale ma di segno opposto nel caso in cui si girasse la sonda di 180° , che è proprio ciò che ci si aspetta dato che la sonda misura solamente la componente ortogonale del campo magnetico al suo lato piatto. Si è inserita la sonda nella guida rettilinea presente nell'apparato, la quale si trova nel punto medio tra le due bobine ed è posizionata in modo che passi dal loro centro tagliandole lungo il diametro, orientando la perpendicolare del sensore lungo la direzione del campo magnetico che sarà poi generato dalle bobine: si legge dal multmetro una tensione di circa 19 mV, che convertendoli ci danno come risultato un campo magnetico di circa $34.2 \pm 0.7 \mu\text{T}$, compatibile con l'intensità del campo magnetico terrestre. Ci si accorge che questo contributo, che non è quindi trascurabile non essendo compreso nell'incertezza di B_{MAX} , andrà ad aumentare il campo magnetico misurato di circa il 2 %, rendendo la nuova aspettativa di 1.51 ± 0.02 .

Successivamente è stato acceso il generatore che alimenta le bobine e si è inserita la sonda nell'apposita guida. Abbiamo quindi misurato il valore in uscita dal multmetro all'avanzare della sonda, con un passo di 1 centimetro. Considerando che il campo magnetico massimo misurato, trovato in corrispondenza del centro delle spire, è pari a $1.47 \pm 0.03 \text{ mT}$ possiamo affermare che il valore è compatibile con le aspettative entro le 2 barre di errore.

La mappatura delle intensità del campo magnetico risulta quindi qualitativamente compatibile con quanto aspettato, inoltre l'intensità del campo magnetico risulta essere costante all'interno della zona che sarà poi occupata dall'ampolla.

3.3 Calibrazione dell'apparato per l'acquisizione delle traiettorie

A questo punto si è potuto procedere con l'acquisizione delle misure del raggio. Per farlo abbiamo fatto uso di una fotocamera la quale è stata posizionata in modo tale che l'asse centrale dell'obiettivo della fotocamera

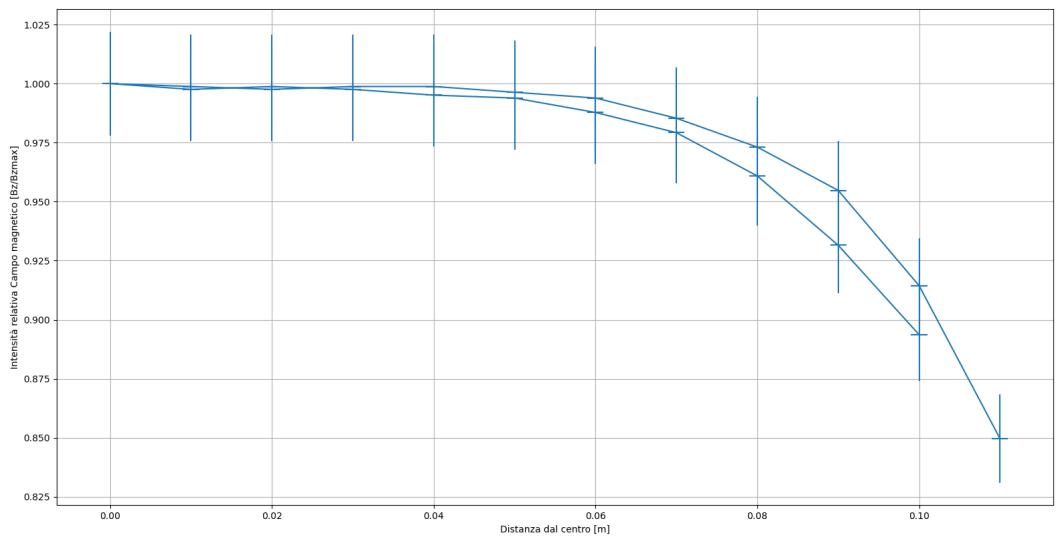


Figura 1: Andamento misurato per l'intensità del campo magnetico nel piano centrale tra le spire in funzione della distanza dal centro

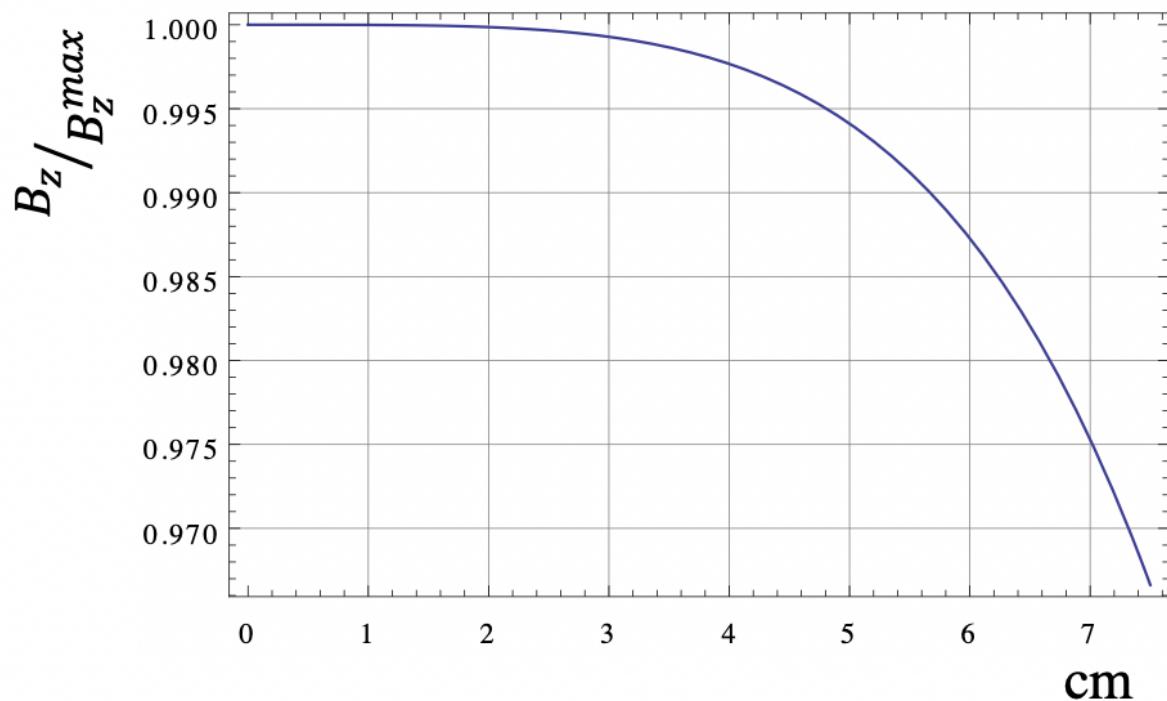


Figura 2: Andamento previsto per l'intensità del campo magnetico nel piano centrale tra le spire in funzione della distanza dal centro

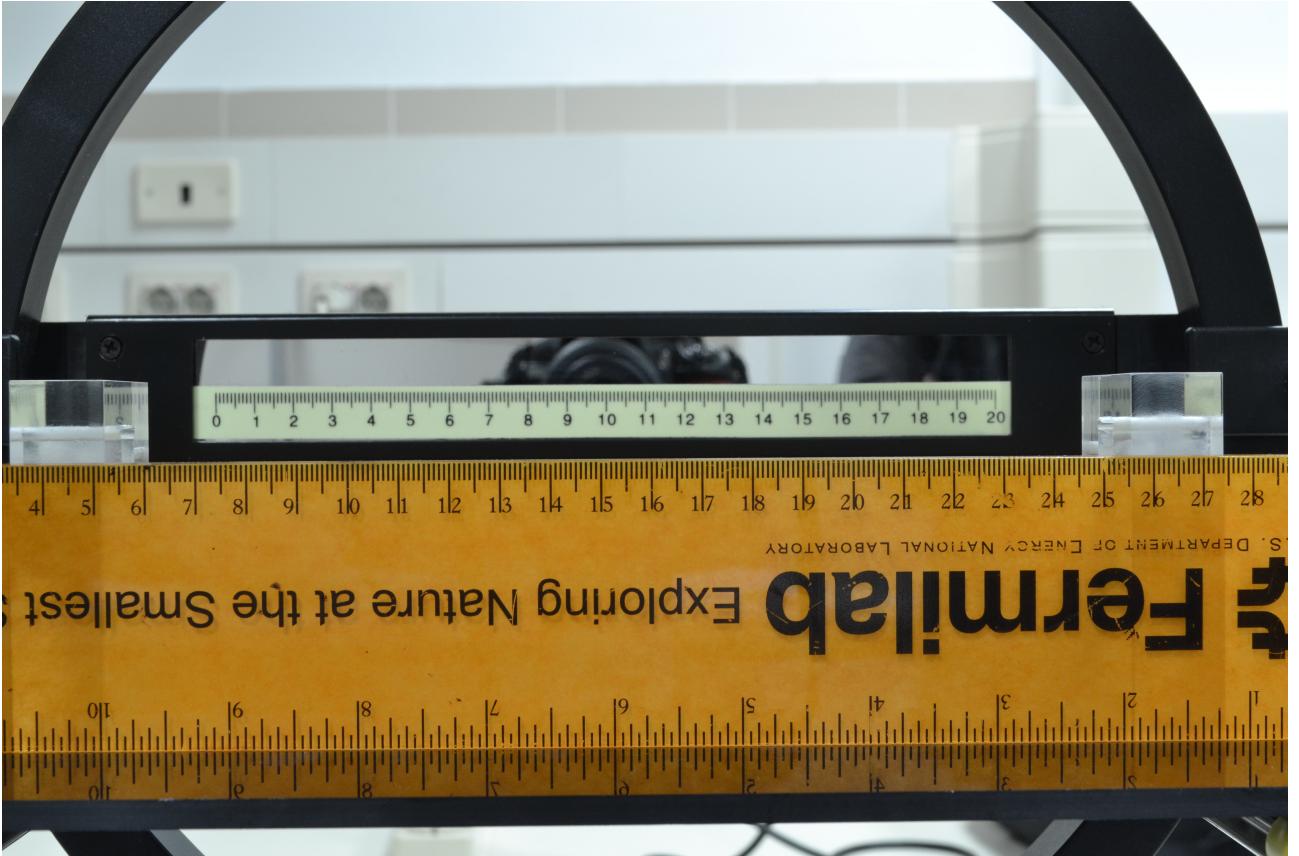


Figura 3: Foto di calibrazione in assenza di bulbo, da questa ricaveremo una scala per convertire successivamente i dati da pixel a cm

coincidesse con il centro del bulbo di vetro: in questo modo le distorsioni dovute al bulbo saranno minimizzate, di conseguenza sarà più facile stimare il raggio effettivo delle orbite. Come impostazioni per la fotocamera abbiamo utilizzato un ISO di 400 e un'esposizione di 10 secondi, in modo da vedere al meglio i limiti interni ed esterni del pennello elettronico e stimare con maggiore precisione il raggio della traiettoria.

Per cominciare abbiamo scattato una foto senza bulbo in cui si vedono 2 righelli (risoluzione 1 mm) posizionati uno per bobina, questo per valutare gli effetti della geometria proiettiva (e ottenere una scala di conversione pixel-cm) e per poter valutare gli effetti di distorsione del bulbo. Abbiamo quindi alimentato il dispositivo di emissione di elettroni con una tensione di 6 Volt (dal datasheet si legge che la massima consentita risulta essere 6.5V) in modo che l'emissione di elettroni fosse massima e quindi l'orbita ben visibile e si è aspettato che il filamento si scaldasse fino a raggiungere una temperatura ottimale; non appena il pennello elettronico è diventato chiaramente visibile si è iniziato a variare la tensione di accelerazione in modo che la traiettoria fosse circolare e che il fascio di elettroni non andasse a urtare contro il vetro. Si sono scattate quindi diverse fotografie a diverse tensioni di accelerazioni e correnti I_{coil} mantenendo la macchina fotografica nella stessa posizione; come ci si aspettava aumentando la tensione di accelerazione aumenta il raggio di curvatura, diminuendo I_{coil} aumentava il raggio.

3.4 Conversione pixel-centimetro

Con riferimento alla Figura 4, fissiamo un “cono visivo”. Questo sottende sul righello più vicino alla fotocamera la distanza x , su quello più lontano la distanza y . Il rapporto x/y può essere determinato confrontando le scale graduate dei due righelli (quello del Fermilab e quello dell'apparato sperimentale) nella relativa figura fornita. Chiamiamo D_x , D_y , D_{xy} le distanze dalla fotocamera ai/tra i vari piani. D_{xe} è invece la distanza tra il righello x e il piano del moto degli elettroni. Per similitudine

$$\frac{y}{x} = \frac{D_y}{D_x} = 1 + \frac{D_{xy}}{D_x}.$$

Quindi la relazione tra il raggio misurato dal righello y e il raggio reale è

$$R = R_y \frac{D_x + D_{xe}}{D_x + D_{xy}} = R_y \left[\frac{D_{xe}}{D_{xy}} + \frac{x}{y} \left(1 - \frac{D_{xe}}{D_{xy}} \right) \right] = \gamma R_y.$$

Sia κ il fattore di conversione tra pixel e i centimetri del righello y . Allora abbiamo

$$R[\text{cm}] = \frac{\gamma}{\kappa} R_y[\text{px}].$$

Dalle misure riportate nella scheda dell'esperienza si ottiene, attribuendo un'incertezza di 1 mm a tutte le lunghezze in gioco

$$\gamma = 906(5) \times 10^{-3} \quad \kappa = 141(6).$$

Figura 4: schema della geometria usata per la conversione pixel → cm e per la correzione dell'effetto prospettico.

3.5 Misura del raggio della traiettoria

Utilizzando le foto sopra menzionate si è effettuato un campionamento dei punti sull'arco interno e sull'arco esterno delle traiettorie (dato che il pennello elettronico ha uno spessore non trascurabile). Le coordinate dei pixel così ricavate sono state interpolate con un *fit* circolare per ottenere una stima del raggio interno ed esterno. Si è poi assunto come valore del raggio dell'orbita la media del raggio del cerchio interno e di quello esterno, e si è attribuito un errore pari alla semi-dispersione degli stessi. I raggi così ottenuti sono stati poi convertiti in unità fisiche come spiegato nella sezione 3.4.

Ovviamente si ricorda che al campo magnetico generato dalle bobine bisogna aggiungere un contributo non

ΔV_{acc} [V]	Raggio [cm]	I_{coil} [A]
150 ± 1	4.2 ± 0.3	1.40 ± 0.02
170 ± 1	4.5 ± 0.3	
190 ± 1	4.8 ± 0.3	
210 ± 1	5.0 ± 0.3	
230 ± 1	5.2 ± 0.3	
250 ± 1	5.5 ± 0.3	
270 ± 1	5.7 ± 0.3	
290 ± 1	5.9 ± 0.3	

Tabella 1: Valori dei raggi estrapolati dalle traiettorie in funzione delle tensioni di accelerazione mantenendo I_{coil} fissa

trascurabile del campo magnetico terrestre pari a 34 mT. Durante il campionamento dei punti per il fit circolare ci siamo resi conto che la seconda metà della traiettoria "circolare" compiuta dagli elettroni è leggermente deviata verso il dispositivo di emissione degli elettroni, per cui abbiamo campionato i punti solo nella prima metà della traiettoria (considerando quindi solo il primo semicerchio compiuto dalla traiettoria uscendo dal cannone).

4 Analisi dati e stima del rapporto e/m

Prendendo come valori esatti $e = 2 \times 10^{11}$ C e $m_e = 9 \times 10^{-31}$ kg il valore atteso per il loro rapporto è

$$\left(\frac{e}{m_e}\right)_{\text{exp}} = 1.76 \times 10^{11} \text{ C/kg} \quad (6)$$

La stima del rapporto e/m_e è stata poi ottenuta in due modi diversi: come media pesata delle singole misure ottenute dalla (4) ed effettuando un *fit* lineare di $(BR)^2$ al variare di $2\Delta V_{acc}$ e ottenendo m_e/e dal coefficiente angolare della retta di *best-fit*. Utilizzando quindi l'equazioni 4 e 2 e facendone poi la media pesata abbiamo ricavato un valore di $\frac{e}{m} = 1.55 \pm 0.07 \times 10^{11} \frac{\text{C}}{\text{Kg}}$. Dopodiché è stato condotto un fit lineare usando come modello la funzione $(BR)^2 = (\frac{m}{e})2\Delta V_{acc} + q$, in modo che le incertezze sulle x ($2\Delta V_{acc}$) propagate attraverso il modello fossero trascurabili rispetto a quelle sulle y (prodotto B×R). Dal fit si ricava che $\frac{e}{m} = 1.52 \pm 0.03 \times 10^{11} \frac{\text{C}}{\text{Kg}}$ e q risulta compatibile con 0. Dal grafico dei residui visibile in figura 7 non risulta esserci una dipendenza apprezzabile del rapporto dal raggio della traiettoria. Possiamo infine concludere che i risultati ottenuti sono compatibili tra di loro, ma distanti dalle aspettative di circa il 14 %.

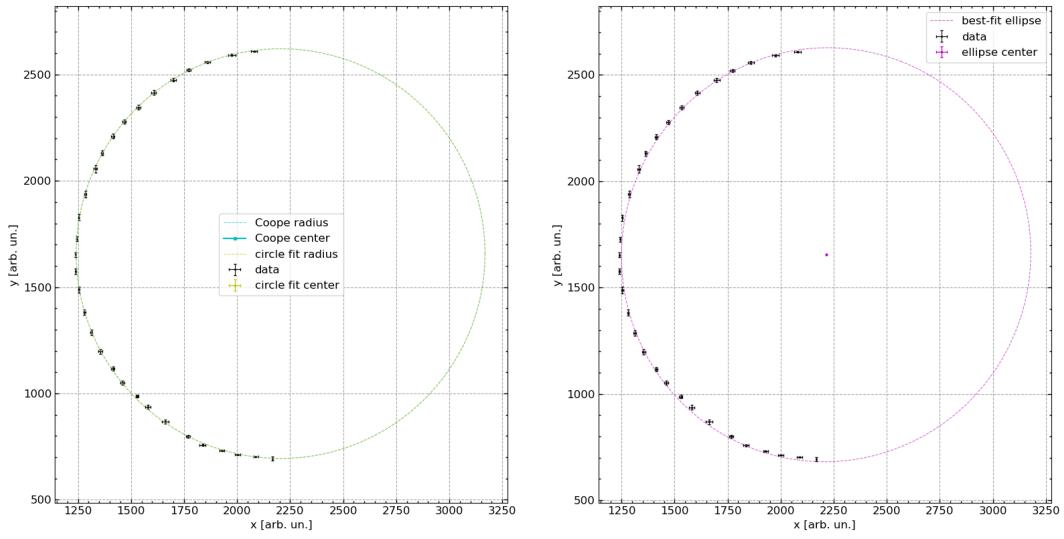


Figura 5: Grafico del fit lineare (ed ellittico) dei punti selezionati, in questo caso rappresentanti l'orbita interna degli elettronini nella fotografia fatta con $V_{acc} = 290V$ e $I_{coil} = 1.40 \pm 0.02A$; il fit ellittico non evidenziava particolarità, e i due fuochi erano compatibili e coincidevano, quindi come raggio abbiamo utilizzato quello in uscita dal fit circolare

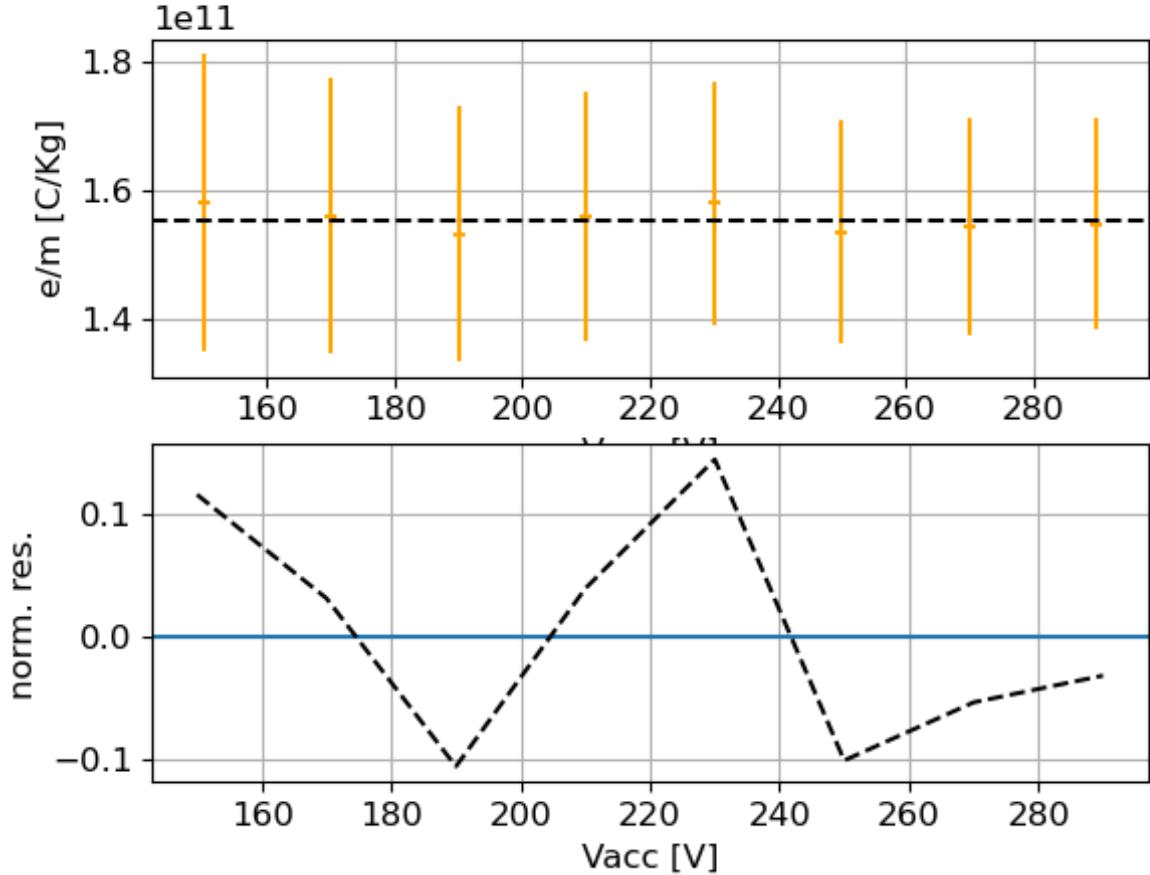


Figura 6: Grafico e residui della media pesata sulle singole misure di e su m

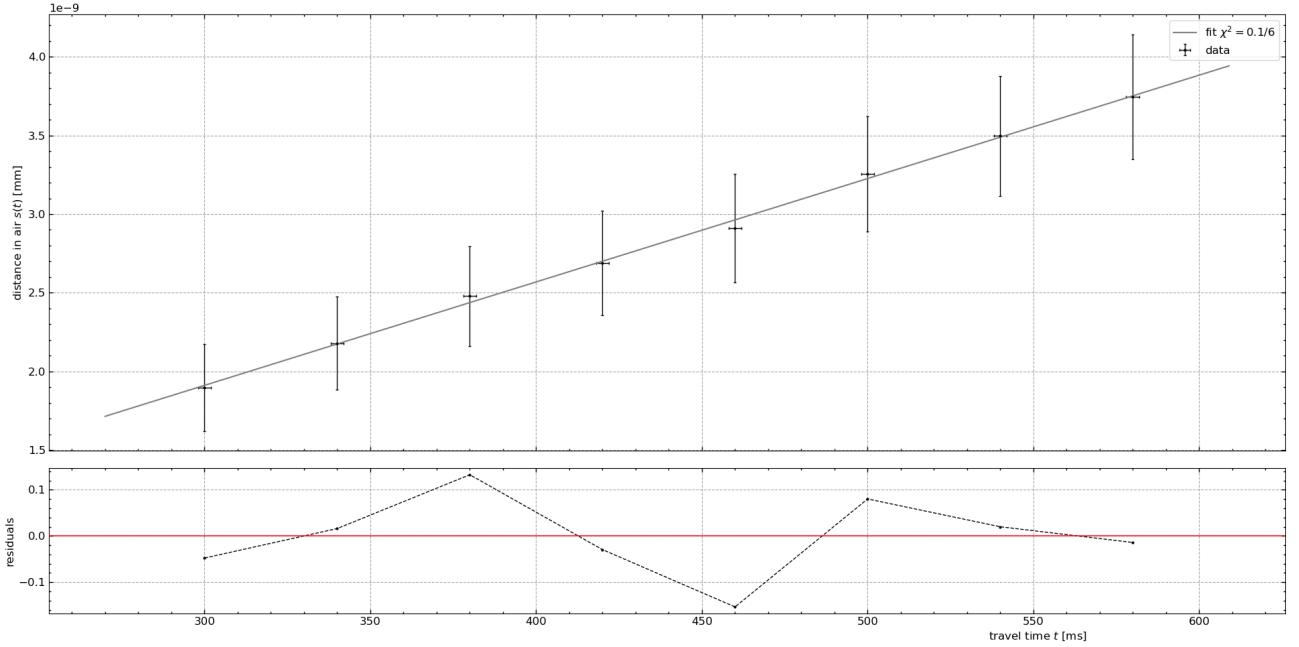


Figura 7: Grafico e residui del fit lineare in cui come modello è stata scelta quella di una retta generica, di coefficiente angolare $\frac{m}{e}$.

5 Valutazione degli effetti sistematici

5.1 Spessore del pennello elettronico

Un fattore che gioca un ruolo importante nella stima del raggio è lo spessore del pennello elettronico: quest'ultimo infatti ha uno spessore di circa 20 pixel già a partire dal cannone elettronico (prendendo lo spessore in un punto successivo della traiettoria è ancora più grande) che corrisponde a 1.4 mm. Per poter prendere le misure al meglio abbiamo diminuito l'ISO della fotocamera e aumentato il tempo di esposizione in modo che il raggio interno ed esterno del pennello (in pratica i punti che delimitano la parte più luminosa) fossero facilmente riconoscibili in qualunque punto della traiettoria. Dopodiché abbiamo fatto una media tra i raggi delle circonferenze che si trovavano singolarmente ed abbiamo utilizzato quel valore come raggio effettivo della traiettoria, e come incertezza abbiamo calcolato la loro semi-dispersione attorno alla media.

5.2 Distorsione del bulbo di vetro

Dato che abbiamo posizionato la fotocamera allineata col centro del bulbo, ci si aspettava che il fit lineare evidenziasse una dipendenza del rapporto e/m in funzione del raggio dell'orbita: questo perchè aumentando il raggio aumentava il numero di punti presenti nella zona di distorsione massima (quelli più lontani dal centro dell'ampolla; la zona di minima distorsione è invece quella più vicina al centro), andando così a compromettere il valore del raggio ricavato. Dal grafico dei residui del fit lineare invece notiamo che i residui dei singoli punti sono distribuiti casualmente attorno al modello, per cui si è potuto affermare che anche se la distorsione è presente, non influenza i dati a tal punto da provocare cambiamenti apprezzabili.

5.3 Campo magnetico terrestre

Assumendo che gli unici contributi al campo magnetico totale derivino dalle bobine e dal campo magnetico terrestre, abbiamo orientato le bobine in modo che la direzione del campo magnetico generato e quello terrestre coincidessero: in questo modo possiamo affermare che il moto compiuto dagli elettroni sia circolare e non elicoidale. Abbiamo fatto particolare attenzione anche al verso della corrente, in modo che sia direzione che verso dei due campi coincidessero; il modulo del campo magnetico totale è quindi dato dalla somma delle 2 intensità. Avendo misurato il valore dell'intensità del campo magnetico terrestre abbiamo notato che non risulta essere trascurabile rispetto al valore dell'intensità di quello generato essendo maggiore della sua incertezza; di conseguenza durante l'analisi dati abbiamo considerato come campo magnetico totale:

$$B_t = B z_{\text{MAX}} + B_{\text{Terr.}}$$

5.4 Disuniformità del campo magnetico sulla traiettoria

A partire da quanto in 3.2 e dalla dimensione del bulbo di vetro possiamo affermare che finché la traiettoria rientra all'interno dell'area compresa entro i 7 cm dal centro del bulbo, la disuniformità del campo magnetico è tale da poter essere trascurata, essendo una variazione compresa all'interno dell'incertezza del valore d'intensità massima. Dai datasheet reperibili online si trova che il diametro del bulbo è pari a 15.5 cm, e considerando le dimensioni e la posizione del cannone elettronico, possiamo affermare che tutte le traiettorie da noi analizzate sono comprese entro l'area con variazione di intensità del campo magnetico non apprezzabile e compresa nel valore dell'incertezza.

Conclusioni e commenti finali

Si è riusciti a dare una misura ragionevole del rapporto carica/massa dell'elettrone a partire da un'analisi delle fotografie della sua traiettoria elicoidale in presenza di un campo magnetico uniforme.

Dichiarazione

I firmatari di questa relazione dichiarano che il contenuto della relazione è originale, con misure effettuate dai membri del gruppo, e che tutti i firmatari hanno contribuito alla elaborazione della relazione stessa.

Riferimenti bibliografici

- [1] I. D. Coope, Circle fitting by linear and nonlinear least squares, Department of Mathematics, University of Canterbury, Christchurch, New Zealand, N.60, May, 1992, https://ir.canterbury.ac.nz/bitstream/handle/10092/11104/coope_report_no69_1992.pdf?sequence=1&isAllowed=y