

Es10: Misura del rapporto carica-massa dell'elettrone e/m_e

Gruppo 1.AC
Matteo Rossi, Bernardo Tomelleri
24 marzo 2022

1 Scopo dell'esperienza

Si vuole misurare il rapporto e/m attraverso la misura del raggio di curvatura della traiettoria circolare di un fascio di elettroni immersi in un campo magnetico uniforme (generato da bobine in configurazione di Helmholtz) accelerati da una differenza di potenziale nota.

2 Metodo di misura

Consideriamo il campo magnetico prodotto da due bobine coassiali di raggio medio $r = 15.8$ cm, costituite da $N = 130$ spire collegate in serie e percorse da una stessa corrente di intensità I_{coil} da noi controllabile.

Si può calcolare il campo magnetico nella regione vicino al centro di ciascuna bobina dalla legge di Biot-Savart e, quando queste sono poste ad una distanza $a = r$ pari al loro raggio -cioè in configurazione di Helmholtz- si può ricavare un'espressione per il campo totale come sovrapposizione dei due campi

$$B = \frac{\mu_0 N r^2 I_{\text{coil}}}{\left[r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\mu_0 N}{r} I_{\text{coil}}. \quad (1)$$

Nel piano parallelo alle spire passante per il punto medio dell'asse congiungente i centri delle bobine (ovvero il piano della traiettoria degli elettroni) il campo magnetico è parallelo all'asse z delle spire ed ha valore massimo della componente lungo lo stesso asse:

$$Bz_{\text{MAX}} = 7.4010^{-4} \left[\frac{T}{A} \right] I_{\text{coil}} \quad (2)$$

Un catodo, riscaldato da un filamento incandescente alimentato con una tensione $V_{\text{heat}} = 6$ V emette elettroni per effetto termoionico. Gli elettroni vengono accelerati da una d.d.p. V_{acc} compresa tra 150 e 250 V e, all'uscita dal cannone elettronico urtano gli atomi del gas raro (He, a pressione di 10^{-1} Pa) presente nell'ampolla, i quali emettono la radiazione che consente di visualizzare il pennello elettronico e misurarne l'orbita.

Una volta liberati dal catodo, nella regione in cui supponiamo assente il campo elettrico V_{acc} , per la conservazione dell'energia vale

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = e V_{\text{acc}} \quad (3)$$

Per cui, assumendo che il campo magnetico sia statico e uniforme lungo z e che il fascio di elettroni abbia velocità ortogonale all'asse delle spire, ci aspettiamo che gli elettroni rimangano in moto circolare uniforme nel piano ortogonale $x - y$.

Dalla condizione di moto circolare di raggio R dovuto alla forza di Lorentz abbiamo che

$$m_e \frac{v^2}{R} = evB \implies v = \frac{e}{m_e} BR$$

Combinando l' eq. (3) con la precedente troviamo

$$v^2 = 2V_{\text{acc}} \frac{e}{m_e} \implies \left(\frac{e}{m_e} BR \right)^2 = 2V_{\text{acc}} \frac{e}{m_e}$$

Da cui otteniamo l'equazione tramite cui vogliamo stimare il rapporto

$$\frac{e}{m_e} = \frac{2\Delta V}{(BR)^2}. \quad (4)$$

Dal momento che tutte le variabili nel RHS sono direttamente controllabili configurando le tensioni di alimentazione e possiamo misurare il raggio della traiettoria R analizzando (come faremo ad esempio con un fit circolare) le fotografie del moto nel bulbo.

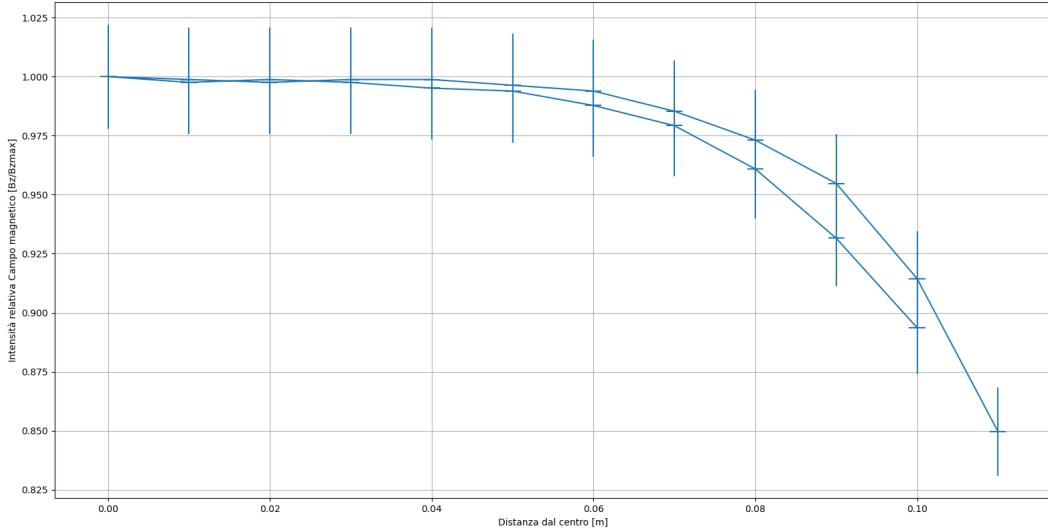


Figura 1: Andamento misurato per l'intensità del campo magnetico nel piano centrale tra le spire in funzione della distanza dal centro

3 Descrizione delle misure

3.1 Orientazione delle bobine rispetto al campo magnetico terrestre

Usando le due bussole in dotazione e la bussola di un cellulare abbiamo per prima cosa orientato l'apparato in modo che il campo magnetico generato dalle bobine fosse nella stessa direzione del campo magnetico generato dalle bobine: in questo modo non dovremo preoccuparci di componenti del campo magnetico non perpendicolari alla direzione degli elettroni, che avrebbero contribuito rendendo il moto elicoidale.

3.2 Mappatura del campo magnetico lungo l'asse delle bobine

Si vuole a questo punto misurare la variazione d'intensità del campo magnetico lungo l'asse delle bobine: per farlo ci serviamo di una sonda ad effetto hall con fattore di conversione di $5.0 \pm 0.1 \frac{mV}{G} = 50 \pm 1 \frac{V}{T}$. A questo punto abbiamo alimentato le bobine, facendo attenzione a non utilizzare più dei valori massimi consigliati dal costruttore (2 A di corrente); abbiamo quindi misurato il valore della corrente di alimentazione:

$$I_{coil} = 2.00 \pm 0.03 A$$

Facendo un veloce calcolo con l'equazione eq. (2) e con il valore misurato di I_{coil} ci si aspetta che l'intensità del campo magnetico massimo misurato dovrà essere $1.48 \pm 0.02 mT$; se ne deduce che quindi il sensore Hall da solo non è sufficiente per misurare approfonditamente le variazioni del campo magnetico (il sensore produrrebbe una d.d.p di circa 70 mV al massimo). Si è quindi inserito tra la sonda e il multimetro un amplificatore-sottrattore (da calibrare) con un coefficiente di amplificazione pari a 11.1 ± 0.1 . Dato che l'errore sul valore letto dal multimetro è circa $0.7 \% + 1 digit$ contro al $2 \% + 1 \%$ derivante dal circuito sonda + Amplificatore, lo abbiamo trascurato, prendendo in considerazione solo quelli del circuito sopracitato.

Il primo passo è stato quello di calibrare il circuito amplificatore-sottrattore, aggiustando l'offset, in modo che il multimetro misurasse lo stesso valore ma di segno invertito ruotando la sonda di 180° ; da questa procedura ci accorgiamo che la sonda misura un campo magnetico residuo, infatti dal multimetro leggiamo una tensione di circa 19 mV, che convertendoli ci danno come risultato un campo magnetico di circa $34.2 \pm 0.7 \mu T$, compatibile con l'intensità del campo magnetico terrestre. Ci accorgiamo che questo contributo, che non è quindi trascurabile, andrà ad aumentare il campo magnetico misurato di circa il 2 %, rendendo la nuova aspettativa di 1.51 ± 0.02 . Successivamente è stato acceso il generatore che alimenta le bobine e si è inserita la sonda nell'apposita guida rettilinea situata nel punto medio tra le bobine, tagliandole lungo il diametro. Dunque abbiamo misurato il valore in uscita dal multimetro all'avanzare a ogni centimetro della sonda. Considerando che il campo magnetico massimo misurato, trovato in corrispondenza del centro delle spire, è pari a $1.47 \pm 0.03 mT$ possiamo affermare che il valore è compatibile con le aspettative entro le 2 barre di errore. La mappatura delle intensità del campo magnetico risulta quindi qualitativamente compatibile con quanto aspettato.

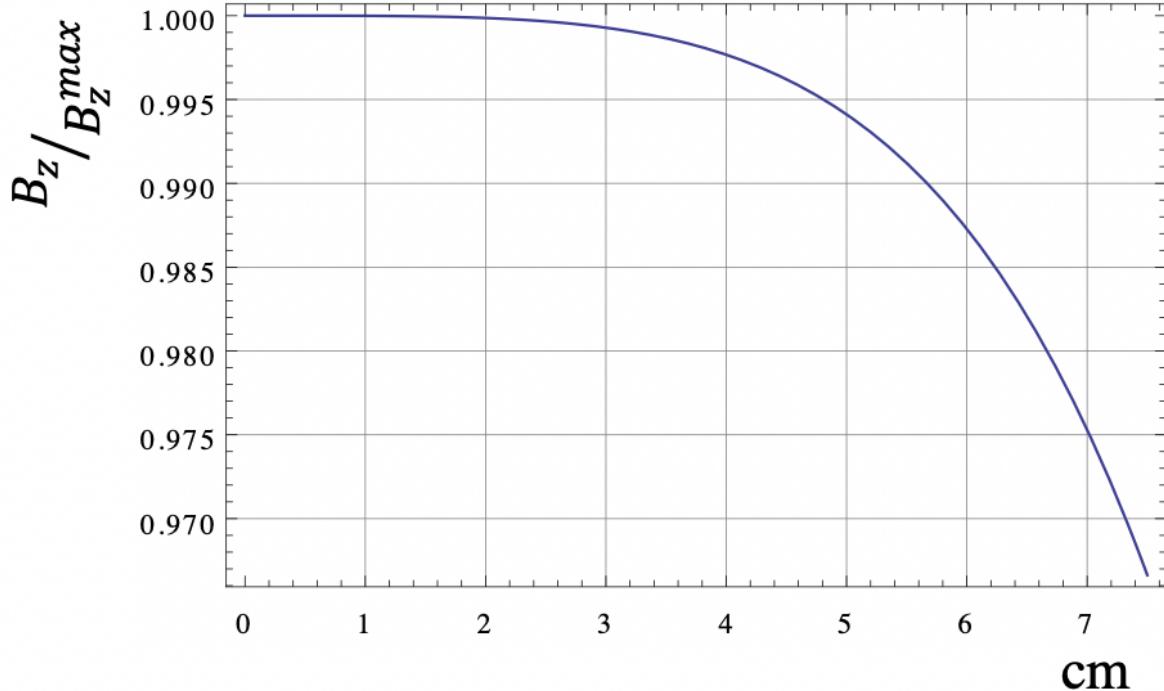


Figura 2: Andamento previsto per l'intensità del campo magnetico nel piano centrale tra le spire in funzione della distanza dal centro

3.3 Calibrazione dell'apparato per l'acquisizione delle traiettorie

A questo punto si è potuto procedere con l'acquisizione delle misure del raggio. Per farlo abbiamo fatto uso di una fotocamera la quale è stata posizionata in modo tale che il centro delle lenti corrispondesse al centro delle bobine e del bulbo di vetro: in questo modo le distorsioni dovute al bulbo saranno minimizzate, di conseguenza sarà più facile stimare il raggio effettivo; inoltre se prendiamo come traiettoria quella di raggio tale che il suo centro che passa per il centro del bulbo, le distorsioni saranno ancora più minimizzate, e dalla fotocamera vedremo una circonferenza meno distorta. Come impostazioni per la fotocamera abbiamo utilizzato un ISO di 400 e un'esposizione di 10 secondi, in modo da vedere al meglio i limiti interni ed esterni del pennello elettronico e stimare con maggiore precisione il raggio della traiettoria.

Per cominciare abbiamo scattato una foto in cui si vedono 2 righelli (risoluzione 1 mm) posizionati ognuno in una bobina, questo per valutare gli effetti della geometria proiettiva (e ottenere una scala di conversione pixel-cm) e per valutare successivamente gli effetti di distorsione del bulbo. Abbiamo quindi alimentato il dispositivo di emissione di elettroni con una tensione di 6 Volt e abbiamo aspettato che il filamento si scaldasse il più possibile, dopodiché abbiamo iniziato a variare la tensione di accelerazione: inizialmente, nonostante si variasse V_{acc} , il pennello elettronico non era visibile in quanto non avevamo aspettato ancora abbastanza e il filamento doveva ancora raggiungere la temperatura ottimale. Dopo circa 10 minuti (in totale) il pennello elettronico aveva raggiunto lo stato di massima luminosità, quindi si sono spente le luci e abbiamo scattato diverse fotografie a diverse tensioni di accelerazioni e correnti I_{coil} ; come ci si aspettava aumentando la tensione di accelerazione aumenta il raggio di curvatura, diminuendo I_{coil} aumenta il raggio.

Con riferimento alla Figura ??, fissiamo un “cono visivo”. Questo sottende sul righello più vicino alla fotocamera la distanza x , su quello più lontano la distanza y . Il rapporto x/y può essere determinato confrontando le scale graduate dei due righelli (quello del Fermilab e quello dell'apparato sperimentale) nella relativa figura fornita. Chiamiamo D_x , D_y , D_{xy} le distanze dalla fotocamera ai/tra i vari piani. D_{xe} è invece la distanza tra il righello x e il piano del moto degli elettroni. Per similitudine

$$\frac{y}{x} = \frac{D_y}{D_x} = 1 + \frac{D_{xy}}{D_x}.$$

Quindi la relazione tra il raggio misurato dal righello y e il raggio reale è

$$R = R_y \frac{D_x + D_{xe}}{D_x + D_{xy}} = R_y \left[\frac{D_{xe}}{D_{xy}} + \frac{x}{y} \left(1 - \frac{D_{xe}}{D_{xy}} \right) \right] = \gamma R_y.$$

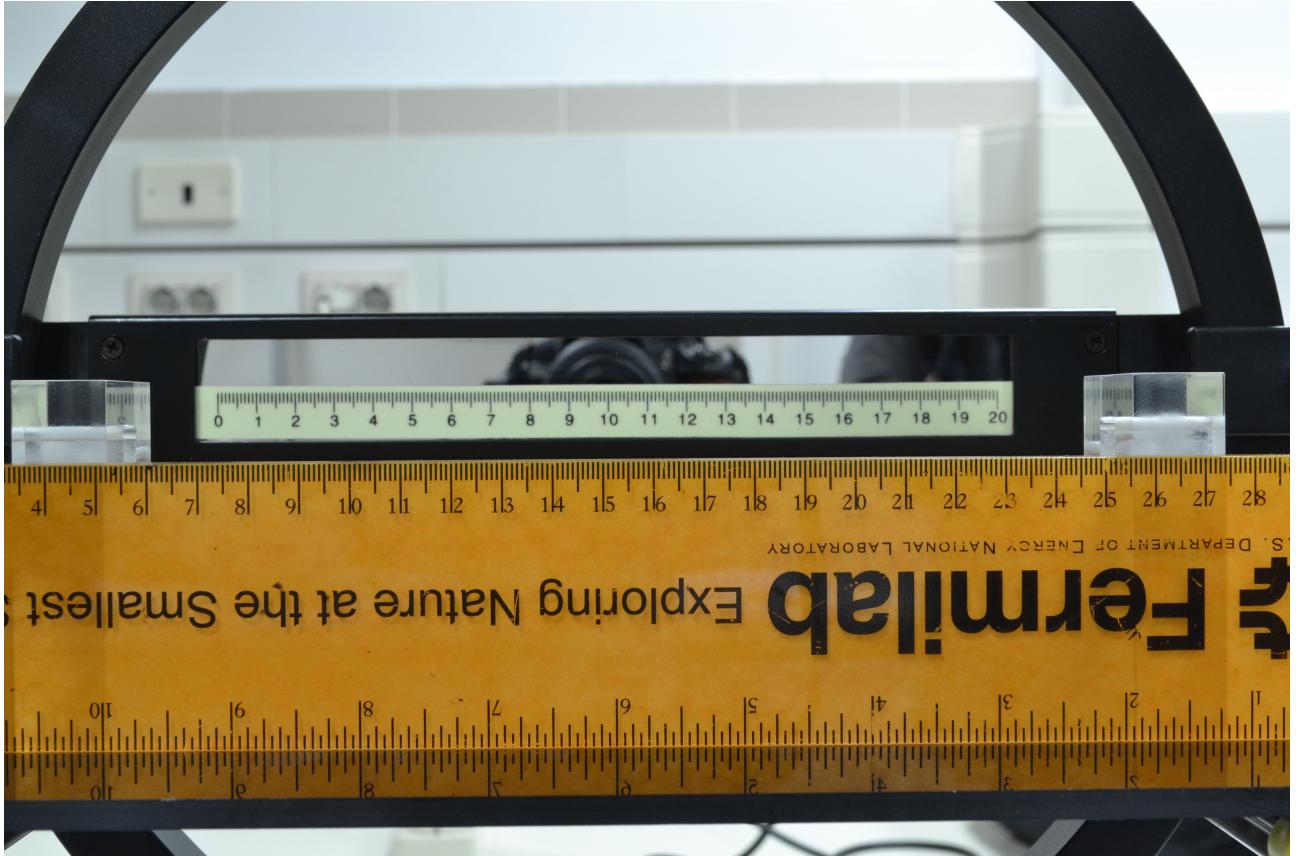


Figura 3: Foto di calibrazione in assenza di bulbo, da questa ricaveremo una scala per convertire successivamente i dati da pixel a cm

Sia κ il fattore di conversione tra pixel e i centimetri del righello y . Allora abbiamo

$$R[\text{cm}] = \frac{\gamma}{\kappa} R_y[\text{px}].$$

Dalle misure riportate nella scheda dell'esperienza si ottiene, attribuendo un'incertezza di 1 mm a tutte le lunghezze in gioco

$$\gamma = 906(5) \times 10^{-3} \quad \kappa = 141(6).$$

3.4 Misura del raggio della traiettoria

Utilizzando le foto sopra menzionate si è effettuato un campionamento dei punti sull'arco interno e sull'arco esterno delle traiettorie (dato che il pennello elettronico ha uno spessore non trascurabile). Le coordinate dei pixel così ricavate sono state interpolate con un *fit* circolare per ottenere una stima del raggio interno ed esterno. Si è poi assunto come valore efficace del raggio dell'orbita la media del raggio del cerchio interno e di quello esterno, e si è attribuito un errore pari alla semi-dispersione degli stessi. I raggi così ottenuti sono stati poi convertiti in unità fisiche come spiegato nella sezione 3.3.

Ovviamente si ricorda che al campo magnetico generato dalle bobine bisogna aggiungere un contributo non trascurabile del campo magnetico terrestre pari a 34 mT. Durante il campionamento dei punti per il fit circolare ci siamo resi conto che la seconda metà della traiettoria "circolare" compiuta dagli elettroni è leggermente deviata verso il dispositivo di emissione degli elettroni, per cui abbiamo campionato i punti solo nella prima metà della traiettoria (considerando indicativamente solo il primo semicerchio compiuto dalla traiettoria uscendo dal cannone).

4 Analisi dati e stima del rapporto e/m

Prendendo come valori esatti $e = 2 \times 10^{11}$ C e $m_e = 9 \times 10^{-31}$ kg il valore atteso per il loro rapporto è

$$\left(\frac{e}{m_e}\right)_{\text{exp}} = 1.76 \times 10^{11} \text{ C/kg} \quad (5)$$

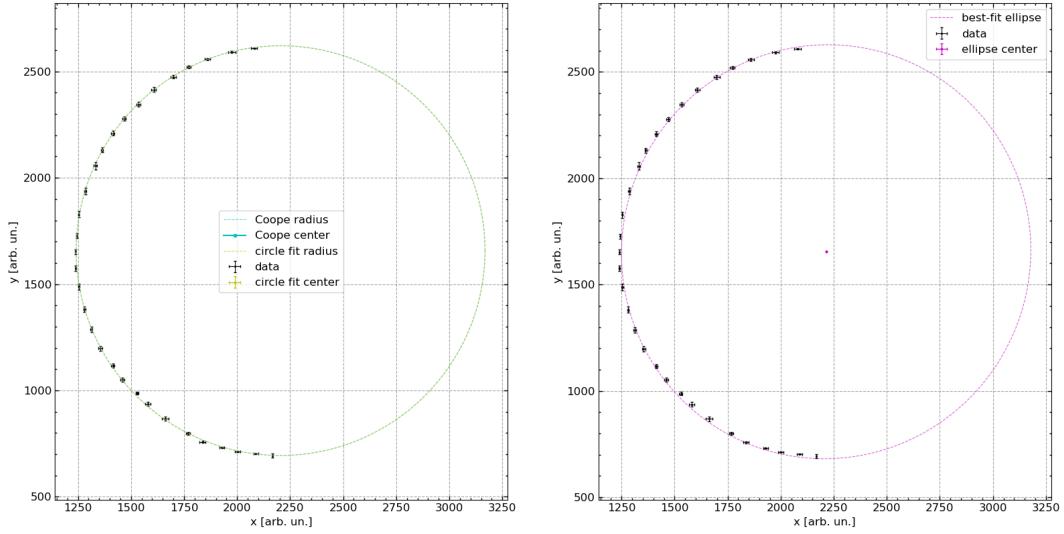


Figura 4: Grafico del fit lineare (ed ellittico) dei punti selezionati, in questo caso rappresentanti l'orbita interna degli elettronni nella fotografia fatta con $V_{acc} = 290V$; il fit ellittico non evidenziava particolarità, e i due fuochi erano compatibili e coincidevano, quindi come raggio abbiamo utilizzato quello in uscita dal fit circolare

ΔV_{acc} [V]	Raggio [cm]	I_{coil} [A]
150 ± 1	4.2 ± 0.3	1.40 ± 0.02
170 ± 1	4.5 ± 0.3	
190 ± 1	4.8 ± 0.3	
210 ± 1	5.0 ± 0.3	
230 ± 1	5.2 ± 0.3	
250 ± 1	5.5 ± 0.3	
270 ± 1	5.7 ± 0.3	
290 ± 1	5.9 ± 0.3	

Tabella 1: Valori dei raggi estrapolati dalle traiettorie in funzione delle tensioni di accelerazione a I_{coil} fissa

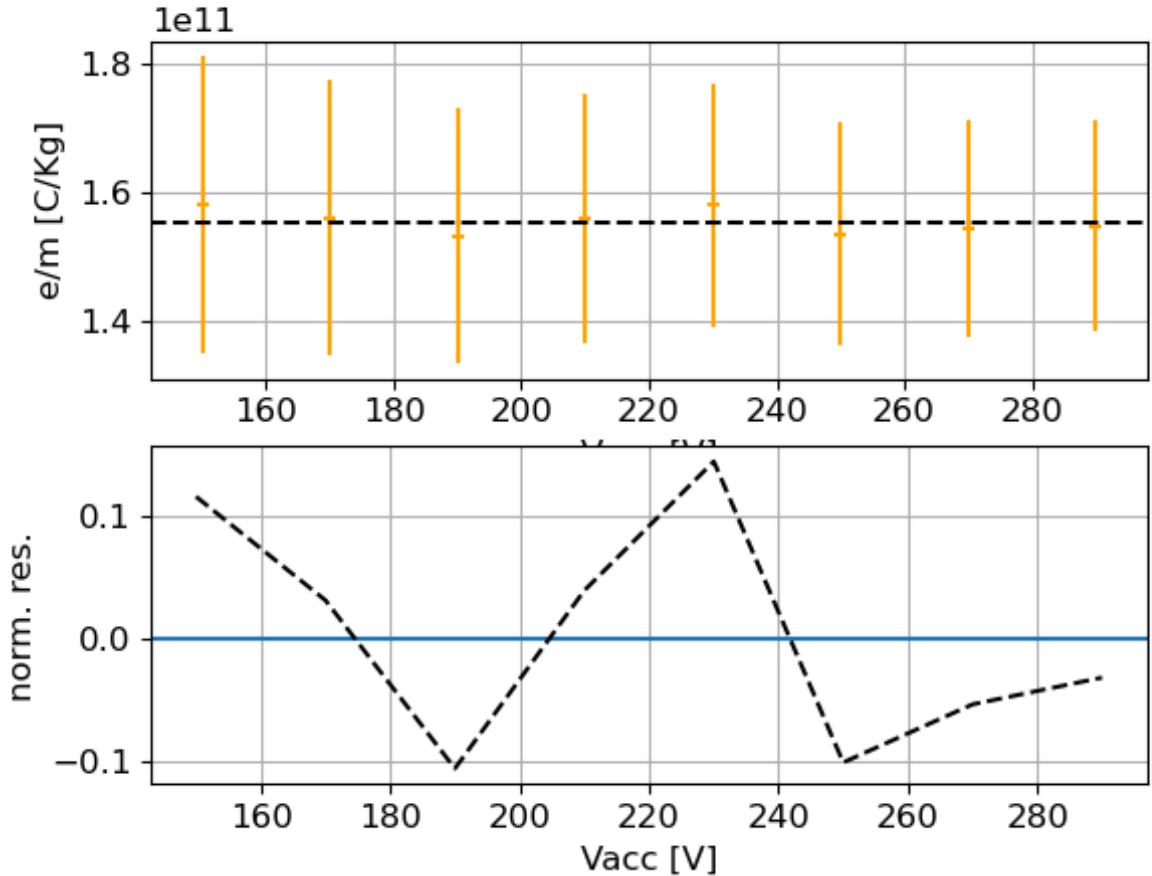


Figura 5: Grafico e residui della media pesata sulle singole misure di e su m

La stima del rapporto e/m_e è stata poi ottenuta in due modi diversi: come media pesata delle singole misure ottenute dalla (4) ed effettuando un *fit* lineare di $(BR)^2$ al variare di $2\Delta V_{acc}$ e ottenendo m_e/e dal coefficiente angolare della retta di *best-fit*. Utilizzando quindi l'equazioni 4 e 2 e facendone poi la media pesata abbiamo ricavato un valore di $\frac{e}{m} = 1.55 \pm 0.07 \times 10^{11} \frac{C}{Kg}$. Dopodiché è stato condotto un fit lineare usando come modello la funzione $(BR)^2 = (\frac{m}{e})2\Delta V_{acc} + q$, in modo che le incertezze sulle x ($2\Delta V_{acc}$) propagate attraverso il modello fossero trascurabili rispetto a quelle sulle y (prodotto $B \times R$): quindi dovremo poi fare il reciproco del coefficiente angolare per ricavare il rapporto cercato. Dal fit si ricava che $\frac{e}{m} = 1.52 \pm 0.03 \times 10^{11} \frac{C}{Kg}$. Dal grafico dei residui visibile in figura 6 non risulta esserci una dipendenza apprezzabile del rapporto dal raggio della traiettoria. Possiamo infine concludere che i risultati ottenuti sono compatibili tra di loro, ma distanti dalle aspettative di circa il 14 %.

5 Valutazione degli effetti sistematici

5.1 Spessore del pennello elettronico

Un fattore che gioca un ruolo importante nella stima del raggio è lo spessore del pennello elettronico: quest'ultimo infatti ha uno spessore di circa 20 pixel già a partire dal cannone elettronico (ovviamente prendendo lo spessore in un punto successivo della traiettoria è ancora più grande) che corrisponde a 1.4 mm. Per poter prendere le misure al meglio abbiamo diminuito l'ISO della fotocamera e aumentato il tempo di esposizione in modo che il raggio interno ed esterno del pennello (in pratica i punti che delimitano la parte più luminosa) fossero facilmente riconoscibili in qualunque punto della traiettoria. Dopodiché abbiamo fatto una media tra i raggi delle circonferenze che si trovavano singolarmente ed abbiamo utilizzato quel valore come raggio effettivo della traiettoria, e come incertezza abbiamo calcolato la loro semi-dispersione attorno alla media.

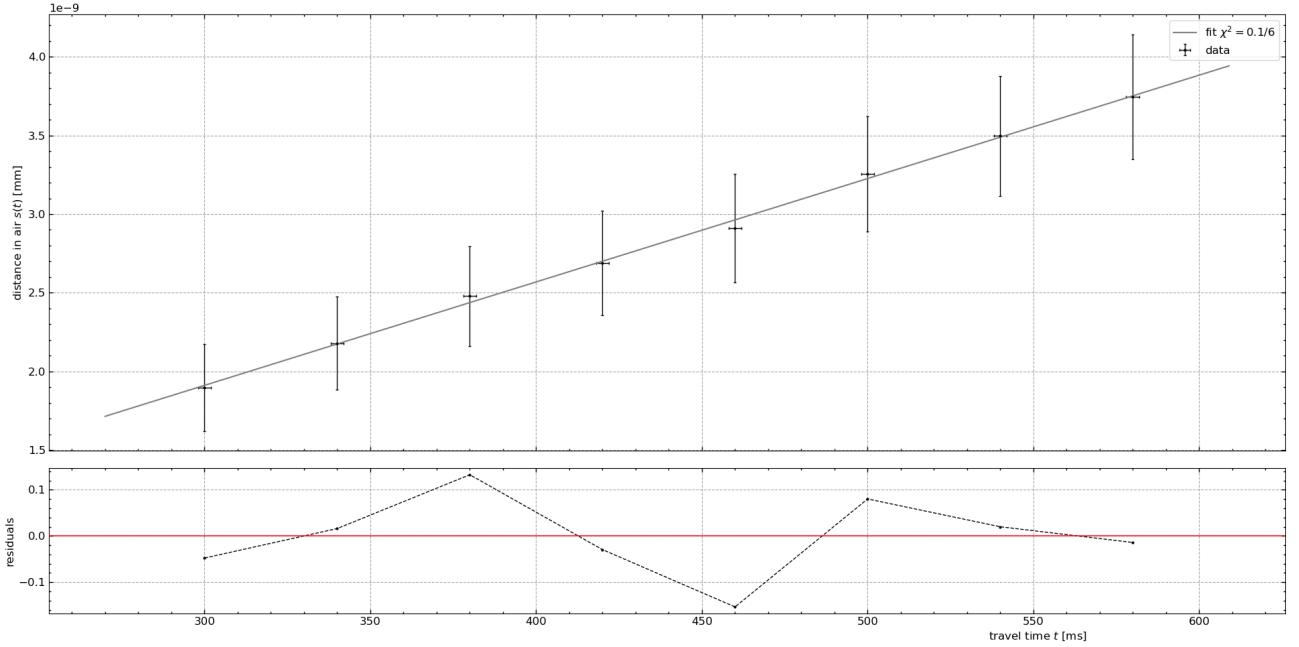


Figura 6: Grafico e residui del fit lineare in cui come modello è stata scelta quella di una retta generica, di coefficiente angolare $\frac{m}{e}$.

5.2 Distorsione del bulbo di vetro

Dato che abbiamo posizionato la fotocamera allineata col centro del bulbo, ci si aspettava che, data la posizione del cannone di elettroni, il fit lineare evidenziasse una dipendenza del rapporto e/m in funzione del raggio dell'orbita: questo perché cambiando il raggio si varia la posizione dei singoli punti appartenenti alla traiettoria, e più in particolare aumentando il raggio si spostano sempre più punti nella zona di distorsione massima (quelli più lontani dal centro della sfera di vetro, la zona di minima distorsione è invece quella più vicina al centro), andando così a compromettere il valore del raggio ricavato. Dal grafico dei residui invece notiamo che i singoli punti sono distribuiti casualmente attorno al modello, per cui si è potuto affermare che anche se la distorsione è presente, non influenza i dati a tal punto da provocare cambiamenti apprezzabili.

5.3 Campo magnetico terrestre

Avendo misurato il valore dell'intensità del campo magnetico terrestre abbiamo notato che il valore non risulta essere trascurabile, di conseguenza durante l'analisi dati abbiamo considerato come campo magnetico totale:

$$B_t = Bz_{\text{MAX}} + 34 \mu T$$

5.4 Disuniformità del campo magnetico sulla traiettoria

A partire da quanto misurato durante la fase di mappatura del campo magnetico e dalla dimensione del bulbo di vetro possiamo affermare che finché la traiettoria rientra all'interno dell'area compresa entro i 7 cm dal centro del bulbo, la disuniformità del campo magnetico è tale da poter essere trascurata, essendo una variazione compresa all'interno dell'incertezza del valore d'intensità massima. Dai datasheet reperibili online si trova che il diametro del bulbo è pari a 15.5 cm, e considerando le dimensioni e la posizione del cannone elettronico, possiamo affermare che tutte le traiettorie da noi analizzate sono comprese entro l'area di con variazione di intensità del campo magnetico non apprezzabile.

Conclusioni e commenti finali

Si è riusciti a dare una misura ragionevole del rapporto carica/massa dell'elettrone a partire da un'analisi delle fotografie della sua traiettoria elicoidale in presenza di un campo magnetico uniforme.

Dichiarazione

I firmatari di questa relazione dichiarano che il contenuto della relazione è originale, con misure effettuate dai membri del gruppo, e che tutti i firmatari hanno contribuito alla elaborazione della relazione stessa.

Riferimenti bibliografici

- [1] I. D. Coope, Circle fitting by linear and nonlinear least squares, Department of Mathematics, University of Canterbury, Christchurch, New Zealand, N.60, May, 1992, https://ir.canterbury.ac.nz/bitstream/handle/10092/11104/coope_report_no69_1992.pdf?sequence=1&isAllowed=y