

Bernardo Tomelleri (587829)
b.tomelleri@studenti.unipi.it

Marco Romagnoli (578061)
m.romagnoli@studenti.unipi.it

1 Scopo dell'esperienza

L'obiettivo dell'esperienza consiste nella misura degli indici di rifrazione del plexiglass e dell'acqua.

2 Apparato sperimentale e strumenti

- Banco ottico con sorgente luminosa;
- un semicilindro di Plexiglass;
- un diottro sferico riempito d'acqua;
- un metro a nastro (risoluzione 1 mm).

3 Cenni Teorici

Indice di rifrazione del plexiglass

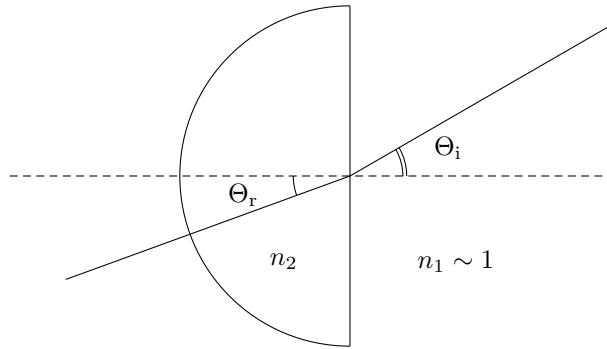


Figura 1: Schematizzazione dell'apparato per la misura dell'indice di rifrazione del plexiglass. L'angolo di incidenza Θ_i (di rifrazione Θ_r) è l'angolo formato dal raggio luminoso incidente (rifratto) con la normale alla superficie di separazione tra i due mezzi.

Quando un raggio di luce passa da un mezzo con indice di rifrazione n_1 ad un altro con indice di rifrazione n_2 , gli angoli di rifrazione Θ_i e incidenza Θ_r sono legati tra loro dalla legge di Snell - Cartesio:

$$n_1 \sin \Theta_i = n_2 \sin \Theta_r. \quad (1)$$

Assumendo come indice di rifrazione dell'aria, con buona approssimazione, $n_1 \sim 1$. è possibile ricavare l'indice di rifrazione del plexiglass dal rapporto $n_2 = \frac{\Theta_i}{\Theta_r}$.

Indice di rifrazione dell'acqua

Con riferimento alla figura 2: siano r il raggio del diottro, p la distanza del vertice del diottro dalla sorgente luminosa e q la distanza dello stesso dall'immagine proiettata sullo schermo, (una volta messa a fuoco): queste lunghezze sono legate dalla relazione

$$\frac{n_2}{p} + \frac{n_1}{q} = \frac{(n_2 - n_1)}{r}. \quad (2)$$

Avendo assunto come indice di rifrazione dell'aria $n_1 \sim 1$, risulta chiaro, invertendo (2) per $\frac{1}{q}$, come nel grafico cartesiano $(1/p_i, 1/q_i)$ il coefficiente angolare debba corrispondere all'indice di rifrazione dell'acqua $-n_2$.

$$\frac{1}{q} = -\frac{n_2}{p} + \frac{(n_2 - 1)}{r}. \quad (3)$$

Per lo stesso motivo, dal valore dell'intercetta b , è possibile ottenere una stima del raggio $r = \frac{n_2 - 1}{b}$ del diottro.

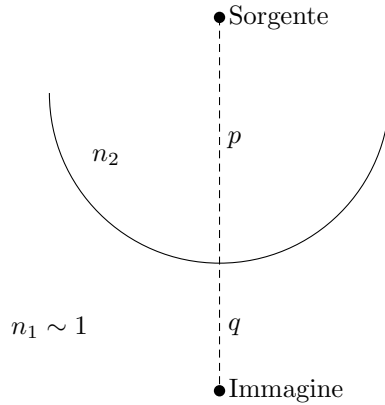


Figura 2: Schematizzazione dell'apparato per la misura dell'indice di rifrazione dell'acqua. Le grandezze q e p sono definite, rispettivamente come la distanza dal vertice del diottro della sorgente e dell'immagine (a fuoco sullo schermo).

4 Descrizione delle Misure

Indice di rifrazione del plexiglass

Si sono montati sul banco ottico un diaframma a fenditura e una lente convergente davanti alla sorgente luminosa per ottenere un fascio sottile di luce da misurare. Si è quindi posizionato il semicilindro di plexiglass sul piatto girevole, di modo che il centro della superficie fosse illuminato dal raggio, onde evitare ulteriori rifrazioni in uscita. Dunque abbiamo misurato 10 coppie di valori $\sin \Theta_i$, $\sin \Theta_r$ alterando l'angolo di incidenza ruotando la piattaforma.

$\sin \Theta_i$ [cm]	$\sin \Theta_r$ [cm]
0.5	0.8
0.7	1.1
1.1	1.4
1.3	1.8
1.5	2.0
1.8	2.3
2.1	3.1
2.4	3.4
2.7	4.1
2.9	4.2

Tabella 1: Le misure di incertezza per $\sin \Theta_i$ e $\sin \Theta_r$ corrispondono alla risoluzione del metro a nastro = 1 mm

Indice di rifrazione dell'acqua

Si sono scelte 10 posizioni della sorgente (immersa in acqua), dunque una volta aggiustata la posizione dello schermo affinché l'immagine del rombo sulla superficie della lampadina fosse a fuoco, si sono misurati i valori corrispondenti di p e q :

p [cm]	q [cm]
31.3	108.1
32.8	88.3
34.1	78.3
34.5	77.5
34.9	74.6
36.1	65.9
37.4	61.1
40.1	54.2
40.8	51.6
45.3	44.6

Tabella 2: Data la difficoltà nello stabilire il punto esatto in cui l'immagine risulta a fuoco, ad ogni misura di q è stata attribuita un'incertezza di 1 cm, mentre ad ogni p di 0.2 cm

5 Analisi dei Dati

Indice di rifrazione del plexiglass

Dal momento che le incertezze sulle misure lungo le ascisse e le ordinate sono uguali, si ripete il fit considerando un errore efficace su y

$$\sigma_{\text{eff}} = \sqrt{\left| \frac{dy}{dx} \right| \sigma_{x_i}^2 + \sigma_{y_i}^2}$$

come già visto nella misura dell'indice di rifrazione del Plexiglass, minimizzando

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - mx_i)^2}{\sigma_{y_i}^2 + m^2 \sigma_{x_i}^2} \quad (4)$$

fino a quando l'errore su x sarà trascurabile rispetto a σ_{eff} . Si sono riportate le coppie di valori dei seni degli angoli di incidenza e rifrazione nel seguente grafico di $\sin \Theta_i$ in funzione di $\sin \Theta_r$: Avendo assunto come indice di rifrazione dell'aria $n_1 \sim 1$, da un fit per una legge lineare

$$y = mx + b$$

con intercetta lasciata come parametro libero si ricavano i seguenti valori:

$$\begin{aligned} m &= 1.47 \pm 0.07 \\ b &= 0.06 \pm 0.11 \sim 0 \\ \chi^2 &= 5.7/8 \end{aligned}$$

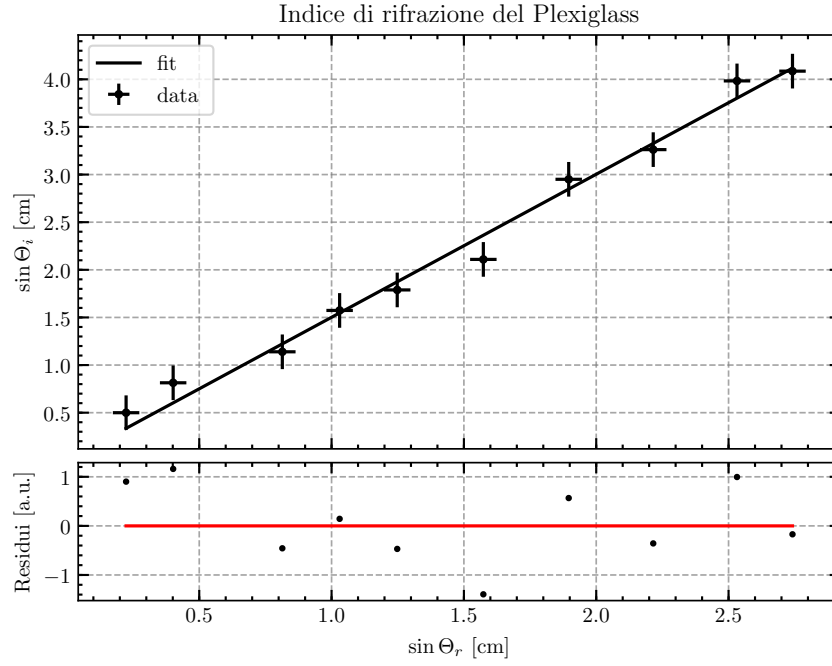
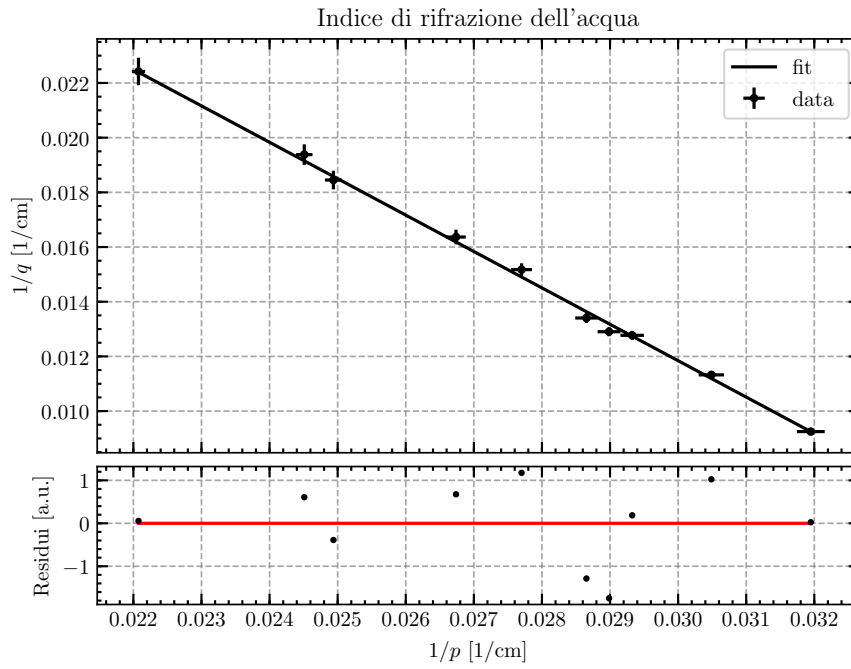
Imponendo intercetta nulla, come previsto da (1) si ottiene come coefficiente angolare della retta di *best fit*:

$$\begin{aligned} n &= 1.50 \pm 0.03 \\ \chi^2 &= 6/9 \end{aligned}$$

La nostra miglior stima dell'indice di rifrazione del plexiglass.

Indice di rifrazione dell'Acqua

Si sono riportate le misure di p e q nel seguente grafico di $\frac{1}{q}$ in funzione di $\frac{1}{p}$: Tramite fit lineare

Figura 3: Grafico di $\sin \Theta_i$ in funzione di $\sin \Theta_r$ Figura 4: Grafico di $1/q$ in funzione di $1/p$

si trovano il coefficiente angolare m della retta di *best fit*, dunque l'indice di rifrazione dell'acqua,

e l'intercetta b , corrispondente alla costante legata al raggio del diottro:

$$m = -1.33 \pm 0.03$$

$$b = 0.052 \pm 0.001 \text{ cm}$$

$$r = \frac{1 - n_2}{b} = 6.4 \pm 0.3 \text{ cm}$$

$$\chi^2 = 8.1/8$$

Nota sul metodo di fit

Per determinare i parametri ottimali e le rispettive varianze si è implementato un metodo di fit basato sui minimi quadrati mediante la funzione *curve_fit* di Python.

6 Conclusioni

Si riportano di seguito i valori *indicativi* degli indici di rifrazione da misurare e quanto trovato nelle nostre misure:

Materiale	n		
Plexiglass	1.49	1.50 ± 0.03	$\chi_{rid}^2 = 0.67$
Acqua	1.33	1.33 ± 0.03	$\chi_{rid}^2 = 1.0125$

In entrambi i casi i valori attesi sono compatibili con i risultati sperimentali.