

Laboratorio di Fisica I

Relazione finale Ottica

Bernardo Tomelleri (587829)
b.tomelleri@studenti.unipi.it

Marco Romagnoli (578061)
m.romagnoli@studenti.unipi.it

Maurizio L. E. Campese (579117)
m.campese@studenti.unipi.it

19/04/2019

Indice

1	Doppio Arcobaleno e Indice di rifrazione dell'Acqua	2
1.1	Scopo dell'esperienza	2
1.2	Apparato sperimentale e strumenti	2
1.3	Cenni Teorici	2
1.3.1	Deflessione nel caso di Luce incidente su una goccia d'acqua	2
1.3.2	Dispersione ottica all'interno delle gocce	4
1.4	Descrizione delle Misure	4
1.5	Analisi dei Dati	4
1.5.1	Legge di Cauchy	6
1.6	Conclusioni	7
2	Alone Lunare e Indice di rifrazione del Ghiaccio	8
2.1	Scopo dell'esperienza	8
2.2	Apparato sperimentale e strumenti	8
2.3	Cenni Teorici	8
2.3.1	Legge di Gladstone-Dale	10
2.4	Descrizione delle Misure	10
2.5	Analisi dei Dati	10
2.5.1	Gladstone Dale	11
2.6	Conclusioni	11
3	Esperienze di Laboratorio	12
3.1	Scopo dell'esperienza	1
3.2	Apparato sperimentale e strumenti	1
3.3	Cenni Teorici	1
3.4	Descrizione delle Misure	2
3.5	Analisi dei Dati	3
3.6	Conclusioni	5
3.7	Scopo dell'esperienza	1
3.8	Apparato sperimentale e strumenti	1
3.9	Cenni Teorici	1
3.10	Descrizione delle misure	1
3.11	Analisi dei Dati	2
3.12	Conclusioni	5

Capitolo 1

Doppio Arcobaleno e Indice di rifrazione dell'Acqua

1.1 Scopo dell'esperienza

Studiare il fenomeno dell'arcobaleno dal punto di vista dell'ottica geometrica, dunque ottenere una misura dell'indice di rifrazione dell'acqua da quanto trovato.

1.2 Apparato sperimentale e strumenti

La strumentazione utilizzata si limita a una fotografia digitale ad alta risoluzione del fenomeno trattato e di un software di elaborazione immagini¹ dotato di uno strumento per campionare punti e distanze tra questi, in base alle proprie coordinate in pixel.

1.3 Cenni Teorici

Sappiamo di poter osservare l'arcobaleno guardando un banco di pioggia quando il sole alle nostre spalle non è alla sua massima altezza, la spiegazione del fenomeno è da ricercarsi in ciò che succede al livello microscopico nelle singole gocce d'acqua:

1.3.1 Deflessione nel caso di Luce incidente su una goccia d'acqua

Si consideri un fascio di luce che illumina una goccia d'acqua -perfettamente- sferica di raggio R e con indice di rifrazione n : i raggi luminosi che incidono sulla sua superficie ad un angolo i vengono rifratti in entrata e possono subire molteplici riflessioni all'interno di questa prima di uscirne nuovamente rifratti. Dunque chiamiamo angolo di *diffusione* δ quello tra il raggio luminoso in entrata e il raggio in uscita. Se il raggio di luce subisce k riflessioni interne prima di uscire dalla sfera, la deflessione totale risulta pari a

$$\theta_k = 2(i - r) + k(\pi - 2r) \quad (1.1)$$

Per la legge di *Snell-Cartésio* si ha sempre:

$$b = \sin i = n \sin r \quad (1.2)$$

Dal sistema formato dalle equazioni (1.2) e (1.1) si ottiene un'espressione in i per l'apertura angolare $\delta_k = \pi - \theta_k$

$$\delta_k(i) = 2 \left((k + 1) \arcsin \left(\frac{\sin i}{n} \right) - i \right) \quad (1.3)$$

¹Nel nostro caso GIMP [1]



Figura 1.1: La fotografia campionata di un doppio arcobaleno

Quando il raggio subisce almeno una riflessione interna ($k \geq 1$) esistono punti critici in cui $\frac{d\delta_k}{db}$ si annulla, d'altro canto n è costante, perciò la derivata dipende dal solo i

$$\frac{d\delta_k(i)}{di} = 2 \left(\frac{(k+1) \cos i}{n \sqrt{1 - \left(\frac{\sin i}{n}\right)^2}} - 1 \right) \quad (1.4)$$

Dunque un angolo d'incidenza critico è dato da \hat{i}_k :

$$\delta'_k(\hat{i}_k) = 2 \left(\frac{(k+1) \cos \hat{i}_k}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \hat{i}_k}} - 1 \right) = 0 \quad (1.5)$$

$$\sin \hat{i}_k = \sqrt{\frac{(k+1)^2 - n^2}{k(k+2)}} \Rightarrow \hat{i}_k = \arcsin \sqrt{\frac{(k+1)^2 - n^2}{k(k+2)}} \quad (1.6)$$

grazie all'identità fondamentale della trigonometria si arriva alla formula [2] per gli angoli d'incidenza critici in funzione dei valori di k e n :

$$i_k = \arccos \sqrt{\frac{n^2 - 1}{k(k+2)}} \quad (1.7)$$

Da cui, assumendo $n \approx \frac{4}{3}$:

$$i_1 \approx 60^\circ$$

$$i_2 \approx 72^\circ$$

Ossia i raggi luminosi che incidono sulla goccia ad angoli prossimi a i_1 e i_2 vengono concentrati nei rispettivi angoli di diffusione determinati da (1.3)

$$\delta_1 = 4 \arcsin \sqrt{\frac{4-n^2}{3n^2}} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{4-n^2}{3}} \approx 42^\circ \quad (1.8)$$

$$\delta_2 = \pi - 6 \arcsin \sqrt{\frac{9-n^2}{8n^2}} + 2 \arcsin \sqrt{\frac{9-n^2}{8}} \approx 51^\circ \quad (1.9)$$

1.3.2 Dispersione ottica all'interno delle gocce

La separazione nei 7 colori nell'arcobaleno è dovuta alla debole dipendenza dell'indice di rifrazione n dalla lunghezza d'onda λ della luce, per questo ogni componente del raggio viene rifratto in maniera leggermente diversa, come mostrato nella figura 1.2

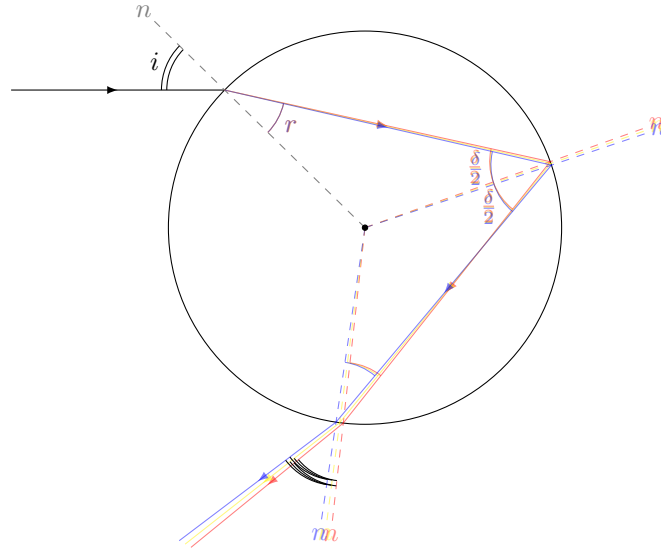


Figura 1.2: Illustrazione della singola riflessione all'interno di una goccia d'acqua: la differenza tra gli indici di rifrazione per i colori è lievemente esagerata per chiarezza ($\pm 1\%$)

Un modello empirico di questa dipendenza è data dalla legge di Cauchy

$$n(\lambda) = n_0 + \frac{A}{\lambda^2} + \dots \quad (1.10)$$

dove A prende il nome di Coefficiente di Cauchy, è possibile darne una stima a partire dai valori di n trovati distinguendo gli archi in base al colore delle bande.

1.4 Descrizione delle Misure

Abbiamo effettuato 3 coppie di campionamenti per ottenere 6 fit circolari indipendenti e, di conseguenza, tre stime sia per il raggio primario r che per il raggio secondario R , così da ottenere una stima sull'incertezza dalla deviazione dal valore medio.

1.5 Analisi dei Dati

Si sono effettuati 6 fit circolari indipendenti, uno per ognuna delle 3 bande di colore distinguibili all'interno dei due archi concentrici, di cui si riportano i risultati:

Da questi, prendendo come valore di riferimento la media e come incertezza associata lo scarto

Arcobaleno Primario						Arcobaleno Secondario					
$x_{(1)}$	$y_{(1)}$	$x_{(2)}$	$y_{(2)}$	$x_{(3)}$	$y_{(3)}$	$x_{(1)}$	$y_{(1)}$	$x_{(2)}$	$y_{(2)}$	$x_{(3)}$	$y_{(3)}$
230	620	240	720	240	700	144	700	141	687	138	662
235	561	230	622	232	590	146	520	145	518	140	555
274	437	243	515	301	589	181	405	186	393	212	341
351	331	316	370	424	271	286	249	295	239	408	159
489	236	453	254	580	210	476	129	489	121	611	97
828	237	863	253	739	209	850	130	839	123	754	100
968	331	1001	368	892	270	1033	248	1025	238	917	161
1043	437	1073	512	1016	390	1139	404	1135	392	1108	342
1083	561	1085	621	1085	589	1173	519	1170	512	1179	553
1086	622	1075	703	1076	701	1170	702	1173	690	1177	663

Tabella 1.1: Coordinate in pixel dei punti campionati sull'immagine

Arcobaleno Primario			Arcobaleno Secondario		
$r_{(rosso)}$	$r_{(giallo)}$	$r_{(blu)}$	$R_{(blu)}$	$R_{(giallo)}$	$R_{(rosso)}$
430.1	429.1	427.5	521.7	520.6	518.8

Tabella 1.2: Miglior stime dei raggi dell'arcobaleno ottenute dai fit

quadratico medio, si ottengono le misure dei raggi e del loro rapporto:

$$R = 520 \pm 1 \text{ [px]} \quad (1.11)$$

$$r = 429 \pm 1 \text{ [px]} \quad (1.12)$$

$$\frac{R}{r} = 1.213 \pm 0.005 \quad (1.13)$$

Dal momento che fra gli angoli di diffusione associati all'arcobaleno secondario e primario ed i rispettivi raggi sussiste la relazione:

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{R}{r} \quad (1.14)$$

L'indice di rifrazione n dell'acqua è vincolato a rispettare la seguente espressione:

$$\frac{\pi + 2 \arcsin\left(\frac{\sqrt{9-x^2}}{2\sqrt{2}}\right) - 6 \arcsin\left(\frac{\sqrt{9-x^2}}{2\sqrt{2}x}\right)}{4 \arcsin\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{x\sqrt{3}}\right) - 2 \arcsin\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{3}}\right)} - 1.213 = 0 \quad (1.15)$$

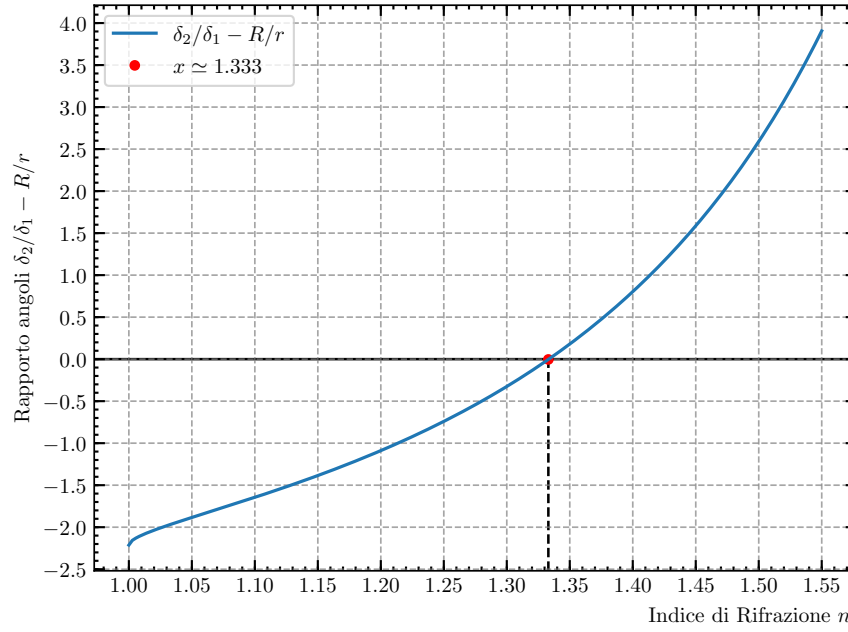


Figura 1.3: Grafico e soluzione dell'espressione (1.15) per l'indice di rifrazione

Da cui n risulta pari a 1.333 ± 0.001 come ci aspettavamo dalla teoria.

1.5.1 Legge di Cauchy

Per stimare il coefficiente A della legge di Cauchy 1.10 si è ripetuto lo stesso fit distinguendo nei rapporti dei raggi le bande del medesimo colore:

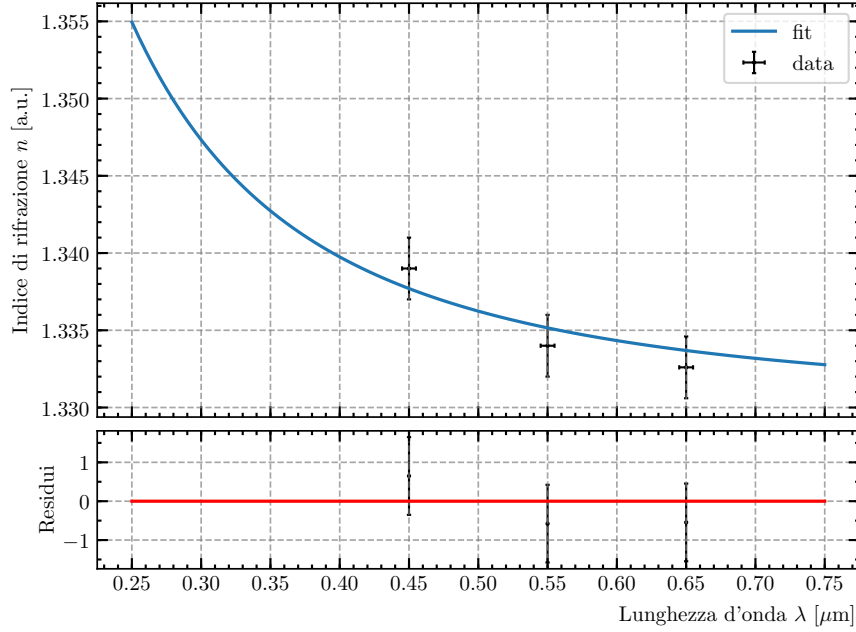


Figura 1.4: Fit con la legge di Cauchy

da cui si trovano i valori

$$n_0 = 1.318 \pm 0.005 \quad (1.16)$$

$$A = 5.3 \pm 0.3 \times 10^{-3} \quad (1.17)$$

$$\chi^2 = 0.5/2 \quad (1.18)$$

Questi risultano compatibili con quanto trovato da [3].

1.6 Conclusioni

Si è data una misura dell'indice di rifrazione dell'acqua con incertezza relativa minore dello 0.1%, compatibile con il risultato trovato durante l'esperienza del diottro, ma notevolmente più preciso rispetto a quest'ultimo ($> 2\%$), ciò si deve alla precisione del fit circolare e alla possibilità di abbassare l'errore sul valor medio ripetendo campionamenti e fit.

Capitolo 2

Alone Lunare e Indice di rifrazione del Ghiaccio

2.1 Scopo dell'esperienza

Spiegare e misurare l'ampiezza angolare dell'alone Lunare e da questa ricavare una stima dell'indice di rifrazione del ghiaccio.

2.2 Apparato sperimentale e strumenti

La strumentazione utilizzata si limita a una fotografia digitale del fenomeno trattato e di un software di elaborazione immagini [1] dotato di uno strumento per campionare diversi punti e distanze tra questi, in base alle proprie coordinate in pixel.

2.3 Cenni Teorici

Talvolta intorno alla Luna e al Sole è possibile osservare aloni circolari. Si osservi l'alone che circonda la Luna, l'allineamento lungo l'eclittica di Venere, Luna, Marte e Giove, e le tre stelle del triangolo primaverile che fanno da sfondo al fenomeno: Spica, Arcturus e Regulus.

L'alone è dovuto alla deflessione della Luce da parte di piccoli prismi esagonali (vapore acqueo ghiacciato presente nell'atmosfera). L'angolo di deflessione δ di un raggio di luce per un prisma (con angolo al vertice $\phi = 60^\circ$ costituito di materiale con indice di rifrazione n) dipende dall'angolo d'incidenza i secondo la relazione:

$$\delta = i - \phi + \arcsin \left(\sin \phi \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \sin^2 i \cos \phi \right) \quad (2.1)$$

Si ha angolo minimo di deflessione δ_m quando il raggio rifratto si propaga parallelo alla base del prisma, dalla (2.1) si trova minimo per un angolo d'incidenza:

$$i_m \approx 41^\circ \quad (2.2)$$

$$\delta_m \approx 22^\circ \quad (2.3)$$

come si può vedere dal grafico 2.2. L'angolo di deflessione minimo soddisfa l'identità

$$n = \frac{\sin \left(\frac{\delta_m + \phi}{2} \right)}{\sin(\phi/2)} \quad (2.4)$$

Da cui è possibile ricavare una stima dell'indice di rifrazione del ghiaccio.



Figura 2.1: La fotografia del fenomeno usata per i campionamenti

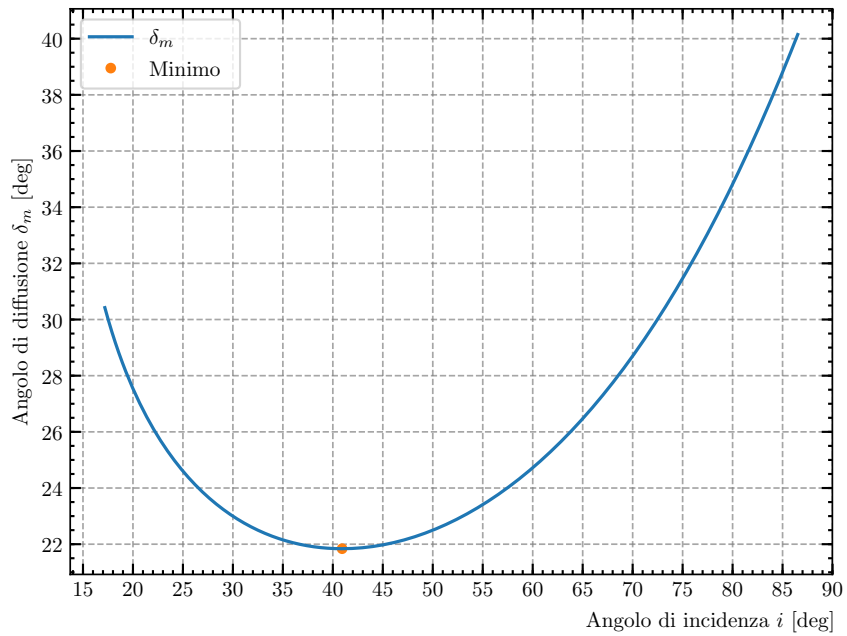


Figura 2.2: Angolo di deflessione per un prisma esagonale di ghiaccio in funzione dell'angolo d'incidenza

2.3.1 Legge di Gladstone-Dale

Sappiamo che gli indici di rifrazione di un mezzo in due diverse fasi di stato sono legati dalle loro densità ρ secondo la Legge di Gladstone-Dale:

$$(n - 1) = k\rho \quad (2.5)$$

Visto che le misure di indici proposte sono proprio dello stesso materiale nella sua fase solida e liquida può essere interessante verificare l'accordo di quest'ultima legge con i risultati sperimentali.

2.4 Descrizione delle Misure

La seguente tabella riporta i valori, in pixel, rilevati dai 4 campionamenti effettuati, anche stavolta per ottenere 4 fit circolari indipendenti e 4 diverse misure del raggio da cui stimare la deviazione dal valore medio.

$x_{(1)}$	$y_{(1)}$	$x_{(2)}$	$y_{(2)}$	$x_{(3)}$	$y_{(3)}$	$x_{(4)}$	$y_{(4)}$
562	191	487	235	506	222	612	185
684	192	752	234	741	223	584	188
445	298	437	316	432	327	559	197
801	299	809	314	810	325	531	210
427	372	429	380	427	388	497	232
821	374	818	381	817	389	474	255
453	479	487	518	488	470	442	307
793	480	774	520	800	469	430	361
518	551	553	571	511	542	437	429
744	553	687	570	759	541	463	486

Tabella 2.1: Coordinate in pixel dei punti campionati sull'immagine dell'alone.

2.5 Analisi dei Dati

Si sono effettuati 4 *fit circolari*, due per ciascuna banda di colore distinguibile all'interno dell'alone, così da poterne determinare il raggio R_{px} in pixel, se ne riportano i risultati nella tabella 2.2:

Alone	R_{px}	x_{centro}	y_{centro}
Verde(1)	198.9	624.3	383.5
Verde(2)	197.7	624.1	383.2
Rosso(1)	196.4	623.8	383.9
Rosso(2)	192.4	622.6	382.4

Tabella 2.2: Misure dell'alone lunare ottenute dai fit in pixel

Per esprimere la misura del raggio in gradi è necessaria una stima del fattore di conversione γ da pixel a gradi: fortunatamente la fotografia analizzata è stata scattata con un obiettivo che conserva le distanze angolari¹, quindi le distanze note tra le stelle del triangolo primaverile sono direttamente proporzionali a quelle osservate sullo sfondo dell'immagine. Si è consultato un catalogo stellare [4] per le coordinate delle tre stelle: indicando con θ l'angolo polare e ϕ quello azimutale, se ne è calcolata la distanza angolare sapendo che, per una coppia di punti di coordinate sferiche (θ_1, ϕ_1) e (θ_2, ϕ_2) , è data da:

$$\cos \alpha = \sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos (\phi_1 - \phi_2) \quad (2.6)$$

¹fish-eye diagonale da 15 mm

Per la calibrazione si è misurata la distanza d tra Arcturus e Spica, pari a 295 ± 1 pixel, quindi per (2.6) si ottiene una distanza angolare $\alpha = 32.8^\circ$, da cui abbiamo ricavato il fattore di conversione γ

$$\gamma = \frac{\alpha}{d} = 0.1112 \pm 0.0004 \quad (2.7)$$

Finalmente si riporta la misura del raggio R dell'alone lunare

$$R_{\text{px}} = 196 \pm 3 \text{ pixel} \quad (2.8)$$

$$R = \gamma R_{\text{px}} = 21.8 \pm 0.3^\circ \quad (2.9)$$

Il che risulta compatibile con la nota ampiezza angolare di circa 22° che ci aspettavamo. Analogamente a quanto visto nel caso dell'arcobaleno, l'ampiezza angolare dell'alone coincide con l'angolo δ_m di deflessione dovuto ai prismi di ghiaccio presenti nell'atmosfera, da (2.4) si ricava la nostra misura dell'indice di rifrazione del ghiaccio:

$$n = 2 \sin \left(\frac{R + \frac{\pi}{3}}{2} \right) = 1.310 \pm 0.001 \quad (2.10)$$

2.5.1 Gladstone Dale

Si è assunto come valore di riferimento per la densità dell'acqua $\rho = 0.997 \pm 0.001 \text{ g/cm}^3$. Per cui la nostra stima per la costante di Gladstone-Dale

$$k = \frac{n - 1}{\rho} = 0.335 \pm 0.001 \quad (2.11)$$

risulta compatibile con quanto osservato [5] per luce d'ampiezza $\lambda = 546 \mu\text{m}$ a 25° Celsius, ovvero sia $\bar{k} = 0.335$. Dunque si può dare una stima della densità del ghiaccio invertendo la legge (2.5):

$$\rho = \frac{n - 1}{k} = 0.92 \pm 0.01 \text{ g/cm}^3 \quad (2.12)$$

compatibile entro l'errore sperimentale con il valore osservato [6] $\rho_{\text{ice}} = 0.9168 \text{ g/cm}^3$ per il ghiaccio.

2.6 Conclusioni

L'ipotesi di cristalli esagonali come causa del fenomeno dell'alone lunare risulta plausibile, inoltre si sono misurati l'indice di rifrazione e la densità del ghiaccio con incertezze relative dell'1% circa.

Capitolo 3

Esperienze di Laboratorio

Laboratorio di Fisica I

Misura di Indici di Rifrazione

Bernardo Tomelleri (587829)
b.tomelleri@studenti.unipi.it

Marco Romagnoli (578061)
m.romagnoli@studenti.unipi.it

21/02/2019

3.1 Scopo dell'esperienza

L'obiettivo dell'esperienza consiste nella misura degli indici di rifrazione del plexiglass e dell'acqua.

3.2 Apparato sperimentale e strumenti

- Banco ottico con sorgente luminosa;
- un semicilindro di Plexiglass;
- un diottro sferico riempito d'acqua;
- un metro a nastro (risoluzione 1 mm).

3.3 Cenni Teorici

Indice di rifrazione del plexiglass

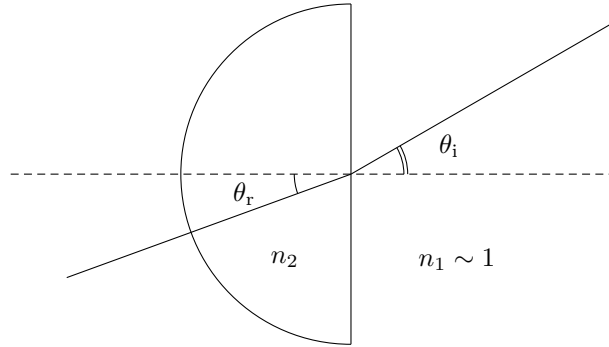


Figura 3.1: Schematizzazione dell'apparato per la misura dell'indice di rifrazione del plexiglass. L'angolo di incidenza θ_i (di rifrazione θ_r) è l'angolo formato dal raggio luminoso incidente (rifratto) con la normale alla superficie di separazione tra i due mezzi.

Quando un raggio di luce passa da un mezzo con indice di rifrazione n_1 ad un altro con indice di rifrazione n_2 , gli angoli di rifrazione θ_i e incidenza θ_r sono legati tra loro dalla legge di Snell - Cartesio:

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r. \quad (3.1)$$

Assumendo come indice di rifrazione dell'aria, con buona approssimazione, $n_1 \sim 1$ è possibile ricavare l'indice di rifrazione del plexiglass dal rapporto $n_2 = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r}$.

Indice di rifrazione dell'acqua

Con riferimento alla figura 3.2: siano r il raggio del diottro, p la distanza del vertice del diottro dalla sorgente luminosa e q la distanza dello stesso dall'immagine proiettata sullo schermo, (una volta messa a fuoco): queste lunghezze sono legate dalla relazione

$$\frac{n_2}{p} + \frac{n_1}{q} = \frac{(n_2 - n_1)}{r}. \quad (3.2)$$

Avendo assunto come indice di rifrazione dell'aria $n_1 \sim 1$, risulta chiaro, invertendo (3.2) per $\frac{1}{q}$, come nel grafico cartesiano $(1/p_i, 1/q_i)$ il coefficiente angolare debba corrispondere all'indice di rifrazione dell'acqua $-n_2$.

$$\frac{1}{q} = -\frac{n_2}{p} + \frac{(n_2 - 1)}{r} = -n_2 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r}. \quad (3.3)$$

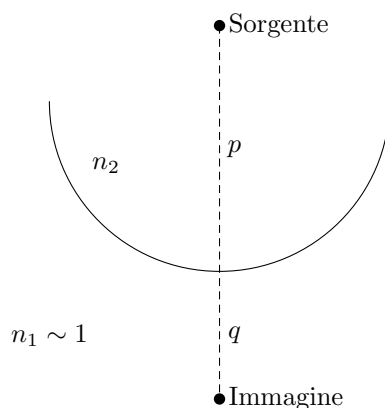


Figura 3.2: Schematizzazione dell'apparato per la misura dell'indice di rifrazione dell'acqua. Le grandezze q e p sono definite, rispettivamente come la distanza dal vertice del diottro della sorgente e dell'immagine (a fuoco sullo schermo).

Per lo stesso motivo, dal valore dell'intercetta b , è possibile ottenere una stima del raggio $r = \frac{n_2-1}{b}$ del diottro.

3.4 Descrizione delle Misure

Indice di rifrazione del plexiglass

Si sono montati sul banco ottico un diaframma a fenditura e una lente convergente davanti alla sorgente luminosa per ottenere un fascio sottile di luce da misurare. Si è quindi posizionato il semicilindro di plexiglass sul piatto girevole, di modo che il centro della superficie fosse illuminato dal raggio, onde evitare ulteriori rifrazioni in uscita. Dunque abbiamo misurato 10 coppie di valori $\sin \theta_i$, $\sin \theta_r$ alterando l'angolo di incidenza ruotando la piattaforma.

$\sin \theta_i$ [cm]	$\sin \theta_r$ [cm]
0.5	0.8
0.7	1.1
1.1	1.4
1.3	1.8
1.5	2.0
1.8	2.3
2.1	3.1
2.4	3.4
2.7	4.1
2.9	4.2

Tabella 3.1: Le misure di incertezza per $\sin \theta_i$ e $\sin \theta_r$ corrispondono alla risoluzione del metro a nastro = 1 mm

Indice di rifrazione dell'acqua

Si sono scelte 10 posizioni della sorgente (immersa in acqua), dunque una volta aggiustata la posizione dello schermo affinché l'immagine del rombo sulla superficie della lampadina fosse a fuoco, si sono misurati i valori corrispondenti di p e q :

p [cm]	q [cm]
31.3	108.1
32.8	88.3
34.1	78.3
34.5	77.5
34.9	74.6
36.1	65.9
37.4	61.1
40.1	54.2
40.8	51.6
45.3	44.6

Tabella 3.2: Data la difficoltà nello stabilire il punto esatto in cui l'immagine risulta a fuoco, ad ogni misura di q è stata attribuita un'incertezza di 1 cm, mentre ad ogni p di 0.2 cm

3.5 Analisi dei Dati

Indice di rifrazione del plexiglass

Dal momento che le incertezze sulle misure lungo le ascisse e le ordinate sono uguali, si ripete il fit considerando un errore efficace su y

$$\sigma_{\text{eff}} = \sqrt{\left| \frac{dy}{dx} \right| \sigma_{x_i}^2 + \sigma_{y_i}^2}$$

minimizzando un chi quadro che tenga conto di entrambi gli errori:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - mx_i)^2}{\sigma_{\text{eff}}^2} \quad (3.4)$$

fino a quando l'incertezza su x sarà trascurabile rispetto a σ_{eff} . Si sono riportate le coppie di valori dei seni degli angoli di incidenza e rifrazione nel seguente grafico di $\sin \theta_i$ in funzione di $\sin \theta_r$: Avendo assunto come indice di rifrazione dell'aria $n_1 \sim 1$, da un fit per una legge lineare

$$y = mx + b$$

con intercetta lasciata come parametro libero si ricavano i seguenti valori:

$$\begin{aligned} m &= 1.47 \pm 0.07 \\ b &= 0.06 \pm 0.11 \sim 0 \\ \chi^2 &= 5.7/8 \end{aligned}$$

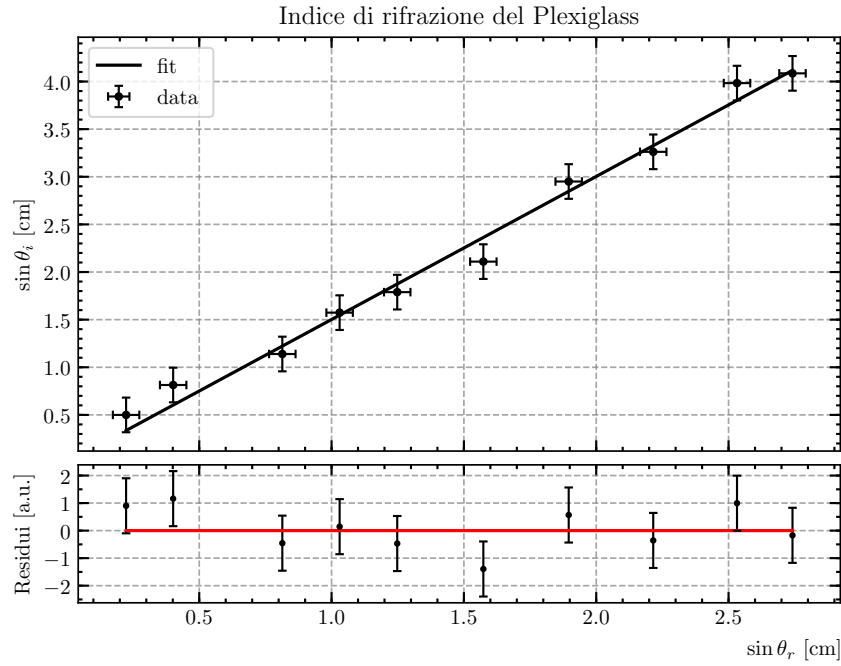
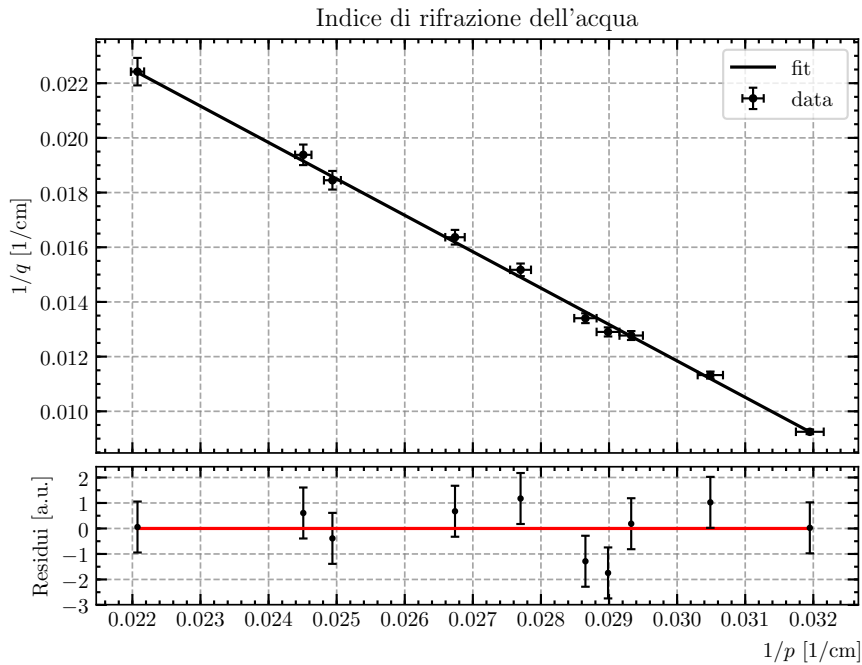
Imponendo intercetta nulla, come previsto da (3.1) si ottiene come coefficiente angolare della retta di *best fit*:

$$\begin{aligned} n &= 1.50 \pm 0.03 \\ \chi^2 &= 6/9 \end{aligned}$$

La nostra miglior stima dell'indice di rifrazione del plexiglass.

Indice di rifrazione dell'Acqua

Si sono riportate le misure di p e q nel seguente grafico di $\frac{1}{q}$ in funzione di $\frac{1}{p}$: Tramite fit lineare

Figura 3.3: Grafico di $\sin \theta_i$ in funzione di $\sin \theta_r$ Figura 3.4: Grafico di $1/q$ in funzione di $1/p$

si trovano il coefficiente angolare m della retta di *best fit*, dunque l'indice di rifrazione dell'acqua,

e l'intercetta b , corrispondente alla costante legata al raggio del diottro:

$$m = -1.33 \pm 0.03$$

$$b = 0.052 \pm 0.001 \text{ cm}$$

$$r = \frac{1 - n_2}{b} = 6.4 \pm 0.3 \text{ cm}$$

$$\chi^2 = 8.1/8$$

Nota sul metodo di fit

Per determinare i parametri ottimali e le rispettive varianze si è implementato un metodo di fit basato sui minimi quadrati mediante la funzione *curve_fit* di Python.

3.6 Conclusioni

Si riportano di seguito i valori *indicativi* degli indici di rifrazione da misurare e quanto trovato nelle nostre misure:

Materiale	$E[n]$	n	
Plexiglass	1.49	1.50 ± 0.03	$\chi_{rid}^2 = 0.67$
Acqua	1.33	1.33 ± 0.03	$\chi_{rid}^2 = 1.0125$

In entrambi i casi i valori attesi sono compatibili con i risultati sperimentali.

Laboratorio di Fisica I

Misura di Focali

Bernardo Tomelleri (587829)
b.tomelleri@studenti.unipi.it

Marco Romagnoli (578061)
m.romagnoli@studenti.unipi.it

21/03/2019

3.7 Scopo dell'esperienza

L'obiettivo dell'esperienza consiste nel misurare le distanze focali di un set di lenti, tra cui almeno una convergente e una divergente.

3.8 Apparato sperimentale e strumenti

- Banco ottico con sorgente luminosa, supporto per lenti e schermo mobile;
- Un set di lenti dal differente potere diottrico;
- un metro a nastro (risoluzione: 1 mm);

3.9 Cenni Teorici

Lente Convergente

Per la legge delle lenti sottili, posta una distanza p tra la sorgente e la lente e una distanza q tra la lente e l'immagine a fuoco, vale la relazione

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad (3.5)$$

dove f è la distanza focale della lente.

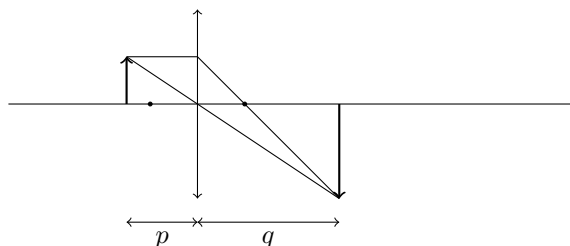


Figura 3.5: Schema ottico per la lente convergente.

Lente Divergente

La lente divergente non forma immagini reali, per ottenerne la distanza focale occorre mettere a fuoco l'immagine prodotta da una lente convergente di potere diottrico maggiore in modulo, dunque interporre la divergente tra la prima lente e lo schermo. La legge si applica in questo caso alla distanza p (negativa) tra la lente divergente e la posizione iniziale dello schermo e alla distanza q (positiva) tra la divergente e lo schermo, spostato per la messa a fuoco della nuova immagine.

3.10 Descrizione delle misure

Visto che la dimensione della lente è prossima alla risoluzione del metro a nastro ($= 1 \text{ mm}$) e la posizione della lente nella ghiera di montaggio non è ben definita, si è fatta particolare attenzione nel misurare le distanze p e q : ad esempio scegliendo di studiare le lenti con distanze focali più piccole, onde evitare il contributo all'incertezza nel caso in cui l'immagine appaia a fuoco su un intervallo molto più grande del mm di risoluzione del metro.

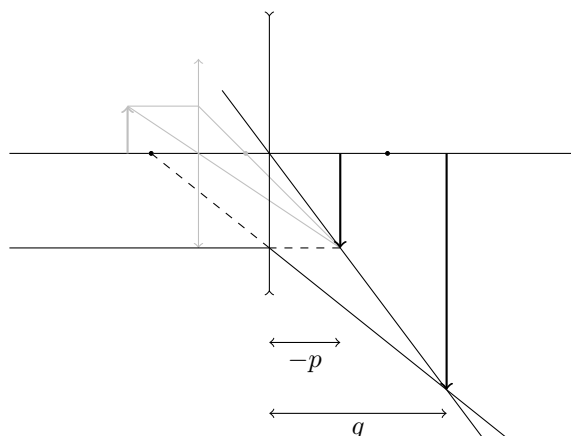


Figura 3.6: Schema ottico per la lente divergente. Notare che la sorgente per la lente divergente è virtuale.

Lente Convergente

Si sono misurate 10 distanze p_i tra la sorgente luminosa e la lente, eseguita la messa a fuoco, le corrispondenti distanze q_i tra la convergente e l'immagine sullo schermo per due lenti: una con lunghezza focale $+50$ mm, l'altra con $f = +100$ mm riportate rispettivamente nelle Tabelle 3.3 e 3.8:

p_i [cm]	q_i [cm]
7.2	16.6
8.3	13.7
9.3	11.7
10.6	10.1
11.6	9.2
13.0	8.4
14.2	7.9
15.7	7.6
16.8	7.3
17.2	7.1

Tabella 3.3: Lente $+50$ mm

p_i [cm]	q_i [cm]
11.8	70.3
12.7	51.6
13.3	44.1
13.7	39.0
15.0	30.7
16.2	27.5
17.3	23.8
18.0	22.4
19.1	21.5
20.5	19.9

Tabella 3.4: Lente $+100$ mm

Le incertezze sulle misure di p e q corrispondono a 1 mm

Lente Divergente

Si sono misurate 11 coppie di distanze p_i (tra la lente divergente e l'immagine della convergente) e q_i (tra la divergente e la propria immagine messa a fuoco) di seguito riportate nella tabella 3.5:

3.11 Analisi dei Dati

Dal momento che le incertezze sulle misure lungo le ascisse e le ordinate sono uguali, si ripete il fit considerando un errore efficace su y

$$\sigma_{\text{eff}} = \sqrt{\left| \frac{dy}{dx} \right| \sigma_{x_i}^2 + \sigma_{y_i}^2}$$

$-p_i$ [cm]	q_i [cm]
7.2	11.2
8.5	15.4
9.3	18.2
10.2	20.9
10.0	20.1
10.5	22.4
11.6	32.1
12.0	31.4
12.7	36.5
13.9	51.1
15.4	67.6

Tabella 3.5: Le incertezze sulle misure di p e q corrispondono a 1 mm

come già visto nella misura dell'indice di rifrazione del Plexiglass, minimizzando

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - mx_i)^2}{\sigma_{y_i}^2 + m\sigma_{x_i}^2} \quad (3.6)$$

fino a quando l'errore su x sarà trascurabile rispetto a σ_{eff} .

Lente Convergente

Si costruisce il grafico cartesiano di $(1/p_i, 1/q_i)$ e si esegue un *fit* con una legge lineare del tipo

$$y(1/p) = m(1/p) + h \quad (3.7)$$

per determinare il potere diottrico $\frac{1}{f}$ delle lenti. Risulta chiaro, invertendo (3.5) per $\frac{1}{q}$, come l'intercetta h debba corrispondere con $\frac{1}{f}$ e sia $m = -1$. Per la lente convergente da 5 cm si ottiene:

$$\begin{aligned} m &= -1.04 \pm 0.04 \\ h &= 0.199 \pm 0.003 \text{ 1/cm} \\ f &= \frac{1}{h} = 5.02 \pm 0.08 \text{ cm} \\ \chi^2 &= 6.6/8 \end{aligned}$$

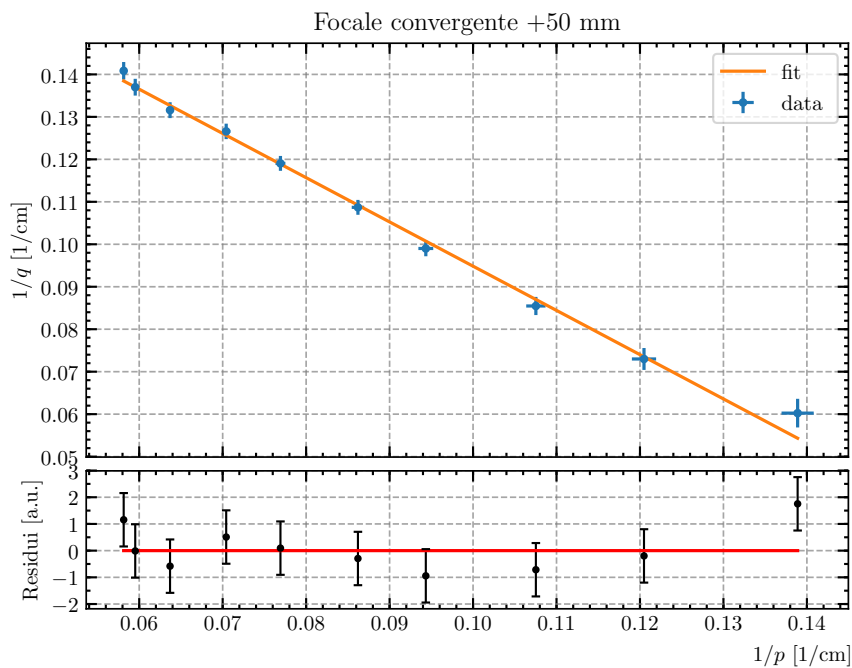
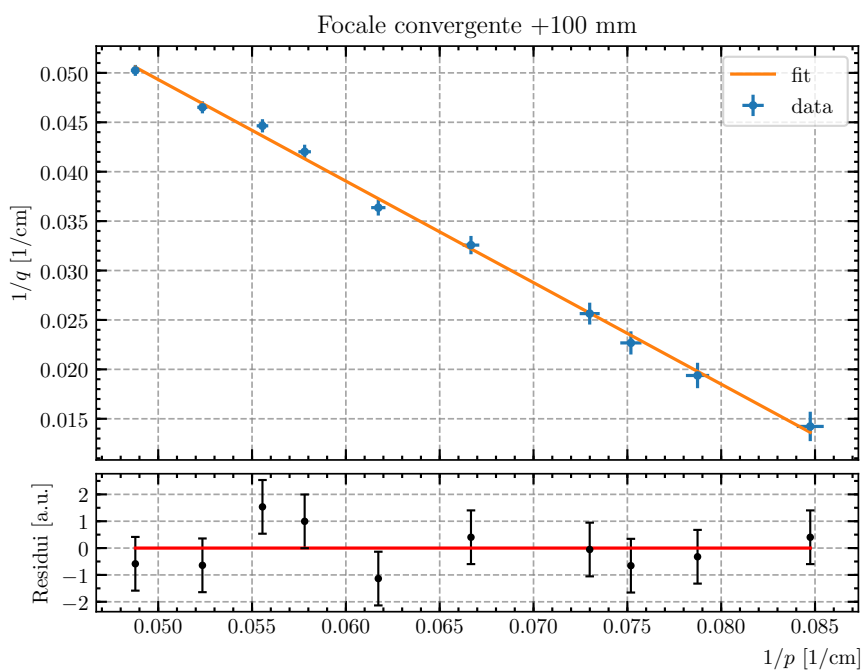
E per la lente convergente da 10 cm si ha:

$$\begin{aligned} m &= -1.02 \pm 0.03 \\ h &= 0.101 \pm 0.001 \text{ 1/cm} \\ f &= 9.9 \pm 0.1 \text{ cm} \\ \chi^2 &= 6.3/8 \end{aligned}$$

Lente Divergente

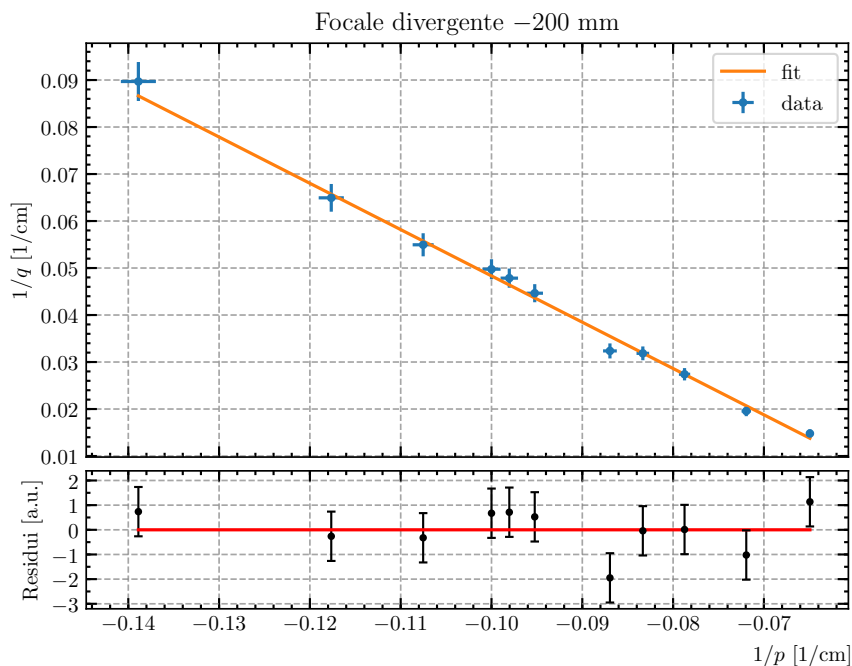
In maniera del tutto analoga si costruisce il grafico $(1/p_i, 1/q_i)$ e si esegue un *fit* lineare per determinare il potere diottrico della lente divergente. Ottenendo così i valori:

$$\begin{aligned} m &= -0.98 \pm 0.03 \\ h &= -0.050 \pm 0.002 \text{ 1/cm} \\ f &= -20.0 \pm 0.8 \text{ cm} \\ \chi^2 &= 10.2/9 \end{aligned}$$

Figura 3.7: Grafico di $1/p$ in funzione di $1/q$ Figura 3.8: Grafico di $1/p$ in funzione di $1/q$

Nota sul metodo di fit

Per determinare i parametri ottimali e le rispettive varianze si è implementato un metodo di fit basato sui minimi quadrati mediante la funzione *curve_fit* di Python.

Figura 3.9: Grafico di $1/p$ in funzione di $1/q$

3.12 Conclusioni

Lente Convergente

Tramite *fit* lineare si sono ottenuti coefficienti angolare m pari a compatibili con -1 , come ci aspettavamo dalla teoria. Confrontando i valori delle distanze focali f stimate con i valori riportati su di queste si trova nuovamente accordo:

Lunghezza focale	f [mm]
+ 50	50.2 ± 0.8
+ 100	99 ± 1

Lente Divergente

Anche per la lente divergente la stima della distanza focale ottenuta dal fit lineare risulta compatibile con il valore fornito:

Lunghezza focale	f [mm]
- 200	-200 ± 8

Bibliografia

- [1] S. Kimball, P. Mattis *et al.* (2019, May) Gnu image manipulation program. [Online]. Available: <https://www.gimp.org/>
- [2] J. Walker, “Multiple rainbows from single drops of water and other liquids,” *American Journal of Physics*, vol. 44, no. 5, Jan. 1976.
- [3] A. Bashkatov and E. Genina, “Water refractive index in dependence on temperature and wavelength: A simple approximation,” *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, vol. 5068, 10 2003.
- [4] N. Krina. (2019, Apr.) Sky map online. [Online]. Available: http://kosmoved.ru/nebo_segodnya_geo.php?lang=eng&m=sky-map-online
- [5] J. S. Rosen, “The refractive indices of alcohol, water, and their mixtures at high pressures,” *Journal of the Optical Society of America*, vol. 37, no. 11, pp. 932 – 938, Jun. 1947.
- [6] K. F. Voitkovskii, “The mechanical properties of ice (mekhanicheskie svoistva l'da),” *Gidrokhimicheskie Materialy*, 1960.