Esercizi di Geometria differenziale

Bernardo Tomelleri*

6 ottobre 2021

1 Esercizi del 02/10/2021

Esercizio 1.1. Siano X e Y due spazi topologici. La topologia prodotto su $X \times Y$ è definita nel modo seguente: un sottoinsieme $A \subseteq X \times Y$ è aperto se e solo se è unione arbitraria di sottoinsiemi $U \times V$ dove $U \subseteq X$ e $V \subseteq Y$ sono entrambi aperti. Mostra che questa è veramente una topologia su $X \times Y$.

Svolgimento.

Esercizio 1.2. Sia $f : X \to Y$ una funzione suriettiva da uno spazio topologico X su un insieme Y. La topologia quoziente su Y è definita nel modo seguente: un sottoinsieme $A \subseteq Y$ è aperto se e solo se la sua controimmagine $f^{-1}(A)$ è aperta. Mostra che questa è veramente una topologia su X.

Svolgimento.

Esercizio 1.3. Sia $f : X \to Y$ una funzione fra spazi topologici. Mostra che f è continua se e solo se vale il fatto seguente: per ogni $x \in X$ e per ogni intorno A di $f(x)$, la controimmagine $f^{-1}(A)$ è un intorno di x.

Svolgimento.

Esercizio 1.4. Sia K uno spazio topologico compatto. Sia $C \subseteq K$ un sottoinsieme chiuso. Mostra che C è compatto.

Svolgimento. Per ipotesi esiste un ricoprimento aperto finito $\{A_i\}$ tale che $\bigcup_i A_i = K$. Se $C \subseteq K$, allora lo stesso ricoprimento a maggior ragione copre anche C e continua ad essere finito.

Esercizio 1.5. Mostra che il segmento $[0, 1]$ è connesso, usando solo la definizione di connesso (e nessun altro teorema: di solito questo fatto si mostra subito dopo la definizione).

Dimostrazione. Per assurdo supponiamo che $[0, 1]$ sia unione disgiunta di due sottoinsiemi aperti $A, B \subseteq [0, 1]\ : A \cup B = [0, 1]$ con $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ e $A \cap B = \emptyset$. Supponiamo che $0 \in A$, poiché A è aperto $\exists \epsilon > 0$ tale che un intorno $U(0)_\epsilon = [0, \epsilon) \subseteq A$. Consideriamo il $\sup_\epsilon \{U(0)_\epsilon\} = U(0)_\eta$ di questi intorni; per ipotesi dev'essere $\eta \neq 1$ (altrimenti $[0, 1)$ sarebbe contenuto in A, dunque $A = [0, 1]$ chiuso). Ora, poiché $A \cap B = \emptyset$ sono aperti disgiunti, $\eta \notin B$, ma $\eta \in A$. Ma allora sempre per apertura di A dovrebbe esistere un intorno di η contenuto in $[0, 1)$ e quindi un secondo raggio $\eta' > \eta$ per cui vale ancora $U(0)'_\eta = [0, \eta') \subseteq A$. Assurdo per definizione di η come sup. Da cui concludiamo che $\eta \in A$, $A = [0, 1]$ e $B = \emptyset$, cioè $[0, 1]$ non è sconnesso.

*Università di Pisa

Esercizio 1.6. Mostra che il sottoinsieme seguente in $\mathbb{R}^2$ è connesso ma non connesso per archi:

$$X = \{(0,y) | y \in [-1,1]\} \bigcup \{(x, \sin 1/x) | x > 0\} .$$

Svolgimento.

Esercizio 1.7. Scrivere le funzioni di transizione di uno dei due atlanti che abbiamo scelto per S^n e verifica che sono lisce.

Svolgimento.

Esercizio 1.8. Mostra che la mappa

$$f : S^n \to \mathbb{RP}^n, (x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \mapsto [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]$$

è liscia.

Svolgimento.

Un *diffeomorfismo* è una mappa liscia $f : M \to N$ fra varietà lisce che ha un'inversa, anch'essa liscia.

Esercizio 1.9. Costruisci due atlanti *non* compatibili per la varietà topologica $\mathbb{R}$. Mostra però che le due varietà lisce risultanti sono comunque diffeomorfe!

Svolgimento.

Esercizio 1.10. Mostra che $\mathbb{RP}^1$ e S^1 sono diffeomorfi.

Svolgimento.