Esercizi di Geometria Differenziale del 16 Ottobre

Marco Romagnoli (578061)*

7 novembre 2021

Esercizio 2.5

Svolgimento. Siano X e Y due campi vettoriali in $\mathbb{R}^n$ e sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ liscia. Sapendo che $X = x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $Y = y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, dove è stata usata la notazione di Einstein per le sommatorie sui doppi indici, si ha che

$$[X,Y]f = XYf - YXf = x^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(y^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(x^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) =$$
$$= x^i \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} + y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right) - y^j \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} + x^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}\right)$$

Essendo f liscia in $\mathbb{R}^n$, vale il teorema di Schwarz e quindi le derivate parziali miste commutano. Perciò il termine

$$x^i y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - y^j x^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$$

si annulla, dato che è una sommatoria su tutti gli indici i e j.
Quindi alla fine rimane solo

$$[X,Y]f = x^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} - y^j \frac{\partial x^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i}$$

da cui, cambiando opportunamente gli indici, si ricava la tesi:

$$[X,Y]^i = x^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j} - y^j \frac{\partial x^i}{\partial x^j}.$$

□

Esercizio 2.6

Svolgimento. Siano X,Y e Z tre campi vettoriali su una varietà M. Per la bilinearità del commutatore, si ha che:

$$[[X,Y],Z] = [XY,Z] - [YX,Z] = XYZ - ZXY - YXZ + ZYX.$$

*svolti insieme a Bernardo Tomelleri (587829)

Permutando ciclicamente i campi si ottiene:

$$\begin{aligned}
[[X,Y],Z] &= XYZ - ZXY - YXZ + ZYX \\
[[Y,Z],X] &= YZX - XYZ - ZYX + XZY \\
[[X,Y],Z] &= ZXY - YZX - XZY + YXZ
\end{aligned}$$

Da qui si vede chiaramente che, a destra dell'uguale, per ogni termine compare anche il suo opposto. Quindi, sommando tutto, il risultato si annulla:

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Y,Z],X] = 0.$$

□

Esercizio 2.8

Dimostrazione. Siano X e Y due campi vettoriali su una varietà M e sia $f, g, h : M \to \mathbb{R}$ lisce. Inizialmente si può vedere che

$$\begin{aligned}
[fX,Y]h &= fXYh - Y(fX)h = fXYh - (Yf)(Xh) + fYXh = \\
&= f[X,Y]h - (Yf)(Xh) = (f[X,Y] - (Yf)X)\, h
\end{aligned}$$

dove è stato usato il fatto che Y è una derivazione.
Per cui vale analogamente che

$$\begin{aligned}
[X,gY]h &= X(gY)h - gYXh = (Xg)(Yh) + gXYh - gYXh = \\
&= g[X,Y]h + (Xg)(Yh) = (g[X,Y] + (Xg)Y)\, h
\end{aligned}$$

da cui, combinando i due risultati, si ottiene la tesi

$$[fX,gY] = f[X,gY] - g(Yf)X = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

□