Esercizi di Geometria differenziale

Bernardo Tomelleri[*] (587829)

5 novembre 2021

1 ESERCIZI DEL 02/10/2021

Esercizio 1.1. Siano X e Y due spazi topologici. La topologia prodotto su $X \times Y$ è definita nel modo seguente: un sottoinsieme $A \subseteq X \times Y$ è aperto se e solo se è unione arbitraria di sottoinsiemi $U \times V$ dove $U \subseteq X$ e $V \subseteq Y$ sono entrambi aperti. Mostra che questa è veramente una topologia su $X \times Y$.

Svolgimento. Sicuramente l'insieme vuoto $\emptyset$ e l'intero insieme $X \times Y$ sono aperti nella topologia prodotto, visto che si possono scrivere come prodotto di sottoinsiemi aperti di X e Y. Basta prendere come sottoinsiemi aperti gli insiemi vuoti $\emptyset_X$ e $\emptyset_Y$ degli spazi di partenza e i sottoinsiemi interi X e Y aperti per definizione negli spazi topologici X e Y.

Esercizio 1.2. Sia $f : X \to Y$ una funzione suriettiva da uno spazio topologico X su un insieme Y. La topologia quoziente su Y è definita nel modo seguente: un sottoinsieme $A \subseteq Y$ è aperto se e solo se la sua controimmagine $f^{-1}(A)$ è aperta. Mostra che questa è veramente una topologia su X.

Svolgimento. Osserviamo che la controimmagine dell'insieme vuoto $\emptyset$ e dell'insieme delle classi di equivalenza Y definite da f sono rispettivamente $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ e $f^{-1}(Y) = X$, che sono entrambi aperti in X per definizione di spazio topologico.

Esercizio 1.3. Sia $f : X \to Y$ una funzione fra spazi topologici. Mostra che f è continua se e solo se vale il fatto seguente: per ogni $x \in X$ e per ogni intorno A di $f(x)$, la controimmagine $f^{-1}(A)$ è un intorno di x.

[*] Esercizi svolti in collaborazione con Marco Romagnoli (578061)

Svolgimento. Per definizione f è continua se la controimmagine di ogni sottoinsieme aperto di Y è un aperto in X: Se $A \in \tau_Y \implies f^{-1}(A) \in \tau_X$. Per prima cosa supponiamo f continua e prendiamo un generico punto $x \in X$ e un intorno A di $f(x)$ in Y. Per ipotesi $f^{-1}(A)$ è un aperto di X che contiene x (visto che per costruzione $f(x) \in A$) quindi è un intorno di x.
Viceversa, se $\forall x \in X$ e $\forall A$ intorno di $f(x)$ in Y la sua controimmagine $f^{-1}(A) \subseteq X$ è un intorno di x, consideriamo un aperto $B \subseteq Y$ qualsiasi:

1. Se $B \cap f(X) = \emptyset$, allora $f^{-1}(B) = \emptyset$ che per definizione di spazio topologico è sempre un aperto di X.

2. Se invece $B \cap f(X) \neq \emptyset \implies \exists x : f(x) \in B$, cioè B è un intorno di $f(x)$. Per ipotesi allora $f^{-1}(B) \subseteq X$ è a sua volta un intorno di x e, a maggior ragione, $f^{-1}(B)$ è un aperto di X.

Esercizio 1.4. Sia K uno spazio topologico compatto. Sia $C \subsetneq K$ un sottoinsieme chiuso. Mostra che C è compatto.

Svolgimento. Per ipotesi tutti i ricoprimenti aperti di K, $\{A_i\}_{i\in I} : K \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ ammettono un sottoricoprimento finito $\{A_i\}$ tale che $\bigcup_i A_i = K$. È chiaro come ogni ricoprimento aperto di C $\{U_i\}_{i\in I}$ tale che $K \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ debba essere anche un ricoprimento di K, quindi per ipotesi ammette sottoricoprimento finito $\{U_i\} : \bigcup_i U_i = K$ la cui intersezione con C è sicuramente un suo sottoricoprimento aperto finito $\{U_i \cap C\} : \bigcup_i U_i \cap C = C$.

Nel caso opposto $K \nsubseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ basta considerare come ricoprimento $\{U_i\}_{i\in I} \cup C^c$, che è ancora aperto in quanto unione di aperti ($C^c = K \setminus C$ aperto perché C-chiuso per ipotesi). Questo è un ricoprimento di K, quindi come prima per compattezza sappiamo che ammette sottoricoprimento finito $\{U_i \cup C^c\}_i : \bigcup_i U_i \cup C^c = K$ la cui restrizione a C è un suo sottoricoprimento aperto finito.

Esercizio 1.5. Mostra che il segmento $[0, 1]$ è connesso, usando solo la definizione di connesso (e nessun altro teorema: di solito questo fatto si mostra subito dopo la definizione).

Dimostrazione. Per assurdo supponiamo che $[0, 1]$ sia unione disgiunta di due sottoinsiemi aperti $A, B \subseteq [0, 1]\ : A \cup B = [0, 1]$ con $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ e $A \cap B = \emptyset$. Supponiamo che $0 \in A$, poiché A è aperto $\exists \epsilon > 0$ tale che un intorno $U(0)_\epsilon = [0, \epsilon) \subseteq A$. Consideriamo il $\sup_\epsilon\{U(0)_\epsilon\} = U(0)_\eta$ di questi intorni; per ipotesi dev'essere $\eta \neq 1$ (altrimenti $[0, 1)$ sarebbe contenuto in A, dunque $A = [0, 1]$ chiuso). Ora, poiché $A \cap B = \emptyset$ sono aperti disgiunti, $\eta \notin B$, ma $\eta \in A$. Ma allora sempre per apertura di A dovrebbe esistere un intorno di η contenuto in $[0, 1)$ e quindi un secondo raggio $\eta' > \eta$ per cui vale ancora $U(0)'_\eta = [0, \eta') \subseteq A$. Assurdo per definizione di η come sup. Da cui concludiamo che $\eta \in A$, $A = [0, 1]$ e $B = \emptyset$, cioè $[0, 1]$ non è sconnesso.

Esercizio 1.6. Mostra che il sottoinsieme seguente in $\mathbb{R}^2$ è connesso ma non connesso per archi:

$$X = \{(0, y) | y \in [-1, 1]\} \bigcup \{(x, \sin 1/x) | x > 0\} .$$

Svolgimento.

Esercizio 1.7. Scrivere le funzioni di transizione di uno dei due atlanti che abbiamo scelto per S^n e verifica che sono lisce.

Svolgimento.

Esercizio 1.8. Mostra che la mappa

$$f : S^n \to \mathbb{RP}^n, (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \mapsto [x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}]$$

è liscia.

Svolgimento.

Un *diffeomorfismo* è una mappa liscia $f : M \to N$ fra varietà lisce che ha un'inversa, anch'essa liscia.

Esercizio 1.9. Costruisci due atlanti *non* compatibili per la varietà topologica $\mathbb{R}$. Mostra però che le due varietà lisce risultanti sono comunque diffeomorfe!

Svolgimento.

Esercizio 1.10. Mostra che $\mathbb{RP}^1$ e S^1 sono diffeomorfi.

Svolgimento.

2 ESERCIZI DEL 16/10/2021

Esercizio 2.1. Costruisci un embedding del toro n-dimensionale

$$S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}.$$

per ogni $n \geq 1$.

Svolgimento.

Un sottoinsieme Y di uno spazio topologico X è *denso* se interseca qualsiasi aperto di X

Esercizio 2.2. Siano p, q due numeri reali con $\frac{p}{q}$ irrazionale. Mostra che la mappa

$$f : \mathbb{R} \to S^1 \times S^1 t \mapsto \left(e^{ipt}, e^{iqt}\right)$$

è una immersione iniettiva ma non un embedding: l'immagine è densa in $S^1 \times S^1$ quindi non può essere una sottovarietà.

Svolgimento.

Esercizio 2.3. Sia $f : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^4$ la mappa

$$f([x, y, z]) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}(x^2 - y^2, xy, xz, yz)$$

Mostra che f è un embedding.

Svolgimento.

Esercizio 2.4. Sia $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ una sfera di dimensione dispari. Considera il campo vettoriale tangente su S^{2n-1}:

$$X(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \dots, x_{2n}, -x_{2n-1})$$

Scrivi esplicitamente il flusso di questo campo e determina le sue linee integrali.

Svolgimento.

Esercizio 2.5. Siano X e Y due campi vettoriali in $\mathbb{R}^n$. Mostra che

$$[X, Y]^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}.$$

Svolgimento.

Esercizio 2.6. Data una matrice quadrata A, sia X_A il campo vettoriale su $\mathbb{R}^n$ dato da $X_A(x) = Ax$. Mostra che

$$[X_A, X_B] = X_{BA-AB}.$$

Svolgimento.

Esercizio 2.7. Dimostra l'identità di Jacobi: dati tre campi vettoriali X, Y, Z su una varietà M, vale

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] \equiv 0.$$

Svolgimento.

Esercizio 2.8. Sia M una varietà, siano X, Y campi vettoriali su M e f, $g \in C^\infty(M)$. Mostra che

$$[fX, gY] = fg[X, Y] - f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

Svolgimento.