Esercizi di Geometria Differenziale del 16 Ottobre

Marco Romagnoli (578061)*

26 novembre 2021

Esercizio 3.3

Suppongo per assurdo che esistano $\overline{v}$ e $\overline{w}$ tali per cui

$$\overline{v} \otimes \overline{w} = v \otimes w + v' \otimes w'.$$

Sapendo che v e v' sono indipendenti, così come w e w', considero due basi di V

$$\mathfrak{B}_1 = \{v_1 = v, v_2 = v', v_3, \dots, v_n\}$$
$$\mathfrak{B}_2 = \{w_1 = w, w_2 = w', w_3, \dots, w_n\}$$

con le quali posso esprimere $\overline{v}$ e $\overline{w}$ come

$$\overline{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \qquad \overline{w} = \sum_{j=1}^{n} b_j w_j$$

Quindi posso riscrivere

$$\overline{v} \otimes \overline{w} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j v_i \otimes w_j$$

ma, dato che i $\{v_i \otimes w_j\}$ formano una base per $\mathcal{T}_2^0$, i coefficienti devono essere $a_1 b_1 = a_2 b_2 = 1$ e nulli tutti gli altri, in particolare $a_1 b_2 = a_2 b_1 = 0$ che è chiaramente impossibile.
Quindi $v \otimes w + v' \otimes w'$ non può essere un elemento puro.

Esercizio 3.6

Svolgimento. Sia $\widetilde{T}$ un tensore di rango $(0, k)$ tale che $\widetilde{T} = T_S + T_A$ per un qualche coppia di tensori dello stesso rango T_S simmetrico e T_A antisimmetrico. Si può vedere facilmente che

$$S(\widetilde{T}) = S(T_S) + S(T_A) = T_S$$

poiché un tensore simmetrico è uguale al suo simmetrizzato, mentre il simmetrizzato di un tensore antisimmetrico è nullo. Allo stesso modo si che $A(\widetilde{T}) = T_A$, quindi deve essere

$$\widetilde{T} = S(\widetilde{T}) + A(\widetilde{T}).$$

Se $k = 2$ ogni tensore T può essere espresso in questo modo, infatti

$$\begin{aligned} T(v_1, v_2) &= \frac{1}{2}\left(T(v_1, v_2) + T(v_2, v_1)\right) + \frac{1}{2}\left(T(v_1, v_2) - T(v_2, v_1)\right) = \\ &= S(T)(v_1, v_2) + A(T)(v_1, v_2) \qquad \forall v_1, v_2 \in V \end{aligned}$$

*svolti insieme a Bernardo Tomelleri (587829)

Questo non vale per un generico $k \geq 3$, infatti si ha in generale

$$S(T)(v_1, \ldots, v_k) + A(T)(v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) + \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) =$$
$$= \frac{2}{k!} \sum_{\sigma \text{ pari}} T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \neq T(v_1, \ldots, v_k)$$

Se ad esempio prendo $T = e^1 \otimes e^2 \otimes \ldots \otimes e^k$, con $\{e^1, \ldots, e^k\}$ base duale di V^*, a cui applico l'elemento $(e_{\tilde{\sigma}(1)}, \ldots, e_{\tilde{\sigma}(k)})$, con $\{e_1, \ldots, e_k\}$ base di V e $\tilde{\sigma} \in S_k$ pari (diversa dall'identità), ottengo 0, mentre se applico lo stesso elemento a $S(T) + A(T)$ ottengo 1. □

Esercizio 3.7

Svolgimento. Sia T un tensore di rango $(0, k)$. Se T è antisimmetrico si ha per definizione che

$$T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -T(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k)$$

per ogni coppa di indici $i \neq j$. In particolare se $v_i = v_j = v$ si ha che

$$\begin{aligned} &T(v_1, \ldots, v, \ldots, v, \ldots, v_k) = -T(v_1, \ldots, v, \ldots, v, \ldots, v_k) \\ &\Rightarrow T(v_1, \ldots, v, \ldots, v, \ldots, v_k) = 0 \end{aligned}$$

Se T possiede la proprietà per cui $T(v_1, \ldots, v_k) = 0$ se due qualsiasi vettori coincidono, si ha che vale

$$\begin{aligned} 0 &= T(v_1, \ldots, v - w, \ldots, v - w, \ldots, v_k) = \\ &= -T(v_1, \ldots, v, \ldots, w, \ldots, v_k) - T(v_1, \ldots, w, \ldots, v, \ldots, v_k) \\ &\Rightarrow T(v_1, \ldots, v, \ldots, w, \ldots, v_k) = -T(v_1, \ldots, w, \ldots, v, \ldots, v_k) \end{aligned}$$

Quindi T è antisimmetrico.

Se il simmetrizzato di T è identicamente nullo, per la multilinearità di T e il fatto che la cardinalità di S_k è $k!$, si ha che:

$$S(T)(v, \ldots, v) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} T(v, \ldots, v) = \frac{k!}{k!} T(v, \ldots, v) = T(v, \ldots, v) = 0 \quad \forall v \in V$$

Al contrario, avendo T la proprietà per cui

$$T(v, \ldots, v) = 0 \quad \forall v \in V$$

e prendendone il simmetrizzato si ha che

$$S(T)(v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) =$$
$$= \frac{1}{k!} T\left((k-1)! \sum_{i=0}^{k} v_i, \ldots, (k-1)! \sum_{i=0}^{k} v_i \right) = T\left(\sum_{i=0}^{k} v_i, \ldots, \sum_{i=0}^{k} v_i \right) = 0$$

□