

# Esercizi di Geometria Differenziale

## del 16 Ottobre

Marco Romagnoli (578061)\*

4 novembre 2021

### Esercizio 2.5

*Svolgimento.* Siano  $X$  e  $Y$  due campi vettoriali in  $\mathbb{R}^n$  e sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  liscia. Sapendo che  $X = x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  e  $Y = y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ , dove è stata usata la notazione di Einstein per le sommatorie sui doppi indici, si ha che

$$\begin{aligned}[X, Y]f &= XYf - YXf = x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left( y^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) - y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left( x^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) = \\ &= x^i \left( \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right) - y^j \left( \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} + x^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} \right)\end{aligned}$$

Essendo  $f$  liscia in  $\mathbb{R}^n$ , vale il teorema di Schwarz e quindi le derivate parziali miste commutano. Perciò il termine

$$x^i y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - y^j x^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$$

si annulla, dato che è una sommatoria su tutti gli indici  $i$  e  $j$ .  
Quindi alla fine rimane solo

$$[X, Y]f = x^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} - y^j \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

da cui, cambiando opportunamente gli indici, si ricava la tesi:

$$[X, Y]^i = x^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j} - y^j \frac{\partial x^i}{\partial x^j}.$$

□

### Esercizio 2.6

*Svolgimento.* Siano  $X, Y$  e  $Z$  tre campi vettoriali su una varietà  $M$ . Per la bilinearità del commutatore, si ha che:

$$[[X, Y], Z] = [XY, Z] - [YX, Z] = XYZ - ZXY - YXZ + ZYX.$$

---

\*svolti insieme a Bernardo Tomelleri (587829)

Permutando ciclicamente i campi si ottiene:

$$\begin{aligned} [[X, Y], Z] &= XYZ - ZXY - YXZ + ZYX \\ [[Y, Z], X] &= YZX - XYZ - ZYX + XZY \\ [[X, Y], Z] &= ZXY - YZX - XZY + YXZ \end{aligned}$$

Da qui si vede chiaramente che, a destra dell'uguale, per ogni termine compare anche il suo opposto. Quindi, sommando tutto, il risultato si annulla:

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[X, Z], Y] = 0.$$

□

## 2.8

*Dimostrazione.* Siano  $X$  e  $Y$  due campi vettoriali su una varietà  $M$  e sia  $f, g, h : M \rightarrow \mathbb{R}$  lisce. Inizialmente si può vedere che

$$\begin{aligned} [fX, Y]h &= fXYh - Y(fX)h = fXYh - (Yf)(Xh) + fYXh = \\ &= f[X, Y]h - (Yf)(Xh) \end{aligned}$$

dove è stato usato il fatto che  $Y$  è una derivazione.

Per cui vale analogamente che

$$\begin{aligned} [X, gY]h &= X(gY)h - gYXh = (Xg)(Yh) + gXYh - gYXh = \\ &= g[X, Y]h + (Xg)(Yh) \end{aligned}$$

da cui, combinando i due risultati, si ottiene la tesi

$$[fX, gY] = f[X, gY] - g(Yf)X = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

□