Expressão Regular

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Linguagens Formais e Autômatos
Bacharelado em Ciência da Computação

04 de dezembro de 2017

UFG
Regional Jataí

Plano de Aula

1. Revisão
   - Equivalência de AFNs e AFDs
   - Fecho sob as operações regulares
2. Expressão Regular

Sumário

1. Revisão
   - Equivalência de AFNs e AFDs
   - Fecho sob as operações regulares
2. Expressão Regular

Computação em um AFN

Definição

Seja $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFN e suponha que $\omega = \omega_1\omega_2 \ldots, \omega_n$ seja uma cadeia em que cada ω_i é um membro do alfabeto Σ_ϵ $(1 \leq i \leq n)$. Então N **aceita** ω se uma sequência de estados $r_0, r_1, \ldots, r_n$ em Q existe satisfazendo três condições:

1. $r_0 = q_0$;
2. $r_{i+1} \in \delta(r_i, \omega_{i+1})$ (para $i = 0, \ldots, n-1$); e
3. $r_n \in F$.

Corolário

N reconhece a linguagem A, se $A = \{\omega \mid N \text{ aceita } \omega\}$.

Equivalência de AFNs e AFDs

Teorema 1.39

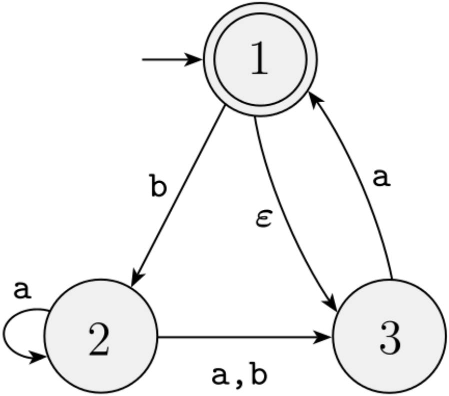
Todo autômato finito não-determinístico tem um autômato finito determinístico equivalente.

Ideia da prova

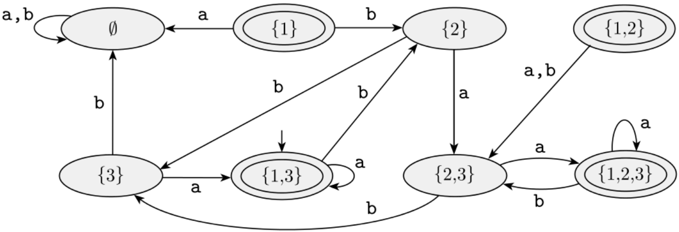
- Se uma linguagem é reconhecida por um AFN, então temos de mostrar a existência de um AFD que também a reconhece;
- Converter um AFN num AFD equivalente que o simule;
- Se k é o número de estados do AFN, então ele tem 2^k subconjuntos de estados;
- Portanto o AFD equivalente terá 2^k estados.

UFG
Regional Jataí

Descrição Formal



Descrição Formal



Equivalência de AFNs e AFDs

Teorema 1.39

Todo autômato finito não-determinístico tem um autômato finito determinístico equivalente.

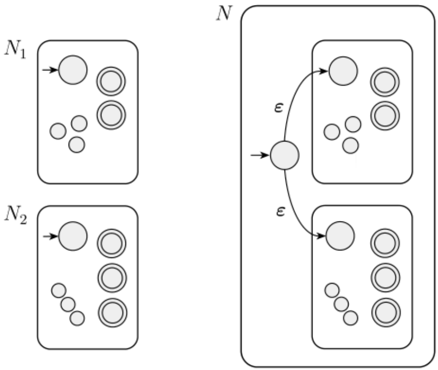
Corolário 1.40

Uma linguagem é regular se e somente se algum autômato finito não-determinístico a reconhece.

Fecho sob união

Teorema 1.45

A classe de linguagens regulares é fechada sob a operação de união.



Fecho sob união

Estrutura básica da prova

Suponha que $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ reconheça A_1 e que $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ reconheça A_2.
Construa $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ para reconhecer $A_1 \cup A_2$.

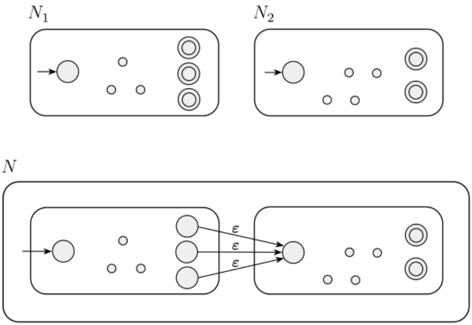
- $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}$;
- Σ é o alfabeto da linguagem;
- $\delta(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a), & \text{se } q \in Q_1 \\ \delta_2(q, a), & \text{se } q \in Q_2 \\ \{q_1, q_2\}, & \text{se } q = q_0 \text{ e } a = \epsilon \\ \emptyset, & \text{se } q = q_0 \text{ e } a \neq \epsilon. \end{cases}$

  em que $q \in Q$ e $a \in \Sigma_\epsilon$;
- q_0 é o estado inicial;
- $F = F_1 \cup F_2$.

Fecho sob concatenação

Teorema 1.47

A classe de linguagens regulares é fechada sob operação de concatenação.



Fecho sob concatenação

Estrutura básica da prova

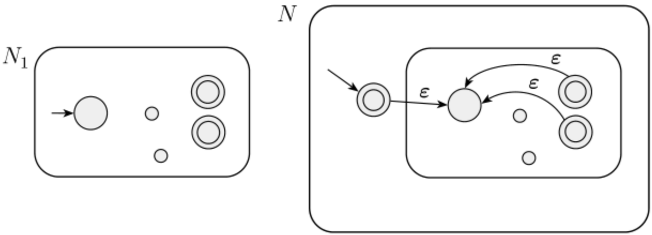
Suponha que $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ reconheça A_1 e que $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ reconheça A_2.
Construa $N = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F_2)$ para reconhecer $A_1 \circ A_2$.

- $Q = Q_1 \cup Q_2$;
- Σ é o alfabeto da linguagem;
- $$\delta(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a), & \text{se } q \in Q_1 \text{ e } q \notin F_1 \\ \delta_1(q, a), & \text{se } q \in F_1 \text{ e } a \neq \epsilon \\ \delta_1(q, a) \cup \{q_2\}, & \text{se } q \in F_1 \text{ e } a = \epsilon \\ \delta_2(q, a), & \text{se } q \in Q_2. \end{cases}$$
  em que $q \in Q$ e $a \in \Sigma$;
- q_1 é o estado inicial;
- F_2 é o conjunto de estados finais.

Fecho sob estrela

Teorema 1.49

A classe de linguagens regulares é fechada sob operação de estrela.



Fecho sob estrela

Estrutura básica da prova

Suponha que $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ reconheça A_1.
Construa $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ para reconhecer A_1^*.

- $Q = Q_1 \cup \{q_0\}$;
- Σ é o alfabeto da linguagem;
- $\delta(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a), & \text{se } q \in Q_1 \text{ e } q \notin F_1 \\ \delta_1(q, a), & \text{se } q \in F_1 \text{ e } a \neq \epsilon \\ \delta_1(q, a) \cup \{q_1\}, & \text{se } q \in F_1 \text{ e } a = \epsilon \\ \{q_1\}, & \text{se } q = q_0 \text{ e } a = \epsilon \\ \emptyset, & \text{se } q = q_0 \text{ e } a \neq \epsilon. \end{cases}$
  em que $q \in Q$ e $a \in \Sigma_\epsilon$;
- q_0 é o estado inicial;
- $F = F_1 \cup \{q_0\}$.

Sumário

Exemplos

Exemplo 1.51

$(0 \cup 1)^*$

Exemplos

Exemplo 1.51

$(0 \cup 1)^*$

Outro exemplo...

Σ^*

Exemplos

Exemplo 1.51

$(0 \cup 1)^*$

Outro exemplo...

Σ^*

Outro exemplo...

$\Sigma^* 1$

Exemplos

Exemplo 1.51

$(0 \cup 1)^*$

Outro exemplo...

Σ^*

Outro exemplo...

$\Sigma^* 1$

Outro exemplo...

$(0\Sigma^*) \cup (\Sigma^* 1)$

Definição de ER

Definição

Dizemos que R é uma **expressão regular** se R for

1. a para algum $a \in \Sigma$;

Definição de ER

Definição

Dizemos que R é uma **expressão regular** se R for

1. a para algum $a \in \Sigma$;
2. ϵ;

Definição de ER

Definição

Dizemos que R é uma **expressão regular** se R for

1. a para algum $a \in \Sigma$;
2. ϵ;
3. $\emptyset$;

Definição de ER

Definição

Dizemos que R é uma **expressão regular** se R for

1. a para algum $a \in \Sigma$;
2. ϵ;
3. $\emptyset$;
4. $(R_1 \cup R_2)$, em que R_1 e R_2 são expressões regulares;

Definição de ER

Definição

Dizemos que R é uma **expressão regular** se R for

1. a para algum $a \in \Sigma$;
2. ϵ;
3. $\emptyset$;
4. $(R_1 \cup R_2)$, em que R_1 e R_2 são expressões regulares;
5. $(R_1 \circ R_2)$, em que R_1 e R_2 são expressões regulares; ou

UFG
Regional Jataí

Definição de ER

Definição

Dizemos que R é uma **expressão regular** se R for

1. a para algum $a \in \Sigma$;
2. ϵ;
3. $\emptyset$;
4. $(R_1 \cup R_2)$, em que R_1 e R_2 são expressões regulares;
5. $(R_1 \circ R_2)$, em que R_1 e R_2 são expressões regulares; ou
6. $(R_1)^*$, em que R_1 é expressão regular.

Definição de ER

Definição

Dizemos que R é uma **expressão regular** se R for

1. a para algum $a \in \Sigma$;
2. ϵ;
3. $\emptyset$;
4. $(R_1 \cup R_2)$, em que R_1 e R_2 são expressões regulares;
5. $(R_1 \circ R_2)$, em que R_1 e R_2 são expressões regulares; ou
6. $(R_1)^*$, em que R_1 é expressão regular.

Cuidado!!!

Não confunda ϵ com $\emptyset$!!!

UFG
Regional Jataí

Exemplos

Exemplo 1.53

- 0^*10^*

Exemplos

Exemplo 1.53

- 0^*10^*
- $\Sigma^*1\Sigma^*$

Exemplos

Exemplo 1.53

- 0^*10^*
- $\Sigma^*1\Sigma^*$
- $\Sigma^*001\Sigma^*$

Exemplos

Exemplo 1.53

- 0^*10^*
- $\Sigma^*1\Sigma^*$
- $\Sigma^*001\Sigma^*$
- $1^*(01^+)^*$

UFG
Regional Jataí

Exemplos

Exemplo 1.53

- 0^*10^*
- $\Sigma^*1\Sigma^*$
- $\Sigma^*001\Sigma^*$
- $1^*(01^+)^*$
- $(\Sigma\Sigma)^*$

Exemplos

Exemplo 1.53

- 0^*10^*
- $\Sigma^*1\Sigma^*$
- $\Sigma^*001\Sigma^*$
- $1^*(01^+)^*$
- $(\Sigma\Sigma)^*$
- $(\Sigma\Sigma\Sigma)^*$

UFG
Regional Jataí

Exemplos

Exemplo 1.53

- 0^*10^*
- $\Sigma^*1\Sigma^*$
- $\Sigma^*001\Sigma^*$
- $1^*(01^+)^*$
- $(\Sigma\Sigma)^*$
- $(\Sigma\Sigma\Sigma)^*$
- $01 \cup 10$

Exemplos

Exemplo 1.53

- 0^*10^*
- $\Sigma^*1\Sigma^*$
- $\Sigma^*001\Sigma^*$
- $1^*(01^+)^*$
- $(\Sigma\Sigma)^*$
- $(\Sigma\Sigma\Sigma)^*$
- $01 \cup 10$
- $0\Sigma^* \cup 1\Sigma^*1 \cup 0 \cup 1$

UFG
Regional Jataí

Exemplos

Exemplo 1.53

- 0^*10^*
- $\Sigma^*1\Sigma^*$
- $\Sigma^*001\Sigma^*$
- $1^*(01^+)^*$
- $(\Sigma\Sigma)^*$
- $(\Sigma\Sigma\Sigma)^*$
- $01 \cup 10$
- $0\Sigma^* \cup 1\Sigma^*1 \cup 0 \cup 1$
- $(0 \cup \epsilon)1^*$

Exemplos

Exemplo 1.53

- 0^*10^*
- $\Sigma^*1\Sigma^*$
- $\Sigma^*001\Sigma^*$
- $1^*(01^+)^*$
- $(\Sigma\Sigma)^*$
- $(\Sigma\Sigma\Sigma)^*$
- $01 \cup 10$
- $0\Sigma^* \cup 1\Sigma^*1 \cup 0 \cup 1$
- $(0 \cup \epsilon)1^*$
- $(0 \cup \epsilon)(1 \cup \epsilon)$

UFG
Regional Jataí

Exemplos

Exemplo 1.53

- 0^*10^*
- $\Sigma^*1\Sigma^*$
- $\Sigma^*001\Sigma^*$
- $1^*(01^+)^*$
- $(\Sigma\Sigma)^*$
- $(\Sigma\Sigma\Sigma)^*$
- $01 \cup 10$
- $0\Sigma^* \cup 1\Sigma^*1 \cup 0 \cup 1$
- $(0 \cup \epsilon)1^*$
- $(0 \cup \epsilon)(1 \cup \epsilon)$
- $1^*\emptyset$

UFG
Regional Jataí

Exemplos

Exemplo 1.53

- 0^*10^*
- $\Sigma^*1\Sigma^*$
- $\Sigma^*001\Sigma^*$
- $1^*(01^+)^*$
- $(\Sigma\Sigma)^*$
- $(\Sigma\Sigma\Sigma)^*$
- $01 \cup 10$
- $0\Sigma^* \cup 1\Sigma^*1 \cup 0 \cup 1$
- $(0 \cup \epsilon)1^*$
- $(0 \cup \epsilon)(1 \cup \epsilon)$
- $1^*\emptyset$
- $\emptyset^*$

Teorema

Teorema 1.54

Uma linguagem é regular se e somente se alguma expressão regular a descreve.

Teorema

Teorema 1.54

Uma linguagem é regular se e somente se alguma expressão regular a descreve.

- **Lema 1.55:** Uma linguagem é descrita por uma expressão regular, então ela é regular.

Teorema

Teorema 1.54

Uma linguagem é regular se e somente se alguma expressão regular a descreve.

- **Lema 1.55:** Uma linguagem é descrita por uma expressão regular, então ela é regular.
- **Lema 1.60:** Se uma linguagem é regular, então ela é descrita por uma expressão regular.

UFG
Regional Jataí

Prova do Lema

Lema 1.55

Uma linguagem é descrita por uma expressão regular, então ela é regular.

Prova do Lema

Lema 1.55

Uma linguagem é descrita por uma expressão regular, então ela é regular.

Prova

Vamos converter R num AFN N. Consideramos os seis casos na descrição formal de expressões regulares:

UFG
Regional Jataí

Prova do Lema

Lema 1.55

Uma linguagem é descrita por uma expressão regular, então ela é regular.

Prova

Vamos converter R num AFN N. Consideramos os seis casos na descrição formal de expressões regulares:

- Três casos básicos;
- Três casos gerais.

Prova do Lema

Prova do Lema 1.55

1. $R = a$ para algum a em Σ.

Prova do Lema

Prova do Lema 1.55

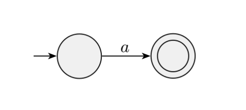
1. $R = a$ para algum a em Σ.
   Então $L(R) = \{a\}$, e o seguinte AFN reconhece $L(R)$.

UFG
Regional Jataí

Prova do Lema

Prova do Lema 1.55

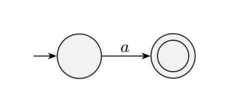
1. $R = a$ para algum a em Σ.
   Então $L(R) = \{a\}$, e o seguinte AFN reconhece $L(R)$.



Prova do Lema

Prova do Lema 1.55

1. $R = a$ para algum a em Σ.
   Então $L(R) = \{a\}$, e o seguinte AFN reconhece $L(R)$.

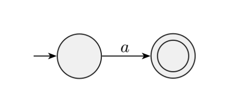


   Formalmente, $N = (\{q_1, q_2\}, \Sigma, \delta, q_1, \{q_2\})$, em que δ se divide em dois casos:

Prova do Lema

Prova do Lema 1.55

1. $R = a$ para algum a em Σ.
   Então $L(R) = \{a\}$, e o seguinte AFN reconhece $L(R)$.



   Formalmente, $N = (\{q_1, q_2\}, \Sigma, \delta, q_1, \{q_2\})$, em que δ se divide em dois casos:

   1. $\delta(q_1, a) = \{q_2\}$
   2. $\delta(r, b) = \emptyset$ (para $r \neq q_1$ ou $b \neq a$)

Prova do Lema

Prova do Lema 1.55

2. $R = \epsilon$.

Prova do Lema

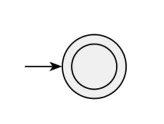
Prova do Lema 1.55

2. $R = \epsilon$.
   Então $L(R) = \{\epsilon\}$, e o seguinte AFN reconhece $L(R)$.

Prova do Lema

Prova do Lema 1.55

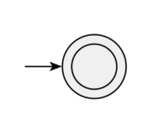
2. $R = \epsilon$.
   Então $L(R) = \{\epsilon\}$, e o seguinte AFN reconhece $L(R)$.



Prova do Lema

Prova do Lema 1.55

2. $R = \epsilon$.
   Então $L(R) = \{\epsilon\}$, e o seguinte AFN reconhece $L(R)$.

   Formalmente, $N = (\{q_1\}, \Sigma, \delta, q_1, \{q_1\})$,
   em que $\delta(r, b) = \emptyset$ para quaisquer r e b.

UFG
Regional Jataí

Prova do Lema

Prova do Lema 1.55

3. $R = \emptyset$.

Prova do Lema

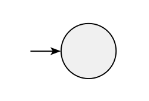
Prova do Lema 1.55

3. $R = \emptyset$.
   Então $L(R) = \emptyset$, e o seguinte AFN reconhece $L(R)$.

Prova do Lema

Prova do Lema 1.55

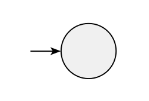
3. $R = \emptyset$.
   Então $L(R) = \emptyset$, e o seguinte AFN reconhece $L(R)$.



Prova do Lema

Prova do Lema 1.55

3. $R = \emptyset$.
   Então $L(R) = \emptyset$, e o seguinte AFN reconhece $L(R)$.

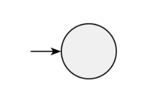


   Formalmente, $N = (\{q_1\}, \Sigma, \delta, q_1, \emptyset)$,
   em que $\delta(r, b) = \emptyset$ para quaisquer r e b.

Prova do Lema

Prova do Lema 1.55

3. $R = \emptyset$.
   Então $L(R) = \emptyset$, e o seguinte AFN reconhece $L(R)$.



   Formalmente, $N = (\{q_1\}, \Sigma, \delta, q_1, \emptyset)$,
   em que $\delta(r, b) = \emptyset$ para quaisquer r e b.

Casos gerais

4. $R = R_1 \cup R_2$
5. $R = R_1 \circ R_2$
6. $R = R_1^*$

Para os três casos gerais, utilizamos as provas de que as linguagens regulares são fechadas sob as operações de regulares ■

Prova do Lema 1.55

Casos gerais

4. $R = R_1 \cup R_2$
5. $R = R_1 \circ R_2$
6. $R = R_1^*$

Prova do Lema 1.55

Casos gerais

4. $R = R_1 \cup R_2$
5. $R = R_1 \circ R_2$
6. $R = R_1^*$

Para os três casos gerais, utilizamos as provas de que as linguagens regulares são fechadas sob as operações de regulares ■

UFG
Regional Jataí

Teorema

Teorema 1.54

Uma linguagem é regular se e somente se alguma expressão regular a descreve.

- **Lema 1.55:** Uma linguagem é descrita por uma expressão regular, então ela é regular. $\surd$
- **Lema 1.60:** Se uma linguagem é regular, então ela é descrita por uma expressão regular. ???

Expressão Regular

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Linguagens Formais e Autômatos
Bacharelado em Ciência da Computação

04 de dezembro de 2017

UFG
Regional Jataí