

Autômato com Pilha

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Linguagens Formais e Autômatos
Bacharelado em Ciência da Computação

23 de janeiro de 2018

Plano de Aula

- 1 Revisão
 - Ambiguidade
 - Forma Normal de Chomsky

- 2 Autômato com Pilha
 - Exemplos

Sumário

- 1 Revisão
 - Ambiguidade
 - Forma Normal de Chomsky

- 2 Autômato com Pilha
 - Exemplos

Exemplo

 G_1 $A \rightarrow 0A1$ $A \rightarrow B$ $B \rightarrow \#$

Descrição formal

$G_1 = (V, \Sigma, R, S)$ de forma que:

- $V = \{A, B\}$;
- $\Sigma = \{0, 1, \#\}$;
- $R = \{A \rightarrow 0A1, A \rightarrow B, B \rightarrow \#\}$;
- $S = A$.

Exemplo

 G_3

$G_3 = (\{S\}, \{a, b\}, R, S)$. O conjunto de regras R é:

$$S \rightarrow aSb \mid SS \mid \epsilon$$

 G_4

$G_4 = (V, \Sigma, R, S)$, de forma que:

$$V = \{\langle \text{EXPR} \rangle, \langle \text{TERM} \rangle, \langle \text{FACTOR} \rangle\};$$

$$\Sigma = \{a, +, \times, (,)\};$$

R é o conjunto de regras:

$$\langle \text{EXPR} \rangle \rightarrow \langle \text{EXPR} \rangle + \langle \text{TERM} \rangle \mid \langle \text{TERM} \rangle$$

$$\langle \text{TERM} \rangle \rightarrow \langle \text{TERM} \rangle \times \langle \text{FACTOR} \rangle \mid \langle \text{FACTOR} \rangle$$

$$\langle \text{FACTOR} \rangle \rightarrow (\langle \text{EXPR} \rangle) \mid a$$

$$S = \langle \text{EXPR} \rangle.$$

Árvores Sintáticas

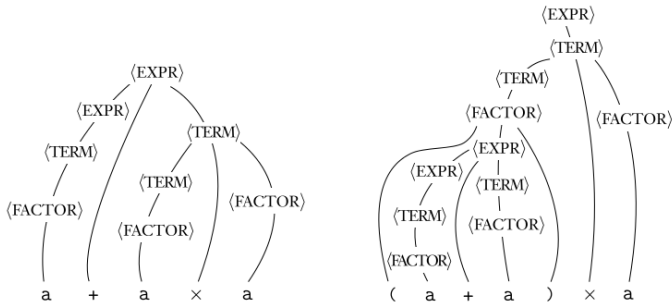


FIGURA 2.5
Árvores sintáticas para as cadeias $a+axa$ e $(a+a)xa$

Projetando GLCs

- Considere a união de GLCs;
- Se a linguagem for regular, construa a GLC a partir do AFD correspondente;
- Considere subcadeias “ligadas”;
- Considere estruturas recursivas.

Ambiguidade

Gramática G_5

$$\langle \text{EXPR} \rangle \rightarrow \langle \text{EXPR} \rangle + \langle \text{EXPR} \rangle \mid \langle \text{EXPR} \rangle \times \langle \text{EXPR} \rangle$$
$$\langle \text{EXPR} \rangle \rightarrow (\langle \text{EXPR} \rangle) \mid a$$

Cadeia $a + a \times a$

Esta gramática gera $a + a \times a$ ambigualmente.

Ambiguidade

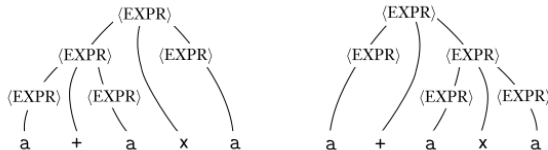


FIGURA 2.6

As duas árvores sintáticas para a cadeia $a+axa$ na gramática G_5

Ambiguidade

 G_4 $\langle \text{EXPR} \rangle \rightarrow \langle \text{EXPR} \rangle + \langle \text{TERM} \rangle \mid \langle \text{TERM} \rangle$ $\langle \text{TERM} \rangle \rightarrow \langle \text{TERM} \rangle \times \langle \text{FACTOR} \rangle \mid \langle \text{FACTOR} \rangle$ $\langle \text{FACTOR} \rangle \rightarrow (\langle \text{EXPR} \rangle) \mid a$

Porém...

G_4 não é ambígua!

Ambiguidade

 G_2

```
⟨SENTENCE⟩ → ⟨NOUN-PHRASE⟩⟨VERB-PHRASE⟩
⟨NOUN-PHRASE⟩ → ⟨CMPLX-NOUN⟩ | ⟨CMPLX-NOUN⟩⟨PREP-PHRASE⟩
⟨VERB-PHRASE⟩ → ⟨CMPLX-VERB⟩ | ⟨CMPLX-VERB⟩⟨PREP-PHRASE⟩
⟨PREP-PHRASE⟩ → ⟨PREP⟩⟨CMPLX-NOUN⟩
⟨CMPLX-NOUN⟩ → ⟨ARTICLE⟩⟨NOUN⟩
⟨CMPLX-VERB⟩ → ⟨VERB⟩ | ⟨VERB⟩⟨NOUN-PHRASE⟩
  ⟨ARTICLE⟩ → a | the
  ⟨NOUN⟩ → boy | girl | flower
  ⟨VERB⟩ → touches | likes | sees
  ⟨PREP⟩ → with
```

Porém...

G_2 é ambígua!

(e.g. a cadeia “the girl touches the boy with the flower”)

Ambiguidade

Definição 2.7

Uma cadeia ω é derivada **ambiguamente** na gramática livre-do-contexto G se ela tem duas ou mais derivações mais à esquerda diferentes. A gramática G é **ambígua** se ela gera alguma cadeia ambiguamente.

Existem linguagens que são **inerentemente ambíguas**!

Forma Normal de Chomsky

Por quê utilizá-la?

- É uma forma simplificada de escrever uma GLC;
- Facilita a construção de algoritmos para GLC.

Definição 2.8

Uma gramática livre-do-contexto está na **forma normal de Chomsky** se toda regra é da forma

$$A \rightarrow BC$$

$$A \rightarrow a$$

em que a é qualquer terminal e A , B e C são quaisquer variáveis - exceto que B e C não podem ser a variável inicial.

Adicionalmente...

Permite-se a regra $S \rightarrow \epsilon$, em que S é a variável inicial.

Forma Normal de Chomsky

Teorema 2.9

Qualquer linguagem livre-de-contexto é gerada por uma gramática livre-do-contexto na forma normal de Chomsky.

Exemplo

 G_6 $S \rightarrow ASA \mid aB$ $A \rightarrow B \mid S$ $B \rightarrow b \mid \epsilon$

???

Como converter G_6 para a forma normal de Chomsky?

Exemplo

1. Introduzir uma nova variável inicial

$$S \rightarrow ASA \mid aB$$

$$A \rightarrow B \mid S$$

$$B \rightarrow b \mid \epsilon$$

$$S_0 \rightarrow S$$

$$S \rightarrow ASA \mid aB$$

$$A \rightarrow B \mid S$$

$$B \rightarrow b \mid \epsilon$$

Exemplo

2. Remover regras ϵ (B)

$$S_0 \rightarrow S$$

$$S \rightarrow ASA \mid aB$$

$$A \rightarrow B \mid S$$

$$B \rightarrow b \mid \epsilon$$

$$S_0 \rightarrow S$$

$$S \rightarrow ASA \mid aB \mid a$$

$$A \rightarrow B \mid S \mid \epsilon$$

$$B \rightarrow b$$



Exemplo

2. Remover regras ϵ (A)

$$S_0 \rightarrow S$$

$$S \rightarrow ASA \mid aB \mid a$$

$$A \rightarrow B \mid S \mid \epsilon$$

$$B \rightarrow b$$

$$S_0 \rightarrow S$$

$$S \rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \mid S$$

$$A \rightarrow B \mid S$$

$$B \rightarrow b$$

Exemplo

2. Remover regras unitárias (S)

$$S_0 \rightarrow S$$

$$S \rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \mid S$$

$$A \rightarrow B \mid S$$

$$B \rightarrow b$$

$$S_0 \rightarrow S$$

$$S \rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS$$

$$A \rightarrow B \mid S$$

$$B \rightarrow b$$

Exemplo

3. Remover regras unitárias (S_0)

$$S_0 \rightarrow S$$

$$S \rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS$$

$$A \rightarrow B \mid S$$

$$B \rightarrow b$$

$$S_0 \rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS$$

$$S \rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS$$

$$A \rightarrow B \mid S$$

$$B \rightarrow b$$



Exemplo

4. Remover regras unitárias (A)

$$S_0 \rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS$$
$$S \rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS$$
$$A \rightarrow \textcolor{red}{B} \mid S$$
$$B \rightarrow b$$
$$S_0 \rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS$$
$$S \rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS$$
$$A \rightarrow S \mid \textcolor{blue}{b}$$
$$B \rightarrow b$$


Exemplo

5. Remover regras unitárias (A)

$$S_0 \rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS$$
$$S \rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS$$
$$A \rightarrow \textcolor{red}{S} \mid b$$
$$B \rightarrow b$$
$$S_0 \rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS$$
$$S \rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS$$
$$A \rightarrow b \mid \textcolor{blue}{ASA} \mid \textcolor{blue}{aB} \mid \textcolor{blue}{a} \mid \textcolor{blue}{SA} \mid \textcolor{blue}{AS}$$
$$B \rightarrow b$$


Exemplo

6. Acrescentar variáveis e regras adicionais

$$S_0 \rightarrow \textcolor{red}{A}SA \mid \textcolor{red}{a}B \mid a \mid SA \mid AS$$

$$S \rightarrow \textcolor{red}{A}SA \mid \textcolor{red}{a}B \mid a \mid SA \mid AS$$

$$A \rightarrow b \mid \textcolor{red}{A}SA \mid \textcolor{red}{a}B \mid a \mid SA \mid AS$$

$$B \rightarrow b$$

$$S_0 \rightarrow \textcolor{blue}{C}A \mid \textcolor{blue}{D}B \mid a \mid SA \mid AS$$

$$S \rightarrow \textcolor{blue}{C}A \mid \textcolor{blue}{D}B \mid a \mid SA \mid AS$$

$$A \rightarrow b \mid \textcolor{blue}{C}A \mid \textcolor{blue}{D}B \mid a \mid SA \mid AS$$

$$B \rightarrow b$$

$$\textcolor{blue}{C} \rightarrow AS$$

$$\textcolor{blue}{D} \rightarrow a$$

Sumário

- 1 Revisão
 - Ambiguidade
 - Forma Normal de Chomsky
- 2 Autômato com Pilha
 - Exemplos

Autômato com Pilha

Características...

Autômato com Pilha

Características...

- $\text{AFN} + \text{Pilha} = \text{Autômato com Pilha};$

Autômato com Pilha

Características...

- $\text{AFN} + \text{Pilha} = \text{Autômato com Pilha}$;
- $\text{AFD} + \text{Pilha} \neq \text{AFN} + \text{Pilha}$;

Autômato com Pilha

Características...

- $\text{AFN} + \text{Pilha} = \text{Autômato com Pilha}$;
- $\text{AFD} + \text{Pilha} \neq \text{AFN} + \text{Pilha}$;
- Pilha com memória infinita;

Autômato com Pilha

Características...

- $AFN + Pilha = \text{Autômato com Pilha}$;
- $AFD + Pilha \neq AFN + Pilha$;
- Pilha com memória infinita;
- Pode escrever e ler símbolos na pilha;

Autômato com Pilha

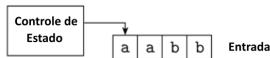
Características...

- $AFN + Pilha = \text{Autômato com Pilha}$;
- $AFD + Pilha \neq AFN + Pilha$;
- Pilha com memória infinita;
- Pode escrever e ler símbolos na pilha;
- Equivalentes em poder às GLCs.

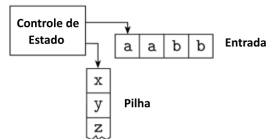
Autômato com Pilha

Características...

- AFN + Pilha = Autômato com Pilha;
- AFD + Pilha \neq AFN + Pilha;
- Pilha com memória infinita;
- Pode escrever e ler símbolos na pilha;
- Equivalentes em poder às GLCs.



Esquema do AFN



Esquema do AP

Autômato com Pilha

DEFINIÇÃO 2.13

Um *autômato com pilha* é uma 6-upla $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$, onde Q , Σ , Γ , e F são todos conjuntos finitos, e

1. Q é o conjunto de estados,
2. Σ é o alfabeto de entrada,
3. Γ é o alfabeto de pilha,
4. $\delta: Q \times \Sigma_{\varepsilon} \times \Gamma_{\varepsilon} \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma_{\varepsilon})$ é a função de transição,
5. $q_0 \in Q$ é o estado inicial, e
6. $F \subseteq Q$ é o conjunto de estados de aceitação.

Autômato com Pilha

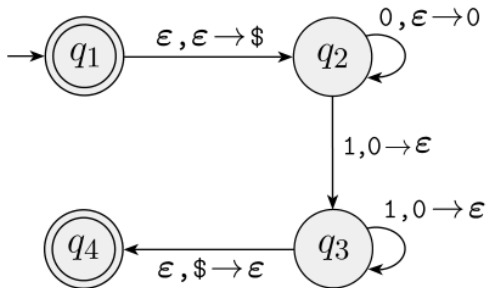
AP M_1

$$L(M_1) = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$$

Autômato com Pilha

AP M_1

$$L(M_1) = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$$



Autômato com Pilha

$$Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\},$$

$$\Sigma = \{0, 1\},$$

$$\Gamma = \{0, \$\},$$

$$F = \{q_1, q_4\}, e$$

Autômato com Pilha

δ é dada pela tabela abaixo, na qual entradas em branco significam \emptyset .

Input: Pilha:	0			1			ϵ		
	0	\$	ϵ	0	\$	ϵ	0	\$	ϵ
q_1									$\{(q_2, \$)\}$
q_2			$\{(q_2, 0)\}$		$\{(q_3, \epsilon)\}$				
q_3					$\{(q_3, \epsilon)\}$			$\{(q_4, \epsilon)\}$	
q_4									

Autômato com Pilha

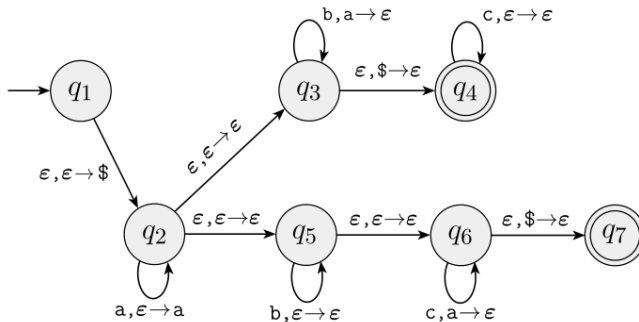
AP M_2

$$L(M_2) = \{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ ou } i = k\}$$

Autômato com Pilha

AP M_2

$$L(M_2) = \{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ ou } i = k\}$$



Autômato com Pilha

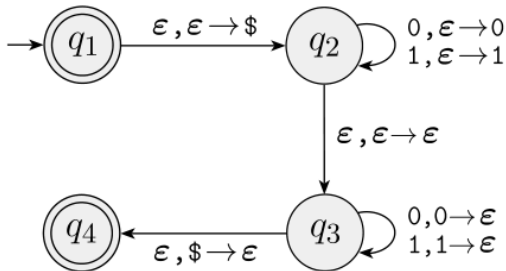
AP M_3

$$L(M_3) = \{\omega\omega^R \mid \omega \in \{0,1\}^*\}$$

Autômato com Pilha

AP M_3

$$L(M_3) = \{\omega\omega^R \mid \omega \in \{0, 1\}^*\}$$



Autômato com Pilha

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Linguagens Formais e Autômatos
Bacharelado em Ciência da Computação

23 de janeiro de 2018