Wie lauten die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus?
Hinweis: $\sin(a + b) = ...$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

(1) Wie lässt sich $log_a(x)$ durch ln ausdrücken?

(2) $log_a(x + y) = log_a(x) * log_a(y)$ - wahr oder falsch?

(3) $log_a(u^v) = ...$

(4) $log_a(u) - log_a(v) = ...$

(5) $ln(x)' = ...$

(6) $f : I \to \mathbb{R}, x \to f(x) := ln(x)$. Wie ist die Stammfunktion definiert?

(1) $log_a(x) = \frac{ln(x)}{ln(a)}$

(2) falsch, aber: $log_a(x \cdot y) = log_a(x) + log_a(y)$

(3) $log_a(u^v) = v \cdot log_a(u)$

(4) $log_a(u) - log_a(v) = log_a(\frac{u}{v})$

(5) $ln(x)' = \frac{1}{x}$

(6) $F : I \to \mathbb{R}, x \to F(x) := xln(x) - x + c$

 Bernd S.E. (berndschelf@gmail.com)

Beweise die Dreiecksungleichungen für den Betrag bei reellen Zahlen.

Dreiecksungleichung für reelle Zahlen: $|a+b| \leq |a|+|b|$ mit $a, b \in \mathbb{R}$

$$|a+b| = \sqrt{|a+b|^2} = \sqrt{|a^2+2ab+b^2|} \leq \sqrt{|a^2+|2ab|+b^2|} = \sqrt{(|a|+|b|)^2} = |a|+|b|$$

Sei $f : M \to N$ eine Funktion. *(Zur Beantwortung der Fragen sollen möglichst nur Quantoren verwendet werden.)*

Wie lautet die Definition für Injektivität?

Wie lautet die Definition für Surjektivität?

Wie lautet die Definition für Bijektivität?

Sei $f : M \to N$ eine Funktion

Injektivität

$\forall x_1, x_2 \in M : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Surjektivität

$\forall y \in N \; \exists x \in M : y = f(x)$

Bijektivität

f ist surjektiv und injektiv

 Bernd S.E. (berndschelf@gmail.com)

Wie sind die folgenden Reihen definiert, konvergieren diese und gegen welchen Grenzwert (falls sie konvergieren)?

Harmonische Reihe:

Allgemeine harmonische Reihe:

Alternierende harmonische Reihe:

Geometrische Reihe:

Harmonische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Allgemeine harmonische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ konvergiert für } \alpha \in (1, \infty)$$

Alternierende harmonische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = ln(2)$$

Geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ konvergiert für } |x| < 1$$

Gegen welchen Grenzwert konvergieren die Folgen (falls sie konvergieren)?

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a}{n} =$$

$$\lim_{k\to\infty} a^n =$$

$$\lim_{k\to\infty} n^{\frac{1}{n}} =$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n =$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n =$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a}{n} = 0 \text{ für } a \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{k\to\infty} a^n = 0 \text{ für } |a| < 1$$

$$\lim_{k\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1 \text{ für } a \in \mathbb{R}^+$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$$

Wie lautet die Cauchy-Schwarz Ungleichung?

Wie lautet die Minkowskische Ungleichung?

Cauchy-Schwarz Ungleichung:

$$|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$$

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Minkowskische Ungleichung:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Wie ist ein reeller Vektorraum definiert

Sei X eine nicht leere Menge, $x, y \in X, \alpha \in \mathbb{R}$. Dann heißt X ein reeller Vektorraum oder linearer Vektorraum über $\mathbb{R}$, wenn folgende Kriterien erfüllt sind

Addition: Auf X sei eine Addition erklärt, so dass x, y ein eindeutiges Element $x+y \in X$ zugeordnet ist mit:
- Add_1 (Assoziativität): $\forall x, y, z \in X : (x+y)+z = x+(y+z)$
- Add_2 (Neutrales Element): $\exists$ (*neutr. Element*) $0 \in X$ mit $x+0 = 0+x = x \; \forall x \in X$
- Add_3 (Inverses): $\forall x \in X \; \exists (-x) \in X : x+(-x) = (-x)+x = 0 \; (\forall x \in X)$
- Add_4 (Kommutativität): $\forall x, y \in X : \; x+y = y+x$

Skalare Multiplikation: Für $\alpha \in \mathbb{R}, x \in X$ ist eindeutig ein Element $\alpha x \in X$ zugeordnet mit:
- $Mult_1$ (Assoziativität): $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x \in X : \; \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
- $Mult_2$ (Distributivität): $\forall x, y \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \; \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha x, \; (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$
- $Mult_3$ (Neutrales Element): $\forall x \in X : 1x = x$

Seien $\|\|$ und $\|\|^*$ zwei Normen auf $\mathbb{R}^n, a =^t (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n, U \subseteq \mathbb{R}^n, (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k =^t (x_{k1}, ..., x_{kn})$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$. Was kann man bzgl. der Äquivalenz der Normen in $\mathbb{R}^n$ hinsichtlich Umgebungsbegriff und Konvergenz sagen?

(i) U ist Umgebung...

(ii)(x_k) ist konvergent (gegen a) ...

 Bernd S.E. (berndschelf@gmail.com)

Seien $\|\|$ und $\|\|^*$ zwei Normen auf $\mathbb{R}^n, a =^t (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n, U \subseteq \mathbb{R}^n, (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k =^t (x_{k1}, ..., x_{kn})$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:

(i) U ist Umgebung von a in $(\mathbb{R}^n, \|\|) \Leftrightarrow$ U ist Umgebung von a in $(\mathbb{R}^n, \|\|^*)$

(ii)(x_k) ist konvergent (gegen a) in $(\mathbb{R}^n, \|\|)$
$\Leftrightarrow$ (x_k) ist konvergent (gegen a) in $(\mathbb{R}^n, \|\|^*)$
$\Leftrightarrow$ Für jedes $j \in 1, ...n$ konvergiert (x_{kj}) (gegen a_j) in $(\mathbb{R}, ||)$

Wie sind die folgenden Normen (auf $\mathbb{R}^n$) definiert?

Durch $d_1(x, y)$ induzierte Norm:

Euklidische Norm:

Maximumnorm:

Durch $d_1(x,y)$ induzierte Norm:

$$\|x\|_1 := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|\right)$$

Euklidische Norm:

$$\|x\|_2 := \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)}$$

Maximumnorm:

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_k| \; |1 \leq k \leq n\}$$

 Bernd S.E. (berndschelf@gmail.com)

Wie lautet die Definition für eine Cauchyfolge?
(in einem normierten Raum)

Sei $(X, \|\|)$ ein normierter Raum. Eine Folge (x_k) in X heißt Cauchyfolge in $(X, \|\|)$, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

<u>Alternative 1:</u>
$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall k \in \mathbb{N} \; : (k > n_0 \Rightarrow \|x_k - x_{n_o}\| < \epsilon)$

<u>Alternative 2:</u>
$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall k, l \in \mathbb{N} \; : (k, l > n_0 \Rightarrow \|x_k - x_l\| < \epsilon)$

Wie ist die Hausdorfeigenschaft definiert (*für normierte Räume*)?

Sei $(X, \|)$ ein normierter Raum, und seien $a, b \in X$ mit $a \neq b$. Dann gibt es eine Umgebung U von a und eine Umgebung V von b mit $U \cap V = \emptyset$

Sei $(X, \|\|)$ ein normierter Raum. Welche der Aussagen ist wahr?

(1) Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge

(2) Jede Cauchyfolge ist beschränkt

(3) Jede Cauchyfolge konvergiert

(4) Besitzt eine Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge, so ist sie selbst konvergent

(1) wahr

(2) wahr

(3) wahr für Banachräume (wie bspw. $(\mathbb{R}^n, \|\|)$)

(4) wahr

Seien $(\mathbb{R}, \|\|)$ und $(\mathbb{R}, \|\|_\infty)$ normierte reelle Räume mit einer beliebigen Norm $\|\|$ und der Maximumnorm $\| \ \|_\infty$. Seien $a = {}^{\mathrm{t}}(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit ${}^{\mathrm{t}}(x_{k1}, ..x_{kn})$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$

(1) Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\|\|$ und $\|\|_\infty$

(2) Hängen Umgebungen zwischen $(\mathbb{R}, \|\|)$ und $(\mathbb{R}, \|\|_\infty)$ zusammen?

(3) Welche drei Konvergenzen sind hier äquivalent? (in drei verschiedenen normierten Räumen)

(1) $\|x\| \leq \alpha\|x\|_\infty$ and $\|x\|_\infty \leq \beta\|x\|$ für jedes $x \in \mathbb{R}$

(2) U ist Umgebung von a in $(\mathbb{R}, \|\|)$ $\Leftrightarrow$ U ist Umgebung von a in $(\mathbb{R}, \|\|_\infty)$

(3) (x_k) konvergiert gegen a in $(\mathbb{R}, \|\|)$ $\Leftrightarrow$ (x_k) konvergiert gegen a in $(\mathbb{R}, \|\|_\infty)$ $\Leftrightarrow$ Für jedes v = 1,...,n konvergiert $(x_{kv})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen a_v in $(R, ||)$

Wie ist eine Metrik $d(x, y)$ definiert?

Sei X eine beliebige Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt Metrik auf X, wenn für beliebige Elemente $x, y, z \in X$ die folgenden Axiome erfüllt sind:

(1) Positive Definitheit: $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(2) Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x)$

(3) Dreiecksungleichung: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Auf dem Vektorraum $C^1([a,b])$ der stetig differenzierbaren Funktionen auf [a,b] wird definiert: $\| \; \| : C^1([a,b]) \to \mathbb{R}, f \to \|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$

Zeige, dass $\| \; \|$ eine Norm ist.

Auf dem Vektorraum $C^1([a,b])$ der stetig differenzierbaren Funktionen auf [a,b] wird definiert: $\| \ \| : C^1([a,b]) \to \mathbb{R}, f \to \|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$

(i) Definitheit $\|x\| \geq 0$ und ($\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$):

$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \geq 0$

(ii) positive Homogenität $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$:

$\|\alpha f\| = \|\alpha f\|_\infty + \|\alpha f'\|_\infty = |\alpha|(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty) = |\alpha|\|f\|_\infty$

(iii): Dreiecksungleichung $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$:

$\|f + g\| = \|f + g\|_\infty + \|f' + g'\|_\infty \leq (\|f\|_\infty + \|g\|_\infty) + (\|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty) = (\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty) + (\|g\|_\infty + \|g'\|_\infty) = \|f\| + \|g\|$

Sei M eine nichtleere Menge. Zeige, dass durch $d_d := \begin{cases} 0 & \text{falls } p = q \\ 1 & \text{falls } p \neq q \end{cases}$ eine Metrik auf M definiert wird, die diskrete Metrik.

Sei M eine nichtleere Menge. Sei $d_d := \begin{cases} 0 & \text{falls } p = q \\ 1 & \text{falls } p \neq q \end{cases}$. Dann ist d_d eine Metrik.

<u>(1) Positive Definitheit: $d(x,y) \geq 0$ und $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$</u>

$d(p,q) \geq 0$ und $d(p,q) = 0 \Leftrightarrow p = q$ ist nach Definition gegeben.

<u>(2) Symmetrie: $d(x,y) = d(y,x)$</u>

Sei $d(p,q) = 0$, also $p = q \Rightarrow d(x,y) = 0 = d(y,x)$

Sei $d(p,q) \neq 0$, also $p \neq q \Rightarrow d(x,y) = 1 = d(y,x)$

<u>(3) Dreiecksungleichung: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$</u>

Falls $p = q : d(p,q) = 0 \leq d(p,r) + d(r,q)$

Falls $p \neq q : d(p,q) = 1 \leq d(p,r) + d(r,q)$, da mind. $p \neq r$ oder $r \neq q$ sein muss.

Bernd S.E. (berndschelf@gmail.com)

Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass für alle $x \in M$ die Menge $\{x\} \subseteq M$ abgeschlossen ist unter Verwendung der Hausdorffeigenschaft.

Sei $x \in \{x\} \subseteq M$ entsprechend Aufgabenstellung.

Sei $y \in M \setminus \{x\}$ beliebig. Wegen der Hausdorffeigenschaft des Raums existieren Umgebungen U_x von x, U_y von y mit $U_x \cap U_y = \emptyset$. Da U_y Umgebung von y ist, gibt es auch eine offene Menge U_y^* mit $U_y^* \subseteq U_y$

(i) Für jedes $y \in M \setminus \{x\}$ gilt $x \notin U_y^*$, also $U_y^* \subseteq M \setminus \{x\}$. Da dies für jedes $y \in M \setminus \{x\}$ gilt, gilt zudem auch $\bigcup\limits_{y \in M \setminus \{x\}} U_y^* \subseteq M \setminus \{x\}$

(ii) Andererseits muss auch gelten $M \setminus \{x\} \subseteq \bigcup\limits_{y \in M \setminus \{x\}} U_y^*$, da wir um jedes $y \in M \setminus \{x\}$ eine Umgebung legen. M muss dann natürlich in diesen gesamten Umgebungen liegen.

Aus (i) und (ii) folgt $M \setminus \{x\} = \bigcup\limits_{y \in M \setminus \{x\}} U_y^*$. Als Vereinigung offener Mengen ist $M \setminus \{x\}$ damit auch offen. Damit muss $\{x\}$ aber abgeschlossen sein.

...

...