

Cours d'Algèbre et géométrie I

Bernhard Keller

11/09/2018

Table des matières

1	Groupes	2
1.1	Motivation	2
1.1.1	Éléments de symétrie	2
1.2	Définition et premiers exemples	2
1.3	Sous-groupe	4
1.4	Sous-groupe engendré par une partie	6
1.5	Morphismes de groupes	6
1.6	Ordre d'un élément	10
1.7	Les treillis des sous-groupes	11
2	Actions de groupes	15
2.1	Relations d'équivalence	15
2.2	Définition d'une action de groupe	17
2.3	Orbites et stabilisateurs	19
2.4	Aspects numériques	21
2.4.1	Applications	22
3	Groupes symétriques	24
3.1	Définition et premières propriétés	24
3.1.1	Transpositions et cycles	25
3.2	La signature	28
4	Sous-groupes distingués, groupes quotients	30
4.1	Sous-groupes distingués	30
4.2	Groupes quotients	32
4.3	Passage au quotient des morphismes de groupes	34
5	Sous-groupes de Sylow	37
5.1	Définition et exemples	37
5.2	Digression arithmétique	39
5.3	Les théorèmes de Sylow	40
6	Théorèmes de classification	43
6.1	Un outil : le produit semi-direct	43
6.2	Produit semi-direct externe	44
6.3	Les groupes d'automorphismes des groupes cycliques	46
6.4	Classification des groupes d'ordre pq , $p < q$ premiers	47
6.5	Classification des groupes d'ordre p^2 , p premier	48
6.6	Classification des groupes d'ordre 12	49
7	Un peu de géométrie affine	51
7.1	Espaces affines	51
7.2	Sous-espaces affines	52
7.3	Applications affines	54

Chapitre 1

Groupes

1.1 Motivation

1.1.1 Éléments de symétrie

- 3 symétries orthogonales : $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$
- rotation ρ d'angle $\frac{2\pi}{3}$
- rotation ρ^2 d'angle $\frac{4\pi}{3}$
- l'identité

$D_3 = \{Id, \sigma_A, \sigma_B, \sigma_C, \rho, \rho^2\}$ est un groupe diédral.

On peut composer les éléments de l'ensemble D_3 et on restera dans D_3 .

La composition est associative.

Elle admet un élément neutre, l'identité.

Chaque élément admet un inverse.

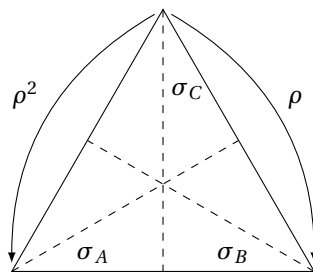


FIGURE 1.1 – Le groupe diédral D_3

1.2 Définition et premiers exemples

Définition 1.2.1

Un groupe est un couple $(G, *)$, où G est un ensemble et :

$$*: G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto g * h$$

est son appellation telle que :

1. $*$ est associative, c'est à dire :

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

2. $*$ admet un élément neutre e , c'est à dire :

$$e * x = x = x * e$$

3. tout élément $x \in G$ admet un inverse x' , c'est à dire :

$$x * x' = e = x' * x$$

Remarque 1.2.2

1. Souvent, on écrit xy au lieu de $x * y$

2. L'élément neutre e est unique : en effet, si e' est un deuxième élément neutre, on a :

$$e = e' e = e'$$

3. L'inverse est unique : en effet, soit x'' un deuxième inverse. On a :

$$x'' = ex'' = (x' x)x'' = x'(xx'') = x'e = x'$$

On note désormais x^{-1} l'inverse de x .

4. Pour tous $x, y \in G$, on a $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

En effet, on a :

$$\begin{aligned}(xy)(y^{-1}x^{-1}) &= (x(yy^{-1}))x^{-1} = (xe)x^{-1} = e \\ (y^{-1}x^{-1})(xy) &= y^{-1}(x^{-1}(xy)) = y^{-1}(ey) = e\end{aligned}$$

Définition 1.2.3

Un groupe G est abélien ou commutatif si $xy=yx$, pour tous $x, y \in G$.

Remarque 1.2.4

Souvent, on note $+$ la loi de groupe d'un groupe abélien. On note alors 0 , l'élément neutre et $-x$ l'élément inverse de $x \in G$.

Exemple 1.2.5

1. $D_3 = \{Id, \sigma_A, \sigma_B, \sigma_C, \rho, \rho^2\}$ n'est pas commutatif car $\sigma_C \circ \sigma_A = \rho$ et $\sigma_A \circ \sigma_C = \rho^{-1} = \rho^2 \neq \rho$.
2. $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien.
3. $(\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ sont des groupes abéliens.
4. $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ est un groupe abélien pour la multiplication. De même pour \mathbb{R}^* et \mathbb{C}^* .
5. Si E est un espace vectoriel sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} , alors $(E, +)$ est un groupe abélien.
6. Soit $n \geq 1$ un entier, alors l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles $n \times n$ est un groupe pour la multiplication des matrices. Il est abélien ssi $n = 1$.
De même pour $GL_n(\mathbb{Q})$ et $GL_n(\mathbb{C})$.

7. Soit X un ensemble (fini ou infini). Le groupe symétrique \mathfrak{S}_X est formé des bijections $f : X \rightarrow X$. Sa multiplication est la composition des applications. Son élément neutre est Id_X . L'inverse d'une bijection $f : X \rightarrow X$ est la bijection réciproque $f^{-1} : X \rightarrow X$. En particulier, pour $n \geq 1$, on a le groupe symétrique :

$$\mathfrak{S}_n = \sigma_{\{1,2,\dots,n\}} = \text{groupe de permutations de } \{1, \dots, n\}$$

Notons que $|\mathfrak{S}_n| = n!$.

Notation 1.2.6

Soit G un groupe. Soient $g \in G$ et $n \in \mathbb{N}$.

On note g^n , l'élément de G défini par récurrence :

$$\begin{aligned}g^0 &= e \\ g^{n+1} &= g^n g, \forall n \geq 0\end{aligned}$$

Si $n > 0$, on pose $g^{-n} = (g^n)^{-1}$.

Lemme 1.2.7

Soient G un groupe et $m, n \in \mathbb{Z}$. On a $g^{m+n} = g^m g^n$ et $(g^n)^{-1} = g^{-n}$.

Démonstration

Il faut distinguer des cas. Les détails sont laissés en exercice. □

Lemme 1.2.8

Soient G et H deux groupes.

Posons :

$$K = G \times H = \{(g, h) | g \in G, h \in H\}$$

Alors K est un groupe pour la loi :

$$K \times K \rightarrow K, ((g, h), (g', h')) \mapsto (gg', hh')$$

Démonstration

Clairement la loi est associative. Elle admet $e_K = (e_G, e_H)$ pour élément neutre et l'inverse de (g, h) est (g^{-1}, h^{-1}) , $\forall g \in G, h \in H$. □

Définition 1.2.9

$G \times H$ muni de cette loi est le groupe produit de G par H .

Exercice 1.2.10

$G \times H$ est abélien ssi G et H sont abéliens.

1.3 Sous-groupe

Définition 1.3.1

Soit G un groupe. Un sous-groupe de G est une partie de $H \subseteq G$ telle que :

1. $e_G \in H$
2. $\forall h, h' \in H$, on a $hh' \in H$
3. $\forall h \in H$, on a $h^{-1} \in H$

Notation 1.3.2

On note $H \leq G$ lorsque H est un sous-groupe de G .

Lemme 1.3.3

Une partie $H \subseteq G$ est un sous-groupe ssi $H \neq \emptyset$ et pour tous $h_1, h_2 \in H$, on a $h_1 h_2^{-1} \in H$.

Démonstration

" \Rightarrow " $H \neq \emptyset$ car $e_G \in H$. Si $h_1, h_2 \in H$ alors $h_2^{-1} \in H$ (3.) et donc $h_1 h_2^{-1} \in H$ (2.).

" \Leftarrow " Comme H est non vide, on peut choisir un $h \in H$. Alors $hh^{-1} = e_G \in H$. Soient $h_1, h_2 \in H$. On a $h_2^{-1} = eh_2^{-1} \in H$. Donc $h_1 h_2 = h_1 (h_2^{-1})^{-1} \in H$ □

Remarque 1.3.4

1. Soit H un sous-groupe de G . Alors la loi de G induit une application $H \times H \rightarrow H$, $(h_1, h_2) \mapsto h_1 h_2$ (bien définie par 2.). Muni de cette loi, H devient un groupe d'élément neutre $e_H = e_G$. Désormais tout sous-groupe d'un groupe est considéré comme un groupe de cette façon.
2. Si $H \leq G$ et $K \leq H$, alors $K \leq G$

Exemple 1.3.5

Soit G un groupe.

1. $\{e\} \leq G$
2. $G \leq G$
3. Posons $Z(G) = \{g \in G \mid hg = gh, \forall h \in G\}$. Clairement, on a $e \in Z(G)$. On montre ensuite que la multiplication de deux éléments de $Z(G)$ est toujours dans $Z(G)$.
Enfin, on montre que soient $g \in Z(G)$ et $h \in G$, on a $hg^{-1} = g^{-1}h$, donc $g^{-1} \in Z(G)$.
Par conséquent, $Z(G)$ est un sous-groupe de G .

Définition 1.3.6

On appelle $Z(G)$ le centre de G .

Exemple 1.3.7

$$Z(GL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^* \cdot I_n$$

Exemple 1.3.8 (de sous-groupes (suite))

Soit $n \geq 1$. Les parties suivantes sont des sous-groupes de $GL_n(\mathbb{R})$:

- $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$
- $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^t A = I_n\}$
- $SO_n(\mathbb{R}) = SL_n(\mathbb{R}) \cap O_n(\mathbb{R})$

Notation 1.3.9

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} \text{ où } n \geq 1$$

\mathbb{U}_n = racines n -ièmes de 1

Ce sont des sous-groupes de \mathbb{C}^*

Remarque 1.3.10

On a $\mathbb{U}_n \leq \mathbb{U} \leq \mathbb{C}^*$ et $\mathbb{U}_n \leq \mathbb{U}_{mn} \forall n, m \geq 1$.

Notation 1.3.11

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Théoreme 1.3.12

1. $n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$
2. Soit H un sous-groupe de \mathbb{Z} . Il existe un et un seul $n \in \mathbb{N}$ tq $H = n\mathbb{Z}$.
Si $H \neq \{0\}$, alors n est le plus petit entier strictement positif contenu dans H .

Démonstration

1. est clair
2. Soit $H \leq \mathbb{Z}$. Si $H = \{0\}$, alors $H = 0 \cdot \mathbb{Z}$. Supposons donc que $H \neq \{0\}$.
Soit $0 \neq x \in H$. Alors $-x \in H$. Donc H contient au moins un entier strictement positif. Soit $E = \{x \in H \mid x > 0\}$. Alors E est une partie non vide de \mathbb{N} .
Donc il existe dans E un plus petit élément n . Comme $n \in H$, on a $n\mathbb{Z} \subseteq H$.
Montrons que $n\mathbb{Z} \supseteq H$. Soit $x \in H$. Supposons $x > 0$, alors $x \in E$ et $x \geq n$.
La division euclidienne de x par n s'écrit $x = nq + r$, où $q, r \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq r < n$.
Comme x et nq sont dans H , r est dans H .

Or on a $0 \leq r < n$ et n était le plus petit entier positif contenu dans H . Donc $r = 0$ et $x = nq \in n\mathbb{Z}$.
Donc $H = n\mathbb{Z}$. Finalement, si m, n sont des entiers positifs et $m\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$, alors $m = n$. \square

1.4 Sous-groupe engendré par une partie

Soit G un groupe.

Lemme 1.4.1

Si $(G_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-groupes, alors $\cap_{i \in I} G_i$ est encore un sous-groupe.

Démonstration

Exercice facile. \square

Définition 1.4.2

Soit S une partie de G . Si $S = \emptyset$, on pose $\langle S \rangle = \{e\}$.

Si $S \neq \emptyset$, on pose :

$$\langle S \rangle = \cap_{H \text{ sous-groupe tq } H \supseteq S} H$$

On appelle $\langle S \rangle$ le sous-groupe engendré par S .

Remarque 1.4.3

$\langle S \rangle$ est le plus petit des sous-groupes contenant S .

Définition 1.4.4

$S \subseteq G$ est une partie génératrice si $\langle S \rangle = G$.

G est monogène s'il admet un singleton comme partie génératrice.

G est cyclique s'il est monogène et fini.

Exemple 1.4.5

$(\mathbb{Z}, +)$ est monogène (engendré par $S = \{1\}$) et infini.

\mathbb{U}_n , $n \geq 1$, est monogène et fini, donc cyclique.

Lemme 1.4.6

Soit S une partie non vide de G . On a :

$$\langle S \rangle = \{g_1 g_2 \dots g_n \mid n \in \mathbb{N}, g_i \in S \text{ ou } g_i^{-1} \in S \text{ pour tout } i\}$$

Démonstration

Notons H le membre de droite. Clairement, H est un sous-groupe et contient S . Donc $H \supseteq \langle S \rangle$.

Soit K un autre sous-groupe contenant S . Alors pour tout $s \in S$, on a $s \in K$ et $s^{-1} \in K$.

Comme K est stable par produit, K contient H donc H est le plus petit sous-groupe de G contenant S , cad $H = \langle S \rangle$. \square

1.5 Morphismes de groupes

Définition 1.5.1

Soient G et H deux groupes. Un morphisme de groupes (appelé aussi homomorphisme) est une application $f : G \rightarrow H$ tq $f(xy) = f(x)f(y) \forall x, y \in G$

Remarque 1.5.2

Dans ce cas, on a automatiquement $f(e_H) = e_H$ et $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$, $\forall x \in G$

En effet, on a :

$f(e) = f(ee) = f(e)f(e)$. En multipliant à gauche par $f(e)^{-1}$, on trouve $e = f(e)$

$f(x^{-1})f(x) = f(x^{-1}x) = f(e) = e$. En multipliant à droite par $f(x)^{-1}$, on trouve $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

Exemple 1.5.3

1. $x \mapsto \exp(x)$ est un morphisme de groupe de $(\mathbb{R}, +)$ vers (\mathbb{R}^*, \cdot)
2. $x \mapsto \ln(x)$ est un morphisme de groupe de (\mathbb{R}^*, \cdot) vers $(\mathbb{R}, +)$
3. $\det : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ est un morphisme de groupes. De même pour $GL_n(\mathbb{C})$ et $GL_n(\mathbb{Q})$
4. Soient E et F deux espaces vectoriels sur \mathbb{R} , soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.
Alors en particulier, f est un morphisme de groupes de $(E, +)$ vers $(F, +)$.
5. Soient G un groupe et $H \leq G$ un sous-groupe. Alors l'inclusion $H \hookrightarrow G$ est un morphisme de groupe

Théoreme 1.5.4

Soit G un groupe. Pour tout $g \in G$, il existe un unique morphisme de groupes $f : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow G$ tel que $f(1) = g$.

Démonstration

Pour l'existence, posons $f(n) = g^n$, $n \in \mathbb{Z}$, alors $f(1) = g^1 = g$ et $f(m+n) = g^{m+n} = g^m g^n = f(n)f(m)$ pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$

Pour l'unicité, notons que si $n > 1$, on a $f(n) = f(1 + \dots + 1) = f(1) \dots f(1) = g \dots g = g^n$

On doit aussi avoir $f(0) = e$ et $f(-n) = f(n)^{-1} = g^{-n}$ pour tout $n > 0$. □

Théoreme 1.5.5

Soient G un groupe et $n \geq 1$. Pour tout $g \in G$ tq $g^n = e$, il existe un unique morphisme de groupes $f : \mathbb{U}_n \rightarrow G$ tq $f(c) = g$, où $c = e^{\frac{2\pi i}{n}}$

Démonstration

On a $\mathbb{U}_n = \{1, c, \dots, c^{n-1}\}$.

Montrons l'unicité. On doit avoir :

$$f(c^k) = f(c)^k = g^k \quad \forall 0 \leq k \leq n-1$$

Pour montrer l'existence, définissons f par cette formule. Vérifions que f est un morphisme.

Soient $0 \leq k \leq n-1$. Soit $k+l = qn+r$, la division euclidienne de $k+l$ par n . On a :

$$f(c^k c^l) = f(c^{k+l}) = f(c^r) = g^r$$

$$f(c^k) f(c^l) = g^k g^l = g^{k+l} = g^r$$

□

Lemme 1.5.6

1. La composée de deux morphismes de groupes est un morphisme de groupes.
2. Si $f : G \rightarrow H$ est un morphisme de groupes et f est bijectif, alors l'application réciproque $f^{-1} : H \rightarrow G$ est encore un morphisme de groupes.

Démonstration

1. Soient $G \xrightarrow{\psi} H \xrightarrow{\varphi} K$ des morphismes de groupes. Pour $x, y \in G$, on a :

$$\varphi \circ \psi(xy) = \varphi(\psi(xy)) = \varphi(\psi(x)\psi(y)) = \varphi(\psi(x))\varphi(\psi(y)) = \varphi \circ \psi(x) \cdot \varphi \circ \psi(y)$$

2. Soient $x, y \in H$. Il s'agit de montrer que :

$$f^{-1}(xy) = f^{-1}(x)f^{-1}(y)$$

Comme f est injective, il suffit de montrer que les images par f des deux cotés sont égales.
En effet, on a :

$$f(f^{-1}(xy)) = xy \text{ et } f(f^{-1}(x)f^{-1}(y)) = xy$$

□

Définition 1.5.7

Un isomorphisme est un morphisme de groupes bijectif. Deux groupes G et H sont isomorphes s'il existe un isomorphisme $f : G \rightarrow H$.

On écrit alors $G \cong H$, et on écrit une flèche $\tilde{\rightarrow}$ pour désigner un isomorphisme.

Exemple 1.5.8

1. On a des isomorphismes inverses l'un de l'autre (\exp et \ln)
2. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_2$ tq $\sigma(1) = 2$ et $\sigma(2) = 1$. On a un isomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} (\{\pm 1\}, \cdot) & \xrightarrow{\sim} & \mathfrak{S}_2 \\ 1 & \mapsto & Id \\ -1 & \mapsto & \sigma \end{array}$$

3. Soit D_3 le groupe des symétries d'un triangle équilatéral ($D_3 = \{Id, \sigma_A, \sigma_B, \sigma_C, \rho, \rho^2\}$), on a :

$$f : D_3 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}_3$$

en envoyant chaque élément de symétrie g sur la permutation des sommets $f(g)$ qu'il induit.

Définition 1.5.9

Soit G un groupe. Un automorphisme de G est un isomorphisme $f : G \rightarrow G$.

On note $\text{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G . C'est un sous-groupe du groupe symétrique \mathfrak{S}_G de l'ensemble G .

Exemple 1.5.10

Pour tout $g \in G$, on a l'application de conjugaison par g :

$$c_g : G \rightarrow G, x \mapsto gxg^{-1}$$

C'est un morphisme de groupes car $c_g(xy) = c_g(x)c_g(y)$

C'est bijectif : sa réciproque est c_g^{-1} car $c_g^{-1}(c_g(x)) = x \forall x \in G$ et $c_g(c_g^{-1}(x)) = x \forall x \in G$

Donc c_g est un automorphisme de G appelé l'automorphisme intérieur associé à g

Propriété 1.5.11

1. L'application $G \rightarrow \text{Aut}(G), g \mapsto c_g$ est un morphisme de groupes
2. L'ensemble des automorphismes intérieurs est un sous-groupe de $\text{Aut}(G)$

Démonstration

En exercice.

□

Soient G et H deux groupes et $f : G \rightarrow H$ un morphisme.

Définition 1.5.12

Le noyau de f est :

$$\text{Ker}(f) = \{g \in G \mid f(g) = e\} \subseteq G$$

L'image de f est :

$$\text{Im}(f) = \{f(g) \mid g \in G\} \subseteq H$$

Théoreme 1.5.13

1. $\text{Ker}(f) \leq G$
2. $\text{Ker}(f) = \{e\}$ ssi f est injective
3. $\text{Im}(f) \leq H$
4. $\text{Im}(f) = H$ ssi f est surjective

Démonstration

1. On a $e \in \text{Ker}(f)$ car $f(e) = e$. Soient $x, y \in \text{Ker}(f)$, alors :

$$f(xy^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} = e.e^{-1}$$

Donc $xy^{-1} \in \text{Ker}(f)$

2. Supposons f injective. Alors $f(g) = e = f(e)$ implique $g = e$. Donc $\text{Ker}(f) = \{e\}$.
Réciproquement, supposons que $\text{Ker}(f) = \{e\}$. Soient $x, y \in G$ tq $f(x) = f(y)$.
Alors $f(xy^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} = e$. Donc $xy^{-1} \in \text{Ker}(f) = \{e\}$.
Donc $xy^{-1} = e$ et $x = y$.

3. On a $e = f(e) \in \text{Im}(f)$. Soient $f(x), f(y) \in \text{Im}(f)$. Alors :

$$f(x)f(y)^{-1} = f(x)f(y^{-1}) = f(xy^{-1}) \in \text{Im}(f)$$

4. est clair. □

Théoreme 1.5.14

1. Soit G' un sous-groupe de G . Alors $f(G')$ est un sous-groupe de $\text{Im}(f)$
2. Soit H' un sous-groupe de H . Alors $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G contenant $\text{Ker}(f)$
3. Les applications $G' \mapsto f(G')$ et $H' \mapsto f^{-1}(H')$ sont des bijections inverses l'une de l'autre entre l'ensemble des sous-groupes de G contenant $\text{Ker}(f)$ et l'ensemble des sous-groupes de $\text{Im}(f)$

Démonstration

1. On a $e = f(e) \in f(G')$. Si $x, y \in G'$ et donc $f(x), f(y) \in f(G')$, alors :

$$f(x)f(y)^{-1} = f(xy^{-1}) \in f(G')$$

2. On a $f(e) = e \in H'$ donc $e \in f^{-1}(H')$.

Soient $x, y \in f^{-1}(H')$, alors :

$$f(xy^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} \in H'$$

Donc $xy^{-1} \in H'$.

3. Soit $G' \leq G$ un sous-groupe contenant $\text{Ker}(f)$, alors clairement $G' \subseteq f^{-1}(f(G'))$
Réciproquement, soit $x \in f^{-1}(f(G'))$. Alors $f(x) \in f(G')$. Soit $y \in G'$ tq $f(x) = f(y)$.
Alors $y^{-1}x \in \text{Ker}(f) \subseteq G'$. Donc :

$$x = y \cdot y^{-1}x \in G'$$

Soit H' un sous-groupe de $\text{Im}(f)$. Alors clairement $H' \supseteq f(f^{-1}(H'))$.

Réciproquement, soit $f(g) \in H'$. Alors $g \in f^{-1}(H')$ et $f(g) \in f(f^{-1}(H'))$. □

1.6 Ordre d'un élément

Soit G un groupe.

Définition 1.6.1

L'ordre de G est le cardinal $|G|$ de l'ensemble G .

Exemple 1.6.2

1. L'ordre de $(\mathbb{Z}, +)$ est infini
2. L'ordre de \mathbb{U}_n est n

Notation 1.6.3

Pour $g \in G$, on pose $\langle g \rangle := \langle \{g\} \rangle$.

Propriété 1.6.4

Soit $g \in G$. On suppose qu'il existe $n \geq 1$ tq $g^n = e$.

1. On a $\langle g \rangle = \{g^i \mid 0 \leq i \leq n-1\}$. En particulier, l'ordre de $\langle g \rangle$ est $\leq n$
2. Si on note d l'ordre de $\langle g \rangle$, alors :

$$d = \min\{t \geq 1 \mid g^t = e\}$$

Démonstration

1. " \supseteq " est clair. Réciproquement, on sait que tout élément de $\langle g \rangle$ est de la forme g^i pour un $i \in \mathbb{Z}$. Soit $i = qn + r$ la division euclidienne de i par n . Alors on a :

$$g^i = g^{qn+r} = g^r \in \{g^k \mid 0 \leq k \leq n-1\}$$

2. Posons $s = \min\{t \geq 1 \mid g^t = e\}$. Alors par 1), on a :

$$\langle g \rangle = \{g^i \mid 0 \leq i \leq s-1\}$$

Pour $0 \leq i < j \leq s-1$, les puissances g^i et g^j sont distinctes. Sinon, on aurait $g^{j-i} = e$ mais $j-i < s$. Donc $s = |\langle g \rangle| = d$. \square

Définition 1.6.5

Soit $g \in G$. Si $\langle g \rangle$ est infini, l'ordre de g est infini.

Si $\langle g \rangle$ est fini, l'ordre de g est le plus petit entier $d \geq 1$ tq $g^d = e$

Remarque 1.6.6

1. Donc on a que l'ordre de g est égale à l'ordre de $\langle g \rangle$
2. Si $d < \infty$ est l'ordre de G , alors :

$$d\mathbb{Z} = \{n \in \mathbb{Z} \mid g^n = e\}$$

3. Etant donné $t \geq 1$, l'élément g est d'ordre t ssi $g^t = e$ et $g^{t'} \neq e$ pour tout diviseur strict t' de t .

Exemple 1.6.7

Soient $n \geq 1$ et $k \in \mathbb{Z}$. Soit $c = e^{\frac{2\pi i}{n}} \in \mathbb{U}$.

Alors $c^k \in \mathbb{U}_n$ est d'ordre $\frac{\text{ppcm}(n,k)}{k}$

Théorème 1.6.8 (Théorème de Lagrange)

Soit G un groupe fini. Alors, l'ordre de tout sous-groupe $G' \leq G$ divise l'ordre de G .

Corollaire 1.6.9

Soit G un groupe fini, alors tout élément $g \in G$ est d'ordre fini et son ordre divise l'ordre de G .

Conséquence 1.6.10

Soit G un groupe fini dont l'ordre est un nombre premier.

Alors tout sous-groupe de G est égal à G ou à $\{e\}$.

En particulier, si $e \neq g \in G$, alors $G = \langle g \rangle$. Donc G est cyclique.

Démonstration

Soit H un sous-groupe de G .

Pour $g \in G$, on pose :

$$gH = \{gh | h \in H\}$$

alors $|gH| = |H|$, $\forall g \in G$, car on a les bijections réciproques l'une de l'autre.

Montrons que pour tous $g, g' \in G$, on a :

$$gH \cap g'H \neq \emptyset \Rightarrow gH = g'H$$

En effet, si on a $gh = g'h'$, pour $h, h' \in H$, alors pour $h'' \in H$, on a :

$$gh'' = g'g'^{-1}gh'' = g'h'h^{-1}h'' \in g'H$$

Donc $gH \subseteq g'H$ et de même $g'H \subseteq gH$. Donc $gH = g'H$.

Notons que la réunion des gH , $g \in G$, est G car $g = g \cdot e \in gH$, pour $g \in G$. Il s'ensuit que $\{gH | g \in G\}$ est une partition de G .

Chaque gH a le même nombre d'éléments : $|H|$

Donc $|G| = |H| \cdot |\{gH | g \in G\}|$. □

1.7 Les treillis des sous-groupes

Définition 1.7.1

Soit X un ensemble. Une relation R sur X est un sous-ensemble $R \subseteq X \times X$.

On note xRy (" x est en relation avec y ") lorsque $(x, y) \in R$.

Définition 1.7.2

Une relation R est une relation d'ordre ssi :

- (réflexivité) $\forall x \in X, xRx$
- (antisymétrie) $\forall x, y \in X (xRy \text{ et } yRx) \Rightarrow x = y$
- (transitive) $\forall x, y, z \in X (xRy \text{ et } yRz) \Rightarrow xRz$

Définition 1.7.3

Un ensemble (X, R) muni d'une relation d'ordre s'appelle un ensemble ordonné.

Exemple 1.7.4

1. (\mathbb{R}, \leq) est un ensemble ordonné.
2. Soit $n \geq 1$, X l'ensemble des diviseurs positifs de n , avec R la relation $xRy \Leftrightarrow x \text{ divise } y$, est un ensemble ordonné.
3. X un ensemble, $P(X)$ l'ensemble des parties de X avec $ARB \Rightarrow A \subseteq B$

Définition 1.7.5

Soit (X, R) un ensemble ordonné et soit $A \subseteq X$ un ensemble. Un minorant (resp majorant) de A est un $x \in X$ tq $xRa \forall a \in A$ (resp $aRx, \forall a \in A$), le plus petit (resp le plus grand) élément de A est un minorant (resp un majorant) qui est dans A .

Dorénavant notons \leq toute relation d'ordre sur un ensemble X .

Définition 1.7.6

Un treillis est un ensemble ordonné (X, \leq) tq $\forall (x, y) \in X \times X$ il existe dans X un plus petit majorant $\text{Sup}(x, y)$ de $\{x, y\}$ et un plus grand minorant $\text{Inf}(x, y)$ de $\{x, y\}$.

Exemple 1.7.7

1. (\mathbb{R}, \leq) est un treillis (évident)
2. Soit $n \geq 1$ un entier, $X = \{d \in \mathbb{N} | d \text{ divise } n\}$ muni de $x \leq y \Leftrightarrow x|y$ est un treillis pour $\text{sup}(k, l) = \text{ppcm}(k, l)$ (qui est encore un diviseur de n) et $\text{inf}(k, l) = \text{pgcd}(k, l)$
3. X un ensemble, $P(x)$ l'ensemble des parties de X . $(P(x), \subseteq)$ est un treillis avec $A, B \in P(x)$ $\text{sup}(A, B) = A \cup B$ et $\text{inf}(A, B) = A \cap B$
4. V un K -espace vectoriel, K un corps $(\mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots)$, $\text{Gr}(V)$ l'ensemble des sous K -espace vectoriel de V est un treillis pour \subseteq car :
 $\forall U, W \in \text{Gr}(V)$ $\text{sup}(U, W) = \{u + w \in V | u \in U, w \in W\}$ est le plus petit sous espace vectoriel de V qui contient U et W , et $\text{inf}(U, W) = U \cap W$ est le plus grand sous espace vectoriel de V inclus dans U et dans W .
5. G un groupe, $L(G)$ l'ensemble des sous-groupes de G est un treillis pour \subseteq car :
 $H, H' \in L(G)$ $\text{sup}(H, H') = \langle H, H' \rangle$ (groupe engendré par H et H'), et $\text{inf}(H, H') = H \cap H'$

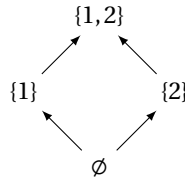
Définition 1.7.8

Soit (X, \leq) un treillis. Son diagramme de Hasse est le graphe orienté où :

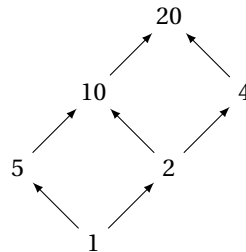
- les sommets sont les éléments $x \in X$
- on met une flèche $x \rightarrow y$ si y est minimal parmi les éléments $\geq x$ distincts.

Exemple 1.7.9

1. $(P(\{1, 2\}), \subseteq)$:



2. $(X = \{\text{ensemble des diviseurs de } 20\}, |)$, on a $X = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$:



Lemme 1.7.10

Soit $n \geq 1$ un entier, $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}} \in \mathbb{U}_n$.

Les sous-groupes de \mathbb{U}_n sont exactement les $\zeta^{d\mathbb{Z}}$ avec $d|n$. De plus $\zeta^{d\mathbb{Z}} \subseteq \zeta^{d'\mathbb{Z}} \Leftrightarrow d'|d$

Démonstration

Soit $e : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{U}_n, k \mapsto \zeta^k$.

C'est un morphisme de groupes. Donc $\forall H$ sous-groupe de $\mathbb{U}_n, e^{-1}(H) = \{k \in \mathbb{Z} | e(k) \in H\}$ est un sous-groupe de \mathbb{Z} .

De plus $e^{-1}(H) \supseteq e^{-1}(1)$ (car $1 \in H$).

On connaît les sous-groupes de \mathbb{Z} : les $d\mathbb{Z}$.

$\exists d \in \mathbb{N} \text{ tq } e^{-1}(H) = d\mathbb{Z}$ donc $e^{-1}(1) = \{k \in \mathbb{Z} | \zeta^k = e^{\frac{2i\pi k}{n}} = 1\} = n\mathbb{Z}$

Donc $n \in n\mathbb{Z} \subseteq d\mathbb{Z} \Rightarrow d|n$. Donc $H = \zeta^{d\mathbb{Z}}$ avec $d|n$.

$$\zeta^{d\mathbb{Z}} \subseteq \zeta^{d'\mathbb{Z}} \Leftrightarrow d\mathbb{Z} \subseteq d'\mathbb{Z} \Leftrightarrow d'|d$$

□

Exemple 1.7.11

1. Treillis de \mathbb{U}_{20} :

D'après le lemme précédent, les sous-groupes de \mathbb{U}_{20} sont $\langle \zeta^{20} \rangle, \langle \zeta^{10} \rangle, \langle \zeta^5 \rangle, \langle \zeta^4 \rangle, \langle \zeta^2 \rangle$ et $\langle \zeta^1 \rangle$:

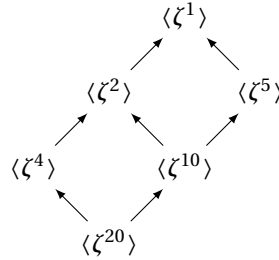


FIGURE 1.2 – Diagramme de Hasse du groupe \mathbb{U}_{20}

2. Treillis des sous-groupes de $D_3 = \{Id, \sigma_A, \sigma_B, \sigma_C, \rho, \rho^2\}$.

Soit H un sous-groupe de $D_3, |H| \in \{1, 2, 3, 6\}$, donc on a :

- $|H| = 1 \Rightarrow H = \{Id\}$
- $|H| = 2 \Rightarrow H = \langle \sigma_A \rangle, \langle \sigma_B \rangle, \langle \sigma_C \rangle$
- $|H| = 3 \Rightarrow H = \langle \rho \rangle, \langle \rho^2 \rangle$

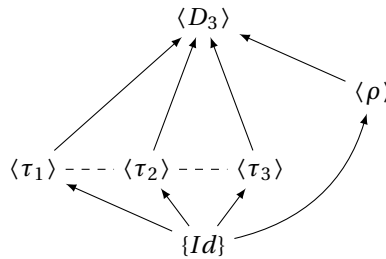


FIGURE 1.3 – Diagramme de Hasse du groupe diédral 3

Ici, comme dans tout les diagrammes de groupes diédraux à venir, les " --- " représentent la relation de conjugaison par ρ .

3. Treillis des sous-groupes de D_4 , on pose :

- τ_i la réflexion par rapport à Δ_i
- ρ la rotation d'angle $\frac{2\pi}{4}$

On a $D_4 = \{Id, \rho, \rho^2, \rho^3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$.

Soit H un sous-groupe de $D_4, |H| \in \{1, 2, 4, 8\}$, donc on a :

- $|H| = 1 \Rightarrow H = \{Id\}$
- $|H| = 2 \Rightarrow H = \langle \rho^2 \rangle, \langle \tau_1 \rangle, \langle \tau_2 \rangle, \langle \tau_3 \rangle, \langle \tau_4 \rangle$
- $|H| = 4 \Rightarrow H = \langle \rho \rangle, \langle \tau_1, \tau_3 \rangle, \langle \tau_2, \tau_4 \rangle$

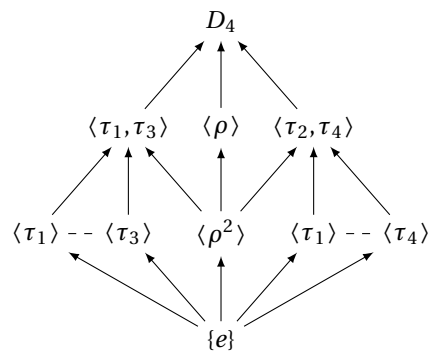


FIGURE 1.4 – Diagramme de Hasse du groupe diédral 4

Chapitre 2

Actions de groupes

2.1 Relations d'équivalence

Définition 2.1.1

X un ensemble. Une relation R sur X est une relation d'équivalence ssi :

1. (réflexivité) $\forall x \in X \ xRx$
2. (symétrie) $\forall x, y \in X \ xRy \Leftrightarrow yRx$
3. (transitivité) $\forall x, y, z \in X \ (xRy \text{ et } yRz) \Rightarrow xRz$

Exemple 2.1.2

Soit G un groupe.

1. $H \subseteq G$ un sous-groupe. On définit $g, g' \in G \ g \sim_H g'$ si $\exists h \in H | g' = gh$. C'est une relation d'équivalence.
2. $\forall g, g' \in G$, on définit $g \sim g'$ si $\exists x \in G | g' = xgx^{-1}$. C'est une relation d'équivalence.
3. $X = L(G)$ l'ensemble des sous-groupes de G avec la relation $H \sim H'$ si $\exists g \in G | H' = gHg^{-1}$

Définition 2.1.3

Soit (X, R) un ensemble muni d'une relation d'équivalence.

La classe d'équivalence de $x \in X$ est $\bar{x} = \{y \in X | xRy\}$.

Le quotient de X par R est $X/R = \{\bar{x} | x \in X\}$.

L'application
$$\begin{array}{ccc} X & \rightarrow & X/R \\ x & \mapsto & \bar{x} \end{array}$$
 s'appelle la surjection canonique.

Exemple 2.1.4

Dans le cas 1) de l'exemple précédent, $g \in G$, $\bar{g} = \{gh | h \in H\} = gH$ et on note $G/\sim_H = G/H$. G/H n'est pas un groupe en général.

Propriété 2.1.5

1. X/R est une partition de X
2. $\forall x, y \in X \ xRy \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$

Démonstration

1. Soit $\bar{x}, \bar{y} \in X/R$. Supposons $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset$ et montrons que $\bar{x} = \bar{y}$.
 $\exists z \in \bar{x} \text{ et } z \in \bar{y}$.
Montrons que $\bar{x} \subseteq \bar{y}$:
Soit $z' \in \bar{x}$, $z'Rz$ et $zRz' \Rightarrow z'Ry \Rightarrow z' \in \bar{y}$.
On montre que $\bar{y} \subseteq \bar{x}$ par un raisonnement identique.

Cela montre que les classes d'équivalences sont disjointes ou confondues.
Et $\forall x \in X \ x \in \bar{x}$. Donc les classes d'équivalences forment une partition de X .

2. " \Rightarrow " Supposons xRy , soit $z \in \bar{x}$, on a zRy $z \in \bar{y}$.
Donc de même, on a $\bar{y} \subseteq \bar{x}$. Donc $\bar{x} = \bar{y}$
" \Leftarrow " Supposons $\bar{x} = \bar{y}$, $y \in \bar{y} = \bar{x}$, $y \in \bar{x}$, donc yRx .

□

Théoreme 2.1.6

Soit (X, R) un ensemble avec une relation d'équivalence.

Soit π la surjection canonique.

Soit f une application de X dans Y . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $(\forall x, y \in X \ xRy \Rightarrow f(x) = f(y))$
2. $(\exists \bar{f} : X/R \rightarrow Y \text{ telle que } f = \bar{f} \circ \pi)$

Démonstration

Supposons 1).

— unicité de \bar{f} :

Si \bar{f}_1 et \bar{f}_2 vérifient $\bar{f}_1 \circ \pi = f = \bar{f}_2 \circ \pi$.

Soit $\bar{x} \in X/R$ $\bar{x} = \pi(x)$, et on a :

$$\bar{f}_1(\bar{x}) = (\bar{f}_1 \circ \pi)(x) = f = (\bar{f}_2 \circ \pi)(x) = \bar{f}_2(\bar{x})$$

— Existence de \bar{f} :

Soit $\chi \in X/R$, $\exists x \in X \mid \pi(x) = \chi = \bar{x}$.

On pose $\bar{f}(\chi) = f(x)$. Cette définition est indépendante du choix de x , car :

si $y \in X$ vérifie $\pi(y) = \chi \Rightarrow \pi(x) = \pi(y)$

D'après le lemme , on a $xRy \Rightarrow f(x) = f(y)$. Donc cette définition définit une application $\bar{f} : X/R \rightarrow Y$ et elle vérifie $f = \bar{f} \circ \pi$ par construction.

Supposons 2). Soit $x, y \in X$, $xRy \Rightarrow \pi(x) = \pi(y) \Rightarrow (\bar{f} \circ \pi)(x) = (\bar{f} \circ \pi)(y) \Rightarrow f(x) = f(y)$

□

Remarque 2.1.7

Lorsque f vérifie 1. du théorème, on dit que f passe au quotient par R et que \bar{f} est induite par f .

Lemme 2.1.8

Soit (X, R) , f vérifiant les assertions du théorème précédent :

1. \bar{f} est surjective $\Leftrightarrow f$ l'est aussi
2. \bar{f} est injective $\Leftrightarrow (\forall x, y \in X, f(x) = f(y) \Rightarrow xRy)$

Démonstration

1. Supposons \bar{f} surjective, $f = \bar{f} \circ \pi$ est surjective, car \bar{f} et π sont surjectives.

Supposons f surjective, soit $y \in Y$, $\exists x \in X \mid f(x) = y = \bar{f}(\pi(x)) = y$, \bar{f} est surjective.

2. à faire en exercice

□

Propriété 2.1.9

Soit $n \geq 1$ entier, soit $e :$

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{U}_n \\ k &\mapsto e^{\frac{2\pi i k}{n}} \end{aligned}$$

Soit R la relation d'équivalence $xRy \Leftrightarrow n \mid x - y$.

Notons $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/R$, alors e induit une bijection $\bar{e} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{U}_n$ avec $e = \bar{e} \circ \pi$

Démonstration

L'existence de \bar{e} découle du théorème et de $xRy \Leftrightarrow n|x - y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} | x = y + nk$.

Ceci implique que $e(x) = e(y)$.

La surjection de \bar{e} découle du lemme et de la surjectivité de e .

L'injection de \bar{e} découle de $\forall x, y \in \mathbb{Z} \ e(x) = e(y) \Leftrightarrow xRy$, et du lemme. □

2.2 Définition d'une action de groupe

Définition 2.2.1

Soient X un ensemble, G un groupe. Une action de G sur X est une application

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \rightarrow & X \\ (g, x) & \rightarrow & g \cdot x \end{array} \text{ telle}$$

que :

1. $\forall x \in X \ e \cdot x = x$
2. $\forall g, h \in G \ \forall x \in X \ (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$

Définition 2.2.2

Un G -ensemble est un ensemble muni d'une action du groupe G .

Exemple 2.2.3

1. Le groupe diédral $D_3 = \{Id, \sigma_A, \sigma_B, \sigma_C, \rho, \rho^2\}$ agit sur l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ des sommets du triangle équilatéral.
2. Le groupe symétrique \mathfrak{S}_n agit sur l'ensemble $X = \{1, \dots, n\}$ par $\sigma \cdot x := \sigma(x)$, $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\forall x \in X$.

Soit G un groupe.

3. Soit $H \subseteq G$ un sous-groupe. Alors H agit sur G par :

$$H \times G \rightarrow G, (h, g) \mapsto hg$$

On appelle cette action, l'action de H sur G , par transition à gauche.

4. L'application $G \times G \rightarrow G$, $(g, x) \mapsto gxg^{-1}$ est une action de G sur lui-même (en effet, on a $e \cdot x = e \cdot x \cdot e^{-1} = x$, $\forall x \in G$ et $(gh) \cdot x = ghx(gh)^{-1}g(hxh^{-1})g^{-1} = g(hx)$, $\forall g, h \in G$, $\forall x \in G$).

On l'appelle l'action de conjugaison de G sur lui-même.

5. Soit X l'ensemble des sous-groupes de G . L'application :

$$G \times X \rightarrow X, (g, K) \mapsto gKg^{-1}$$

est une action de groupe. On l'appelle l'action de conjugaison de G sur l'ensemble de ses sous-groupes.

6. Soit $n \geq 1$. L'application :

$$GL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (g, v) \mapsto g(v)$$

est une action de groupe.

7. Soit $n \geq 1$. L'application :

$$\begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ (P, M) & \mapsto & PMP^{-1} \end{array}$$

est une action de groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ sur $M_n(\mathbb{R})$.

Propriété 2.2.4

Soient G un groupe et X un ensemble.

1. Une action de G sur X : pour tout $g \in G$, soit $\varphi_g : X \rightarrow X$ l'application $x \mapsto gx$, alors $\varphi_g \in \mathfrak{S}_X$ et l'application $G \rightarrow \mathfrak{S}_X \ g \mapsto \varphi_g$ est un morphisme de groupes.

2. Soit $f : G \rightarrow \mathfrak{S}_X$ est un morphisme de groupes. Alors il existe une unique action de G sur X tq :

$$g \cdot x = (f(g))(x), \quad \forall g \in G, \forall x \in X$$

Comme le montre la proposition, on a une bijection naturelle entre l'ensemble des actions de G sur X et l'ensemble des morphismes de groupes de G vers \mathfrak{S}_X

Démonstration

1. Pour tout $g \in G$, l'application φ_g est bijective de réciproque $\varphi_{g^{-1}}$ car :

$$\varphi_g \varphi_{g^{-1}}(x) = \varphi_g(g^{-1}x) = g(g^{-1}x) = (gg^{-1})x = ex = x$$

et de la même façon :

$$\varphi_{g^{-1}} \varphi_g(x) = ex = x$$

On a pour $g, h \in G$:

$$\varphi_{gh}(x) = (gh)(x) = g(hx) = \varphi_g \circ \varphi_h(x), \quad \forall x \in X$$

Donc l'application $g \mapsto \varphi_g$ est bien un morphisme de groupe $G \rightarrow \mathfrak{S}_X$

2. On définit l'application $G \times X \rightarrow X$ par $g \cdot x = (f(g))(x)$, $\forall g \in G, \forall x \in X$, vérifions qu'il s'agit d'une action.

$$ex = (f(e))x = Id_X(x) = x, \quad \forall x \in X$$

et

$$g(hx) = f(g)(hx) = f(g)(f(h)(x)) = (f(g) \circ f(h))(x) = f(gh)(x) = gh.x$$

pour tous $g, h \in G$ et tout $x \in X$

□

Définition 2.2.5

Soient G un groupe et X un ensemble. Une action à droite de G sur X est une application :

$$X \times G \rightarrow X, (x, g) \mapsto x \cdot g$$

telle que :

1. $x \cdot e = x, \quad \forall x \in X$
2. $x \cdot (gh) = (xg) \cdot h, \quad \forall g, h \in G, \forall x \in X$

Exemple 2.2.6

Soit $n \geq 1$, alors l'application :

$$\begin{aligned} M_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R}) &\rightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ (P, M) &\mapsto MP \end{aligned}$$

est une action à droite de $GL_n(\mathbb{R})$ sur $M_n(\mathbb{R})$.

Remarque 2.2.7

Soit X un ensemble muni d'une action à droite d'un groupe G . On définit $g \cdot x := x \cdot g^{-1} \quad \forall g \in G$. C'est une action à gauche de G sur X car :

$$ex = xe^{-1} = xe = x$$

et

$$(gh) \cdot x = x(gh)^{-1} = x(h^{-1}g^{-1}) = (xh^{-1})g^{-1} = (hx)g^{-1} = g \cdot (hx)$$

$\forall x \in X, \forall g, h \in G$.

On obtient ainsi une bijection entre les actions à droite de G sur X et les actions à gauche de G sur X .

2.3 Orbites et stabilisateurs

Soient G un groupe et X un G -ensemble.

Définition 2.3.1

Pour $x \in X$, l'orbite de x est :

$$G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$$

Le stabilisateur de x est :

$$\text{Stab}_G(x) = G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

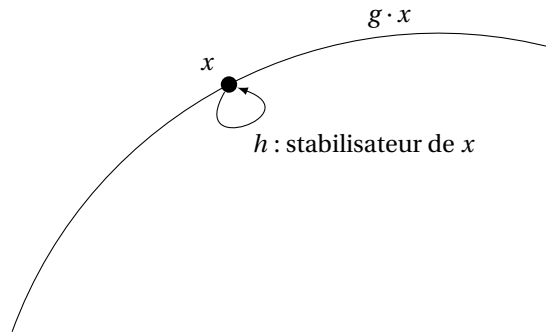


FIGURE 2.1 – Orbite de x sous G

Remarque 2.3.2

1. Soit $x \in X$. L'orbite $G \cdot x$ contient $x = e \cdot x$. Le stabilisateur G_x est un sous-groupe car $e \cdot x = x$, et $g(hx) = gx = x$, $\forall g, h \in G_x$, et si $g \in G_x$ alors $g^{-1} \in G_x$ car $g^{-1}x = x \Leftrightarrow g(g^{-1}x) = gx \Leftrightarrow ex = x$.
2. On définit de façon analogue les orbites et stabilisateurs d'une action à droite.

Exemple 2.3.3

Soit $H \subseteq G$ un sous-groupe.

1. Pour l'action $H \times G \rightarrow G$, $(h, g) \mapsto hg$, l'orbite d'un $g \in G$ est Hg , la classe à gauche modulo H de g .
Le stabilisateur de $g \in G$ est formé des $h \in H$ tq $hg = g \Leftrightarrow h = e$. Donc $\text{Stab}_H(g) = \{e\}$.

2. Pour l'action à droite :

$$G \times H \rightarrow G, (g, h) \mapsto gh$$

l'orbite de $g \in G$ est la classe à droite gH . En outre, $\text{Stab}_H(g) = \{e\}$

Propriété-Définition 2.3.4

Soit \sim la relation sur X tq :

$$x \sim y \Leftrightarrow y \in G \cdot x$$

Alors \sim est une relation d'équivalence sur X appelée la relation d'équivalence associée à l'action de G sur X .

Démonstration

On vérifie que \sim est :

- réflexive : $x \sim x$ car $x = ex$

- symétrique : $x \sim y \sim y \sim x$ car $y = gx \Leftrightarrow g^{-1}y = x$
- transitive : Si $x \sim y$ et $y \sim z$, alors $x \sim z$ car si $y = gx$ et $z = hy$, alors $z = hy = h(gx) = (hg)x$ \square

Remarque 2.3.5

Pour tout $x \in X$, la classe d'équivalence de x est égale à l'orbite $G \cdot x$.

Définition 2.3.6

Le quotient de X par G est l'ensemble $G \backslash X := X / \sim$ formé des orbites de G dans X .

Remarque 2.3.7

On définit de façon analogue la relation d'équivalence et l'ensemble quotient d'une action à droite de G sur X .

L'ensemble quotient est alors noté X/G .

Propriété 2.3.8

L'ensemble des orbites est une partition de X .

Démonstration

En effet, ce sont des classes d'équivalence pour une relation d'équivalence. \square

Définition 2.3.9

Soit X un G -ensemble non-vide.

L'action de G sur X est :

- transitive s'il n'y a qu'une seule orbite
- fidèle si $\forall g \in G$, on a :

$$gx = x, \forall x \in X \Rightarrow g = e$$

- libre si tous les stabilisateurs sont triviaux ($Stab_G(x) = \{e\}$, $\forall x \in X$).

Remarque 2.3.10

1. On définit de façon analogue les notions correspondantes pour les actions à droite.
2. L'action de G sur X est transitive ssi $G \backslash X$ est un singleton.
3. L'action de G sur X est fidèle ssi le morphisme associé $G \rightarrow \mathfrak{S}_X$ a pour noyau $\{e\}$, c'est à dire ssi $G \rightarrow \mathfrak{S}_X$ est injectif.

Exemple 2.3.11

1. Pour tout sous-groupe H de G , l'action de H sur G par translations à gauche (ou à droite) est libre (car $Stab_H(g) = \{h \in H | hg = g\} = \{e\}$), donc fidèle.
Elle est transitive ssi $H = G$ (s'il n'y a qu'une seule orbite, elle est égale à G , donc G est l'orbite sous H de e mais cette orbite est $H \cdot e = H$)
2. Soit $n \geq 1$. Considérons l'action :

$$GL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (g, v) \mapsto gv$$

L'orbite d'un vecteur $v \neq 0$ est $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (en effet si v_1, \dots, v_n est une base tq $v_1 = v$ et w_1, \dots, w_n est une base tq $w_1 = w \neq 0$, il existe un unique $g \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $g(v_i) = w_i, \forall i$, en particulier $gv = w$).

L'orbite de $v = 0$ est $\{0\}$.

Il y a donc exactement 2 orbites : $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\{0\}$.

Donc l'action n'est pas transitive.

Elle est fidèle (car si $gv = v \forall v$, alors $ge_i = e_i$, pour $i \in [1, n]$ et $g = Id$).

Elle n'est pas libre car $Stab_{GL_n(\mathbb{R})}(0) = GL_n(\mathbb{R})$

3. L'action $GL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(g, v) \mapsto gv$ est transitive, fidèle et non libre. En effet, $Stab_{GL_n(\mathbb{R})}(e_1) = [e_1, *, *, \dots, *]$ avec $*$ des vecteurs quelconques.
4. Soit $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \forall i \text{ on a } x_i = \pm 1\}$ l'ensemble des sommets d'un cube de \mathbb{R}^3 centré en l'origine. Soit $G = \{g \in O_3(\mathbb{R}) \mid g(C) = C\}$ (O_n est l'ensemble des matrices orthogonales de taille $n \times n$).
L'action :

$$G \times C \rightarrow C, (g, x) \mapsto gx$$

est transitive (combiner des rotations et des symétries).

Elle est fidèle (les vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ forment une base de \mathbb{R}^3).

Elle n'est pas libre (la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et d'axe $\mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ est dans G et dans le stabilisateur de

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}).$$

2.4 Aspects numériques

Soit G un groupe et soit X un G -ensemble (ensemble muni d'une action de G).

Théorème 2.4.1

Soit $x \in X$. Soit $\pi : G \rightarrow G/Stab_G(x)$ la projection canonique.

Il existe une et une seule application :

$$\varphi : G/Stab_G(x) \rightarrow G \cdot x$$

telle que $\varphi \circ \pi(g) = gx$ pour tout $g \in G$.

Cette application est bijective.

Démonstration

Soit $H = Stab_G(x)$. Comme π est surjective, l'application φ , si elle existe, est unique.

Soient $g \in G$ et $h \in H$. On a :

$$(gh)x = g(hx) = gx \quad h \in Stab_G(x)$$

Donc l'application $\tilde{\varphi} : G \rightarrow G \cdot x$ vérifie $\tilde{\varphi}(gh) = \tilde{\varphi}(g), \forall h \in H, \forall g \in G$.

Donc $\tilde{\varphi}(g)$ ne dépend que de la classe $gH \in G/H$. Par passage au quotient par H , $\tilde{\varphi} : G \rightarrow G \cdot x$ induit $\varphi : G/H \rightarrow G \cdot x$. Clairement, φ est surjective.

Supposons que $g_1, g_2 \in G$ sont tels que $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$. Alors $g_1x = g_2x$, donc $x = g_1^{-1}g_2x$ et $g_1^{-1}g_2 \in H$ et $g_2 \in g_1H$. Donc on a $g_2H = g_1H$, ou $\pi(g_1) = \pi(g_2)$.

Cela montre que φ est injective. □

Remarque 2.4.2

L'ensemble $G/Stab_G(x)$ est un G -ensemble pour l'action naturelle :

$$g \cdot \pi(g') := \pi(gg'), \quad \forall g, g' \in G$$

où $\pi : G \rightarrow G/Stab_G(x)$ est la projection canonique. La bijection canonique $G/Stab_G(x) \xrightarrow{\sim} G \cdot x$ est en fait un isomorphisme de G -ensembles.

En particulier, tout G -ensemble transitif est isomorphe à un G -ensemble de la forme G/H pour un sous-groupe H de G .

Corollaire 2.4.3

On suppose G et X finis.

1. Pour tout $x \in X$, on a $|G \cdot x| = \frac{|G|}{|Stab_G(x)|}$. En particulier, $|G \cdot x|$ divise $|G|$.
2. Choisissons un élément x_i dans chaque orbite, $1 \leq i \leq n$. On a :

$$|X| = \sum_{i=1}^n \frac{|G|}{|Stab_G(x_i)|}$$

Remarque 2.4.4

Ces égalités sont appelées **équations aux classes**.

2.4.1 Applications

Application 1

Soit p un nombre premier. Supposons que G est un p -groupe, c'est à dire son ordre est une puissance de p .

Définition 2.4.5

Un élément x d'un G -ensemble X est un point fixe si $gx = x \forall g \in G$.

Soient G un p -groupe, et X un G -ensemble fini.

Si $x \in X$ n'est pas un point fixe, le cardinal de l'orbite $|G \cdot x|$ est un diviseur > 1 de $|G|$.

Donc p divise $|G \cdot x|$. D'où :

Corollaire 2.4.6

Si G est un p -groupe et X un G -ensemble fini, alors :

$$|X| \equiv |X^G| \text{ mod } p$$

où X^G est l'ensemble des points fixes de G dans X .

Application 2

Théoreme 2.4.7 (de Cauchy)

Soient G un groupe fini et p un nombre premier qui divise $|G|$, alors G contient un élément d'ordre p .

Démonstration (d'après John McKay)

Soit :

$$X = \{(g_1, \dots, g_p) \in G^p \mid g_1 g_2 \dots g_p = e\}$$

Notons que :

$$g_1 g_2 \dots g_p = e$$

$$\Rightarrow g_2 \dots g_p = g_1^{-1}$$

$$\Rightarrow g_2 \dots g_p g_1 = e$$

Donc X est stable par permutation cyclique des composantes. Donc le groupe cyclique $H = \mathbb{U}_p$ agit sur X par :

$$\zeta(g_1, g_2 \dots g_p) := (g_2 \dots g_p g_1)$$

où $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{p}}$.

Les points fixes sont les $(g, \dots, g) \in G^p$ tq $g^p = e$. Cela veut dire que ou bien $g = e$ ou bien g est un élément

d'ordre p .

Par le corollaire précédent, on a :

$$|X^H| = |X| \bmod p$$

Or X est de cardinal $|G|^{p-1}$ (l'application $X \rightarrow G^{p-1}$, $(g_1, \dots, g_p) \mapsto (g_2, \dots, g_p)$ est bijective). Donc :

$$|X^H| = 0 \bmod p$$

Il existe donc au moins un point fixe autre que (e, \dots, e) .

□

Chapitre 3

Groupes symétriques

3.1 Définition et premières propriétés

Rappel

Si E est un ensemble, le groupe symétrique \mathfrak{S}_E est le groupe des bijections $f : E \rightarrow E$ avec la composition des applications pour loi. On note :

$$\mathfrak{S}_n := \sigma_{\{1,2,\dots,n\}} \quad n \geq 1$$

et on l'appelle le n -ième groupe symétrique. Il est d'ordre $n!$.

Remarque 3.1.1

Si E et F sont deux ensembles et $\varphi : E \rightarrow F$, une bijection, on a un isomorphisme de groupes :

$$\mathfrak{S}_E \rightarrow \mathfrak{S}_F, f \mapsto \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

En particulier, l'étude de \mathfrak{S}_E pour un ensemble fini de cardinal n se ramène à celle de \mathfrak{S}_n .

Notation 3.1.2

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on le décrit à l'aide du tableau :

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{array}$$

Remarque 3.1.3

1. Le groupe \mathfrak{S}_n agit sur $\{1, \dots, n\}$ par :

$$\sigma.i = \sigma(i), \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$$

2. Cette action est fidèle et transitive
3. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la stabilisateur de i dans \mathfrak{S}_n est isomorphe à $\sigma_{\{1,2,\dots,n\} \setminus \{i\}}$

Définition 3.1.4

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Le support de σ est l'ensemble :

$$\text{supp}(\sigma) = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid \sigma(i) \neq i\}$$

Propriété 3.1.5

1. Deux permutations à supports disjoints commutent
2. Les groupes symétriques σ_1 et σ_2 sont abéliens. Pour $n \geq 3$, le centre de \mathfrak{S}_n est trivial.

Démonstration

On peut et on va supposer $n \geq 3$.

1. Soient $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_n$ tq $\text{supp}(\sigma_1) \cap \text{supp}(\sigma_2) = \emptyset$.
Si l'une parmi σ_1 et σ_2 est l'identité, elles commutent bien.
Supposons $\text{supp}(\sigma_1)$ et $\text{supp}(\sigma_2)$ non vides ($\sigma_i \neq Id \forall i$).
Soit $i \in \text{supp}(\sigma_1)$, alors $i \notin \text{supp}(\sigma_2)$ et $\sigma_1(i) \notin \text{supp}(\sigma_2)$. Donc :

$$\sigma_1 \circ \sigma_2(i) = \sigma_1(i)$$

$$\sigma_2 \circ \sigma_1(i) = \sigma_1(i)$$

De même, pour $i \in \text{supp}(\sigma_2)$, on a :

$$\sigma_1 \circ \sigma_2(i) = \sigma_2(i)$$

$$\sigma_2 \circ \sigma_1(i) = \sigma_2(i)$$

D'autre part, si $i \notin \text{supp}(\sigma_1) \cup \text{supp}(\sigma_2)$, alors $\sigma_1 \circ \sigma_2(i) = i = \sigma_2 \circ \sigma_1(i)$.

On conclut que $\sigma_1 \circ \sigma_2(i) = \sigma_2 \circ \sigma_1(i)$

2. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus \{Id\}$.
Soient $i \in \{1, \dots, n\}$ tq $\sigma(i) \neq i$ et $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, \sigma(i)\}$.
Soit τ la permutation tq :

$$\tau(\sigma(i)) = k, \tau(k) = \sigma(i), \tau(j) = j, \forall j \notin \{k, \sigma(i)\}$$

Montrons que $\tau \circ \sigma \neq \sigma \circ \tau$. En effet :

$$\tau \circ \sigma(i) = k$$

$$\sigma \circ \tau(i) = \sigma(i) \neq k$$

□

3.1.1 Transpositions et cycles

Définition 3.1.6

Soit $n \geq 2$ et soit $2 \leq l \leq n$. Soit (a_1, \dots, a_l) une suite d'éléments 2 à 2 distincts de $\{1, \dots, n\}$.

On note encore (a_1, \dots, a_l) la permutation définie par :

$$x \mapsto x \quad \forall x \in \{1, \dots, n\} \setminus \{a_1, \dots, a_l\}$$

$$a_i \mapsto a_{i+1} \quad \forall 1 \leq i \leq l-1$$

$$a_l \mapsto a_1$$

Une telle permutation est appelée l -cycle (ou cycle). Sa longueur est l .

Si $l = 2$, elle est appelée la transposition de a_1 et a_2

Remarque 3.1.7

Soit $\sigma = (a_1, \dots, a_l)$ un l -cycle.

1. Soit $i \in \{1, \dots, l-1\}$, alors $\sigma^i(a_1) = a_{i+1}$. Plus généralement, on a :

$$\sigma^i(a_j) = \begin{cases} a_{j+i} & 1 \leq j \leq l-i \\ a_{j+i-l} & l-i+1 \leq j \leq l \end{cases}$$

Le cycle est d'ordre l dans \mathfrak{S}_n .

2. Pour tout $\tau \in \mathfrak{S}_n$, on a :

$$\tau \circ (a_1, \dots, a_l) \circ \tau^{-1} = (\tau(a_1), \dots, \tau(a_l))$$

- 3.

$$(a_1, \dots, a_n) = (a_1, a_2) \circ \dots \circ (a_{l-2}, a_{l-1}) \circ (a_{l-1}, a_l)$$

Le l -cycle est produit de $l-1$ transpositions.

4.

$$(a_1, \dots, a_n) = (a_2, \dots, a_n, a_1)$$

5. Soit τ_1 et τ_2 deux transpositions à support disjoint, alors $\tau_1 \tau_2 = \tau_2 \tau_1$ (qui est d'ordre 2) est appelé une **double transposition**.

Exemple 3.1.8

1.

$$\sigma_2 = \{e, (12)\}$$

2.

$$\sigma_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

$$\begin{aligned} 3. \sigma_4 = & \{e, (12), (13), (23), (14), (24), (34), \\ & (12)(34), (13)(24), (14)(23), \\ & (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243), \\ & (1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)\} \end{aligned}$$

Théoreme 3.1.9

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

1. Il existe un entier naturel k et des cycles c_1, \dots, c_k de \mathfrak{S}_n à supports disjoints 2 à 2 tq :

$$\sigma = c_1 \dots c_k$$

2. Si s est un entier naturel et c'_1, \dots, c'_s des cycles à supports disjoints 2 à 2 tq :

$$\sigma = c'_1 \dots c'_s$$

alors $k = s$ et il existe une permutation $\tau \in \mathfrak{S}_k$ tq $c'_i = c_{\tau(i)}$, $\forall 1 \leq i \leq k$.

Idée de la démonstration : On fait agir le groupe $\langle \sigma \rangle \subseteq \mathfrak{S}_n$ sur $\{1, \dots, n\}$. Les orbites nous fournissent les cycles c_i , $1 \leq i \leq k$.

Exemple 3.1.10

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 6 & 7 & 9 & 4 & 5 & 10 & 2 & 3 & 12 & 13 & 8 & 11 & 1 & 14 \end{pmatrix}$$

$\sigma = (1 \ 6 \ 10 \ 13)(2 \ 7)(3 \ 9 \ 12 \ 11 \ 8)$ est une décomposition en produit de cycles à supports disjoints 2 à 2 de $\sigma \in \sigma_{14}$.

Démonstration

On fait agir le sous-groupe $\langle \sigma \rangle$ engendré par σ dans \mathfrak{S}_n sur l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

Sur cette action, l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ se décompose en orbites disjointes 2 à 2. Les orbites ponctuelles sont exactement les points fixes de σ .

Soient $\Omega_1, \dots, \Omega_r$ les orbites non ponctuelles.

Le sous-groupe $\langle \sigma \rangle$ permute cycliquement les éléments de chaque Ω_i . Soit $a_{i_1}, \dots, a_{i_{l_i}}$ une énumération des éléments de Ω_i tq :

$$\sigma(a_{i_j}) = \begin{cases} a_{i_{j+1}} & 1 \leq j \leq l_i - 1 \\ a_{i_1} & j = l_i \end{cases}$$

Soit $c_i = (a_{i_1}, \dots, a_{i_{l_i}})$, alors l'action de c_i et de σ sur l'orbite Ω_i est la même.

Donc l'action de σ et de $c_1 c_2 \dots c_r$ sur $\{1, \dots, n\}$ est la même.

Donc $\sigma = c_1 \dots c_r$. □

Terminologie

1. Avec les hypothèses et les notations du théorème, on dit que l'égalité $\sigma = c_1 \dots c_r$ est la décomposition de σ en **produit de cycles à supports disjoints**.
2. Si σ et σ' sont deux permutations, on dit que σ et σ' sont du **même type** si pour tout entier $2 \leq l \leq n$, le nombre de l -cycles dans la décomposition de σ en produit de cycles à support disjoints est égal au nombre de l -cycles dans la décomposition de σ' en produit de cycles à support disjoints.

Exemple 3.1.11

$(12)(34)(567)$ est du même type que $(123)(45)(67)$.

Corollaire 3.1.12

Pour tout $n \geq 1$, \mathfrak{S}_n est engendré par l'ensemble de ses transpositions.

Démonstration

En effet, \mathfrak{S}_n est engendré par ses cycles et chaque cycle est produit de transpositions, comme on l'a vu. \square

Exercice 3.1.13

Monter que \mathfrak{S}_n est même engendré par les $n - 1$ transpositions :

$$(1\ 2)(2\ 3)\dots(n-1\ n)$$

Corollaire 3.1.14

Soient $n \geq 1$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, alors l'ordre de σ est le PPCM des longueurs des cycles apparaissant dans la décomposition de σ en produit de cycles à support disjoints.

Exemple 3.1.15

$$\text{ord}((1\ 2)(2\ 3)(4\ 5\ 6)) = \text{PPCM}(2, 2, 3) = 6$$

Corollaire 3.1.16

Soient $n \geq 1$ et $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$, alors on a une équivalence entre :

1. σ et σ' sont du même type.
2. σ et σ' sont conjugués.

Démonstration

Cela provient du fait que pour un cycle (a_1, \dots, a_l) et une permutation $\tau \in \mathfrak{S}_n$, on a :

$$\tau \circ (a_1, \dots, a_l) \circ \tau^{-1} = (\tau(a_1), \dots, \tau(a_l))$$

\square

Exemple 3.1.17

$\sigma = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6\ 7)$ et $\sigma' = (1\ 2\ 3)(4\ 5)(6\ 7)$ sont conjugués par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Remarque 3.1.18

Deux permutations conjuguées ont même ordre (et même signature, voir au-dessus).

3.2 La signature

Soit $n \geq 1$. Le groupe symétrique \mathfrak{S}_n agit sur l'ensemble $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ des polynômes en X_1, \dots, X_n à coefficients entiers par :

$$(\sigma P)(X_1, \dots, X_n) := P(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$$

(clairement, $Id.P = P$ et $\sigma(\tau P) = (\sigma \tau)P, \forall \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ et $\forall P \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$).

Soit

$$\Delta_n := \prod_{i < j} (X_i - X_j) \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$$

Par exemple, on a $\Delta_2 = X_1 - X_2$, $\Delta_3 = (X_1 - X_2)(X_1 - X_3)(X_2 - X_3)$.

Toute permutation σ envoie un $X_i - X_j$ sur $X_{\sigma(i)} - X_{\sigma(j)}$ et on a $\sigma(i) < \sigma(j)$ ou $\sigma(j) < \sigma(i)$ si $i < j$.

Donc σ envoie un facteur $X_i - X_j$ de Δ_n soit sur un autre facteur de Δ_n soit sur l'opposé d'un autre facteur de Δ_n . Donc :

$$\sigma \Delta_n = \pm \Delta_n, \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$$

Définition 3.2.1

La **signature** $\epsilon(\sigma)$ de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est l'unique nombre $\epsilon(\sigma) \in \{1, -1\}$ tq :

$$\epsilon(\sigma) \Delta_n = \sigma \Delta_n$$

Exemple 3.2.2

1. $\sigma = (12) \in \sigma_2 : \sigma(X_1 - X_2) = X_2 - X_1 = -(X_1 - X_2) \Rightarrow \epsilon(\sigma) = -1$
2. $\sigma = (123) \in \sigma_3 : \sigma((X_1 - X_2)(X_1 - X_3)(X_2 - X_3)) = (X_2 - X_3)(X_2 - X_1)(X_3 - X_1) = (-1)(-1)\Delta_3 = \Delta_3 \Rightarrow \epsilon(\sigma) = 1$

Propriété 3.2.3

1. La signature est un morphisme de groupes

$$\epsilon : \mathfrak{S}_n \rightarrow (\{1, -1\}, \cdot)$$

2. Toute transposition est de signature -1 . Tout cycle de longueur l est de signature $(-1)^{l-1}$

Démonstration

1. résulte du fait que \mathfrak{S}_n agit sur $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$. En effet, pour $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$, on a :

$$\epsilon(\sigma\tau) \Delta_n = (\sigma\tau) \Delta_n = \epsilon(\tau) \epsilon(\sigma) \Delta_n$$

et donc $\epsilon(\sigma\tau) = \epsilon(\sigma)\epsilon(\tau), \forall \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$.

2. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Une **inversion** de σ est un couple (u, v) de nombres dans $\{1, \dots, n\}$ tq $u < v$ mais $\sigma(u) > \sigma(v)$. Clairement, on a $\epsilon(\sigma) = (-1)^t$, où t est le nombre d'inversions de σ . Soit maintenant $\sigma = (ij)$, où $1 \leq i < j \leq n$.

Les inversions de σ sont :

- (u, j) pour $i < u < j$
- (i, u) pour $i < u < j$
- (i, j)

Le nombre des inversions de σ est donc :

$$2(j - i + 1) + 1$$

Donc $\epsilon(\sigma) = -1$.

Donc toute transposition est de signature -1 .

Comme un l -cycle c est produit de $l - 1$ transposition, par 1), on a $\epsilon(c) = (-1)^{l-1}$ □

Remarque 3.2.4

Soient $n \geq 2$, et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

1. On dit que σ est **paire** (respectivement **impaire**) si $\epsilon(\sigma) = 1$ (respectivement $\epsilon(\sigma) = -1$)
2. σ est pair (resp impair) ssi σ est produit de nombre pair (resp impair) de transpositions.
3. Soient l_1, \dots, l_r les cardinaux des orbites $\Omega_1, \dots, \Omega_r$ de $\langle \sigma \rangle$ dans $\{1, \dots, n\}$ (y compris les orbites ponctuelles), alors on a :

$$\epsilon(\sigma) = \epsilon(c_1 \dots c_r) = (-1)^{l_1-1} \dots (-1)^{l_r-1} = (-1)^{(\sum l_i) - r} = (-1)^{n-r}$$

Définition 3.2.5

Soit $n \geq 1$. On appelle n -ième **groupe alterné** le noyau \mathcal{A}_n de la signature $\epsilon : \mathfrak{S}_n \rightarrow \{\pm 1\}$.

Remarque 3.2.6

On verra que $|\mathcal{A}_n| = \frac{n!}{2}$

Exemple 3.2.7

1. $\sigma_2 = \{e, (12)\}$ $\mathcal{A} = \{e\}$
2. $\sigma_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ $\mathcal{A}_3 = \{e, (123), (132)\}$
3. $|\sigma_4| = 24$, on a $\mathcal{A}_4 = \{e, (123), (132), (234), (243), (134), (143), (124), (142), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

Chapitre 4

Sous-groupes distingués, groupes quotients

4.1 Sous-groupes distingués

Soient G un groupe et H un sous-groupe de G .

Notation 4.1.1

Pour $g \in G$, on note $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} | h \in H\}$. C'est un sous-groupe en tant qu'image de H par l'automorphisme de conjugaison (= automorphisme intérieur)

$$c_g : G \rightarrow G, x \mapsto gxg^{-1}$$

Propriété 4.1.2

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall g \in G$, on a $gH = Hg$
2. $\forall g \in G$, on a $gHg^{-1} = H$
3. $\forall g \in G$, on a $gHg^{-1} \subseteq H$

Démonstration

Clairement 1) \Leftrightarrow 2) et 2) \Rightarrow 3). Montrons que 3) \Rightarrow 2) :

Soit $x \in G$, alors pour $g = x^{-1}$, on a :

$$H \supseteq gHg^{-1} = x^{-1}H(x^{-1})^{-1} = x^{-1}Hx$$

et donc $xHx^{-1} \supseteq H$. □

Définition 4.1.3

H est **distingué** (ou **normal**) dans G ssi, pour tout $g \in G$, on a $gHg^{-1} = H$. On écrit alors $H \triangleleft G$.

Définition 4.1.4

Soit un groupe G et H un sous-groupe. Le **normalisateur** de H dans G est :

$$N_G(H) = \{g \in G | gHg^{-1} = H\}$$

Remarque 4.1.5

$N_G(H)$ est un sous-groupe de G contenant H . H est distingué dans $N_G(H)$ et $N_G(H)$ est le plus grand sous-groupe de G dans lequel H est distingué.

H est distingué dans G ssi $N_G(H) = G$

Définition 4.1.6

L'**indice** de H dans G est $[G : H] = |G/H| = \frac{|G|}{|H|}$ si $|G|$ et $|H|$ sont finis.

Exemple 4.1.7

1. $\{e\} = H \Rightarrow gHg^{-1} = \{gg^{-1}\} = \{e\}$. Donc $\{e\} \triangleleft G$. On a $G \triangleleft G$ et $Z(G) \triangleleft G$
2. Si G est **abélien**, alors $c_g = Id_G$, $\forall g \in G$, donc $H \triangleleft G$ pour tout sous-groupe H de G .
3. Si H est **d'indice 2** dans G ($|G/H| = 2$) alors $G = H \cup gH = H \cup Hg$ et $gH = Hg$, H est distingué dans G .

Lemme 4.1.8

Si $f : G \rightarrow K$ est un morphisme de groupes, alors $\text{Ker}(f)$ est distingué dans G .

Démonstration

Soient $x \in \text{Ker}(f)$ et $g \in G$. On a :

$$f(gxg^{-1}) = f(g)f(x)f(g)^{-1} = f(g)ef(g)^{-1} = e$$

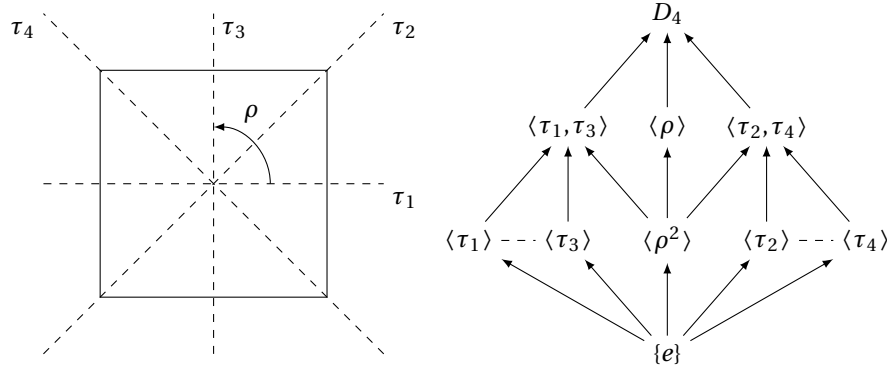
Donc $g \text{Ker}(f) g^{-1} \subseteq \text{Ker}(f)$, $\forall g \in G$ et $\text{Ker}(f) \triangleleft G$. □

Remarque 4.1.9

$\text{Im}(f) \subseteq K$ n'est pas distingué en général. Par exemple, si $f : G \rightarrow K$ est l'inclusion d'un sous-groupe non distingué, alors $\text{Im}(f) = G \subseteq K$ n'est pas distingué.

Exemple 4.1.10

1. $\mathcal{A}_n \triangleleft \mathfrak{S}_n$ car $\mathcal{A}_n = \text{Ker}(\epsilon)$
2. $SL_n(\mathbb{R}) \triangleleft GL_n(\mathbb{R})$ car $SL_n(\mathbb{R}) = \text{Ker}(\det)$
3. $SO_n(\mathbb{R}) \triangleleft O_n(\mathbb{R})$, $SU_n(\mathbb{C}) \triangleleft U_n(\mathbb{C})$ par la même raison.
4. Quels sont les sous-groupes distingués de $D_4 = \{e, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \rho, \rho^2, \rho^3\}$



Notons σ_D la symétrie orthogonale par rapport à une droite D et f une isométrie. Alors :

$$f \circ \sigma_D \circ f^{-1} = \sigma_{f(D)}$$

Donc $D_4, \{e\}, \langle \tau_1, \tau_3 \rangle, \langle \tau_2, \tau_4 \rangle, \langle \rho \rangle, \langle \rho^2 \rangle$ sont distingués et $\langle \tau_1 \rangle, \langle \tau_3 \rangle, \langle \tau_2 \rangle$ et $\langle \tau_4 \rangle$ ne sont pas distingués. On a $N_{D_4}(\langle \tau_1 \rangle) = \langle \tau_1, \tau_3 \rangle$, $N_{D_4}(\langle \tau_2 \rangle) = \langle \tau_2, \tau_4 \rangle$.

Remarque 4.1.11

1. Dans les treillis des sous-groupes, on a l'action de conjugaison de G sur l'ensemble des sous-groupes par conjugaison.

Les orbites ponctuelles sont les sous-groupes distingués, cad les sous-groupes qui ne sont pas liés par une action de ρ à d'autres sous-groupes.

Les orbites non ponctuelles sont les paquets de sous-groupes reliés par une action de ρ .

Le stabilisateur d'un sous-groupe H est l'ensemble des g tq $gHg^{-1} = H$, donc c'est le normalisateur de H dans G .

L'isomorphisme $G/Stab_G(x) \xrightarrow{\sim} G \cdot x$ dit que l'indice du normalisateur $N_G(H)$ est égal au cardinal de l'orbite de H sous l'action de conjugaison.

2. Un groupe G est **simple** si $G \neq \{e\}$ et ses seuls sous-groupes distingués sont $\{e\}$ et G .
On verra plus tard que \mathcal{A}_n est simple pour $n \geq 5$. Cela est lié au fait que l'équation du n -ième degré n'est pas résoluble par des radicaux pour $n \geq 5$ (voir M1).

4.2 Groupes quotients

Soient G un groupe et $H \leq G$ un sous-groupe. On note $\pi : G \rightarrow G/H$, $g \mapsto gH$ la bijection canonique.

Rappel

- π est surjective
- $\forall g \in G$, on a $\pi(g) = gH$
- Pour $g, g' \in G$, on a $\pi(g) = \pi(g')$ ssi $\exists h \in H$ tq $g' = gh$

Théoreme 4.2.1

On suppose que $H \triangleleft G$.

Il existe une unique loi de composition interne $*$ sur G/H tq $(G/H, *)$ soit un groupe et

$$\pi : G \rightarrow G/H$$

un morphisme de groupes.

Démonstration

Soient $\alpha, \beta \in G/H$. Soient $x, y \in G$ tq $\pi(x) = \alpha$ et $\pi(y) = \beta$.

On définit

$$\alpha * \beta = \pi(x) * \pi(y) = \pi(xy)$$

et c'est la seule possibilité car π doit être un morphisme de groupes.

Il faut vérifier que $\alpha * \beta$ est bien défini.

Soient $x', y' \in G$ tq $\pi(x') = \alpha$ et $\pi(y') = \beta$.

Il existe $h, k \in H$ tq $x' = xh$ et $y' = yk$. On a :

$$\pi(x'y') = \pi(xhyk) = \pi(xy y^{-1} h y k) = \pi(xy)$$

Ce qui montre que $\pi(xy)$ ne dépend que du choix des représentants x et y de α et β .

Montrons l'associativité : Soient $\pi(x), \pi(y), \pi(z)$ dans G/H . On a :

$$\begin{aligned} (\pi(x)\pi(y))\pi(z) &= \pi(xy)\pi(z) \\ &= \pi(xyz) \\ &= \pi(x)(\pi(y)\pi(z)) \end{aligned}$$

$\pi(e)$ est neutre car :

$$\pi(x)\pi(e) = \pi(xe) = \pi(x) = \pi(ex) = \pi(e)\pi(x)$$

et $\pi(x^{-1})$ est inverse de $\pi(x)$, $\forall x \in G$, car :

$$\pi(x)\pi(x^{-1}) = \pi(xx^{-1}) = \pi(e) = \pi(x^{-1}x) = \pi(x^{-1})\pi(x)$$

□

Remarque 4.2.2

- On suppose que $H \triangleleft G$. Alors la loi de composition sur G/H vérifie :
 - $H = \ker(\pi : G \rightarrow G/H)$
 - $eH = H$ est l'élément neutre
 - $\forall x, y \in G : xH * yH = xyH$
- Supposons que $H \leq G$ et G/H a une structure de groupe telle que $\pi : G \rightarrow G/H$ est un morphisme. Alors $H = \ker(\pi)$ est forcément distingué dans G .

Définition 4.2.3

Supposons que $H \triangleleft G$. Le groupe G/H du théorème 4.2.1 est le **groupe quotient** de G par H .

Corollaire 4.2.4

Les sous-groupes distingués de G sont exactement les noyaux des morphismes de groupes $G \xrightarrow{\varphi} K$ de domaine G .

Exemple 4.2.5

- Si E est un espace vectoriel sur \mathbb{R} et F un sous espace vectoriel alors $(F, +)$ est un sous-groupe distingué de $(E, +)$ (qui est commutatif). Alors E/F devient un espace vectoriel pour la multiplication par les scalaires définie par $\lambda \cdot (v + F) = \lambda v + F$. Si $F' \subseteq E$ est un supplémentaire de F ($E = F' \oplus F$), alors la composition :

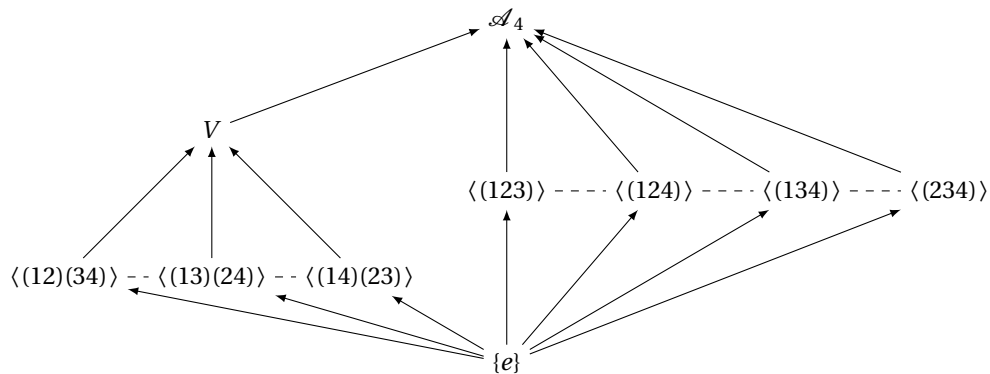
$$F' \hookrightarrow E \rightarrow E/F$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels (exo!).

En particulier, si $\dim E < \infty$, alors :

$$\dim E/F = \dim E - \dim F$$

- Soit $V = \{e, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$. C'est un sous-groupe de \mathcal{A}_4 . Alors V est distingué dans \mathcal{A}_4 et le quotient \mathcal{A}_4/V est d'ordre $12/4 = 3$. Donc \mathcal{A}_4/V est isomorphe à \mathbb{U}_3 . Il est instructif de voir la position de V dans le treillis des sous-groupes de \mathcal{A}_4 .



On a : $N_{\mathcal{A}_4}(\langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle) = V$ est d'indice 3 dans \mathcal{A}_4
 $N_{\mathcal{A}_4}(\langle (1\ 2\ 3) \rangle) = \langle (1\ 2\ 3) \rangle$ est d'indice 4 dans \mathcal{A}_4

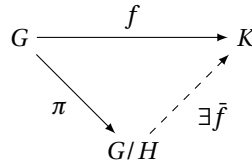
4.3 Passage au quotient des morphismes de groupes

Théorème 4.3.1 (Propriété universelle du groupe quotient)

Soit $f : G \rightarrow K$ un morphisme de groupes. Soit $H \triangleleft G$. On suppose que $H \subseteq \ker(f)$. Alors il existe un unique morphisme de groupes

$$\bar{f} : G/H \rightarrow K$$

$$\text{tq } f = \bar{f} \circ \pi$$



Terminologie

On dit que \bar{f} est obtenu à partir de f par passage au quotient par H , ou que \bar{f} est induit par f .

Remarque 4.3.2

On a $\text{Im}(\bar{f}) = \text{Im}(f)$ et $\ker(\bar{f}) = \pi(\ker f)$

Démonstration (Théorème 4.3.1)

Comme π est surjectif, \bar{f} est unique. On définit pour $x \in G$,

$$\bar{f}(\pi(x)) = f(x)$$

On doit vérifier que si $\pi(x) = \pi(x')$, alors $f(x) = f(x')$. En effet, il existe $h \in H$ tq $x' = xh$ et on a donc :

$$f(x') = f(xh) = f(x)f(h) = f(x)$$

car $f(h) \in \ker f$.

Vérifions que \bar{f} est bien un morphisme :

On a pour $x, y \in G$:

$$\begin{aligned}
 \bar{f}(\pi(x)\pi(y)) &= \bar{f}(\pi(xy)) \\
 &= f(xy) \\
 &= f(x)f(y) \\
 &= \bar{f}(\pi(x))\bar{f}(\pi(y))
 \end{aligned}$$

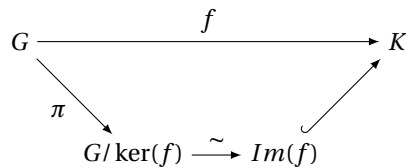
□

Théorème 4.3.3 (Premier théorème d'isomorphisme)

Soit $f : G \rightarrow K$ un morphisme de groupes, alors f induit un isomorphisme de groupes de $G/\ker(f)$ sur $\text{Im}(f)$.

En particulier, si f est surjectif, alors f induit un isomorphisme

$$G/\ker(f) \xrightarrow{\sim} K$$



Démonstration

\tilde{f} est bien définie par la propriété universelle du groupe quotient (théorème 4.3.1). Clairement, \tilde{f} est surjectif.

Montrons que \tilde{f} est injectif : si on a $\tilde{f}(\pi(x)) = \tilde{f}(\pi(x'))$, alors $f(x) = f(x')$, donc $x^{-1}x' \in \ker(f)$ et donc $\pi(x) = \pi(x')$ dans $G/\ker(f)$. \square

Remarque 4.3.4

Ce théorème est important car il relie le groupe quotient, qui a priori est difficile à comprendre, avec un sous-groupe, qui est plus facile à comprendre.

Exemple 4.3.5

1. Soit $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{U}_n$, $k \mapsto e^{\frac{2\pi i k}{n}}$, alors f est surjectif de noyau $n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$.
Donc f induit un isomorphisme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{U}_n$.
2. Soit $\epsilon : \mathfrak{S}_n \rightarrow \{\pm 1\}$ la signature, alors ϵ est surjectif de noyau \mathcal{A}_n .
Donc ϵ induit un isomorphisme

$$\mathfrak{S}_n / \mathcal{A}_n \xrightarrow{\sim} \{\pm 1\}$$

En particulier, on a $|\mathcal{A}_n| = \frac{1}{2}(n!)$.

Lemme 4.3.6

Soient G un groupe fini et p le plus petit diviseur premier de $|G|$.
Soit $H \subseteq G$ un sous-groupe d'indice p . Alors H est distingué.

Remarque 4.3.7

Pour $p = 2$, on retrouve le fait qu'un sous-groupe d'indice 2 est toujours distingué.

Démonstration

Faisons agir G sur G/H par translation à gauche :

$$g.xH := gxH, \forall g \in G, \forall x \in G$$

Comme $|G/H| = p$, cela définit un morphisme de groupes $f : G \rightarrow \sigma_p$. Ce morphisme est non trivial car l'action est transitive.

Notons K son image. Alors $|K|$ divise à la fois $|G|$ et $|\sigma_p| = p!$. Donc il divise $\text{pgcd}(|G|, p!) = p$. Donc $|K| = p$.

Comme $G/\ker(f) \xrightarrow{\sim} K$, l'indice de $\ker(f)$ dans G est p . Or les éléments de $\ker(f)$ laissent fixe eH . Donc $\ker(f) \subseteq H$. Comme les deux sont d'indice p dans G , ils sont égaux et $H = \ker(f)$ est distingué. \square

Théorème 4.3.8 (Deuxième théorème d'isomorphisme)

Soient G un groupe, H un sous-groupe distingué et $K \subseteq G$ un sous-groupe. Alors $HK = \{hk | h \in H, k \in K\}$ est un sous-groupe de G et on a un isomorphisme de groupes

$$K/H \cap K \xrightarrow{\sim} HK/H$$

Exemple 4.3.9

Si F, G sont des sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E , on a

$$F/F \cap G \xrightarrow{\sim} F + G/F$$

Démonstration

Montrons que HK est un sous-groupe :

$e = e \cdot e \in HK$. Si $x, x' \in H$ et $y, y' \in K$, on a :

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = y^{-1}x^{-1}yy^{-1} \in HK$$

et

$$xyx'y' = xyx'y^{-1}yy' \in HK$$

La composée

$$K \hookrightarrow HK \twoheadrightarrow HK/H$$

est un morphisme de groupes surjectif dont le noyau est $K \cap H$. Par le premier théorème d'isomorphisme, on obtient l'isomorphisme $K/H \cap K \xrightarrow{\sim} HK/H$. \square

Théoreme 4.3.10 (Troisième théorème d'isomorphisme)

Soient $H \subseteq K$ deux sous-groupes distingués d'un groupe G . Alors, on a

$$G/K \xrightarrow{\sim} (G/H)/(K/H)$$

Démonstration

La composée des surjections canoniques

$$G \twoheadrightarrow G/H \twoheadrightarrow (G/H)/(K/H)$$

est un morphisme de groupes surjectif de noyau K . Le premier théorème d'isomorphisme nous donne l'isomorphisme

$$G/K \xrightarrow{\sim} (G/H)/(K/H)$$

\square

Remarque 4.3.11

En particulier, si G et K sont finis, alors $|\Im(f)|$ diviser à la fois $|G|$ et $|K|$

Exemple 4.3.12

Soit $n \geq 1$ un entier. Soit K un sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Alors $K = d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour un diviseur d de n . On a

$$\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Chapitre 5

Sous-groupes de Sylow

5.1 Définition et exemples

Motivation

Le théorème de Lagrange affirme que si H est un sous-groupe de G , alors l'ordre de H est un diviseur de l'ordre de G . On peut se demander si réciproquement, pour tout diviseur d de l'ordre de G , il existe un sous-groupe d'ordre d .

Ceci est faux, par exemple A_4 est d'ordre 12 et n'admet pas de sous-groupe d'ordre 6.

Néanmoins, nous allons voir que si d est une **puissance maximale d'un nombre premier** divisant l'ordre du groupe G , il existe toujours un sous-groupe d'ordre d . Ces sous-groupes sont les **sous-groupes de Sylow**.

Soit G un groupe fini. soit n son ordre. Soit p un diviseur premier de n . On a donc $n = p^\alpha \cdot m$, où α est un entier ≥ 1 , et m n'est pas divisible par p .

Définition 5.1.1

Un **p -sous-groupe de Sylow** (ou p -Sylow) est un sous-groupe P d'ordre p^α de G .

Remarque 5.1.2

On montrera que tout diviseur premier p de $|G| = n$, il **existe** un p -Sylow, et que tous les p -Sylow sont **conjugués**.

Exemple 5.1.3

1. $G = D_3 = \{Id, \sigma_A, \sigma_B, \sigma_C, \rho, \rho^2\}$

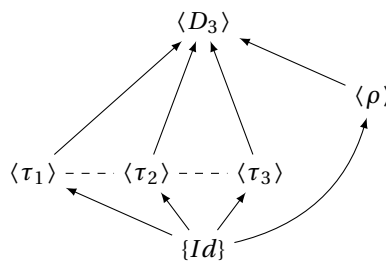


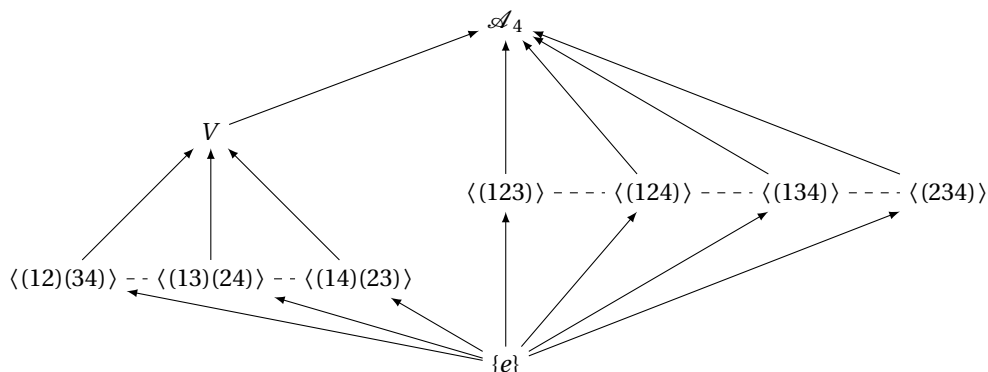
FIGURE 5.1 – Diagramme de Hasse du groupe diédral 3

On a $|D_3| = 2 \times 3$.

D_3 admet trois 2-Sylow $\langle \tau_1 \rangle$, $\langle \tau_2 \rangle$, $\langle \tau_3 \rangle$. Ils sont tous conjugués.

D_3 admet un unique 3-Sylow $\langle \rho \rangle$. Il est distingué.

2. $G = \mathcal{A}_4$



$|\mathcal{A}_4| = 12 = 4 \times 3$ et $V = \{e, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$. \mathcal{A}_4 admet V pour unique 2-Sylow (on l'appelle le sous-groupe de Klein V). Il est distingué.

\mathcal{A}_4 admet quatre 3-Sylow $\langle (1\ 2\ 3) \rangle$, $\langle (1\ 2\ 4) \rangle$, $\langle (1\ 3\ 4) \rangle$, $\langle (2\ 3\ 4) \rangle$. Ils sont tous conjugués.

3. $G = \mathbb{U}_{12}$. On a $|G| = 12 = 2^2 \times 3$

Les 2-Sylow sont d'ordre 4. Il y en a un seul : $\mathbb{U}_4 < \mathbb{U}_{12}$

Les 3-Sylow sont d'ordre 3. Il y en a un seul : $\mathbb{U}_3 < \mathbb{U}_{12}$.

4. $G = \mathfrak{S}_4$. On a $|\mathfrak{S}_4| = 24 = 2^3 \times 3$.

Les 2-Sylow sont les sous-groupes d'ordre 8. Soit σ un 4-cycle de \mathfrak{S}_4 .

Soient $a, b, c, d \in \{1, 2, 3, 4\}$ tel que $\sigma = (a\ b\ c\ d)$

Alors $P = \langle \sigma, (a\ c) \rangle$ est un 2-Sylow de \mathfrak{S}_4 constitué de :

- Id
- les transpositions $(a\ c)$ et $(b\ d)$
- les 3 doubles transpositions :

$$(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)$$

- les deux 4-cycles : σ et

$$\begin{aligned}\sigma^{-1} &= (a\ b\ c\ d) \\ &= (a\ c)\sigma(a\ c)^{-1} \\ &= (b\ d)\sigma(b\ d)^{-1}\end{aligned}$$

Notons que P n'est pas distingué dans \mathfrak{S}_4 .

Les 3-Sylow de \mathfrak{S}_4 sont les sous-groupes d'ordre 3.

Ils sont tous de la forme $\langle c \rangle$, où c est un 3-cycle (exercice : compléter le nombre de 3-cycles et le nombre de sous-groupe d'ordre 3). Ils sont tous conjugués.

5. $G = \mathfrak{S}_3$. On a $|G| = 120 = 2^3 \times 3 \times 5$

Les 2-Sylow de \mathfrak{S}_3 sont les sous-groupes d'ordre 8.

Les 3-Sylow sont les sous-groupes d'ordre 3. Donc ils sont tous de la forme $\langle c \rangle$, où c est un 3-cycle.

Les 5-Sylow sont les sous-groupes d'ordre 5. Ils sont tous de la forme $\langle c \rangle$, où c est un 5-cycle.

6. $G = D_4$. On a $|G| = 8 = 2^3$. Il y a un unique 2-Sylow, à savoir D_4 lui-même.

Le prochain but est de montrer qu'il existe toujours des p -Sylow.

5.2 Digression arithmétique

Définition 5.2.1

Un **anneau** est un triplet $(A, +, \cdot)$, où $(A, +)$ est un groupe abélien et

$$\cdot : A \times A \longrightarrow A$$

un loi telle que :

1. est associative : $(ab)c = a(bc), \quad \forall a, b, c \in A$
2. admet un élément neutre $1 : 1 \cdot a = a = a \cdot 1, \quad \forall a \in A$
3. est distributive à gauche et à droite par " + " :

$$(a + b)c = ac + bc \quad \text{et} \quad a(b + c) = ab + ac, \quad a, b, c \in A$$

L'anneau A est **commutatif** si $ab = ba, \quad \forall a, b \in A$

Exemple 5.2.2

1. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sont des anneaux commutatifs.
2. $M_2(\mathbb{R})$ est un anneau non commutatif
3. Soit $n \geq 1$ un entier. Alors $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un anneau pour l'addition habituelle et la multiplication définie par

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{ab}, \quad \overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

où $\overline{a} = a + n\mathbb{Z}$

4. Si A est un anneau commutatif, alors

$$\begin{aligned} A[X] &:= \{\text{polynôme en } X \text{ à coefficients dans } A\} \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^n a_k X^k \mid n \in \mathbb{N}, a_k \in A, \forall k \right\} \end{aligned}$$

est un anneau commutatif pour l'addition et la multiplication naturelles des polynômes.

Soit p un nombre premier.

Lemme 5.2.3

Dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$, on a $(P + Q)^p = P^p + Q^p, \quad \forall P, Q \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$

Démonstration

Par le binôme de Newton (valable dans tout anneau commutatif), on a

$$(P + Q)^p = P^p + Q^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} \cdot P^k \cdot Q^{p-k}$$

Il suffit de montrer que p divise $\binom{p}{k}$ pour $1 \leq k \leq p-1$.

Or on a :

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$$

et p divise le numérateur mais pas le dénominateur. □

Lemme 5.2.4

Si s, m sont des entiers naturelles tel que p ne divise pas s , alors $\binom{s \cdot p^m}{p^m}$ est congru à s modulo p .

Démonstration

La quantité $\binom{s \cdot p^m}{p^m}$ modulo p est le coefficient de X^{p^m} dans le développement du binôme

$$(X+1)^{p^m} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$$

Or, on a :

$$(X+1)^{s \cdot p^m} = ((X+1)^{p^m})^s \stackrel{\text{lemme 5.2.3}}{=} (X^{p^m} + 1)^s = 1 + s \cdot X^{p^m} + \dots$$

□

5.3 Les théorèmes de Sylow

Soit G un groupe fini et $n = |G|$. Soit p un nombre premier qui divise n . Écrivons $n = s \cdot p^m$, où p ne divise pas s (i.e. p^m est la puissance maximale de p qui divise n). Alors, par définition, les p -Sylow de G sont les sous-groupes d'ordre p^m .

Théorème 5.3.1 (Premier théorème de Sylow)

Il existe au moins un p -Sylow dans G .

Démonstration

Soit S l'ensemble de G ayant p^n éléments.

On a :

$$|S| = \binom{s \cdot p^n}{p^n} \stackrel{\text{lemme 2}}{\equiv} s \not\equiv 0 \pmod{p}$$

La translation à gauche par un élément de G transforme une partie à p^n éléments en une partie à p^n éléments (car $l_g : G \rightarrow G$, $g' \mapsto gg'$ est bijective de réciproque $l_{g^{-1}}$). On a donc une action par translations à gauche :

$$G \times S \rightarrow S, (g, E) \mapsto gE = \{gs \mid s \in E\}$$

L'équation aux classes associées est

$$|S| = \sum_{O \text{ orbite}} |O|$$

Comme $|S| = \binom{s \cdot p^n}{p^n} \equiv s \pmod{p}$ n'est pas divisible par p au moins l'une des orbites est de cardinal non divisible par p . Posons un élément A d'une telle orbite et considérons son stabilisateur $H = \text{Stab}_G(A)$. On va montrer que H est un p -Sylow, c'est à dire $|H| = p^n$. Comme on a :

$$|G/H| = |G \cdot A| \text{ et } |G| = |H| \cdot |G \cdot A|$$

et p ne divise pas $|G \cdot A|$, p^n doit diviser $|H|$.

De l'autre côté, on a $h \cdot A = A$ pour tout $h \in H$. Donc l'action de H par translation à gauche laisse stable A et A est réunion de H -orbites $H \cdot a$, $a \in A$.

Or $|H \cdot a| = |H|$ car $H \cdot a$ est en bijection avec H via la translation à droite par a^{-1} . Donc $|H|$ divise $|A| = p^n$. Finalement, on obtient bien que $|H| = p^n$. □

Théorème 5.3.2 (Deuxième théorème de Sylow)

Soit K un sous-groupe de G et soit H un p -Sylow de G . Alors il existe un conjugué H' de H tel que $H' \cap K$ est un p -Sylow de K .

Corollaire 5.3.3

1. Si $K \leq G$ est un p -sous-groupe, alors K est contenu dans un p -Sylow de G .
2. Les p -Sylow de G sont tous conjugués.

Démonstration (Démonstration du corollaire)

1. Le deuxième théorème nous fournit un p -Sylow H' de G tel que $K \cap H'$ est un p -Sylow de K . Comme K est un p -groupe, on a $K = K \cap H'$, autrement dit : $K \subset H'$
2. Soient K et H deux p -Sylow de G . Par le deuxième théorème, il existe un conjugué H' de H tel que $H' \cap K$ est un p -Sylow de K . Or K est un p -groupe. Donc $H' \cap K = K$ et $K \subset H'$. Or K et H' sont tous les deux d'ordre p^m . Donc $K = H'$ est bien conjugué à H .

Démonstration (Démonstration du deuxième théorème de Sylow)

On a un sous-groupe $K \leq G$ et un p -Sylow $H \subseteq G$, et on doit montrer qu'on peut conjuguer H en un p -Sylow H' tq $H' \cap K$ est un p -Sylow de K .

Soit S l'ensemble des classes G/H . On aura besoin des faits suivants : G opère transitivement sur G/H (par translation à gauche : $g \cdot xH = gxH$) et H est le stabilisateur de l'un des points de S , à savoir : $s = eH$.

Donc le stabilisateur de as , $a \in G$ est : aHa^{-1} (si G agit sur X et $x \in X$ et $g \in G$, alors $Stab_G(gx) = gStab_G(x)g^{-1}$ comme on le vérifie facilement. La conjugaison $h \mapsto ghg^{-1}$ donne la bijection).

Nous restreignons l'action de G sur S à K . Comme H est un p -Sylow, le cardinal de $|S| = |G/H| = |G|/|H| = sp^m/p^m = s$ n'est pas divisible par p .

Donc le cardinal d'au moins l'une des K -orbites, disons O , n'est pas divisible par p .

Supposons que O est l'orbite du point as pour un $s \in G$.

Soit $H' = aHa^{-1}$ le stabilisateur de as pour l'action de G . Alors le stabilisateur de as pour l'action restreinte à K est clairement $K \cap H'$ et l'indice $[K : H' \cap K]$ est $|O|$, qui n'est pas divisible par p . En outre, $K \cap H'$ est un p -groupe (car conjugué de H) en tant que sous-groupe de H' . Donc $H' \cap K$ est un p -groupe. Il s'ensuit que $H' \cap K$ est bien un p -Sylow de K . \square

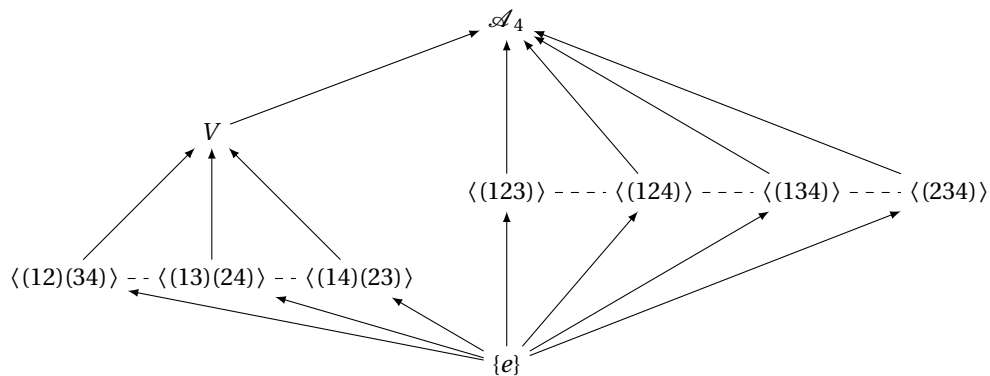
Théorème 5.3.4 (Troisième théorème de Sylow)

Soit $n_p(G)$ le nombre de p -Sylow de G .

Alors $n_p(G)$ divise s et est congru à 1 mod p .

Exemple 5.3.5

1. $G = D_3$, $|G| = 6 = 2 \times 3$
 - $n_2(G) = 3$ divise bien $s = 3$ et est congru à 1 mod 2
 - $n_3(G) = 1$ divise bien $s = 2$ et est congru à 1 mod 3
2. $G = \mathcal{A}_4$, $|G| = 12 = 2^2 \times 3$



- $n_2(G) = 1$ divise 3 et est congru à 1 mod 2
- $n_3(G) = 4$ divise 2^2 et est congru à 1 mod 3.

Démonstration (Démonstration du troisième théorème de Sylow)

Par le corollaire, les p -Sylow de G sont tous conjugués à l'un d'entre eux, disons H . Soit $N = N_G(H)$ le normalisateur de H . Alors N est le stabilisateur de H dans l'action de G par conjugaison sur les p -Sylow.

Donc $n_p(G) = [G : N]$ est le cardinal de l'orbite de H .

Comme $H \subseteq N$, $[G : N]$ divise $[G : H] = s$

Pour montrer que $n_p(G) \equiv 1 \pmod{p}$, on décompose l'ensemble des p -Sylow $\{H_1, H_2, \dots, H_{n_p(G)}\}$ en orbite sous l'action de conjugaison par $H = H_1$.

Une orbite ponctuelle est formée d'un seul sous-groupe H_i ssi H est contenu dans le normalisateur N_i de H_i . Si c'est le cas, alors H_i et H sont tous les deux des p -Sylow de N_i . Donc ils sont conjugués par un élément de N_i . Or H_i est distingué dans N_i , donc $H = H_i$.

Donc il n'existe qu'une seule orbite ponctuelle sous l'action de H sur les p -Sylow, à savoir $\{H\} = \{H_1\}$.

Les cardinaux des autres orbites divisent $|H|$, donc sont des multiples de p . Il s'ensuit que $n_p(G) \equiv 1 \pmod{p}$. \square

Exemple 5.3.6

Soit G un groupe d'ordre 15. On va montrer que G est cyclique.

On a $|G| = 15 = 3 \times 5$

$n_3(G)$ divise 5 et est congru à 1 modulo 3, donc $n_3(G) = 1$ et G admet un unique 3-Sylow P , qui est donc distingué (car pour $g \in G$, le conjugué gPg^{-1} est encore un 3-Sylow et donc $gPg^{-1} = P$) et d'ordre 3.

$n_5(G)$ divise 3 et est congru à 1 modulo 5. Donc $n_5(G) = 1$. Donc G admet un unique 5-Sylow Q qui forcément est distingué.

On a $P \cap Q = \{e\}$ car $|P \cap Q|$ divise à la fois $|P| = 3$ et $|Q| = 5$.

On a $P \cong \mathbb{U}_3$ et $Q \cong \mathbb{U}_5$ car 3 et 5 sont premiers.

Pour $x \in P$ et $y \in Q$, on a $xy = yx$, car P et Q sont distingués.

Donc on a un morphisme de groupes bien défini :

$$\varphi : P \times Q \rightarrow G, (x, y) \mapsto xy$$

Son noyau est formé des (x, y) tq $xy = e \Leftrightarrow x = y^{-1}$.

Donc $\ker(\varphi) = \{e\}$. Donc φ est injectif. Comme $|P \times Q| = 15 = |G|$, φ est aussi surjectif.

Donc φ est

$$G \simeq P \times Q \simeq \mathbb{U}_3 \times \mathbb{U}_5 \cong \mathbb{U}_{15} \quad \text{car } \text{pgcd}(3, 5) = 1$$

Chapitre 6

Théorèmes de classification

6.1 Un outil : le produit semi-direct

Définition 6.1.1

Soient G un groupe et $N \triangleleft G$ un sous-groupe distingué. Un **complément** de N dans G est un sous-groupe $K < G$ tel que

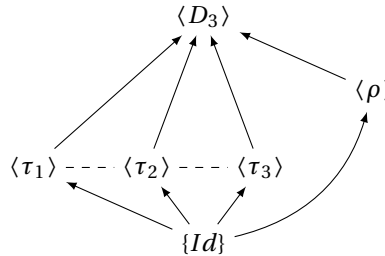
$$K \cap N = \{e\} \quad \text{et} \quad K \cdot N = G$$

Remarque 6.1.2

Notons que comme N est distingué, $K \cdot N$ est un sous-groupe et en fait égal à $K \cdot N$.

Exemple 6.1.3

1. Rappelons-nous le treillis des sous-groupes de D_3



Le sous-groupe $N = \langle \rho \rangle$ est distingué et chacun des $\langle \tau_i \rangle$, où τ_i est la i -ème symétrie, est un complément.

2. Plus généralement, dans $G = D_n$, le sous-groupe des rotations $N = \langle \rho \rangle$ est distingué et chaque sous-groupe $K = \langle \tau \rangle$, où τ est une symétrie, est un complément.
3. Si E est un espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-espace, alors tout supplémentaire G (i.e. $E = F \oplus G$) est un complément du sous-groupe $N = F$ de $G = E$.

Remarque 6.1.4

Soient G un groupe, $N \triangleleft G$ et K un complément. Alors par le deuxième théorème d'isomorphisme, on a

$$G/N = KN/N \cong K/N \cap K = K$$

Donc si K_1 et K_2 sont deux compléments, alors $K_1 \cong K_2$.

Définition 6.1.5

Soient G un groupe, N un sous-groupe distingué et K un complément de N .

Alors G est le **produit semi-direct interne** de N par K , en symboles : $G = N \rtimes^i K$

Exemple 6.1.6

$D_n = \langle \rho \rangle \rtimes^i \langle \tau \rangle$, où ρ engendre le sous-groupe des rotations et τ est une symétrie quelconque.

6.2 Produit semi-direct externe**Rappel**

Si G est un groupe. $\text{Aut}(G)$ désigne le groupe des automorphismes de G , i.e. des morphismes de groupes bijectifs $\varphi : G \xrightarrow{\sim} G$.

Définition 6.2.1

Soient K et N des groupes et

$$u : K \rightarrow \text{Aut}(N), k \mapsto u_k$$

un morphisme de groupes. Le **produit semi-direct externe** $N \rtimes_u K$ est l'ensemble $N \times K$, muni de la loi définie par $(n, k) \cdot (n', k') = (n \cdot u_k(n'), k \cdot k')$, $\forall n, n' \in N, \forall k, k' \in K$

Remarque 6.2.2

Si u est trivial (i.e. $u_k = \text{Id}_N, \forall k \in K$), alors le produit semi-direct externe se réduit au produit direct : $N \rtimes_u K = N \times K$

Lemme 6.2.3

1. $N \rtimes_u K$ est un groupe
2. $N \rtimes_u K$ est le produit semi-direct interne de son sous-groupe distingué $N \times \{e\}$ par le complément $\{e\} \times K$.

Démonstration

1. Montrons l'associativité de la multiplication :

$$\begin{aligned} ((n, k), (n', k')) \cdot (n'', k'') &= (n \cdot u_k(n'), k \cdot k') \cdot (n'', k'') \\ &= (n \cdot u_k(n') \cdot u_{k \cdot k'}(n''), k \cdot k' \cdot k'') \\ &= (n \cdot u_k(n') \cdot u_k \cdot u_{k'}(n''), k \cdot k' \cdot k'') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (n, k) \cdot ((n', k'), (n'', k'')) &= (n, k) \cdot (n' \cdot u_{k'}(n''), k' \cdot k'') \\ &= (n \cdot u_k(n' \cdot u_{k'}(n'')), k \cdot k' \cdot k'') \\ &= (n \cdot u_k(n') \cdot u_k(u_{k'}(n'')), k \cdot k' \cdot k'') \end{aligned}$$

Montrons que (e, e) est un élément neutre :

$$\begin{aligned}(n, k)(e, e) &= (nu_K(e), ke) \\ &= (ne, ke) = (n, k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(e, e)(n, k) &= (eu_K(n), ek) \\ &= (e\text{Id}_N(n), ek) \\ &= (n, k) \\ n &\in N, k \in K\end{aligned}$$

Montrons que $(u_{K^{-1}}(n^{-1}), k^{-1})$ est l'inverse de $(n, k) \in N \rtimes_u K$

$$\begin{aligned}(u_{K^{-1}}(n^{-1})(n, k) &= (u_{K^{-1}}(n^{-1}) \cdot u_{K^{-1}}(n), k^{-1}k) \\ &= (u_{K^{-1}}(n^{-1} \cdot n), k^{-1}k) = (e, e)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(n, k)(u_{K^{-1}}(n^{-1}), k^{-1}) &= (n \cdot u_K(u_{K^{-1}}(n^{-1})), kk^{-1}) \\ &= (nu_{KK^{-1}}(n^{-1}), kk^{-1}) \\ &= (n\text{Id}(n^{-1}), e) = (e, e)\end{aligned}$$

2. Montrons que $N \times \{e\}$ est distingué dans $N \rtimes_u K$:

$$\begin{aligned}(n, k)(n', e)(u_{K^{-1}}(n^{-1}), k^{-1}) &= (nu_K(n'), k)(u_{K^{-1}}(n^{-1}), k^{-1}) \\ &= (n \cdot u_K(n') \cdot u_K(u_{K^{-1}}(n^{-1})), kk^{-1}) \\ &= (n \cdot u_K(n')n^{-1}, e) \in N \times \{e\}\end{aligned}$$

Il est clair que $(N \times \{e\}) \cap (\{e\} \times K) = \{e\} \times \{e\} = e_{N \rtimes_u K}$

Montrons que $(N \times \{e\}) \cdot (\{e\} \times K) = N \rtimes_u K$

$$(n, e) \cdot (e, k) = (nu_e(e), ek) = (n, k)$$

pour $n \in N, k \in K$

□

Lemme 6.2.4

Supposons que $G = N \rtimes^i K$. Soit

$$u : K \rightarrow \text{Aut}(N), \quad k \mapsto (n \mapsto knk^{-1})$$

Alors on a un isomorphisme canonique :

$$\varphi : N \rtimes_u K \rightarrow N \rtimes^i K = G, \quad (n, k) \mapsto nk$$

Exemple 6.2.5

On a $D_n = \underbrace{\vec{\zeta}}_N \rtimes^i \underbrace{\vec{\tau}}_K$, où ζ engendre le sous-groupe des rotations et τ est une symétrie.

On a $\tau\zeta\tau^{-1} = \zeta^{-1}$. Soit donc

$$u : \vec{\tau} \rightarrow \text{Aut}(\vec{\zeta}), \quad \tau \mapsto (\zeta^l \mapsto \zeta^{-l})$$

Alors : $D_n \leftarrow \vec{\zeta} \rtimes_u \vec{\tau}$

Notons qu'on a $\vec{\zeta} \simeq \mathbb{Z}/n$, $\vec{\tau} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et donc

$$D_n \leftarrow \mathbb{Z}/n \rtimes_u \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

où

$$u : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}/n), \quad I \mapsto (\bar{a} \mapsto -\bar{a})$$

Démonstration (Démon du lemme)

Vérifions que φ est un morphisme

$$\begin{aligned} \varphi((n, k), (n', k')) &= \varphi((nu_K(n'), kk')) \\ &= n \cdot u_K(n') kk' \\ &= nkn'k^{-1}kk' \\ &= nkn'k' \\ &= \varphi((n, k)) \cdot \varphi((n', k')) \end{aligned}$$

où $n, n' \in N$, $k, k' \in K$. Clairement φ est surjectif. Le noyau de φ est formé des couples (n, k) tel que $nk = e$, i.e. $n = k^{-1} \in N \cap K = \{e\}$. \square

6.3 Les groupes d'automorphismes des groupes cycliques

Définition 6.3.1

Soit A un anneau. Un élément de A est **inversible** s'il existe $a \in A$ tel que $aa' = 1 = a'a$.

On note A^* l'ensemble des éléments inversibles.

Remarque 6.3.2

A^* est un groupe pour la multiplication

Exemple 6.3.3

$$1. M_n(\mathbb{R})^* = GL_n(\mathbb{R})$$

2. on a :

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* &= \left\{ \bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid \exists \bar{a}' \text{ tel que } \bar{a}\bar{a}' = \bar{1} \right\} \\ &= \left\{ \bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid \exists a', k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } a'a + kn = 1 \right\} \quad \text{identité de Bézout} \\ &= \left\{ \bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid \text{pgcd}(a, n) = 1 \right\} \end{aligned}$$

En particulier, si p est un nombre premier, on a :

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{\bar{0}\} \quad \text{est d'ordre } p-1$$

On peut montrer qu'en fait $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est **cyclique** d'ordre $p-1$

Remarque 6.3.4

Si A est un anneau, on a un morphisme naturel

$$A^* \rightarrow \text{Aut}((A, +)), \quad a \mapsto (b \mapsto ab)$$

En effet, on a $a(b + b') = ab + ab'$ et $(aa')b = a(a'b)$, $\forall a, a' \in A, \forall b, b' \in A$

Lemme 6.3.5

Le morphisme naturel

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* &\rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}/n) \\ a &\mapsto (b \mapsto ab) \end{aligned}$$

est un morphisme.

Démonstration

Clairement f est un morphisme.

f est injectif car $b \mapsto ab$ est l'identité ssi $a = 1$

Montrons que f est surjectif. Soit $\varphi : \mathbb{Z}/n \rightarrow \mathbb{Z}/n$ un automorphisme. Alors $\varphi(\bar{1})$ est un générateur de \mathbb{Z}/n

Or cela signifie que $\varphi(\bar{1}) = \bar{a}$ pour un $a \in \mathbb{Z}$ tel que $\text{pgcd}(a, n) = 1$

Pour $\bar{b} \in \mathbb{Z}/n$, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(\bar{b}) &= \varphi(\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_b) \\
&= \underbrace{\varphi(1) + \varphi(1) + \dots + \varphi(1)}_b \\
&= \bar{a} + \dots + \bar{a} \\
&= \bar{a} \cdot \bar{b} \\
&= (f(\bar{a}))(\bar{b})
\end{aligned}$$

□

6.4 Classification des groupes d'ordre pq , $p < q$ premiers

Théorème 6.4.1

Soient $p < q$ premiers et G un groupe d'ordre pq . Alors ou bien G est cyclique ou bien isomorphe à un produit semi-direct $\mathbb{Z}/q \rtimes_u \mathbb{Z}/p$ pour un $u : \mathbb{Z}/p \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}/q)$ non trivial.

Remarque 6.4.2

Comme $\text{Aut}(\mathbb{Z}/q)$ est cyclique d'ordre $q - 1$, il existe un

$$u : \mathbb{Z}/p \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}/q)$$

non trivial ssi $\mathbb{Z}/q - 1$ admet un sous-groupe d'ordre p .

ssi p divise $q - 1$ ssi $q \equiv 1 \pmod{p}$.

C'est le cas par exemple pour $pq = 21$ car $7 \equiv 1 \pmod{3}$.

Exemple 6.4.3 (Exemple d'application)

Un groupe d'ordre $6 = 2 \times 3$ est ou bien cyclique ou bien isomorphe à

$$\mathbb{Z}/3 \rtimes_u \mathbb{Z}/2 \simeq D_3 \simeq \mathfrak{S}_3, \quad D_3 \text{ permute les sommets au triangle}$$

Démonstration

Le premier théorème de Sylow nous affirme l'existence d'au moins un sous-groupe P d'ordre p et d'au moins un sous-groupe Q d'ordre q . Tous deux sont d'ordre cycliques et isomorphes à \mathbb{Z}/p et \mathbb{Z}/q respectivement. Remarquons que comme $\text{pgcd}(p, q) = 1$, on a $P \cap Q = \{e\}$

Enfin P et Q engendrent le sous-groupe $\langle P, Q \rangle = G$, seul sous-groupe contenant strictement P et Q .

Le 3ème théorème de Sylow nous indique si $n_q(G)$ est le nombre de q -Sylow de G , alors $n_q(G)$ divise p et est congru à 1 modulo q .

Puisque $p < q$, la seule possibilité est $n_q(G) = 1$. Ainsi G admet Q pour q -Sylow unique et Q est donc distingué dans G .

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
G = \langle P, Q \rangle &= Q \cdot P = Q \rtimes^i P \\
&\simeq Q \rtimes_u P \\
&\simeq \mathbb{Z}/q \rtimes_u \mathbb{Z}/p
\end{aligned}$$

Si u est trivial, alors

$$\mathbb{Z}/q \rtimes_u \mathbb{Z}/p = \mathbb{Z}/q \times \mathbb{Z}/p \simeq \mathbb{Z}/pq$$

□

6.5 Classification des groupes d'ordre p^2 , p premier

Soit p un nombre premier.

Lemme 6.5.1

Si G est un p -groupe (i.e. $|G|$ est une puissance de p), alors le centre $Z(G)$ est non trivial.

Démonstration

Écrivons l'équation aux classes pour l'action de conjugaison de G sur lui-même :

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{O \text{ orbite non ponctuelle}} |O|$$

Les points fixes (= orbites ponctuelles) de cette action sont exactement les éléments du centre et les orbites non ponctuelles sont toutes de cardinal une puissance $\geq p$ de p .

Donc $|Z(G)|$ est congru à 0 modulo p , et comme $e \in Z(G)$, l'ordre de $Z(G)$ est au moins p . □

Lemme 6.5.2

Tout groupe p^2 est abélien.

Remarque 6.5.3

Il existe des groupes d'ordre p^3 qui ne sont pas abéliens, par exemple D_4 qui est d'ordre 8.

Démonstration

Soit G un groupe d'ordre p^2 . On va montrer que pour tout $x \in G$, le centralisateur

$$Z_G(x) = \{y \in G \mid xy = yx\}$$

est le groupe G tout entier. soit $x \in G$, si $x \in Z(G)$, alors $Z_G(x) = G$ comme annoncé.

Supposons donc que $x \notin Z(G)$. Alors $Z_G(x)$ est strictement plus grand que $Z(G)$ car il contient $Z(G)$ et en plus l'élément x . Or les ordres de $Z(G)$ et $Z_G(x)$ divisent p^2 et d'après le lemme précédent, l'ordre de $Z(G)$ est $\geq p$. La seule possibilité est $|Z_G(x)| = p^2$ et $x \in Z(G)$ après tout. □

Théoreme 6.5.4

Tout groupe d'ordre p^2 est ou bien cyclique isomorphe à \mathbb{Z}/p^2 ou bien isomorphe à $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$

Démonstration

Comme l'ordre d'un élément divise p^2 , deux cas sont possibles :

- 1er cas : Il existe un élément d'ordre p^2 et $G \simeq \mathbb{Z}/p^2$
- 2ème cas : Tout élément autre que e est d'ordre p

Soient x et y deux éléments d'ordre p et H_1 et H_2 les sous-groupes qu'ils engendrent.

On peut choisir y de telle façon qu'il ne soit pas une puissance de x .

Alors comme $y \notin H_1$, le sous-groupe $H_1 \cap H_2$ est strictement plus petit que H_2 qui est d'ordre p .

Donc $H_1 \cap H_2 = \{e\}$. De plus, H_1 et H_2 sont distingués dans G qui est abélien.

Puisque $y \notin H_1$, le groupe $H_1 H_2$ est strictement plus grand que H_1 et son ordre divise p^2 .

Donc $H_1 H_2 = G$ et

□

6.6 Classification des groupes d'ordre 12

Théoreme 6.6.1

Tout groupe d'ordre 12 est isomorphe à l'un des uniques groupes suivants :

- $\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/4$
- $\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$
- \mathcal{A}_4
- D_6
- $\mathbb{Z}/3 \rtimes_u \mathbb{Z}/4$, u non trivial

Démonstration

Soit G un groupe d'ordre $12 = 3 \times 2^2$. Soit H un 2-Sylow de G (il est d'ordre 4) et soit K un 3-Sylow de G (il est d'ordre 3). D'après le 3ème thm de Sylow, le nombre $n_2(G)$ divise 3 et est congru à 1 modulo 2.

Donc $n_2(G) \in \{1, 3\}$. De même, le nombre $n_3(G)$ divise 4 et est congru à 1 modulo 3.

Donc $n_3(G) \in \{1, 4\}$. En outre, H est d'ordre 4 et donc isomorphe à $\mathbb{Z}/4$ ou à $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$. □

Lemme 6.6.2

L'un au moins parmi les groupes H et K est distingué dans G .

Démonstration

Supposons que K n'est pas distingué. Alors K a 4 sous-groupes conjugués $K = K, K_2, K_3, K_4$.

Puisque $|K_i| = 3$, $\forall i$, l'intersection de deux quelconques de ces sous-groupes est réduite à l'identité. En comptant les éléments de G , on voit que seuls 3 éléments de G ne sont dans aucun des sous-groupes K_i .

Figure 3.1

Le 2-Sylow H est d'ordre 4 et $H \cap K_i = \{e\}$, $\forall i$.

Donc H est formé de e et de ces 3 éléments. Donc H est unique et par conséquent distingué.

Par le lemme, $H \cdot K$ est un sous-groupe de G . Puisque $H \cap K = \{e\}$, chaque élément de HK a une unique expression comme produit hk , $h \in H$, $k \in K$. Puisque $|G| = 12$, on a $G = HK$.

— 1er cas : H et K sont tous les deux distingués.

Dans ce cas, on a $hkh = kh$, pour tous $h \in H$, $k \in K$, car $hkh^{-1}k^{-1} \in H \cap K = \{e\}$, avec $hkh^{-1} \in K$, $k^{-1} \in K$, $hkh^{-1}k^{-1} \in H$, $h \in H$

Donc on a un isomorphisme $H \times K \xrightarrow{\sim} HK = G$ et donc $G \simeq \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/3$ ou $G \simeq \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3$.

Remarque 6.6.3

On verra que ce sont les seuls groupes abéliens d'ordre 12.

— 2ème cas : H est distingué mais K ne l'est pas.

Il y a donc 4 3-Sylow conjugués K_1, K_2, K_3, K_4 . G agit par conjugaison sur cet ensemble de 4 sous-groupes.

A cette action est associé un morphisme

$$\phi: G \longrightarrow \mathfrak{S}_4$$

On va montrer que ϕ contient un isomorphisme de G sur \mathcal{A}_4 , le stabilisateur de K_1 pour l'action de conjugaison est le normalisateur $N_G(K_i)$, qui contient K_i . Le cardinal de l'orbite est 4 et c'est aussi l'indice de $N_G(K_i)$ dans G .

Donc $N_G(K_i)$ est d'ordre 3 et $N_G(K_i) = K_i$. L'intersection des $N_G(K_i)$ est l'intersection des K_i , c'est-à-dire $\{e\}$.

Donc

$$\text{Ker}(\phi) = \bigcap_{i=1}^4 N_G(K_i) = \{e\}$$

et G est isomorphe à $\mathfrak{S}(\phi)$

Puisque G a 4 sous-groupes d'ordre 3, il contient 8 éléments d'ordre 3 et ces 8 éléments engendrent G . Si x est d'ordre 3, $\phi(x)$ est une permutation d'ordre 3 donc pair.

Donc $\mathfrak{S}(\phi) \in \mathcal{A}_4$, et comme les deux sont d'ordre 12, on a $\mathfrak{S}(\phi) = \mathcal{A}_4$

— 3ème cas : K est distingué mais H ne l'est pas

Dans ce cas, on a $G = K \rtimes^i H \simeq K \rtimes_u H$ pour un morphisme $u : H \rightarrow \text{Aut}(K)$ à déterminer.

Comme $K \simeq \mathbb{Z}/3$, on a $\text{Aut}(K) \simeq \mathbb{Z}/2$, et il reste à voir comment les éléments de H agissent sur K par conjugaison. Supposons que H est cyclique engendré par x . Soit y un générateur de K . Comme G n'est pas abélien, on a $xy \neq yx$ et donc $xyx^{-1} = y^2$. Donc $u : \underset{\mathbb{Z}/4}{H} \rightarrow \text{Aut}(K)$ est l'unique morphisme non trivial et on a $G \simeq \mathbb{Z}/3 \rtimes_u \mathbb{Z}/4$.

La dernière possibilité est que $H \simeq \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.

Puisque K n'a que deux automorphismes et H est d'ordre 4, il existe un élément $w \in H$ autre que l'identité qui agit trivialement sur K : $wyw^{-1} = y$.

Puisque G n'est pas abélien, il y a aussi un élément $v \in H$, qui agit non trivialement : $v y v^{-1} = y^2$. Alors on a

$$H = \{e, v, w, vw\}$$

et $v^2 = w^2 = e$ et $vw = wv$.

L'élément $x = wy$ est d'ordre 6 et

$$v x v^{-1} = v w y v^{-1} = w y^2 = y^2 w = x^{-1}$$

On a donc $x^6 = e$, $v^2 = e$ et $v x v^{-1} = x^{-1}$, d'où un isomorphisme :

$$G \xrightarrow{\sim} D_6$$

$$x \mapsto \zeta$$

$$v \mapsto \tau$$

□

Chapitre 7

Un peu de géométrie affine

7.1 Espaces affines

Soit K un corps (par ex. \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C})

Définition 7.1.1

Un **espace affine** sur K est un triplet (ε, E, ϕ) , où

- ε est un ensemble non vide
- E est un \mathbb{K} -espace vectoriel
- $\phi : \varepsilon \times E \longrightarrow \varepsilon$ est une action libre et transitive du groupe $(E, +)$ sur l'ensemble ε .

Remarque 7.1.2

Dans la situation de la définition, on dit aussi que ε est un espace affine de **direction** E .
Les éléments de ε sont appelés **points**, ceux de E **vecteurs**.

Exemple 7.1.3

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On pose $\varepsilon = E$, et on note ϕ l'action de $(E, +)$, sur $\varepsilon = E$ par translation. Alors ε est un espace affine de direction E .

Notation 7.1.4

Soit ε un espace affine de direction E . On note :

$$\phi(P, v) = P + v, \quad \forall P \in \varepsilon, \forall v \in E$$

Remarque 7.1.5

Pour tous $P, Q \in \varepsilon$, et $v, w \in E$, on a :

- $P + 0 = P$
- $(P + v) + w = P + (v + w)$
- $\exists u \in E$ tel que $Q = P + u$

Notation 7.1.6

Pour tous $P, Q \in \varepsilon$, on note \vec{PQ} l'unique vecteur tel que

$$Q = P + \vec{PQ}$$

Remarque 7.1.7

Pour tous $P, Q, R \in \varepsilon$ et $u, v \in E$, on a

- $\vec{PQ} = 0 \Leftrightarrow P = Q$
- $\vec{PQ} = u \Leftrightarrow P + u = Q$
- $\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$
(relation de Chasles)
- $P + u = Q + v \Leftrightarrow \vec{PQ} = u - v$

7.2 Sous-espaces affines

Soit ε un espace affine de direction E .

Définition 7.2.1

Un sous-espace affine de ε est une partie $\mathcal{F} \subset \varepsilon$ telle qu'il existe un point $P \in \varepsilon$ et sous-espace vectoriel $F \subset E$ tel que

$$\mathcal{F} = \{P + v \mid v \in F\} = P + F$$

Exemple 7.2.2

1. $\mathcal{F} = \varepsilon$ est un sous-espace affine ($F = E$)
2. Pour $P \in \varepsilon$, $\mathcal{F} = \{P\}$ est un sous-espace affine ($F = \{0\}$)

Remarque 7.2.3

Soient $P \in \varepsilon$ et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel.

Posons $\mathcal{F} = P + F$.

1. On a $F = \{\vec{QR} \mid Q, R \in \mathcal{F}\}$
Donc F est uniquement déterminé par \mathcal{F}
2. $\forall Q \in \varepsilon \quad Q \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \vec{PQ} \in F$
3. $\forall Q \in \mathcal{F} \quad \mathcal{F} = Q + F$
4. $\forall u \in E \quad u \in F \Leftrightarrow P + u \in \mathcal{F}$

Définition 7.2.4

Soit $\mathcal{F} \subset \varepsilon$ un sous-espace affine

1. l'unique sous-espace vectoriel F de E pour lequel il existe $P \in \varepsilon$ tel que $\mathcal{F} = P + F$ est appelé la **direction** de \mathcal{F} et parfois noté $\vec{\mathcal{F}}$
2. On appelle **dimension** de \mathcal{F} la dimension de F
3. Si $\dim(\mathcal{F}) = 1$ (resp. 2), on dit que \mathcal{F} est une **droite affine** (resp. un **plan affine**) de ε

Exemple 7.2.5

1. On suppose que $\dim(E) = 2$. Soit e_1, e_2 une base de E . soit $P \in \varepsilon$ et soit $u \in E \setminus \{0\}$.
Soit \mathbb{D} la droite affine $P + \text{Vect}(u)$. On a

$$\forall M \in \varepsilon : \quad M \in \mathbb{D} \Leftrightarrow \det_{(e_1, e_2)}(u, \vec{PM}) = 0$$

2. On suppose que $\dim(E) = 3$. Soit e_1, e_2, e_3 une base de E . Soit $P \in \varepsilon$ et soient $u, v \in E$ linéairement indépendants.
On note \mathcal{P} de plan affine $P + \text{Vect}(u, v)$.
On a :

$$\forall M \in \varepsilon \quad \det_{(e_1, e_2, e_3)}(u, v, \vec{PM}) = 0$$

Remarque 7.2.6

1. Soit \mathcal{F} un sous-espace affine de direction F .
De façon naturelle, \mathcal{F} est lui-même un espace affine de direction F .

2. ε est l'unique sous-espace affine de direction E
3. Les sous-espaces affines de direction $\{0\}$ sont exactement les singletons de ε

Exemple 7.2.7

1. $\{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x + y + z = 1\}$ est un sous-espace affine de $\varepsilon = \mathbb{K}^3$.
C'est un plan de direction
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x + y + z = 0\}$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $\mathcal{F} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid x_1 + \dots + x_{n+1} = 1\}$ est un sous-espace affine de $\varepsilon = \mathbb{K}^{n+1}$ de dimension n et de direction

$$F = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid x_1 + \dots + x_{n+1} = 0\}$$

3. Soit V un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire non nulle. Alors

$$\mathcal{F} = \{v \in V \mid f(v) = 1\}$$

est un sous-espace affine de $\varepsilon = V$ de direction $\text{Ker}(f) \subset E = V$. Si $\dim(V) < \infty$, \mathcal{F} est de dimension $\dim(V) - 1$. On dit que \mathcal{F} est un **hyperplan affine** dans $\varepsilon = V$.

Définition 7.2.8

Deux sous-espaces affines sont **parallèles** si leurs directions sont égales.

Remarque 7.2.9

1. Deux sous-espaces affines parallèles ont même dimension
2. Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux sous-espaces affines F, G .
Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, alors $F \subset G$. Si de plus : $F = G$, alors $\mathcal{F} = \mathcal{G}$

Lemme 7.2.10

Soit $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces affines. Soit F_i la direction de \mathcal{F}_i .
Si $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ est non vide, alors c'est un sous-espace affine de direction $\bigcap_{i \in I} F_i$.

Démonstration

Supposons que $P \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$. On a :

$$\begin{aligned} u \in \bigcap_{i \in I} F_i &\Leftrightarrow \mathcal{F}_i, \forall i \in I \\ &\Leftrightarrow P + u \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i \end{aligned}$$

Donc $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i = P + \bigcap_{i \in I} F_i$

□

Lemme 7.2.11

Soient deux sous-espaces affines \mathcal{F} et \mathcal{G} de directions F et G . Si $E = F + G$, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est non vide et donc c'est un sous-espace affine de direction $F \cap G$. Si de plus $E = F \oplus G$, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un singleton.

Démonstration

Soient $P \in \mathcal{F}$ et $Q \in \mathcal{G}$

Comme $E = F + G$, le vecteur \vec{PQ} s'écrit

$$\vec{PQ} = u + v, \quad u \in F, v \in G$$

Alors le point

$$P + u = Q - v$$

appartient à $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Si $E = F \oplus G$, alors la direction de $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est $E \cap F = \{0\}$, donc $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un singleton. \square

Exemple 7.2.12

Soit un système à m équations linéaires à n inconnues, et à coefficients dans \mathbb{K} ? Soit \mathcal{F}_i , $1 \leq i \leq m$, l'ensemble des solutions de la i -ème équation. Supposons $\mathcal{F}_i \neq \emptyset$, $\forall i$.

Alors \mathcal{F}_i est un sous-espace affine de direction F_i , l'espace des solutions de l'équation homogène associée. L'ensemble \mathcal{F} des solutions du système est l'intersection $\bigcap_{i=1}^m \mathcal{F}_i$.

S'il est non vide, c'est un sous-espace affine de \mathbb{K}^n de direction $\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{F}_i$ l'espace des solutions du système homogène associé.

Conséquence 7.2.13 (en petit dimension)

1. On suppose que ε est un plan affine. Soient \mathbb{D}, \mathbb{D}' des droites **distinctes** de ε de directions D, D' . Alors une et une seule des assertions suivantes est vrai :
 - \mathbb{D} et \mathbb{D}' sont parallèles et disjointes
 - $\mathbb{D} \cap \mathbb{D}'$ est un singleton
2. On suppose que ε est de dimension 3. Soient \mathbb{D} et \mathbb{D}' des droites affines **distinctes** de ε de direction D et D' . Alors une seule des assertions est vrai :
 - \mathbb{D} et \mathbb{D}' sont disjointes
 - $\mathbb{D} \cap \mathbb{D}'$ est un singleton
3. On suppose que ε est de dimension 3. Soit \mathbb{D} une droite affine de direction D . Soit \mathcal{P} un plan affine de direction P . Alors une et une seule des assertions suivantes est vraie :
 - $\mathbb{D} \subset \mathcal{P}$ (et alors $D \subset P$)
 - $\mathbb{D} \cap \mathcal{P}$ est vide (et alors $D \not\subset P$)
 - $\mathbb{D} \cap \mathcal{P}$ est un singleton.
4. On suppose que ε est de dimension 3. Soient \mathcal{P} et \mathcal{P}' des plans affines **distinctes** de direction P et P' . Alors une et une seule des assertions suivantes est vraie :
 - \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont parallèles et disjoints.
 - $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est une droite affine de direction $P \cap P'$

7.3 Applications affines

Soit ε un espace affine de direction E .

Définition 7.3.1

Soit \mathcal{F} un espace affine de direction F

Une application $f : \varepsilon \rightarrow \mathcal{F}$ est **affine**.