Cours d'analyse I

Patrice Perrin

11/09/2018

Table des matières

Chapitre 1

Espace vectoriel normé

1.1 Espace vectoriel normé et autres

À un espace vectoriel normé, on va chercher à ajouter une structure topologique pour savoir si 2 points sont proches.

Définition 1.1.1

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ est une norme sur E ssi
$\forall u, v \in E$*,* $\lambda \in \mathbb{R}$*, on a :*

1. $N(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$
2. $N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$ *(homogène)*
3. $N(u + v) \leq N(u) + N(v)$ *(inégalité triangulaire)*

On dit alors que (E, N) est un espace vectoriel normé .

Définition 1.1.2

Soit X un ensemble. Une application $d : X^2 \to \mathbb{R}_+$ est une distance ssi
$\forall x, y, z \in X$*, on a :*

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

On dit alors que (X, d) est un espace métrique.

Définition 1.1.3

Une application $n : E \to \mathbb{R}_+$ est dite semi-normée sur E (un espace vectoriel de $\mathbb{R}$) ssi n vérifie les points 2 et 3 de la définition 1.1.2.

Abstract nonsense

1. $N(-u) = N(u)$
2. $N(\lambda u) = 0 \Leftrightarrow \lambda u = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ *ou* $u = 0$
3. $N(\sum_{i=1}^{n} u_i) \leq \sum_{i=1}^{n} N(u_i)$
4. $|N(u) - N(v)| \leq N(u - v)$

Définition 1.1.4

Soit (E, N) ou (X, d), alors pour $x_0 \in E$ (ou X) :

$$\begin{cases} (boule\ ouverte)\ B(x_0, r) & = & x \in E(ou\ X), N(x - x_0) < r,\ ou\ d(x_0, x) < r \\ (boule\ ferme)\ \bar{B}(x_0, r) & = & x \in E(ou\ X), N(x - x_0) \leq r,\ ou\ d(x_0, x) \leq r \end{cases}$$

Remarque 1.1.5

Tout espace vectoriel normé est un espace métrique pour :

$$d_N(x, y) = N(y - x) \quad x, y \in E$$

Exercice 1.1.6

Il y a des distances sur un espace vectoriel qui ne proviennent pas de normes (distance discrète) :

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

Définition 1.1.7

Une partie U de (E, N) ou de (X, d) est dite ouverte ssi :

$$\forall x_0 \in U, \exists r > 0\ tq\ B(x_0, r) \subset U$$

Définition 1.1.8

Une partie V de (E, N) ou (X, d) est un voisinage de $x_0 \in E$ (ou X) ssi il existe U ouvert contenant x_0 et contenu dans V.

Remarque 1.1.9

L'ensemble des ouverts de E (ou X) comprend :
- $\emptyset$ et E (ou X)
- toute réunion d'ouverts est encore ouverte
- toute intersection finie d'ouverts est encore ouverte

Définition 1.1.10

On appelle espace topologique $(X, \mathcal{T})$ un ensemble X muni d'une famille de parties $\mathcal{T}$ ($\subset P(x)$) dites ouvertes qui vérifie :

1. *$\emptyset$, $X \in \mathcal{T}$*
2. *$\forall J \subseteq \mathcal{T}$, $\bigcup_{\alpha \in J} \alpha \in \mathcal{T}$*
   (ie. Toute union – pas nécessairement dénombrable – d'ouverts de X est un ouvert de X)
3. *$\forall J \subseteq \mathcal{T}$ de cardinal fini, $\bigcap_{\alpha \in J} \alpha \in \mathcal{T}$*
   *(ie. Toute intersection **finie** d'ouverts de X est un ouvert de X)*

Propriété 1.1.11

Par cette définition, tout espace vectoriel normé (E, N) (respectivement tout espace métrique (X, d)) est muni d'une topologie (la topologie associée à la norme ou à la distance).
Une topologie ne provient pas nécessairement d'une métrique (à fortiori une norme).
Il y a des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une topologie provienne d'une métrique (on dit alors qu'elle est métrisable).

$$espace\ vectoriel\ normé \Rightarrow espace\ metrique \Rightarrow espace\ topologique$$

Les réciproques sont fausses.

Remarque 1.1.12

Une boule ouverte est ouverte.

Remarque 1.1.13

Il existe des distances ultra-métriques où la distance est :

$$d(x,z) \leq max(d(x,y), d(y,z))$$

Définition 1.1.14

On appelle fermé dans un espace topologique le complémentaire d'une partie ouverte :

$$F \textit{ fermé} \Leftrightarrow X \backslash F \textit{ est ouvert}$$

Remarque 1.1.15

$\bar{B}(x_0, r)$ est fermé.

Définition 1.1.16

$A \subset$ $((X,T),(X,d),(E,N))$
$\overset{\circ}{A}$ (intérieur de A), le plus grand ouvert contenu dans A
$\bar{A}$ (adhérence de A), le plus petit fermé contenant A
$Fr(A) = \bar{A} \backslash \overset{\circ}{A}$ (frontière de A) et $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \bar{A}$

Exemple 1.1.17

Soit $]0,1[\subset [0,1[\subset [0,1]$, on a $Fr([0,1[) = \{0,1\}$

Définition 1.1.18

Une application f de (E, N_E) dans (F, N_F) est continue en x_0 ssi :

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ N_E(x - x_0) < \eta \Rightarrow N_F(f(x) - f(x_0)) < \epsilon$$

f est simplement continue de E dans F ssi f est continue en tout point de E.

Définition 1.1.19

A est dite bornée (dans (E,N)) ssi :

$$\exists M > 0 \ \exists x_0 \in E \ tq \ A \subset B(x_0, M)$$

Définition 1.1.20

On dit que N_1 et N_2 deux normes sur un même espace vectoriel normé E sont équivalentes ssi :

$$\exists m > 0 \ \exists M > 0 \ tq \ \forall u \in E \ mN_1(u) \leq N_2(u) \leq MN_1(u) \ et \ \frac{1}{M}N_2(u) \leq N_1(u) \leq \frac{1}{m}N_2(u)$$

Remarque 1.1.21

Si $u = 0$, on a $m0 \leq 0 \leq M0$ et si $u \neq 0$, on a $m \leq \frac{N_2(u)}{N_1(u)} \leq M$.
M est donc le plus petit possible et m le plus grand possible.

Remarque 1.1.22

Si N_1 et N_2 sont équivalentes, (E,N_1) et (E,N_2) ont la même topologie.

Proposition 1.1.23

Soient (E_1, N_1) et (E_2, N_2) deux espaces normés, $E_1 \times E_2$ peut être muni de la norme :
- $(x, y) \mapsto \sup(N_1(x), N_2(y)) = N(x, y)$
- *ou* $(x, y) \mapsto N_1(x) + N_2(x) = N'(x, y)$

Ces deux normes sont équivalentes et définissent la même topologie sur $E_1 \times E_2$.

Démonstration

On montre pour N et N' que la norme est nulle si et seulement si les deux normes N_1 et N_2 sont nulles, que la norme du produit par un scalaire est le produit du scalaire avec la norme, et enfin l'inégalité triangulaire.
Les deux normes sont équivalentes car :

$$N(x, y) \leq N'(x, y) \leq 2N(x, y)$$

Exemple 1.1.24

$(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ est continue de $\mathbb{R} \times E$ dans E.
$(x, y) \mapsto x + y$ est continue de $E \times E$ dans E.

Remarque 1.1.25

Soit E un espace vectoriel et T une topologie sur E, alors (E, T) est un espace vectoriel topologique ssi :
- $(x, y) \mapsto x + y$ est continue de $E \times E$ dans E
- $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ est continue de $K \times E$ dans E

1.2 Topologie et norme / distance

Propriété 1.2.1

f est continue pour la topologie associée à une norme ou à une distance si et seulement si f est continue pour la norme ou la distance.

Propriété 1.2.2

Soit $A \subset (E, N)$ (respectivement (X, d)). On a :

1. $\mathring{A} = \{a \in A;\ \exists r > 0\ B(a, r) \subset A\}$
2. $\bar{A} = \{x \in E;\ \forall r > 0\ B(x, r) \cap A \neq \emptyset\}$
3. $Fr(A) = \{x \in E;\ \forall r > 0\ B(x, r) \cap A \neq \emptyset \text{ et } B(x, r) \cap (X \backslash A) \neq \emptyset\}$

Démonstration

1. $\supseteq$: Si $a \in A$ et $\exists r > 0\ B(a, r) \subset A$. $B(a, r)$ est un ouvert donc par définition de l'ouverture

$a \in \overset{\circ}{A}$
$\subseteq$: Si $a \in \overset{\circ}{A}$, $\exists U$ ouvert, $U \subset \overset{\circ}{A}$, avec $a \in U$. D'après la caractérisation des ouverts d'un espace métrique $\exists\ r > 0\ B(a,r) \subset U$

2. Si $a \in A$, la propriété est claire.
   Si $a \notin A$ (ie. $x \in E \backslash A$) : dire que

$$E \backslash \bar{A} = \{x \in E;\ \exists r > 0\ B(x,r) \cap A = \emptyset\}$$

   est équivalent à dire

$$E \backslash \bar{A} = \{x \in E;\ \exists r > 0\ B(x,r) \subset E \backslash A\}$$

   S'il existe un r tel que $B(x,r) \subset E \backslash A$, alors $F = E \backslash B(x,r)$ est un fermé tel que $A \subset F$. Or l'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A, donc $\bar{A} \subset F$. Puisque $x \in B(x,r)$, $x \notin F$, c'est à dire $x \in E \backslash \bar{A}$
   Si $x \in E \backslash \bar{A} = E \backslash \bigcap_{F \supset A} F$ par définition de l'adhérence dans un espace topologique. x est dans le complémentaire de l'intersection de fermé donc un fermé ; on en déduit que x est dans un ouvert n'intersectant pas $\bar{A}$. D'après la caractérisation des ouverts dans les espaces métriques, il existe un $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset E \backslash \bar{A}$.

3. Si $x \in Fr(A) = \bar{A} \backslash \overset{\circ}{A}$, alors
   — $\forall r > 0$, $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ ($\in \bar{A}$)
   — $x \in \overset{\circ}{A}\ \forall r > 0\ B(x,r) \subsetneq A$ et $\forall r > 0\ B(x,r) \cap (X \backslash A) \neq \emptyset$

Définition 1.2.3

On dit que x est un point d'accumulation pour la partie A ssi $\forall r > 0\ (B(x,r) \backslash \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ (boule centrée en x épointée).
Si $x \in A$ ne vérifie pas cette propriété, on dit que x est un point isolé de A.

Remarque 1.2.4

Si x est un point d'accumulation :
— x peut appartenir à A
— sinon $x \notin A$ et $x \in \bar{A}$

Exemple 1.2.5

$\left\{x \in \mathbb{R};\ x = \frac{1}{n},\ n \geq 1\right\}$, $\{0\}$ est un point d'accumulation de A et tous les points de A sont isolés.

Propriété 1.2.6

Si (E,N) est un espace normé alors $\forall r > 0\ \overline{B(x,r)} = \bar{B}(x,y)$ (l'adhérence de la boule ouverte est la boule fermée)

Démonstration

Soit $x \in E$, on a $B(x,r) = \{y, N(y-x) < r\} \subset E$.
On sait que $B(x,r) \subset \overline{B(x,r)} \subset \bar{B}(x,y)$.

Supposons qu'il n'existe pas de y tel que $N(y-x) = r$, alors $B(x,r) = \overline{B}(x,r)$ et donc la propriété est triviale car on a $\overline{B(x,r)} = \overline{\overline{B}(x,r)} = \overline{B}(x,r)$.

Soit y tq $N(y-x) = r$. On a :

$$z \in [x,y] \Leftrightarrow z = (1-\lambda)x + \lambda y \quad \lambda \in [0,1] \qquad \text{(espace vectoriel)}$$

Il suffit de vérifier que pour tout $\rho > 0$, il existe z tel que $z \in B(x,r)$ et $z \in B(y,\rho)$.

$$\begin{aligned} N(z-x) &= N(\lambda y + (1-\lambda)x - x) \\ &= |\lambda| N(y-x) = \lambda r \qquad \text{donc on a } \lambda < 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} N(z-y) &= N(\lambda y + (1-\lambda)x - y) \\ &= |1-\lambda| N(y-x) = (1-\lambda) r \qquad \text{donc on a } \rho > (1-\lambda) r \end{aligned}$$

Donc si on prend λ tq $(1-\lambda) < \frac{\rho}{r}$ ($\lambda \neq 1$ mais assez proche de 1), la propriété est vérifié.

Propriété 1.2.7

Si (E,N) est un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel, alors $\bar{F}$ est un sous-espace vectoriel .

Démonstration

Soit (E,N) et F un sous-espace vectoriel de E.

Il est clair que $\bar{F}$ est une partie fermée. Il suffit donc de montrer que $\bar{F}$ est stable par combinaison linéaire. Nous allons utiliser la caractérisation de l'adhérence donnée précédemment.

Montrons, dans un premier temps, que $\bar{F}$ est stable par multiplication par un scalaire.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \bar{F}$. Si $\lambda = 0$, le point λx appartient à F donc à $\bar{F}$. Supposons donc $\lambda \neq 0$.

Soit $B(\lambda x, r)$ une boule centrée en λx de rayon $r > 0$. Puisque x est adhérent à F, il existe z dans la boule $B(x, \frac{r}{|\lambda|})$. On a alors :

$$N(\lambda z - \lambda x) = |\lambda| N(z-x) < |\lambda| \frac{r}{|\lambda|} = r$$

Donc le point $\lambda z \in F$ appartient à $B(\lambda x, r)$ et, r étant quelconque, le point λx est bien adhérent à F : $\forall r > 0, \lambda z \in B(\lambda x, r)$.

Montrons maintenant la stabilité pour l'addition.

Soit $r > 0$, $x, y \in \bar{F}$ et $B(x+y, r)$ une boule centrée en $x+y$. Comme x est adhérent à F , on sait que la boule $B(x, \frac{r}{2})$ contient un point z de F. Il en est de même pour $B(y, \frac{r}{2})$ qui contient un point t de F. On a donc, par inégalité triangulaire :

$$N(z+t-x-y) < N(z-x) + N(t-y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

Le point $z+t \in F$ est donc dans la boule $B(x+y,r)$ et le point $x+y$ est bien adhérent à F : $\forall r > 0, z+t \in B(x+y,r)$.

Finalement, $\bar{F}$ est bien un sous-espace vectoriel .

Remarque 1.2.8

On a :

1. La propriété 1.2.6 est fausse en générale pour les espaces métriques
2. On se restreindra souvent aux sous-espace vectoriel fermés.

Définition 1.2.9

La suite x_n (dans un espace vectoriel normé ou un espace métrique) est convergente vers l ssi :

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 > 0 \ tq \ n \geq n_0 \Rightarrow N(l - x_n) < \epsilon \ (ou \ d(l, x_n) < \epsilon)$$

Abstract nonsense

1. Si l existe, elle est unique
2. Si $u_n \to l$ et $v_n \to l'$, $u_n + v_n \to l + l'$
3. Si $u_n \to l$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u_n \to \lambda l$

Propriété 1.2.10

Si $u_n \to l$ alors u_n est bornée

Démonstration

Soit (u_n) une suite convergeant vers l. Alors à partir d'un certain rang n_0 tout les termes de la suite sont dans la boule centrée en l de rayon 1. Puisqu'il y a un nombre fini de termes avant n_0, on sait que l'ensemble $\{x_n, n < n_0\}$ est borné. Puisque l'ensemble $\{x_n, n < n_0\}$ est borné (car il y a un nombre fini de terme) et que l'ensemble des $\{x_n, n \geq n_0\}$ est aussi borné, l'ensemble de tous les x_n est borné.

Définition 1.2.11

La suite (u_n) est de Cauchy ssi :

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 > 0\ tq\ n, m \geq n_0 \Rightarrow N(u_n - u_m) < \epsilon\ (ou\ d(u_n, u_m) < \epsilon)$$

ou

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 > 0\ tq\ n \geq n_0 \Rightarrow \forall p\ N(u_{n+p} - u_n) < \epsilon\ (ou\ d(u_{n+p}, u_n) < \epsilon)$$

Si u_n est convergente, elle est de Cauchy.

Propriété 1.2.12

Si $u_n \to l$ ou si u_n est de Cauchy, alors $\{u_n,\ n \geq 0\}$ est borné.

Démonstration

On sait qu'à partir d'un certain rang n_0, $N(u_n) \leq l + 1\ n \geq n_0$, et $\{u_i, i \leq n_0\}$ est un ensemble fini, donc $\{u_n,\ n \geq 0\}$ est borné par le sup entre $\{N(u_i), i \leq n_0\}$ et $N(l) + 1$.

Définition 1.2.13

On dit que (X, d) est complet ou (E, N) est de Banach (espace vectoriel normé complet), ssi toute suite de Cauchy est convergente.

Exemple 1.2.14

On a :

1. $(\mathbb{Q}, |.|)$ n'est pas complet (n'admet pas la propriété de la borne supérieur).
2. $(\mathbb{R}, |.|)$ est un corps ordonné contenant $\mathbb{Q}$ admettant la propriété de la borne supérieure. Soit $u_0, ..., u_n$ une suite de Cauchy bornée. On a :

$$m \leq Inf(u_0, ..., u_n) \leq Sup(u_0, ..., u_n) \leq M$$

$$m \leq Inf(u_1, ..., u_n) \leq Sup(u_1, ..., u_n) \leq M$$

On pose $\sigma_n = Inf_{i \geq n}\{u_n\}$ et $\tau_n = Sup_{i \geq n}\{u_n\}$.
On a σ_n croissante et τ_n décroissante, de plus $\sigma_n \leq \tau_n$, et aussi $\tau_n - \sigma_n \to 0$ (suite monotone adjacente).
Donc $\sigma_n \to Sup\sigma_n$ et $\tau_n \to Inf\tau_n$ et $Sup\ \sigma_n = Inf\ \tau_n$.

Commentaire Construire $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$:

— "Coupure de Dedekind" (partition de $\mathbb{Q}$ avec $\mathbb{Q} = E \sqcup F$ avec $e \in E \leq f \in F$).
On prend $E = \mathbb{Q} \cup \{r \geq 0, r^2 < 2\}$ et $F = \{r \geq 0, r^2 > 2\}$

— $(\mathbb{Q}, |.|)$ est un espace vectoriel normé . On le complète par suites de Cauchy de rationnels et suites de Cauchy tendant vers 0.

3. $(\mathbb{R}_n, ||.||_\infty)$ (on sait que $||.||_\infty$ est équivalente à $||.||_p$ $\forall p$, donc elles ont les mêmes suites de Cauchy) est complet (Banach).
Soit $x_m \in \mathbb{R}^n$ avec $x_m = (x_1^m, ..., x_n^m)$. Elle est de Cauchy car $|x_i^{m+p} - x_i^m| \leq ||x_{m+p} - x_m||_\infty$.
Donc chaque x_i^m est de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

4. $\mathbb{R}[X]$ avec

$$||P||_2 = \begin{cases} 0 & si \quad P = 0 \\ \sqrt{\sum_0^{\deg P} a_i^2} & si \quad P \neq 0 \end{cases}$$

avec $P = a_0 + ... + a_n X^n$.
On a $P_n = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{x^i}{i}$.

$$||P_{n+p} - P_n|| = \sqrt{\sum_{i=n+1}^{n+p} \frac{1}{i^2}}$$

$$||P_{n+p} - P_n|| \leq \sqrt{\sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{i^2}}$$

Le membre de droite est le reste d'une série de Riemann convergente, il converge donc vers 0.
C'est une suite de Cauchy.
Quelle pourrait être la limite ?
Ça ne peut pas être 0 car $||P_n - 0||_2 = ||P_n||_2 = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}}$ qui ne tend pas vers 0.
Si Q est un polynôme : $||P_m - Q|| = \sqrt{(1-q_0)^2 + ... + (1-q_n)^2 + \sqrt{\sum_{i \geq n}^m \frac{1}{i^2}}}$. Si $m > n$ alors cela ne converge pas car il restera le degré le plus élevé.
Donc cet espace n'est pas complet pour $||.||_2$

5. $C([0,1], \mathbb{R})$ (ensemble des fonctions continues de [0,1] dans $\mathbb{R}$) est complet pour $||.||_\infty$. On a $||f||_\infty = Sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ (la norme est bien définie sur l'espace).

   (a) Trouver un candidat pour la limite
   (b) Montrer que la suite tend vers le candidat
   (c) Montrer que le candidat est dans l'espace

   Soit $f_n \in C([0,1], \mathbb{R})$ de Cauchy.

$$Sup_{x \in [0,1]} |(f_{n+p} - f_n)(x)| = ||f_{n+p} - f_n||_\infty \to 0$$

   (a) Si $x \in [0,1]$, $f_n(x)$ est une suite de Cauchy de réel, elle tend vers $\varphi(x)$ (convergence uniforme, donc convergence simple ou ponctuelle).

   (b) On doit monter que pour $\epsilon > 0$, il existe n assez grand tq $\forall x \in [0,1]$ $|\varphi(x) - f_n(x)| < \epsilon$.

$$|\varphi(x) - f_n(x)| \leq |\varphi(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_n(x)|$$
$$|\varphi(x) - f_n(x)| \leq |\varphi(x) - f_m(x)| + ||f_m(x) - f_n(x)||_\infty$$

   $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0 > 0$ tq $||f_m(x) - f_n(x)||_\infty < \frac{\epsilon}{2}$.
   Pour cet x, $\exists m(x) \geq n_0$ et $>> 0$ tq $|\varphi(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2}$.
   D'où $|\varphi(x) - f_n(x)| < \epsilon$ si $n > n_0$.

(c) Il faut montrer que φ est continue.

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq |\varphi(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - \varphi(x_0)|$$

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq 2||\varphi - f_n||_\infty + |f_n(x) - f_n(x_0)|$$

$\exists n_0$ tq $n > n_0$ $||\varphi - f_n||_\infty < \frac{\epsilon}{3}$.
De plus, pour un tel n, f_n est continue en x_0 d'où $\exists n > 0$ tq $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$ Donc $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \epsilon$.

Propriété 1.2.15

Soit (E, N) de Banach, alors une partie de E est complète ssi elle est fermée.

Corollaire 1.2.16

Si F est un sous-espace vectoriel de (E, N) de Banach, alors $\bar{F}$ est de Banach (on sait que $\bar{F}$ est un sous-espace vectoriel normé).

Démonstration

F est fermée dans E. Soit x_n une suite de Cauchy dans F, donc x_n est de Cauchy dans E.
x_n tend vers $x \in E$ et $x \in \bar{F}$. Donc $B(x, r)$ est fermée : $\exists n >> 0$ tq $x_n \in B(x, r)$.
Si F est complet, $x \in \bar{F}$ alors $B(x, \frac{1}{n}) \cap F \neq 0$, d'où $x_n \in F \cap B(x, \frac{1}{n})$.
D'où $x_n \in F$, $x_n \to x$. x_n est de Cauchy et donc $x \in F$.

Remarque 1.2.17

1. $\bar{F}$ se caractérise aussi comme les points limite d'une suite $x_n \in F$.

   Si f est continue en x_0 :

   $$\forall \epsilon > 0\ \exists n > 0\ N_E(x - x_0) < n \Rightarrow N_F(f(x) - f(x_0)) < \epsilon$$

   Si $x_n \to x_0$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0$, $N_E(x - x_0) < n_0 \Rightarrow N_F(f(x) - y_0) < \epsilon$
2. f de E dans F est continue en x_0 ssi pour toute suite $x_n \to x_0$ $f(x_n) \to f(x_0) = y_0$

   Si pour toute suite $x_n \to x_0$, $f(x_n) \to y_0$. Supposons que f n'est pas continue, on a :

   $$\exists \epsilon > 0\ \forall n\ \exists x\ N_E(x - x_0) < n \text{ et } N_F(f(x) - y_0) \geq \epsilon$$

   On prend $n = \frac{1}{n}$ et $x = x_n$, on a : $N_E(x_n - x_0) < \frac{1}{n}$ et $N_F(f(x_n) - y0) > \epsilon$. Donc il existe une suite x_n tq $f(x_n)$ ne tend pas vers y_0.

1.3 Application des espace vectoriel de Banach

1.3.1 Théorème du point fixe

Définition 1.3.1

f une fonction de (E, N_E) dans (F, N_F) est k-contractante ssi $\exists k \in [0, 1[$ tq :

$$\forall x, y \in E\ N_F(f(x) - f(y)) \leq k N_E(x - y)$$

Si f est contractante, alors elle est continue.

Théoreme 1.3.2

Soit $f : (E,N) \to (E,N)$ k-contractante $(0 < k < 1)$ et (E,N) de Banach, alors f admet un unique point fixe (tq $f(x) = x$).

Remarque 1.3.3

Si $N(f(x) - f(y)) = 0$ c'est que f est une fonction constante.

Démonstration

Soit $x_0 \in E$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ ou $x_n = f^n(x_0)$.

$$N(x_{n+1} - x_n) = N(f(x_n) - f(x_{n-1})) \leq kN(x_n - x_{n-1})$$

Par récurrence, on obtient :

$$N(x_{n+1} - x_n) \leq k^n N(f(x_0) - x_0)$$

Donc :

$$N(x_{n+p} - x_n) \leq N(x_{n+p} - x_{n+p-1}) + ... + N(x_{n+1} - x_n)$$
$$N(x_{n+p} - x_n) \leq (k^{n+p} + ... + k^n)N(f(x_0) - x_0)$$
$$N(x_{n+p} - x_n) \leq \frac{k^n(1 - k^{p+1})}{1 - k} N(f(x_0) - x_0)$$
$$N(x_{n+p} - x_n) \leq \frac{k^n}{1 - k} N(f(x_0) - x_0)$$

Le membre de droite tend vers 0 si n tend vers $+\infty$.
D'où x_n est de Cauchy donc $x_n \to l \in E$.
On a $f(x_n) = x_{n+1} \to f(l) = l$ (si f est continue et c'est vrai car f est contractante).
Mais un point fixe est unique :
Soit l_1, l_2 deux points fixes de f, on a :

$$N(f(l_1) - f(l_2)) \leq kN(l_1 - l_2) < N(l_1 - l_2)$$

$$N(l_1 - l_2) < N(l_1 - l_2)$$

Ce qui est impossible. Donc le point fixe est unique.

1.3.2 Séries dans la Banach

Soit (E,N), un espace vectoriel normé .

Définition 1.3.4

L'étude d'une série (u_i) est l'étude de $U_i = \sum_{j=0}^{i} u_j$, suite des sommes partielles.
La série est convergente ssi la suite U_i est convergente.
La série est de Cauchy ssi la suite U_i est de Cauchy.
Une série est normalement convergente ssi la série de terme général $N(u_i)$ est convergente.

Propriété 1.3.5

Une série normalement convergente est convergente (si E est de Banach).
Si $\sum_0^\infty N(u_i)$ est définie alors $\sum_0^\infty u_i$ est définie dans E.

Démonstration

On a :

$$\begin{array}{rcl} N(U_{n+p}-U_n) & = & N(\sum_{i=1}^{p} u_{n+i}) \\ & \leq & \sum_{i=1}^{p} N(u_{n+i}) \\ & \leq & \sum_{i=1}^{\infty} N(u_{n+i}) \\ & \to & 0 \end{array}$$

Donc U_i est de Cauchy et donc est convergente (E est de Banach).

Remarque 1.3.6

$N(\sum_0^\infty u_i) \leq \sum_0^\infty N(u_i)$

Exercice 1.3.7

$C([0,1],\mathbb{R})$ est de Banach par $||.||_\infty$.
Si $||\varphi_i||_\infty$ est une série convergente, alors $x \mapsto \sum_0^\infty \varphi_i(x)$ a un sens : fonction continue en $x \in [0,1]$.

1.4 Compacité

Soient (X,d) un espace métrique, (E,N) un espace normé, et (X,C) un espace topologique.

Définition 1.4.1

Un espace topologique est séparé ssi $\forall x, y \in X,\ (x \neq y)$, il existe U, V deux ouverts disjoints tels que $x \in U, y \in V$.
Donc (E,N) et (X,d) sont séparés.

Définition 1.4.2

Un ***recouvrement de*** *K est une famille U de parties de E telle que $K \subseteq \bigcup_{U_\alpha \in U} U_\alpha$*

Définition 1.4.3 (Borel-Lebesgue)

$K \subseteq (X,C)$ séparé est dit compact ssi pour tout recouvrement ouvert de K, on peut extraire un recouvrement fini de K :

$$K \subseteq \cup_{\alpha \in A} U_\alpha \Rightarrow K \subseteq \cup_{i \in J} U_{\alpha_i}\ (I\ fini)$$

Exemple 1.4.4

On a :

1. $\mathbb{R} = \bigcup_n]-n,n[$ est non compact (on peut le rendre compact $\to \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \sqcup \{\infty\}$ avec $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{2i\pi x} \in \Pi = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ compactifié d'Alexandrov ou on peut le compacter avec $\mathbb{R} \sqcup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$, c'est la droite achevé).

2. $[0,1]$ (ou plus généralement $[a,b]$ fermé borné) est compact.
   On a $[0,1] \subseteq \cup_\alpha U_\alpha$ (par $|.|$).
   Soit $\{t \in [0,1]; [0,t] \subseteq \sup_{j \in J} U_{\alpha_j}\}$ (J est fini), est une partie fermée bornée et non vide car $0 \in U_{\alpha_j}$.
   Prenons $\tau = Sup\{t \in [0,1]; [0,t] \subseteq \sup_{j \in J} U_{\alpha_j}\}$ (J fini). On a $\tau \leq 1$ car $\tau \in U_{\alpha_\tau}$ ou τ est la borne supérieure d'où un point t de l'ensemble des $]\tau - \eta_\tau, \tau[$.
   Donc $[0,\tau] \subseteq [0,t] \cup]\tau - \eta, \tau] \subseteq (\cup U_{\alpha_j}) \cup (U_{\alpha_\tau})$ et est un recouvrement de $[0,1]$.

Remarque 1.4.5

Soit $K = \cup_\alpha (U_\alpha \cap K) \subseteq \cup_\alpha U_\alpha$ (un recouvrement), son complémentaire est $\emptyset = \cap_\alpha F_\alpha$ (fermés), alors une intersection finie (au moins) est déjà vide.

Remarque 1.4.6 (Variante)

Si une famille finie de fermés emboîtés est vide, alors au moins un de ses membres est vide.

Remarque 1.4.7 (Contraposée de la variante)

Si $\forall n \ F_n \neq \emptyset$ alors $\cap_n F_n \neq \emptyset$

Propriété 1.4.8

Si K est compact dans (X,d) (E,N) (X,C), alors K est fermée.

Note 1.4.9

Tout point $y \notin K$ peut être séparé de K (c'est à dire qu'il existe deux ouverts disjoints, l'un contenant $\{y\}$ et l'autre contenant K).

Propriété 1.4.10

Si K est compact (X,d) (E,N), alors K est bornée.

Remarque 1.4.11

Dans (X,d) ou (E,N) un ensemble compact est fermé borné.

Démonstration (Propriété 1.4.8)

Soit $k \in K$, et $y \in X \backslash K$.
X est séparé car $B(k, r_k) \cap B(y, \eta_k) = \emptyset$.

$$K \subseteq \cup_k B(k, r_k)$$

$$K \subseteq \cup_{i \in I} B(k_i, r_{k_i}) \quad I \text{ finie}$$

$$\cap_{i \in I} B(y, \eta_i) = B(y, inf(\eta_i) \neq 0)$$

Et $B(y, inf(\eta_i)) \cap (\cap_{i \in I} B(k_i, r_{k_i})) = \emptyset$ sinon $z \in B(k_i, r_{k_i})$ et $z \in B(y, \eta_i)$ $\forall i$, absurde.
On a donc $B(y, inf(\eta_i)) \subseteq X \backslash K$.
La démonstration est faite dans les espaces métriques, mais on a la même démonstration avec des ouverts.

Démonstration (Proposition 1.4.10)

Soit $K \subseteq \cup_{i \in I} B(k_i, r_i)$, $k \in K$, donc :

$$N(k) \leq N(k - k_i) + N(k_i) \leq r_i + N(k_i) \ (pour\ un\ i)$$

$$N(k) \leq Sup N(k_i) + Sup\ r_i = M + R = M'$$

Proposition 1.4.12

Si $F \subseteq K$ est fermée dans K alors F est compact (démonstration en exercice).

Propriété 1.4.13 (Bolzano-Weierstrass)

Si K est compact (dans (X, C)), alors toute partie infinie A de K admet un point d'accumulation.

Corollaire 1.4.14

Si K est compact alors de toute suite de points de K, on peut extraire une suite convergente.

Démonstration (Corollaire 1.4.14)

Si k_i est une suite de points de K. Soit $A = \{k \in K; \exists i\ k = k_i\}$.
Soit A est finie, et une des valeurs est atteinte une infinité de fois, d'où une suite stationnaire.
Soit A est infinie, d'où (d'après le théorème) un point d'accumulation $\xi \in K$ tq $k_{\varphi(n)} \in B(\xi, \frac{1}{n})\backslash\{\xi\}$ et $k_{\varphi(n)} \to \xi$.

Démonstration (Propriété 1.4.13)

Soit $A \subseteq K$, A infinie.
On montre que si A n'a pas de point d'accumulation, alors A est finie.
Si A n'a pas de point d'accumulation :
A est fermée (si $x \notin A$, il y a un voisinage ou une boule qui ne rencontre pas de point de A).
Donc A est compact.

$$A \subseteq \cup B(a, r) \text{ } avec \text{ } B(a, r)\backslash\{0\} \cap A = \emptyset$$

$$A \subseteq \cup_{i \in I} B(a_i, r_i)$$

Donc $A = \cup_{i \in I}\{a_i\}$ est finie.

Propriété 1.4.15

Si K est compact dans (X, d), (E, N) alors K est complet.

Démonstration

Soit (k_n) une suite de Cauchy.
$\exists k \in K$ tq $k_{\varphi(n)} \to k$ (point d'accumulation de l'ensemble des valeurs de la suite).
Alors (exercice) une suite de Cauchy dont une sous-suite est convergente est elle-même convergente.
K étant fermé, $k \in K$.

Théoreme 1.4.16

Toute partie K de (X, d) ou (E, N) est compacte (Borel-Lebesgue) ssi elle vérifie que toute partie infinie admet un point d'accumulation (Bolzano-Weierstrass).

Lemme 1.4.17

Si K admet Bolzano-Weierstrass, alors pour tout recouvrement de K par une famille d'ouverts U_α, il existe $\xi > 0$ tq $k \in U_\alpha \Rightarrow B(k, \xi) \subseteq U_\alpha$.

Remarque 1.4.18

Un tel ξ s'appelle membre de Lebesgue du recouvrement.

Démonstration (Lemme 1.4.17)

Par l'absurde, on suppose que K n'admet pas Bolzano-Weierstrass.
Pour $\xi = \frac{1}{2^n}$ $\exists k_n$ tq $\exists \alpha$ $k_n \in U_\alpha$ $B(k_n, \frac{1}{2^n}) \nsubseteq U_\alpha$.

$\{k_n\}$ est dans K par hypothèse.
$\{k_{\varphi(n)}\}$ converge vers $k \in K$
$k \in K$ donc $k \in U_{\alpha_k}$, $B(k, \eta) \subseteq U_{\alpha_k}$
Donc $n \geq n_0$, $k_{\varphi(n)} \in B(k, \eta)$ voire $B(k, \frac{1}{2^{n+1}})$ $(\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n} < \xi)$
Alors $k \in B(k_{\varphi(n+1)}, \frac{1}{2^{\varphi(n+1)}})$. Soit x dans cette boule :

$$d(x, k) \leq d(x, k_{\varphi(n+1)}) + d(k_{\varphi(n+1)}, k) \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

Donc x est dans $B(k, \frac{1}{2^n})$, donc il existe un point d'accumulation, on a enfin une contradiction.

Démonstration (Théorème 1.4.16)

Montrons que si on a BW, alors on a BL, c'est à dire K vérifiant BW, alors $K \subseteq \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$.
Par l'absurde, on suppose $K \nsubseteq \cup_{i \in I} U_{\alpha_i}$ pour toute partie finie I de A.
Soit $\epsilon > 0$, un nombre de Lebesgue associé à (U_α).
On a $k_1 \in K$ $B(k_1, \epsilon) \subseteq U_{\alpha_1}$, et $K \nsubseteq U_{\alpha_1}$.
De plus, $k_2 \in K$ et $k_2 \notin U_{\alpha_1}$ $B(k_2, \epsilon) \subseteq U_{\alpha_2}$, ce qui implique $d(k_1, k_2) \geq \epsilon$.
Par récurrence, on a $k_i \in B(k_i, \epsilon) \subseteq U_{\alpha_i}$ et $k_i \notin \bigcup_{j<i} U_{\alpha_j}$.
D'où, $k_{n+1} \in K$ mais $k_{n+1} \notin \cup_{i \leq n} U_{\alpha_i}$ et $d(k_{n+1}, k_i) \geq \epsilon$, $i \leq n$.
D'où $A = \cup\{k_n\}$ partie infinie sans point d'accumulation (tous ses points sont deux à deux à distance $\geq \epsilon$).

Propriété 1.4.19

Tout fermé borné dans $\mathbb{R}$ (selon une topologie usuelle) ou $\mathbb{R}^n$ (idem) est compact.

Démonstration

Pour $n = 1$ (on le montre dans $\mathbb{R}$). Par BW, on a A infinie $\subseteq F$ (fermé borné dans $\mathbb{R}$), $A \in [n, M]$.
On a $A_i \subseteq A_{i-1} \cdots \subseteq A$, et $A_n \subseteq$intervalle de Lebesgue $\frac{M-n}{2^n}$.
D'où une suite de points de $\mathbb{R}$ qui est de Cauchy.
Soit $a_n \in A_n \subseteq A \subseteq F$ tend vers $\alpha \in \mathbb{R}$. Mais F est fermé d'où $\alpha \in F$, donc A admet α comme point d'accumulation.

Pour $n \geq 2$. Soit $x_m = (x_1^m, ..., x_n^m)$ $m \in \mathbb{N}$, une suite de points de F fermé borné dans $\mathbb{R}^n$, d'où les x_i^m sont dans un intervalle borné de $\mathbb{R}$.
On peut extraire des suites convergentes d'où : ϵ_i tq $x_i^{\varphi(m)} \underset{m \to +\infty}{\rightarrow} \epsilon_i$.
D'où une suite extraite $x^{\varphi(m)} \rightarrow \epsilon \in \mathbb{R}^n$ mais F est fermée, donc $\epsilon \in F$.

Corollaire 1.4.20

$\bar{B}(x, r)$ est un compact dans $\mathbb{R}^n$

Définition 1.4.21

(X, C) séparé est dit localement compact ssi tout point $x \in X$ a un voisinage compact.
Ici $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ sont des espaces topologiques localement compacts.

1.5 Applications continues

1.5.1 Propriétés locales

Définition 1.5.1

$f : (E, N_E) \to (F, N_F)$ est continue en x_0 ssi :

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n > 0 \; N_E(x - x_0) < n \Rightarrow N_F(f(x) - f(x_0)) < \epsilon$$

ou ssi pour toute suite $x_n \to x_0$ $f(x_n) \to f(x_0) = y_0$

Propriété 1.5.2

Si f et g sont continue en x_0, alors λf et $f + g$ sont continue en x_0 (f, g de (X, C) dans (E, N)).

Propriété 1.5.3

f de (E, N_E) dans (F, N_F) continue en x_0, et g de (F, N_F) dans (G, N_G) continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

1.5.2 Propriétés globales

Définition 1.5.4

$f : (E, N_E) \to (F, N_F)$ est continue ssi f est continue en tout point de E.

Proposition 1.5.5

f est continue de (E, N_E) dans (F, N_F) ssi $\forall V$ ouvert dans F $f^{-1}(V) = U$ est un ouvert de E. Ici, f^{-1} est l'image réciproque de f.

Démonstration

On a $f^{-1}(V) = \{x \in E; f(x) \in V\}$.

Si f est continue en tout point x_0 de E. Soit V un ouvert de F. Si $y_0 \in V$, alors $\exists \epsilon > 0$ $B(y_0, \epsilon) \subseteq V$.
Si $y_0 \notin f(E)$, il n'y a rien à démontrer.
Si $y_0 \in f(E)$:
Soit x_0 tq $f(x_0) = y_0$, alors $x_0 \in f^{-1}(V)$ et f continue en x_0 d'où $B(x_0, \eta) \subseteq f^{-1}(V)$ car $f(B(x_0, \eta)) \subseteq B(y_0, \epsilon)$. Donc $f^{-1}(V) = U$ est un ouvert (voisinage de tous les points).

Soit $x_0 \in E$, $y_0 = f(x_0)$ $\forall \epsilon > 0$ $B(y_0, \epsilon)$ ouvert de F donc $f^{-1}(B(y_0, \epsilon))$ est un ouvert de E centré en x_0.
D'où $B(x_0, \eta)$ tq $x_0 \in B(x_0, \eta) \subseteq f^{-1}(B(y_0, \epsilon))$

Exemple 1.5.6

Par contre en général, l'image d'un ouvert n'est pas nécessairement un ouvert : $x \mapsto x^2$ envoie $]-1, 1[\subseteq \mathbb{R}$ sur $[0, 1[\subseteq \mathbb{R}$

Remarque 1.5.7

f continue de E dans F ssi pour tout fermé A de F $f^{-1}(A)$ est fermé dans E.

Exemple 1.5.8

Par contre l'image d'un fermé n'est pas nécessairement un fermé : $x \mapsto e^x$ envoie $]-\infty, 0]$ (fermé de $\mathbb{R}$) sur $]0, 1]$.

Propriété 1.5.9

Si f est continue de (E, N_E) dans (F, N_F) et si K compact dans E alors $f(K)$ est une partie compacte de F.

Démonstration

On a $f(K) \subseteq \cup_\alpha V_\alpha$.

$$K \subseteq f^{-1}(f(K)) \subseteq f^{-1}(\bigcup_\alpha V_\alpha) \subseteq \bigcup_\alpha f^{-1}(V_\alpha)$$

d'où $K \subseteq \cup_{i\in I} f^{-1}(V_{\alpha_i})$
d'où $f(K) \subseteq \cup_{i\in I} V_{\alpha_i}$

Exemple 1.5.10

Par contre, f^{-1} d'un compact n'est pas en général compact : $x \mapsto sin(x)$ $sin^{-1}([-1, 1]) = \mathbb{R}$

Propriété 1.5.11

Tout fermé borné dans un espace de dimension finie (normé) est compact.

Démonstration

(pour $\mathbb{R}^n$ et $||.||_\infty$ on sait)
Soient $E =< e1, ..., e_n >= \mathbb{R}e_i \oplus ... \oplus \mathbb{R}e_n$, et $u \in E$.
$u = \sum_{i=1}^n x_i e_i \overset{b}{\leftarrow} x = (x_1, ..., x_n)$ (b une fonction bijective). On a :

$$\begin{array}{rcl} N_E(b(x)) & = & N_E(\sum_{i=1}^n x_i e_i) \\ & \leq & \sum_{i=1}^n |x_i| N_E(e_i) \\ & \leq & n||x||_\infty \times Sup\ N_E(e_i) \\ & \leq & M||x||_\infty \end{array}$$

Bref, si $||x||_\infty$ est petit alors, $N_E(b(x))$ l'est aussi et si $||x-x_0||_\infty$ est petit alors, $N_E(b(x)-b(x_0)) = N_E(b(x-x_0))$
Donc b est continue de $(\mathbb{R}^n, ||.||_\infty)$ dans (E, N_E).
Soit $r > 0$, donc $b(\bar{B}(0, r))$ est compact dans E.
Donc $b(S(0, r))$ est compact dans E ($S(0, r) = \bar{B}(0, r) \backslash B(0, r)$).
$N_E(b(S(0, r)))$ compact de $\mathbb{R}^+$ et $0 \notin N_E(b(S(0, r)))$.
Donc 0 séparé de $N_E(b(S(0, r)))$ donc $N_E(b(S(0, r))) \geq m > 0$
Donc si $0 \neq u \in E$ $u = N_E(u) \times \frac{u}{N_E(u)}$ On a :

$$\begin{array}{rcl} N_E(b(x)) & = & N_E(||x||_\infty \times b(\frac{x}{||x||_\infty})) \\ & = & ||x||_\infty \times N_E(b(\frac{x}{||x||_\infty})) \\ & \geq & ||x||_\infty m \qquad\qquad ||x||_\infty = \frac{1}{m} N_E(b(x)) \end{array}$$

On a montré : $||x||_\infty m \leq N_E(u) \leq M||x||_\infty$ pour $||x||_\infty = \frac{1}{m} N_E(b(x))$.
Donc $x \overset{b}{\rightarrow} u = \sum x_i e_i$ et $x = b^{-1}(u)$ sont toutes deux continues.
Donc aussi "(E, N_E)" et "$(\mathbb{R}^n, ||.||_\infty)$" sont équivalentes.

Conséquence de ce lemme

1. Sur E de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes :

$$(E, N_1) \leftarrow (\mathbb{R}^n, ||.||_\infty) \rightarrow (E, N_2)$$

(en particulier sur $\mathbb{R}^n$, toute norme est équivalente à $||.||_\infty$)

2. Soit A un fermé borné dans (E, N_E), alors $b^{-1}(A)$ (image réciproque) est fermé dans $\mathbb{R}^n$.
Mais (d'après le lemme), $N_E(A)$ bornée $\Rightarrow ||x||_\infty$ est bornée sur $b^{-1}(A)$.
Donc $b^{-1}(A)$ est compact dans $\mathbb{R}^n$, donc $b(b^{-1}(A)) = A$ est compact (b bijective).

Corollaire 1.5.12

Tout espace vectoriel normé de dimension finie est donc localement compact : $\bar{B}(u_0, r) = \{u \in E, N_E(u - u_0) \leq r\}$ *(ou* $\bar{B}(0, r) = \{u \in E, N_E(u) \leq r\}$ *) sont fermées bornées donc compacts.*

Définition 1.5.13

On dit que f bijective de (E, N_E) dans (F, N_F) est bi-continue (ou un homéomorphisme) ssi f et f^{-1} (application réciproque de f) sont continues.

Théoreme 1.5.14 (Riesz)

Un espace vectoriel normé (E, N_E) est localement compact ssi E est de dimension finie.

Démonstration

On a déjà démontré que la dimension finie implique localement compact.
Montrons l'implication inverse :
Soit (E, N_E) est localement compact.
Donc 0 a un voisinage compact dans E, $0 \in V$ compact.
D'où $0 \in B(0, r) \subseteq \overline{B(0, r)} = \bar{B}(0, r) \subseteq V$ (V fermé).
$\bar{B}(0, 1)$ est compact (par homothétie),

$$\begin{aligned} \overline{B(0,1)} &\subseteq \cup_{x \in \overline{B(0,1)}} B(x, \tfrac{1}{2}) \\ &\subseteq \cup_{i \in I} B(x_i, \tfrac{1}{2}) \end{aligned}$$

Soit $F =< \{x_i\}_i >\subseteq E$ (dimension finie car engendré par un nombre fini de vecteur).
Tout point $x \in E$ est adhérant à F.
$\frac{x}{N_E(x)} \in \bar{B}(0, 1)$ d'où $\exists i$ $\frac{x}{N_E(x)} \in B(x_i, \frac{1}{2})$ d'où $N_E(x - N_E(x)x_i) \leq \frac{1}{2} N_E(x)$ Donc $f_i = N_E(x)x_i \in F$.
Par récurrence, on montre que $N_E(x - f_n) < \frac{N_E(x)}{2^n}$. On a $\frac{x - f_n}{N_E(x - f_n)} \in \bar{B}(0, 1)$ et :

$$N_E(\frac{x - f_n}{N_E(x - f_n)} - x_n) < \frac{1}{2}$$

et ensuite :

$$N_E(x - f_n - N_E(x - f_n)x_n) < \frac{N_E(x - f_n)}{2} < \frac{N_E(x)}{2^n}$$

D'où $f_n \in F$ et $f_n \to x$, d'où $x \in \bar{F}$.
Mais F est de dimension finie, donc complet $((F, N_{E|F}) \sim (\mathbb{R}^n, ||.||_\infty))$.
Donc $E = \bar{F} = F$.

1.5.3 Continuité uniforme

Définition 1.5.15

f est uniformément continue de E dans F :

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \forall u, u' \in E \; tq \; N_E(u' - u) < \eta \Rightarrow N_F(f(u') - f(u)) < \epsilon$$

Exemple 1.5.16

1. Si f est k-contractante de E dans E, alors $N_E(f(v) - f(u)) \leq kN_E(v - u)$.
   f est évidemment uniforme (cas des fonctions dérivables à dérivée bornée par le théorème de accroissements finis).
2. $x \mapsto x^2$ est uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$ (exercice) mais n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
   Soit $\epsilon = 1$, $\forall \eta > 0$ x', x avec $|x' - x| < \eta$ et $x'^2 - x^2 > 1$, on prend $x' = x + \eta$. On a :
   $$x'^2 - x^2 = (x' - x)(x' + x) = \eta(2x + \eta)$$
   Il suffit de prendre x tq $2x\eta > 1$ donc $x > \frac{1}{2\eta}$

Proposition 1.5.17

Si f est uniformément continue, elle est continue !

Proposition 1.5.18

Si f est uniformément continue et si u_n est de Cauchy, alors $f(u_n)$ est de Cauchy.

En effet, on a $N_F(f(u_{n+p}) - f(u_n)) < \epsilon$ si $N_E(u_{n+p} - u_n) < \eta(\epsilon)$ ($\eta(\epsilon)$ vient de l'uniforme continuité).

Propriété 1.5.19

Si f est continue de (E, N_E) dans (F, N_F), alors f est uniformément continue sur toute partie compacte de K de E.

Démonstration (Idée)

$K \subseteq \bigcup_{k \in K} B(k, \eta(k))$ donc :

$$N(u - k) < \eta(k) \Rightarrow N_F(f(u) - f(k)) < \epsilon$$

Puis on joue un peu...

Propriété 1.5.20

Si f est uniformément continue de X dans (F, N) où X est dense dans (E, N) ($\bar{X} = E$) et F est de Banach, alors il existe un unique prolongement de f à E.

Démonstration (Esquisse de Hint)

On pose $\bar{X} = E$, d'où $u \in E$ $u = \lim x_n$. On a donc $\{x_n\}$ de Cauchy, donc $\{f(x_n)\}$ de Cauchy.
Donc $\exists \xi_n = \bar{f}(u) = \lim f(x_n)$

1.6 Applications linéaires continues

Théoreme 1.6.1

Soit l une application linéaire de (E, N_E) dans (F, N_F). On dit que f est continue ssi elle vérifie l'une des 4 propriétés équivalentes suivantes :

1. *l est uniformément continue de E dans F*
2. *l continue de E dans F*
3. *l continue en* 0

4. $\exists M > 0$ *tq* $N_F(l(x)) \leq M N_E(x)$

Démonstration

— 1) $\Rightarrow$ 2) c'est évident.
— 2) $\Rightarrow$ 3) c'est évident.
— 2) $\Rightarrow$ 4) c'est évident.
— 4) $\Rightarrow$ 1) c'est évident car f est M-contractante.
— 3) $\Rightarrow$ 4).
Soit f linéaire continue en 0. Donc $\exists \rho > 0$ tq $u \in B_E(0, \rho) \Rightarrow f(u) \in B_F(0, 1)$.
On peut prendre ρ tq $N_E(u) \leq \rho \Rightarrow N_F(f(u)) < 1$.
Soit $v \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $N_E(\lambda v) = \lambda N_E(v)$ et on remarque :
$N_E(\lambda v) < \rho$ ($\lambda v \in B_E(0, \rho)$), et cela équivaut à $\lambda < \frac{\rho}{N_E(v)} \Leftrightarrow \frac{N_E(v)}{\rho} < \frac{1}{\lambda}$.
Si λ vérifie $\frac{N_E(v)}{\rho} < \frac{1}{\lambda}$, alors $\lambda v \in B_E(0, \rho)$ d'où $f(\lambda v) \in B_F(0, 1)$, on a donc :

$$\begin{array}{lcl} N_F(l(\lambda v)) & < & 1 \\ N_F(l(v)) & < & \frac{1}{\lambda} \Rightarrow N_F(l(v)) \leq \frac{N_E(v)}{\rho} \\ N_F(l(v)) & \leq & Inf\{\frac{1}{\lambda}, \text{ avec } \lambda \text{ vérifiant } \frac{1}{\lambda} > \frac{N_E(v)}{\rho}\} \end{array}$$

Exemple 1.6.2

1. Si $l \in \mathcal{L}(E, F)$, E, F normés et E de dimension finie, alors l est continue.
Soit $u \in E \mapsto u = \sum_{i=1}^{n=dim(E)} x_i e_i$ où $\{e_i\}_1^n$ base de E. On a :

$$\begin{array}{lcl} N_F(l(u)) & = & N_F(\sum_{i=1}^n x_i l(e_i)) \\ & \leq & \sum_{i=1}^n |x_i| N_F(l(e_i)) \\ & \leq & ||x||_\infty Sup_{i=1}^n N_F(l(e_i)) \\ & \leq & M N_E(u) \end{array}$$

2. Soit $\mathbb{R}[X] = \cup_{n \geq 0} \mathbb{R}_n[X]$, on pose $||P||_\infty = Sup_0^{deg\ P} |a_i|$, et $P \mapsto \sum_{i=1}^{deg\ P} a_i$ une forme linéaire.
On a $||P_0|| = 1$ et par récurrence $||P_n|| = n+1$, on revient à chercher un M tq $\forall n\ n+1 \leq M.1$, et c'est impossible.

Proposition 1.6.3

On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E (normé) dans F (normé). C'est un espace vectoriel normé avec :

$$\begin{array}{lcl} ||l|| & = & Inf\{M, \forall u \in E, N_F(l(u)) \leq M N_E(u)\} \\ & = & Sup\{\frac{N_F(l(u))}{N_E(u)}, u \neq 0\} \\ & = & Sup\{N_F(l(u)), u \in S_E(0, 1)\} \end{array}$$

Pourquoi les 3 définitions sont identiques ?
On sait que $\{M, u \in E, N_F(l(u)) \leq M N_E(u)\}$ est non vide (l est continue), alors :

$$\forall u \neq 0, \quad \frac{N_F(l(u))}{N_E(u)} \leq M$$

donc

$$Sup\ \frac{N_F(l(u))}{N_E(u)} \leq M$$

Donc

$$Sup\ \frac{N_F(l(u))}{N_E(u)} \leq Inf(\{M\})$$

et $M-\epsilon$ ne vérifie pas $\forall u \in E,\ N_F(l(u)) \leq (M-\epsilon)N_E(u)$, donc on a l'égalité.

Démonstration

1. Il est claire que $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$
2. Il reste à montrer que $l \mapsto ||l||$ est une norme :
   —
$$\begin{aligned} ||l|| = 0 &\Leftrightarrow \forall u \in E\ N_F(l(u)) \leq 0N_E(u) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall u \in F\ l(u) = 0\ (N_F\ est\ une\ norme) \\ &\Leftrightarrow l = 0 \end{aligned}$$
   — $||\lambda l|| = |\lambda|\ ||l||(vident)$
   — $||l+l'|| = Sup\frac{N_F((l+l')(u))}{N_E(u)} \leq \frac{N_F(l(u))}{N_E(u)} + \frac{N_F(l'(u))}{N_E(u)} \leq ||l|| + ||l'||$

Théoreme 1.6.4

Si F est de Banach, alors $\mathcal{L}_c(E,F)$ est de Banach.

Démonstration

Soit l_n est suite de Cauchy d'applications linéaires continues et soit $u \in E$.

$$N_F(l_n(u) - l_m(u)) = N_F((l_n - l_m)(u)) \leq ||l_n - l_m||N_E(u)$$

Donc $l_n(u)$ tend vers un vecteur de F (noté λ_u) car $||l_n - l_m||$ tend vers 0 pour n, m suffisamment grands.
λ_u dépend linéairement de u, d'où $\lambda_u \in \mathcal{L}(E,F)$.
λ_u est continue :

$$||\lambda_u|| \leq N_F(\lambda_u - l_n(u)) + N_F(l_n(u)) \leq ||l_n||\ ||u|| \qquad \text{pour un } n \text{ suffisamment grand}$$

On a que λ_u est continue en 0.
De plus, on a $||\lambda_u - l_n|| \to 0$: Soit $u \in S(0,1)$, $N_E(u) = 1$, on a :

$$N_F((\lambda_u - l_n)(u)) \leq N_F((\lambda_u - l_m)(u)) + N_F((l_m - l_n)(u))$$

Or $N_F((l_m - l_n)(u)) \leq ||l_m - l_n|| \leq 1$, donc :

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0,\ n, m \geq n_0 \Rightarrow ||l_n - l_m|| < \frac{\epsilon}{2}$$

et pour un n et m bien choisis, on a $N_F((\lambda_u - l_m)(u)) \to 0$ pour $m \to +\infty$

Corollaire 1.6.5

(E,N) normé, alors $\mathcal{L}_c(E,\mathbb{R})(= E'$, le dual de $E)$ est de Banach.

Soit $u \in E$, $l \in E' \mapsto l(u) =< u, l >$ (forme bilinéaire de dualité) et $| < u, l > | \leq ||l||N_E(u)$, donc E s'injecte dans E'' (le bidual).
E'' est de Banach et $\bar{E} \subseteq E''$, et $\bar{E}$ est fermé, complet, et contient E.

Propriété 1.6.6

Soit $f \in \mathcal{L}_c(E,F), g \in \mathcal{L}_c(F,G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E,G)$ et :

$$||g \circ f|| \leq ||g||\ ||f||$$

(car on a :

$$N_G(g \circ f(u)) = N_G(g(f(u))) \leq ||g||N_F(f(u)) \leq ||g||\ ||f||N_E(u)$$

) En particulier, $\mathcal{L}_c(E) = End_c(E)$ est :

— *muni de l'algèbre* $(+, \cdot, \circ)$ *à gauche (non commutative et* $\dim E \geq 2$*)*
— *normée si* E *est normée*
— $||l^n|| \leq ||l||^n$

Propriété 1.6.7

Si E *est de Banach, on peut définir :*
— $\forall l \in End_c(E)$, $exp(l)$
— $\forall l \in End_c(E)$ *et* $l \in B(0,1)$ $(Id_E - l)^{-1}$

Démonstration

$$exp(l) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{l^i}{i!}$$

En effet, $||\frac{l^i}{i!}|| \leq \frac{||l||^i}{i!}$, et c'est une série convergente (convergent vers $exp(||l||)$). D'où une série normalement convergente :

$$||exp(l)|| \leq exp(||l||)$$

De plus, on a :

$$(Id_E - l)(1 + l + \cdots + l^n) = Id_E - l^n$$

Si $||l|| < 1$, alors :

1. $||l^{n+1}|| \leq ||l||^{n+1} \to 0$
2. $(1 + l + \cdots + l^n)$ est une série normalement convergente (série des normes majorées par une série géométrique de rapport < 1)

$$(Id_E - l)(\sum_{i=0}^{+\infty} l^i) = Id_E$$

$\forall y \in B_{\mathcal{L}_c(E)}(Id_E, 1)$, alors y a un inverse.
Donc Id_E appartient à l'intérieur de $GL_c(E)$

Remarque 1.6.8

Si l_0 est inversible, alors

$$l_0 - h = l_0(Id_E - l_0^{-1}h)$$

Si l_0^{-1} est continue, alors si $||h|| < \frac{1}{||l_0^{-1}||}$, $Id_E - l_0^{-1}h$ est inversible.

Propriété 1.6.9 (Prolongement)

Si $f \in \mathcal{L}_c(X, F)$ *où* X *est un sous-espace vectoriel de* E *et* X *dense dans* E *(*$\bar{X} = E$*),* F *de Banach, alors :*

$$\exists! \bar{f} \in \mathcal{L}_c(E, F) \ tq \ \bar{f}_{|X} = f \quad et \quad ||\bar{f}|| = ||f||$$

Démonstration

f est linéaire donc uniformément continue donc elle est prolongeable par $\bar{f}$.
f est linéaire donc $\bar{f}$ est linéaire.
De plus $||\bar{f}|| \geq ||f||$ (car $||\bar{f}||$ est un sup des $||f||$).

$$\forall n, \exists u_n \in E, ||\bar{f}|| - \frac{1}{n} < \frac{N(\bar{f}(u_n))}{N(u_n)} < ||\bar{f}$$

Mais X est dense dans E d'où x_n est voisin de u_n est suffisamment proche pour que :

$$||\bar{f}|| - \frac{1}{n} \leq \frac{N(\bar{f}(x_n))}{N(x_n)} \leq ||f||$$

et on a $\bar{f}|| \leq ||f|| + \frac{1}{n}$ pour tout n.
D'où $||\bar{f}|| \leq ||f||$.

Fin officielle du chapitre, vous entrez maintenant dans une zone hors programme

Propriété 1.6.10

Soit l une forme linéaire sur E normée. Alors l est continue ssi l_0^{-1} est fermé dans E.

Note 1.6.11

Si H est un hyperplan de E alors il est noyau d'une forme linéaire sur E ($codim_E(H) = 1$, c'est à dire $a \in E, \mathbb{R}a + H = E$).
On a :

- soit $H = \bar{H} \subseteq E$
- Soit $H \subsetneq \bar{H} \subseteq E$, alors $\exists a \in \bar{H} \notin H$, $l(a) \neq 0$. Et donc $\bar{H} = H \oplus \mathbb{R}a = E$.

Démonstration (Propriété 1.6.10)

- $\Rightarrow$, l est continue implique $H = l^{-1}(\{0\})$ est fermé car $\{0\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$.
- $\Leftarrow$, H est fermé, est ce que l est continue en 0 ?
  Si $xl = 0$, c'est trivial.
  Sinon, $\exists a'$ $l(a) \neq 0$, prenons $a = \frac{a'}{l(a')}$ et $l(a) = 1$.
  On prend $H_a = a + H$ avec la bijection $h \in (a + H) \mapsto a + h, h \in H_a$, H_a est aussi fermé.
  $\{0\} \in E \backslash H_a$ (ouvert).
  D'où $B(0, r) \subseteq E \backslash H_a$, alors montrons que $x \in B(0, r) \Rightarrow |l(x)| < 1$.
  Et c'est absurde car si $x \in B(0, r)$ et $|l(x)| < 1$, alors $\frac{x}{l(x)} \in H_a$ et $l(\frac{x}{l(x)}) = 1 = l(a)$, d'où $\frac{x}{l(x)} - a \in H$. On a $\frac{x}{l(x)} \in H_a$, cad $\frac{x}{l(x)} = a + h$, $h \in H$:

  $$N(\frac{x}{l(x)}) = \frac{1}{|l(x)|} \times N(x) \leq N(x) \leq r$$

  D'où $\frac{x}{l(x)} \in H_a \cap B(0, r)$, ce qui est absurde.
  Donc l est continue en 0.

Chapitre 2

Calcul différentiel

Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en $u \in I$ ssi :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l = f'(a)$$

Cherchons ce que veut dire différentielle pour f d'un espace normé dans un autre.

2.1 Une différentielle

Propriété 2.1.1

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - l = \epsilon(x) \underset{x \to a}{\to} 0$$

On a donc :

$$f(x) - f(a) = l(x - a) + (x - a)\epsilon(x)$$

L'accroissement de f est proportionnel à l'accroissement de x à une fonction négligeable devant $|x - a|$ près.

Définition 2.1.2

f de $\mathcal{U} \subseteq (E, N)$ (pareil si $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$) dans $\mathbb{R}$ est différentiable en $a \in \mathcal{U}$ ssi il existe une forme linéaire $df_a \in \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$ telle que :

$$f(x) - f(a) - df_a(x - a) = N(x - a)\epsilon(x)$$

où $\epsilon(x) \to 0$ si $x \to a$ (dans E).

Propriété 2.1.3

Si df_a (sa différentielle) existe elle est unique.

Démonstration

— Unicité :
Soit $f(x) - f(a) = l_1(x - a) + ||x - a||_\infty \epsilon(x) = l_2(x - a) + ||x - a||_\infty \eta(x)$.
On a :

$$(l_2 - l_1)(x - a) = ||x - a||_\infty(\epsilon(x) - \eta(x))$$

On pose $x = a + \rho u_a$ avec $u_a = \frac{x-a}{||x-a||_\infty}$ et $\rho = ||x - a||_\infty$.
$\epsilon(x)$ et $\eta(x)$ dépendent donc de ρ (ils tendent vers 0 si x tend vers a).

$$(l_2 - l_1)(\rho u_a) = \rho(\epsilon(\rho) - \eta(\rho))$$

$$(l_2 - l_1)(u_a) = (\epsilon(\rho) - \eta(\rho))$$

Si $\rho \to 0$ $(l_2 - l_1)(u_a) = 0$ d'où $l_2 - l_1$ (restreint à la sphère unité) $= 0$, donc $l_2 - l_1 = 0$

Propriété 2.1.4

Si f est différentiable en a, alors elle est continue en a.

Propriété 2.1.5

- *$f + g$ sont différentiables en a si f et g le sont.*
- *λf est différentiable en a si f l'est ($\lambda \in \mathbb{R}$)*
- *fg sont différentiable en a si f et g le sont.*

Propriété 2.1.6

Si $E = E_1 \times E_2$ (muni de la norme N issue des normes N_1 et N_2 respectivement de E_1 et E_2), on a des applications partielles :
Soit $a \in E$, $a = (a_1, ..., a_n)$, on a :

$$x_i \mapsto f(a_1, ...a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n)$$

Définition 2.1.7

Si f est différentiable en a (selon la propriété juste avant), alors les applications partielles sont différentiables et

$$df_a = \partial_1 f_a + \partial_2 f_a$$

avec d_1 la différentielle selon E_1 et d_2 la différentielle selon E_2.
Dans $\mathbb{R}^n$, on a :

$$df_a \Leftrightarrow (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$$

ou

$$df_a(h_1, ..., h_n) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

Remarque 2.1.8

Attention : Le contraire est faux en général.

Remarque 2.1.9

Si f possède des dérivées partielles en chaque élément de x, on n'a pas forcément que f est différentiable en x.

Propriété 2.1.10

f est différentiable au voisinage de a et sa différentielle est continue en $a \in \mathcal{U}(\subseteq (E, N))$ ssi f admet des différentielles partielles sur E_1 et sur E_2 ($E = E_1 \times E_2$) définies sur un voisinage de a et continues en a.

Définition 2.1.11

$f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ ssi f est différentiable en tout point de $\mathcal{U}$ et $a \mapsto df_a$ est continue sur $\mathcal{U}$.

Corollaire 2.1.12

$f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}(\subseteq E = E_1 \times E_2), \mathbb{R})$ ssi $a \mapsto \partial_1 f$ et $a \mapsto \partial_2 f$ existent sur $\mathcal{U}$ et sont continues.

2.1.1 Cas général

Définition 2.1.13

$f : \mathcal{U} \subseteq (E, N_E) \to (F, N_F)$ ($a \in \mathcal{U} \subseteq (E, N_E) \to df_a \in \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$) est différentiable en a ssi $\exists df_a \in \mathcal{L}_c(E, F)$ tq :

$$f(u) + f(a) = df_a(u - a) + N_E(u - a)\epsilon(u)$$

ϵ est une fonction de E dans F qui tend vers 0 si u tend vers a ($N_F(\epsilon(u)) \to 0$ si $N_E(u - a) \to 0$)

Propriété 2.1.14

Si df_a existe elle est unique. Prenons $u = a + \rho u_0$ où $u_0 \in S(0, 1)$ ($N_E(u_0) = 1$) et $\rho > 0$.
Alors

$$\begin{aligned} f(a + \rho u_0) - f(a) &= l_1(\rho u_0) + N_E(\rho u_0)\epsilon_1() \\ &= l_2(\rho u_0) + N_E(\rho u_0)\epsilon_2() \end{aligned}$$

On a donc $(l_2 - l_1)(u_0) = (\epsilon_1(\rho) - \epsilon_2(\rho))$ d'où $l2 - l1_{|S(0,1)} = 0$

Propriété 2.1.15

Si f est différentiable en a alors f est continue en a.

Propriété 2.1.16

$$\partial(\lambda f)_a = \lambda \partial f_a$$
$$\partial(f + g)_a = \partial f_a + \partial g_a$$

Propriété 2.1.17

Soit B est f bilinéaire continue sur F, on a :

$$|B(v, w)| \leq \|B\| N_F(v) \times N_F(w)$$

et B est bilinéaire (c'est à dire linéaire selon chacune des variables).
Alors

$$\partial(B(f, g))_a = B(f(a), \partial g_a) + B(\partial f_a, g(a))$$

Théoreme 2.1.18 (Différentiation des composées (Chain Rule))

Soient $f : \mathcal{U} \subseteq E \to F$ différentiable en $a \in \mathcal{U}$ et $g : \mathcal{V} \subseteq F \to G$ différentiable en $b = f(a) \in \mathcal{V}$.
Alors $g \circ f$ est différentiable en a de différentielle

$$\partial(g \circ f)_a = \partial g_{f(a)} \circ \partial f_a$$

Remarque 2.1.19 (Cas particulier)

Soit $f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ avec $f(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_p(x_1, \ldots, x_n))$.
f est continue / différentiable en a ssi tous les f_i sony continues / différentiables en a.

$$\|f(u) - f(a)\| = \sup_i |f_i(u) - f_i(a)|$$

$\partial f_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et :

$$\partial f_a(h_1, \ldots, h_n) = (\partial f_1(a)(h_1, \ldots, h_n), \ldots, \partial f_p(a)(h_1, \ldots, h_n)) \quad = (h_1 \frac{\partial f_1}{x_1}(a) + \ldots + h_n \frac{\partial f_1}{x_n}(a), \ldots)$$

On peut y associer une matrice, la matrice Jacobienne (J_{f_a}) avec $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ avec i la ligne et j la colonne.
$d(g \circ f)_a$ a pour matrice $J_g(f(a)) \times J_f(a)$.

2.2 Théorème des accroissements finis

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

Théoreme 2.2.1 (Énoncé 1 : TAF)

f continue sur $I = [a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, alors :

$$\exists c \in]a, b[\text{ tq } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Théoreme 2.2.2 (Énoncé 2)

f continue sur $I = [a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, avec $|f'(x)| \leq M$, alors :

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$$

Souvent appliqué avec f' continue sur $[a, b]$, i.e $f \in C^1([a, b])$.

Théoreme 2.2.3 (Énoncé 3 : Formule de Taylor avec reste intégrale)

Soit $f \in C^1([a, b])$, on a :

$$f(b) - f(a) = (b - a) \int_0^1 f'(a + s(b - a))ds$$

Soit $f : \mathcal{U} \subseteq E \to \mathbb{R}$.
Si $a, b \in \mathcal{U}$ et que $[a, b] \subseteq \mathcal{U}$
Posons $\phi(t) = f(a + t(b - a))$, $t \in [0, 1]$.

Proposition 2.2.4

Si f (numérique) $\mathcal{U} \subseteq E \to \mathbb{R}$ et continue sur $[a, b] \subseteq \mathcal{U}$ et différentiable sur $[a, b]$, alors :

$$\exists c \in [a, b] \text{ tq } f(b) - f(a) = \partial f_c(b - a)$$

Remarque 2.2.5

Pour cette proposition, c'est en général faux dès que $f : E \to F$ avec $\dim F \geq 2$.
Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ avec $f(t) = (cos(t), sin(t))$ (le cercle est une courbe paramétrée).
On a $df_t = (-sin(t), cos(t))$ et $0 = f(2\pi) - f(0) = df_c \times 2\pi$.
On aurait $\exists z \in \mathbb{R}$ $df_t(z) = 0$, ce qui est impossible.

Théoreme 2.2.6

Si f est définie, continue et différentiable sur $[a, b] \subseteq \mathcal{U} \subseteq E$ à valeur dans F (E, F normés), et que $\|df_c\| \leq M$ pour $c \in [a, b]$. Alors :

$$N_F(f(b) - f(a)) \leq MN_E(b - a)$$

Remarque 2.2.7

1. Si f est de différentielle nulle sur $\mathcal{U}$, alors f est une constante sur $\mathcal{U}$.
2. Si f est C^1 (*i.e* f est continue, différentiable en tout point de $\mathcal{U}$ et que sa différentielle est continue sur $\mathcal{U}$) alors $\sup_{c \in [a,b]} \|df_c\| \leq M$, pour $M > 0$.

Théoreme 2.2.8 (Théorème de Taylor avec reste intégral)

Si $f : \mathcal{U} \subseteq E \to F$, F *est de Banach, on a :*

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df_{a+s(b-a)}(b-a)ds$$

2.3 Différentielle d'ordre supérieur

Définition 2.3.1

Soit $f : \mathcal{U} \subseteq E \to F$ $(E, Fnorms)$ *différentiable sur* $\mathcal{U}$.
Si

$$u \in \mathcal{U} \mapsto df_u \in \mathcal{L}_c(E, F)$$

est une application différentiable en a alors on dira que f *est différentiable à l'ordre* 2.
Si df *est différentiable à l'ordre* n, *alors* f *est différentiable à l'ordre* $n+1$.
Si, de plus, la différentielle de la différentielle est continue sur $\mathcal{U}$, *on dira que* f *est de classe* C^2.
Puis par récurrence, on est C^n *et enfin* C^∞ *(si* $\forall n \in n$ C^n*).*

Théoreme 2.3.2 (Schwarz)

Si f *est différentiable deux fois, alors* $d^2 f(a)$ *est bilinéaire* ***symétrique***.

Chapitre 3

Séries de Fourier