Cours d'analyse I

Patrice Perrin

11/09/2018

Table des matières

1 Espace vectoriel normé **2**

1.1 Espace vectoriel normé et autres . . . 2

1.2 Topologie et norme / distance . . . 5

1.3 Application des espace vectoriel de Banach . . . 10

1.3.1 Théorème du point fixe . . . 10

1.3.2 Séries dans la Banach . . . 11

1.4 Compacité . . . 11

1.5 Applications continues . . . 15

1.5.1 Propriétés locales . . . 15

1.5.2 Propriétés globales . . . 15

1.5.3 Continuité uniforme . . . 17

2 Calcul différentiel **18**

3 Séries de Fourier **19**

Chapitre 1

Espace vectoriel normé

1.1 Espace vectoriel normé et autres

À un espace vectoriel normé, on va cherche à ajouter une structure topologique pour savoir si 2 points sont proches.

Définition 1

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit N :E→ $\mathbb{R}+$ est une norme sur E ssi :

1. $N(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$
2. $N(\lambda u) = |\lambda| N(u) \quad , \lambda \in \mathbb{R}, u \in E$ (homogène)
3. $N(u+v) \leq N(u) + N(v)$ (inéquation triangulaire)

C'est un espace vectoriel normé .

Définition

Soit (X, d) avec $d : X^2 \to \mathbb{R}+$ appelé distance.

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x) \quad x, y \in X$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad x, y, z \in \mathbb{R}$

C'est une espace vectoriel métrique.

Définition

n est dite semi-normé sur E (espace vectoriel de $\mathbb{R}$) ssi n vérifie 2) et 3) de la définition 1.

Abstract nonsense

1. $N(-u) = N(u)$
2. $N(\lambda u) = 0 \Leftrightarrow \lambda u = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \textit{ ou } u = 0$
3. $N(\sum_{i=1}^{n} u_i) \leq \sum_{i=1}^{n} N(u_i)$
4. $|N(u) - N(v)| \leq N(u - v)$

Définition

Soit (E, N) ou (X, d), alors pour $x_0 \in E$ (ou X) :

$$\begin{cases} (boule\ ouverte)\ B(x_0, r) & = & x \in E(ou\ X), N(x - x_0) < r,\ ou\ d(x_0, x) < r \\ (boule\ ferme)\ \bar{B}(x_0, r) & = & x \in E(ou\ X), N(x - x_0) \leq r,\ ou\ d(x_0, x) \leq r \end{cases}$$

Remarque

Tout espace vectoriel normé est un espace métrique pour :

$$d_N(x,y) = N(y-x) \quad x,y \in E$$

Exercice

Il y a des distances sur un espace vectoriel qui ne proviennent pas de normes (distance discrète) :

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

Définition

Soit U une partie de E, N ou de X, d est dite ouverte ssi :

$$\forall x_0 \in U, \exists r > 0 \ tq \ B(x_0, r) \subset U$$

Définition

Soit V une partie de E, N ou X, d est un voisinage de $x_0 \in E \ (ou \ X)$ ssi il existe U ouvert contenant x_0 et contenu dans V.

Remarque

L'ensemble des ouverts de E (ou X) comprend :
— $\emptyset$ de E(ou de X)
— toute réunion d'ouverts est encore ouverte
— toute intersection finie d'ouverts est encore ouverte

Définition

On appelle espace topologique (X, P) un ensemble muni d'une famille de parties T $(\subset P(x))$ dites ouvertes qui vérifie :

1. $\emptyset$, $X \in T$
2. $\cup_{\alpha \in J} U_\alpha \subset T$, si $\forall \alpha \in J \ U_\alpha \in T$
3. $\cap_{i \in I} U_i \subset T$, si $\forall i \in I$ (I de cardinal fini) $U_\alpha \in T$

Propriété

Par cette définition, tout espace vectoriel normé E, N (tout espace métrique (X,d)) est muni d'une topologie (la topologie associé à la norme ou à la distance).
Une topologie ne provient pas nécessairement d'une métrique (à fortiori une norme).
Il y a des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une topologie provienne d'une métrique (on dit métrisable).

Remarque

Une boule ouverte est ouverte.

Remarque

Il existe des distances ultra-métriques où la distance est :

$$d(x,z) \leq max(d(x,y), d(y,z))$$

Définition

On appelle fermé dans un espace topologique le complémentaire d'une partie ouverte :

$$F \text{ fermé} \Leftrightarrow X \backslash F \; est \; ouvert$$

Remarque

$\bar{B}(x_0, r)$ est fermé.

Définition

A$\subset$ $((X,T),(X,d),(E,N))$
$\overset{\circ}{A}$ (intérieur de A), le plus grand ouvert dans A
$\bar{A}$ (adhérence de A), le plus petit fermé contenant A
$Fr(A) = \bar{A} \backslash \overset{\circ}{A}$ (frontière de A) et $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \bar{A}$

Exemple

Soit $]0,1[\subset [0,1[\subset [0,1]$, on a $Fr([0,1[) = \{0,1\}$

Définition

Soit f de (E, N_E) dans (F, N_F) est continue en x_0 ssi :

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \; N_E(x - x_0) < \eta \Rightarrow N_F(f(x) - f(x_0)) < \epsilon$$

f est continue de E dans F ssi f est continue en tout point de E.

Définition

A est dite bornée (dans (E,N)) ssi :

$$\exists M > 0 \; \exists x_0 \in E \; tq \; A \subset B(x_0, M)$$

Définition

On dit que N_1 et N_2 deux normes sur un même espace vectoriel E sont équivalentes ssi :

$$\exists m > 0 \; \exists M > 0 \; tq \; \forall u \in E \; mN_1(u) \leq N_2(u) \leq MN_1(u) \; et \; \frac{1}{M}N_2(u) \leq N_1(u) \leq \frac{1}{m}N_2(u)$$

Remarque

Si $x = 0$, on a :

$$m0 \leq 0 \leq M0$$

et si $x \neq 0$, on a :

$$m \leq \frac{N_2(x)}{N_1(x)} \leq M$$

et M est donc le plus petit possible et m le plus grand possible.

Remarque

(E,N_1) et (E,N_2) ont la même topologie.

Proposition

Soient (E_1, N_1) et (E_2, N_2) deux espaces normés, $E_1 \times E_2$ peut être muni de la norme :
— $(x, y) \mapsto \sup(N_1(x), N_2(y)) = N(x, y)$
— ou $(x, y) \mapsto N_1(x) + N_2(x) = N'(x, y)$
Ces deux normes sont équivalentes et définissent la même topologie sur $E_1 \times E_2$.

Démonstration

On montre que la norme est nulle si les deux sont nuls, la norme du produit par un scalaire et le produit du scalaire avec la norme, et enfin on a l'inégalité triangulaire.
Les deux normes sont équivalentes car :

$$N(x, y) \leq N'(x, y) \leq 2N(x, y)$$

Exemple

$(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ est continue de $\mathbb{R} \times E$ dans E.
$(x, y) \mapsto x + y$ est continue de $E \times E$ dans E.

Remarque

Soit E un espace vectoriel et T une topologie sur E, alors (E, T) est un espace vectoriel topologique ssi :
— $(x, y) \mapsto x + y$
— $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$

1.2 Topologie et norme / distance

Propriété

f est continue pour la topologie associée à une norme ou à une distance est équivalent à f est continue pour la norme ou la distance.

Propriété

Soit $A \subset (E, N)$ (avec $E = X$ *ou* E et N une norme ou une distance). On a :

1. $\overset{\circ}{A} = \{a \in A;\ \exists r > 0\ B(a, r) \subset A\}$
2. $\bar{A} = \{x \in E;\ \forall r > 0\ B(x, r) \cap A \neq \emptyset\}$
3. $x \in Fr(A) \ \Leftrightarrow\ \{x \in E;\ \exists r > 0\ B(x, r) \cap A \neq \emptyset \ et\ B(x, r) \cap (X \backslash A) \neq \emptyset\}$

Démonstration

1. $\supseteq$: Si $a \in A$ et $\exists r > 0\ B(a, r) \subset A$, alors $B(a, r)$ est ouverte, et donc $a \in \overset{\circ}{A}$
   $\subseteq$: Si $a \in \overset{\circ}{A}$, $\exists U$ ouvert, $U \subset A$, avec $a \in U$. Donc $\exists\ r > 0\ B(a, r) \subset U$ (U est ouvert selon une topologie associée à la norme / distance)
2. Si $a \in A$, la propriété est claire.
   On a :
   $$E \backslash \bar{A} = \{x \in E;\ \exists r > 0\ B(x, r) \cap A = \emptyset\} \subset E \backslash A$$
   Si x vérifie $B(x, r) \subset X \backslash A$, alors $\exists F = X \backslash B(x, r)$ (boule fermée) tq $x \notin F$ (avec $F \supset A$), donc $x \in \bar{A}$.
   Si $x \in X \backslash \bar{A}$, $\exists U \subset X \backslash \bar{A}$ tq $x \in U$.

3. Si $x \in Fr(A) = \bar{A} \backslash \overset{\circ}{A}$, alors

— $\forall r > 0 \; B(x,r) \cap A \neq \emptyset \; (\in \bar{A})$
— $x \in \mathring{A} \; \forall r > 0 \; B(x,r) \subsetneq A$ et $\forall r > 0 \; B(x,r) \cap (X \backslash A) \neq \emptyset$

Définition

On dit que x est un point d'accumulation pour la partie A ssi $\forall r > 0 \; (B(x,r) \backslash \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ (boule centrée en x épointée).
Si $x \in A$ ne vérifie pas cette propriété, on dit que x est un point isolé de A.

Remarque

Si x est un point d'accumulation :
— x peut appartenir à A
— sinon $x \notin A$ et $x \in \bar{A}$

Exemple

$\left\{x \in \mathbb{R};\; x = \frac{1}{n},\; n \geq 1\right\}$, $\{0\}$ est un point d'accumulation de A et tous les points de A sont isolés.

Propriété 1

Si (E, N) est un espace normé alors $\forall r > 0 \; \overline{B(x,r)} = \bar{B}(x,y)$ (l'adhérence de la boule ouverte est la boule fermée)

Démonstration

Soit $x \in E$, on a $B(x,r) = \{y, N(y-x) < r\} \subset E$.
On sait que $B(x,r) \subset \overline{B(x,r)} \subset \bar{B}(x,y)$.
Soit y tq $N(y-x) = r$. On a :

$$z \in [x,y] \Leftrightarrow z = (1-\lambda)x + \lambda y \quad \lambda \in [0,1] \qquad \text{(espace vectoriel)}$$

Il suffit de vérifier qu'il existe z avec
— $z \in B(x,r)$
— $z \in B(y,\rho)$

$$\begin{aligned} N(z-x) &= N(\lambda y + (1-\lambda)x - x) \\ &= |\lambda| N(y-x) = \lambda r \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} N(z-y) &= N(\lambda y + (1-\lambda)x - y) \\ &= |1-\lambda| N(y-x) = (1-\lambda) r \end{aligned}$$

Si $\lambda \in [0,1[$ alors $z \in B(x,r)$ et $z \in B(y,\rho)$, donc $(1-\lambda)r < \rho$.
Donc si on prend λ tq $(1-\lambda) < \frac{\rho}{r}$ ($\lambda \neq 1$ mais assez proche de 1), la propriété est vérifié.

Propriété 2

Si (E, N) est un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel, alors $\bar{F}$ est un sous-espace vectoriel .

Démonstration

Soit (E, N) et F un sous-espace vectoriel de E.
Il est clair que $\bar{F}$ est une partie fermée. Il suffit donc de montrer que $\bar{F}$ est stable par combinaison linéaire. Nous allons utiliser la caractérisation de l'adhérence donnée précédemment.

Montrons, dans un premier temps, que $\bar{F}$ est stable par multiplication par un scalaire.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \bar{F}$. Si $\lambda = 0$, le point λx appartient à F donc à $\bar{F}$. Supposons donc $\lambda \neq 0$.

Soit $B(\lambda x, r)$ une boule centrée en λx de rayon $r > 0$. Puisque x est adhérent à F, il existe z dans la boule $B(x, \frac{r}{|\lambda|})$. On a alors :

$$N(\lambda z - \lambda x) = |\lambda| N(z - x) < |\lambda| \frac{r}{|\lambda|} = r$$

Donc le point λz appartient à $B(\lambda x, r)$ et, r étant quelconque, le point λx est bien adhérent à F.

Montrons maintenant la stabilité pour l'addition.

Soit $r > 0$, $x, y \in \bar{F}$ et $B(x+y, r)$ une boule centrée en $x+y$. Comme x est adhérent à F , on sait que la boule $B(x, \frac{r}{2})$ contient un point z de F. Il en est de même pour $B(y, \frac{r}{2})$ qui contient un point t de F. On a donc, par inégalité triangulaire :

$$N(z + t - x - y) < N(z - x) + N(t - y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

Le point $z + t$ est donc dans la boule $B(x + y, r)$ et le point $x + y$ est bien adhérent à F.

Finalement, $\bar{F}$ est bien un sous-espace vectoriel .

Remarque

1. La propriété 1 est fausse si (X, d) est métrique (pas vrai dans tous les cas)
2. On se restreindra souvent aux sous-espace vectoriel fermés.

Définition

La suite x_n (dans un espace vectoriel normé ou un espace métrique) est convergente vers l ssi :

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 > 0 \; tq \; n \geq n_0 \Rightarrow N(l - x_n) < \epsilon \; (ou \; d(l, x_n) < \epsilon)$$

Abstract nonsense

1. Si l existe, elle est unique
2. Si $u_n \to l$ et $v_n \to l'$, $u_n + v_n \to l + l'$
3. Si $u_n \to l$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u_n \to \lambda l$

Propriété

Si $u_n \to l$ alors u_n est bornée

Définition

La suite (u_n) est de Cauchy ssi :

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 > 0 \; tq \; n, m \geq n_0 \Rightarrow N(u_n - u_m) < \epsilon \; (ou \; d(u_n, u_m) < \epsilon)$$

ou

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 > 0 \; tq \; n \geq n_0 \Rightarrow \forall p \; N(u_{n+p} - u_n) < \epsilon \; (ou \; d(u_{n+p}, u_n) < \epsilon)$$

Si u_n est convergente, elle est de Cauchy.

Propriété

Si $u_n \to l$ ou si u_n est de Cauchy, alors $\{u_n, \; n \geq 0\}$ est borné.

Démonstration

On sait qu'à partir d'un certain rang n_0, $N(u_n) \leq l + 1 \; n \geq n_0$, et $\{u_i, i \leq n_0\}$ est un ensemble fini, donc $\{u_n, \; n \geq 0\}$ est borné par le sup entre $\{N(u_i), i \leq n_0\}$ et $N(l) + 1$.

Définition

(X,d) est complet ou (E,N) est de Banach (espace vectoriel normé complet), ssi toute suite de Cauchy est convergente.

Exemple / contre-exemple

1. $(\mathbb{Q}, |.|)$ n'est pas complet (n'admet pas la propriété de la borne supérieur).
2. $(\mathbb{R}, |.|)$ est un corps ordonné contenant $\mathbb{Q}$ admettant la propriété de la borne supérieure. Soit $u_0, ..., u_n$ une suite de Cauchy bornée. On a :

$$m \leq Inf(u_0, ..., u_n) \leq Sup(u_0, ..., u_n) \leq M$$

$$m \leq Inf(u_1, ..., u_n) \leq Sup(u_1, ..., u_n) \leq M$$

On pose $\sigma_n = Inf_{i \geq n}\{u_n\}$ et $\tau_n = Sup_{i \geq n}\{u_n\}$.
On a σ_n croissante et τ_n décroissante, de plus $\sigma_n \leq \tau_n$, et aussi $\tau_n - \sigma_n \to 0$ (suite monotone adjacente).
Donc $\sigma_n \to Sup\sigma_n$ et $\tau_n \to Inf\tau_n$ et $Sup\ \sigma_n = Inf\ \tau_n$.

Commentaire Construire $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$:
— "Coupure de Dedekind" (partition de $\mathbb{Q}$ avec $\mathbb{Q} = E \sqcup F$ avec $e \in E \leq f \in F$).
On prend $E = \mathbb{Q} \cup \{r \geq 0, r^2 < 2\}$ et $F = \{r \geq 0, r^2 > 2\}$
— $(\mathbb{Q}, |.|)$ est un espace vectoriel normé . On le complète par suites de Cauchy de rationnels et suites de Cauchy tendant vers 0.

3. $(\mathbb{R}_n, ||.||_\infty)$ (on sait que $||.||_\infty$ est équivalente à $||.||_p$ $\forall p$, donc elles ont les mêmes suites de Cauchy) est complet (Banach).
Soit $x_m \in \mathbb{R}^n$ avec $x_m = (x_1^m, ..., x_n^m)$. Elle est de Cauchy car $|x_i^{m+p} - x_i^m| \leq ||x_{m+p} - x_m||_\infty$.
Donc chaque x_i^m est de Cauchy dans $\mathbb{R}$.
4. $\mathbb{R}[X]$ avec

$$||P||_2 = \begin{cases} 0 & si \quad P = 0 \\ \sqrt{\sum_0^{\deg P} a_i^2} & si \quad P \neq 0 \end{cases}$$

avec $P = a_0 + ... + a_n X^n$.
On a $P_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{x^i}{i}$.

$$||P_{n+p} - P_n|| = \sqrt{\sum_{i=n+1}^{n+p} \frac{1}{i^2}}$$

$$||P_{n+p} - P_n|| \leq \sqrt{\sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{i^2}}$$

Le membre de droite est le reste de la série de Riemann convergente, il converge donc vers 0.
C'est une suite de Cauchy.
Quelle pourrait être la limite ?
Ça ne peut pas être 0 car $||P_n - 0||_2 = ||P_n||_2 = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}}$ qui ne tend pas vers 0.
Si Q est un polynôme : $||P_m - Q|| = \sqrt{(1-q_0)^2 + ... + (1-q_n)^2 + \sqrt{\sum_{i \geq n}^{m} \frac{1}{i^2}}}$. Si $m > n$ alors cela ne converge pas car il restera le degré le plus élevé.
Donc cet espace n'est pas complet pour $||.||_2$
5. $C([0,1], \mathbb{R})$ (ensemble des fonctions continues de [0,1] dans $\mathbb{R}$) est complet pour $||.||_\infty$. On a $||f||_\infty = Sup_{x \in [0,1]}|f(x)|$ (la norme est bien définie sur l'espace).

(a) Trouver un candidat pour la limite

(b) Montrer que la suite tend vers le candidat

(c) Montrer que le candidat est dans l'espace

Soit $f_n \in C([0,1],\mathbb{R})$ de Cauchy.

$$Sup_{x\in[0,1]}|(f_{n+p}-f_n)(x)| = ||f_{n+p}-f_n||_\infty \to 0$$

(a) Si $x \in [0,1]$, $f_n(x)$ est une suite de Cauchy de réel, elle tend vers $\varphi(x)$ (convergence uniforme, donc convergence simple ou ponctuelle).

(b) On doit monter que pour $\epsilon > 0$, il existe n assez grand tq $\forall x \in [0,1]$ $|\varphi(x) - f_n(x)| < \epsilon$.

$$|\varphi(x) - f_n(x)| \leq |\varphi(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_n(x)|$$
$$|\varphi(x) - f_n(x)| \leq |\varphi(x) - f_m(x)| + ||f_m(x) - f_n(x)||_\infty$$

$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 > 0\ tq\ ||f_m(x) - f_n(x)||_\infty < \frac{\epsilon}{2}$.
Pour cet x, $\exists m(x) \geq n_0$ et $>> 0$ tq $|\varphi(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2}$.
D'où $|\varphi(x) - f_n(x)| < \epsilon$ si $n > n_0$.

(c) Il faut montrer que φ est continue.

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq |\varphi(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - \varphi(x_0)|$$

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq 2||\varphi - f_n||_\infty + |f_n(x) - f_n(x_0)|$$

$\exists n_0$ tq $n > n_0$ $||\varphi - f_n||_\infty < \frac{\epsilon}{3}$.
De plus, pour un tel n, f_n est continue en x_0 d'où $\exists n > 0$ tq $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$ Donc $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \epsilon$.

Propriété

Soit (E,N) de Banach, alors une partie est complète ssi elle est fermée.

Corollaire

Si F est un sous-espace vectoriel de (E,N) de Banach, alors $\bar{F}$ est de Banach (on sait que $\bar{F}$ est un sous-espace vectoriel normé).

Démonstration

F est fermée dans E. Soit x_n une suite de Cauchy dans F, donc x_n est de Cauchy dans E.
x_n tend vers $x \in E$ et $x \in \bar{F}$. Donc $B(x,r)$ est fermée : $\exists n >> 0$ tq $x_n \in B(x,r)$.
Si F est complet, $x \in \bar{F}$ alors $B(x, \frac{1}{n}) \cap F \neq 0$, d'où $x_n \in F \cap B(x, \frac{1}{n})$.
D'où $x_n \in F$, $x_n \to x$. x_n est de Cauchy et donc $x \in F$.

Remarque

1. $\bar{F}$ se caractérise aussi comme les points limite d'une suite $x_n \in F$.

   Si f est continue en x_0 :

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n > 0\ N_E(x - x_0) < n \Rightarrow N_F(f(x) - f(x_0)) < \epsilon$$

   Si $x_n \to x_0$ $\exists n_0$, $N_E(x - x_0) < n_0$ d'où $N_F(f(x) - y_0) < \epsilon$

2. f est de E dans F continue en x_0 ssi pour toute suite $x_n \to x_0$ $f(x_n) \to f(x_0) = y_0$

   Si $\forall$ suite $x_n \to x_0$ $f(x_n) \to y_0$. Par l'absurde, on a :

   $$\exists \epsilon > 0 \ \forall n \ \exists x \ N_E(x - x_0) < n \ et \ N_F(f(x) - y_0) \geq \epsilon$$

   On prend $n = \frac{1}{n}$ et $x = x_n$, on a : $N_E(x_n - x_0) < \frac{1}{n}$ et $N_F(f(x_n) - y0) > \epsilon$. Donc il existe une suite x_n tq $f(x_n)$ ne tend pas vers y_0.

1.3 Application des espace vectoriel de Banach

1.3.1 Théorème du point fixe

Définition

f est une fonction de (E, N_E) dans (F, N_F) est k-contractante ssi $\exists k \in [0, 1[$ tq :

$$x, y \in E \ N_F(f(x) - f(y)) \leq kN_E(x - y)$$

Si f est contractante, alors elle est continue.

Théorème

Soit $f : (E, N) \to (E, N)$ k-contractante $(0 < k < 1)$ et (E, N) de Banach, alors f admet un unique point fixe (tq $f(x) = x$).

Remarque

Si $N(f(x) - f(y)) = 0$ c'est que f est une fonction constance.

Démonstration

Soit $x_0 \in E$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ ou $x_n = f^n(x_0)$.

$$N(x_{n+1} - x_n) = N(f(x_n) - f(x_{n-1})) < kN(x_n - x_{n-1})$$

Par récurrence, on obtient :

$$N(x_{n+1} - x_n) \leq k^n N(f(x_0) - x_0)$$

Donc :

$$N(x_{n+p} - x_n) \leq N(x_{n+p} - x_{n+p-1}) + ... + N(x_{n+1} - x_n)$$
$$N(x_{n+p} - x_n) \leq (k^{n+p} + ... + k^n)N(f(x_0) - x_0)$$
$$N(x_{n+p} - x_n) \leq \frac{k^n(1 - k^{p+1})}{1 - k} N(f(x_0) - x_0)$$
$$N(x_{n+p} - x_n) \leq \frac{k^n}{1 - k} N(f(x_0) - x_0)$$

Le membre de droite tend vers 0 si n tend vers $+\infty$.
Donc x_n est de Cauchy. Donc $x_n \to l \in E$.
On a $f(x_n) = x_{n+1} \to f(l) = l$ (si f est continue et c'est vrai car f est contractante).
Mais un point fixe est unique :
Soit l_1, l_2 deux points fixes de f, on a :

$$N(f(l_1) - f(l_2)) \leq kN(l_1 - l_2)$$

$$N(l_1 - l_2) < N(l_1 - l_2)$$

Ce qui est impossible. Donc le point fixe est unique.

1.3.2 Séries dans la Banach

Soit (E, N), un espace vectoriel normé .

Définition

L'étude d'une série (u_i) est l'étude de $U_i = \sum_{j=0}^{i} u_j$, suite des sommes partielles.
La série est convergente ssi la suite U_i est convergente.
La série est de Cauchy ssi la suite U_i est de Cauchy.
Une série est normalement convergente ssi les séries des $N(u_i)$ est convergente.

Propriété

Une série normalement convergente est convergente (si E est de Banach).
Si $\sum_0^\infty N(u_i)$ est définie alors $\sum_0^\infty u_i$ est définie dans E.

Démonstration

On a :

$$\begin{array}{rcl} N(U_{n+p} - U_n) & = & N(\sum_{i=1}^{p} u_{n+i}) \\ & \leq & \sum_{i=1}^{p} N(u_{n+i}) \\ & \leq & \sum_{i=1}^{\infty} N(u_{n+i}) \\ & \to & 0 \end{array}$$

Donc U_i est de Cauchy et donc est convergente (E est de Banach).

Remarque

$N(\sum_0^\infty u_i) \leq \sum_0^\infty N(u_i)$

Exercice

$C([0,1], \mathbb{R})$ est de Banach par $||.||_\infty$.
Si $||\varphi_i||_\infty$ est une série convergente, alors $x \mapsto \sum_0^\infty \varphi_i(x)$ a un sens : fonction continue en $x \in [0, 1]$.

1.4 Compacité

Soient (X, d) un espace métrique, (E, N) un espace normé, et (X, C) un espace topologique séparé.

Définition

Un espace topologique est séparé ssi $\forall (x, y) \in X,\ (x \neq y), \exists U, V$ ouverts disjoints $x \in U, y \in V$ tq $(U \cap V = \emptyset)$.
Donc (E, N) et (X, d) sont séparés.

Définition (Borel-Lebesgue)

Soit $K \subseteq (X, C)$ séparé est dite compacte ssi pour tout recouvrement ouvert de K, on peut extraire un recouvrement fini de K :

$$K \subseteq \cup_{\alpha \in A} U_\alpha \Rightarrow K \subseteq \cup_{i \in J} U_{\alpha_i} \ (I\ finie)$$

Recouvrement de K est U_α une famille de parties tq $\cup_\alpha U_\alpha \supseteq K$

Exemple

1. $\mathbb{R} = \cup_n] - n, n[$ est non compact (on peut le rendre compacte $\to \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \sqcup \{\infty\}$ avec $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{2i\pi x} \in \Pi = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ compactifié d'Alexandrov ou on peut le compacter avec $\mathbb{R} \sqcup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$, c'est la droite achevé).

2. $[0,1]$ (ou plus généralement $[a,b]$ fermé borné) est compacte.
   On a $[0,1] \subseteq \cup_\alpha U_\alpha$ (par $|.|$).
   Soit $\{t \in [0,1]; [0,t] \subseteq \sup_{j \in J} U_{\alpha_j}\}$ (J est fini), est une partie fermée bornée et non vide car $0 \in U_{\alpha_j}$.
   Prenons $\tau = Sup\{t \in [0,1]; [0,t] \subseteq \sup_{j \in J} U_{\alpha_j}\}$ (J fini). On a $\tau \leq 1$ car $\tau \in U_{\alpha_\tau}$ ou τ est la borne supérieure d'où un point t de l'ensemble des $]\tau - \eta_\tau, \tau[$.
   Donc $[0,\tau] \subseteq [0,t] \cup]\tau - \eta, \tau] \subseteq (\cup U_{\alpha_j}) \cup (U_{\alpha_\tau})$ et est un recouvrement de $[0,1]$.

Remarque

Soit $K = \cup_\alpha (U_\alpha \cap K) \subseteq \cup_\alpha U_\alpha$ (un recouvrement), son complémentaire est $\emptyset = \cap_\alpha F_\alpha$ (fermés), alors une intersection finie (au moins) est déjà vide.

Variante

si une famille finie de fermés emboîtés qui est vide, un est vide.

Contraposée

Si $\forall n\ F_n \neq \emptyset$ alors $\cap_n F_n \neq \emptyset$

Proposition 1

Si K est compacte par (X,d) (E,N) (X,C), alors K est fermée.

Note

Tout point $y \notin K$ peut être séparé de K (c'est à dire $\exists U \supseteq K\ \exists V$ avec $y \in V$ tq U, V sont ouverts et $U \cap V = \emptyset$).

Proposition 2

Si K est compacte (X,d) (E,N), alors K est bornée.

Remarque

Dans (X,d) ou (E,N) un ensemble compacte est fermé borné.

Démonstration de la proposition 1

Soit $k \in K$, et $y \in X \backslash K$.
X est séparé car $B(k, r_k) \cap B(y, \eta_k) = \emptyset$.

$$K \subseteq \cup_k B(k, r_k)$$

$$K \subseteq \cup_{i \in I} B(k_i, r_{k_i}) \quad I \text{ finie}$$

$$\cap_{i \in I} B(y, \eta_i) = B(y, inf(\eta_i) \neq 0)$$

Et $B(y, inf(\eta_i)) \cap (\cap_{i \in I} B(k_i, r_{k_i})) = \emptyset$ sinon $z \in B(k_i, r_{k_i})$ et $z \in B(y, \eta_i)$ $\forall i$, absurde.
On a donc $B(y, inf(\eta_i)) \subseteq X \backslash K$.
La démonstration est faite dans les espaces métriques, mais on a la même démonstration avec des ouverts.

Démonstration de la proposition 2

Soit $K \subseteq \cup_{i \in I} B(k_i, r_i)$, $k \in K$, donc :

$$N(k) \leq N(k - k_i) + N(k_i) \leq r_i + N(k_i) \text{ (pour un } i)$$

$$N(k) \leq Sup N(k_i) + Sup\ r_i = M + R = M'$$

Proposition

Si $F \subseteq K$ est fermée dans K alors F est compacte (démonstration en exercice).

Propriété (Bolzano-Weierstrass)

Si K est compacte (dans (X, C)), alors toute partie infinie A de K admet un point d'accumulation.

Corollaire

Si K est compacte alors de toute suite de points de K, on peut extraire une suite convergente.

Démonstration du corollaire

Si k_i est une suite de points de K. Soit $A = \{k \in K; \exists i\ k = k_i\}$.
Soit A est finie, et une des valeurs est atteinte une infinité de fois, d'où une suite stationnaire.
Soit A est infinie, d'où (d'après le théorème) un point d'accumulation $\xi \in K$ tq $k_{\varphi(n)} \in B(\xi, \frac{1}{n}) \backslash \{\xi\}$ et $k_{\varphi(n)} \to \xi$.

Démonstration de la propriété

Soit $A \subseteq K$, A infinie.
On montre que si A n'a pas de point d'accumulation, alors A est finie.
Si A n'a pas de point d'accumulation :
A est fermée (si $x \notin A$, il y a un voisinage ou une boule qui ne rencontre pas de point de A).
Donc A est compacte.

$$A \subseteq \cup B(a, r) \text{ avec } B(a, r) \backslash \{0\} \cap A = \emptyset$$

$$A \subseteq \cup_{i \in I} B(a_i, r_i)$$

Donc $A = \cup_{i \in I} \{a_i\}$ est finie.

Propriété

Si K est compact dans (X, d), (E, N) alors K est complet.

Démonstration

Soit (k_n) une suite de Cauchy.
$\exists k \in K$ tq $k_{\varphi(n)} \to k$ (point d'accumulation de l'ensemble des valeurs de la suite).
Alors (exercice) une suite de Cauchy dont une sous-suite est convergente est elle-même convergente.
K étant fermé, $k \in K$.

Théorème

Toute partie K de (X, d) ou (E, N) est compacte (Borel-Lebesgue) ssi elle vérifie que toute partie infinie admet un point d'accumulation (Bolzano-Weierstrass).

Lemme

Si K admet Bolzano-Weierstrass, alors pour tout recouvrement de K par une famille d'ouverts U_α, il existe $\xi > 0$ tq $k \in U_\alpha \Rightarrow B(k, \xi) \subseteq U_\alpha$.

Remarque

Un tel ξ s'appelle membre de Lebesgue du recouvrement.

Démonstration du Lemme

Par l'absurde, on suppose que K n'admet pas Bolzano-Weierstrass.
Pour $\xi = \frac{1}{2^n}$ $\exists k_n$ tq $\exists \alpha$ $k_n \in U_\alpha$ $B(k_n, \frac{1}{2^n}) \nsubseteq U_\alpha$.
$\{k_n\}$ est dans K par hypothèse.
$\{k_{\varphi(n)}\}$ converge vers $k \in K$
$k \in K$ donc $k \in U_{\alpha_k}$, $B(k, \eta) \subseteq U_{\alpha_k}$
Donc $n \geq n_0$, $k_{\varphi(n)} \in B(k, \eta)$ voire $B(k, \frac{1}{2^{n+1}})$ $(\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n} < \xi)$
Alors $k \in B(k_{\varphi(n+1)}, \frac{1}{2^{\varphi(n+1)}})$. Soit x dans cette boule :

$$d(x, k) \leq d(x, k_{\varphi(n+1)}) + d(k_{\varphi(n+1)}, k) \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

Donc x est dans $B(k, \frac{1}{2^n})$, donc il existe un point d'accumulation, on a enfin une contradiction.

Démonstration du théorème

Montrons que si on a BW, alors on a BL, c'est à dire K vérifiant BW, alors $K \subseteq \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$.
Par l'absurde, on suppose $K \nsubseteq \cup_{i \in I} U_{\alpha_i}$ pour toute partie finie I de A.
Soit $\epsilon > 0$, un nombre de Lebesgue associé à (U_α).
On a $k_1 \in K$ $B(k_1, \epsilon) \subseteq U_{\alpha_1}$, et $K \nsubseteq U_{\alpha_1}$.
De plus, $k_2 \in K$ et $k_2 \notin U_{\alpha_1}$ $B(k_2, \epsilon) \subseteq U_{\alpha_2}$, ce qui implique $d(k_1, k_2) \geq \epsilon$.
Par récurrence, on a $k_i \in B(k_i, \epsilon) \subseteq U_{\alpha_i}$ et $k_i \notin U_{j<i} U_{\alpha_j}$.
D'où, $k_{n+1} \in K$ mais $k_{n+1} \notin \cup_{i \leq n} U_{\alpha_i}$ et $d(k_{n+1}, k_i) \geq \epsilon$, $i \leq n$.
D'où $A = \cup\{k_n\}$ partie infinie sans point d'accumulation (tous ses points sont deux à deux à distance $\geq \epsilon$).

Propriété

Tout fermé borné dans $\mathbb{R}$ (selon une topologie usuelle) ou $\mathbb{R}^n$ (idem) est compacte.

Démonstration

Pour $n = 1$ (on le montre dans $\mathbb{R}$). Par BW, on a A infinie $\subseteq F$ (fermé borné dans $\mathbb{R}$), $A \in [n, M]$.
On a $A_i \subseteq A_{i-1} \cdots \subseteq A$, et $A_n \subseteq$intervalle de Lebesgue $\frac{M-n}{2^n}$.
D'où une suite de points de $\mathbb{R}$ qui est de Cauchy.
Soit $a_n \in A_n \subseteq A \subseteq F$ tend vers $\alpha \in \mathbb{R}$. Mais F est fermé d'où $\alpha \in F$, donc A admet α comme point d'accumulation.

Pour $n \geq 2$. Soit $x_m = (x_1^m, ..., x_n^m)$ $m \in \mathbb{N}$, une suite de points de F fermé borné dans $\mathbb{R}^n$, d'où les x_i^m sont dans un intervalle borné de $\mathbb{R}$.
On peut extraire des suites convergentes d'où : ϵ_i tq $x_i^{\varphi(m)} \underset{m \to +\infty}{\to} \epsilon_i$.
D'où une suite extraite $x^{\varphi(m)} \to \epsilon \in \mathbb{R}^n$ mais F est fermée, donc $\epsilon \in F$.

Corollaire

$\bar{B}(x, r)$ est un compacte dans $\mathbb{R}^n$

Définition

(X, C) séparé est dit localement compact ssi tout point $x \in X$ a un voisinage compact.
Ici $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ sont des espaces topologiques localement compacts.

1.5 Applications continues

1.5.1 Propriétés locales

Définition

$f : (E, N_E) \to (F, N_F)$ est continue en x_0 ssi :

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n > 0 \ N_E(x - x_0) < n \Rightarrow N_F(f(x) - f(x_0)) < \epsilon$$

ou ssi pour toute suite $x_n \to x_0$ $f(x_n) \to f(x_0) = y_0$

Propriété

Si f et g sont continues en x_0, alors λf et $f + g$ sont continues en x_0 (f, g de (X, C) dans (E, N)).

Propriété

f de (E, N_E) dans (F, N_F) continues en x_0, et g de (F, N_F) dans (G, N_G) continues en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

1.5.2 Propriétés globales

Définition

$f : (E, N_E) \to (F, N_F)$ est continue ssi f est continue en tout point de E.

Proposition f est continue de (E, N_E) dans (F, N_F) ssi $\forall V$ ouvert dans F $f^{-1}(V) = U$ est un ouvert de E.
Ici, f^{-1} est l'image réciproque de f.

Démonstration

On a $f^{-1}(V) = \{x \in E; f(x) \in V\}$.

Si f est continue en tout point x_0 de E. Soit V un ouvert de F. Si $y_0 \in V$, alors $\exists \epsilon > 0$ $B(y_0, \epsilon) \subseteq V$.
Si $y_0 \notin f(E)$, il n'y a rien à démontrer.
Si $y_0 \in f(E)$:
Soit x_0 tq $f(x_0) = y_0$, alors $x_0 \in f^{-1}(V)$ et f continue en x_0 d'où $B(x_0, \eta) \subseteq f^{-1}(V)$ car $f(B(x_0, \eta)) \subseteq B(y_0, \epsilon)$. Donc $f^{-1}(V) = U$ est un ouvert (voisinage de tous les points).

Soit $x_0 \in E$, $y_0 = f(x_0)$ $\forall \epsilon > 0$ $B(y_0, \epsilon)$ ouvert de F donc $f^{-1}(B(y_0, \epsilon))$ est un ouvert de E centré en x_0.
D'où $B(x_0, \eta)$ tq $x_0 \in B(x_0, \eta) \subseteq f^{-1}(B(y_0, \epsilon))$

Exemple

Par contre en général, l'image d'un ouvert n'est pas nécessairement un ouvert : $x \mapsto x^2$ envoie $]-1, 1[\subseteq \mathbb{R}$ sur $[0, 1[\subseteq \mathbb{R}$

Remarque

f continue de E dans F ssi pour tout fermé A de F $f^{-1}(A)$ est fermé dans E.

Exemple

Par contre l'image d'un fermé n'est pas nécessairement un fermé : $x \mapsto e^x$ envoie $]-\infty, 0]$ (fermé de $\mathbb{R}$) sur $]0, 1]$.

Propriété

Si f est continue de (E, N_E) dans (F, N_F) et si K compact dans E alors $f(K)$ est une partie compacte de F.

Démonstration

On a $f(K) \subseteq \cup_\alpha V_\alpha$.

$$K \subseteq f^{-1}(f(K)) \subseteq f^{-1}(U_\alpha V_\alpha) \subseteq U_\alpha f^{-1}(V_\alpha)$$

d'où $K \subseteq \cup_{i\in I} f^{-1}(V_{\alpha_i})$
d'où $f(K) \subseteq \cup_{i\in I} V_{\alpha_i}$

Exemple

Par contre, f^{-1} d'un compact n'est pas en général compact : $x \mapsto sin(x)$ $sin^{-1}([-1, 1]) = \mathbb{R}$

Propriété

Tout fermé borné dans un espace de dimension finie (normé) est compact.

Démonstration

(pour $\mathbb{R}^n$ et $||.||_\infty$ on sait)
Soient $E =< e1, ..., e_n >= \mathbb{R}e_i \oplus ... \oplus \mathbb{R}e_n$, et $u \in E$.
$u = \sum_{i=1}^n x_i e_i \overset{b}{\leftarrow} x = (x_1, ..., x_n)$ (b une fonction bijective). On a :

$$\begin{array}{rcl} N_E(b(x)) & = & N_E(\sum_{i=1}^n x_i e_i) \\ & \leq & \sum_{i=1}^n |x_i| N_E(e_i) \\ & \leq & n||x||_\infty \times Sup\ N_E(e_i) \\ & \leq & M||x||_\infty \end{array}$$

Bref, si $||x||_\infty$ est petit alors, $N_E(b(x))$ l'est aussi et si $||x-x_0||_\infty$ est petit alors, $N_E(b(x)-b(x_0)) = N_E(b(x-x_0))$
Donc b est continue de $(\mathbb{R}^n, ||.||_\infty)$ dans (E, N_E).
Soit $r > 0$, donc $b(\bar{B}(0, r))$ est compacte dans E.
Donc $b(S(0, r))$ est compacte dans E $(S(0, r) = \bar{B}(0, r) \backslash B(0, r))$.
$N_E(b(S(0, r)))$ compact de $\mathbb{R}^+$ et $0 \notin N_E(b(S(0, r)))$.
Donc 0 séparé de $N_E(b(S(0, r)))$ donc $N_E(b(S(0, r))) \geq m > 0$
Donc si $0 \neq u \in E$ $u = N_E(u) \times \frac{u}{N_E(u)}$ On a :

$$\begin{array}{rcl} N_E(b(x)) & = & N_E(||x||_\infty \times b(\frac{x}{||x||_\infty})) \\ & = & ||x||_\infty \times N_E(b(\frac{x}{||x||_\infty})) \\ & \geq & ||x||_\infty m \qquad\qquad ||x||_\infty = \frac{1}{m} N_E(b(x)) \end{array}$$

On a montré : $N_E(u) \leq M||x||_\infty$ pour $||x||_\infty = \frac{1}{m} N_E(b(x))$.
Donc $x \overset{b}{\rightarrow} u = \sum x_i e_i$ et $x = b^{-1}(u)$ sont toutes deux continues.
Donc aussi "(E, N_E)" et "$(\mathbb{R}^n, ||.||_\infty)$" sont équivalentes.

Conséquence de ce lemme

1. Sur E de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes :

$$(E, N_1) \leftarrow (\mathbb{R}^n, ||.||_\infty) \rightarrow (E, N_2)$$

(en particulier sur $\mathbb{R}^n$, toute norme est équivalente à $||.||_\infty$)

2. Soit A un fermé borné dans (E, N_E), alors $b^{-1}(A)$ (image réciproque) est fermé dans $\mathbb{R}^n$.
Mais (d'après le lemme), $N_E(A)$ bornée $\Rightarrow ||x||_\infty$ est bornée sur $b^{-1}(A)$.
Donc $b^{-1}(A)$ est compact dans $\mathbb{R}^n$, donc $b(b^{-1}(A)) = A$ est compact (b bijective).

Corollaire

Tout espace vectoriel normé de dimension finie est donc localement compact : $\bar{B}(u, r) = \{u \in i, N_E(u) \leq r\}$ sont fermées bornées donc compactes.

Définition

On dit que f bijective de (E, N_E) dans (F, N_F) est bi-continue (ou un homéomorphisme) ssi f et f^{-1} (application réciproque de f) sont continues.

Théorème (Riesz)

Un espace vectoriel normé (E, N_E) est localement compact ssi E est de dimension finie.

Démonstration

On a déjà démontré que la dimension finie implique localement compact.
Montrons l'implication inverse :
Soit (E, N_E) est localement compact.
Donc 0 a un voisinage compact dans E, $0 \in V$ compact.
D'où $\exists 0 \in B(0, r) \subseteq \overline{B(0, r)} = \bar{B}(0, r) \subseteq V$ (V fermé).
$\bar{B}(0, 1)$ est compacte,

$$\begin{aligned} \overline{B(0,1)} &\subseteq \cup_{x \in \overline{B(0,1)}} B(x, \tfrac{1}{2}) \\ &\subseteq \cup_{i \in I} B(x_i, \tfrac{1}{2}) \end{aligned}$$

Soit $F =< x_i > \subseteq E$ (dimension finie car engendré par un nombre fini de vecteur).
Tout point $x \in E$ est adhérant à F.
$\frac{x}{N_E(x)} \in \bar{B}(0, 1)$ d'où $\frac{x}{N_E(x)} \in B(x_i, \frac{1}{2})$ d'où $N_E(x - N_E(x)x_i) \leq \frac{1}{2} N_E(x)$

1.5.3 Continuité uniforme

Chapitre 2

Calcul différentiel

Chapitre 3

Séries de Fourier