EPITECH
PROBABILITES ET STATISTIQUES
Cours201
Théorie des ensembles
Probabilités

Dominique Neveu

Année 2009-2010

Table des matières

Résumé du cours

Le premier chapitre présente les bases de la théorie des ensembles. On verra au deuxième chapitre que les opérations logiques sur les évènements (en probabilités) sont comparables aux opérations habituelles de la théorie des ensembles.

On décrit ce qu'est une expérience aléatoire, et on s'intéresse aux résultats de cette expérience, les évènements élémentaires ω. L'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience est l'ensemble fondamental Ω.

Le résultat d'une expérience est un évènement, considéré comme une partie de l'ensemble fondamental Ω. On peut effectuer des opérations sur les évènements, de manière comparable aux opérations effectuées sur les parties d'ensemble en théorie des ensembles.

La loi empirique des grands nombres nous permet de donner une définition intuitive de la notion de probabilité. C'est le mathématicien Kolmogoroff qui en donna la définition axiomatique que l'on utilise aujourd'hui.

On donnera les règles de calcul des probabilités, notamment des probabilités conditionnelles, et des probabilités d'évènements dits indépendants.

Chapitre 1

Théorie des ensembles

1.1 Ensemble, Elément

Un ensemble est une collection d'objets tous déterminés et distincts. Ces objets s'appellent les éléments de l'ensemble, ou les points de l'ensemble.
Par exemple :

- Ensemble des nombres entiers compris entre 7 et 24.
- Ensemble des droites du plan.

On utilise les lettres a, b, c,... pour désigner des éléments d'un ensemble, les lettres A, B, C,... pour désigner des ensembles.
$a \in A$ signifie que a est élément de A.
$b \notin M$ signifie que b n'est pas élément de M.

1.2 Description d'un ensemble

Les ensembles peuvent être définis de deux façons :

1. En compréhension à l'aide d'une propriété
   Par exemple : $\{$ x entier positif $\mid 7 \leq x \leq 24 \}$
2. En extension si on connaît tous les éléments
   Par exemple : $\{ 2, 4, 6, 8 \}$

1.3 Ensembles égaux

Deux ensembles sont dits égaux s'ils contiennent exactement les mêmes éléments. L'ordre des éléments n'a aucune importance.
Ainsi $\{2, 3, 5, 7\} = \{3, 5, 2, 7\}$.

1.4 Ensemble vide

L'ensemble vide, qui ne contient aucun élément est symbolisé par $\emptyset$.

1.5 Sous-ensemble

Soient A et B deux ensembles. On dit que A est inclus dans B (ou que A est un sous-ensemble de B) si tout élément de A est élément de B. On note A $\subset$ B.
Exemple d'inclusion : $\{ 1, 2 \} \subset \{ 1, 2, 3, 4 \}$

1.6 Réunion

On appelle réunion de A et B l'ensemble des x tels que x $\in$ A ou x $\in$ B. Cet ensemble se note A $\cup$ B.
Par exemple : $\{1\} \cup \{2\} = \{1,2\}$

1.7 Intersection

On appelle intersection de deux ensembles A et B l'ensemble des x tels que x$\in$A et x$\in$B. Cet ensemble se note A$\cap$B. Si A$\cap$B $= \emptyset$, on dit que A et B sont disjoints.
Par exemple : $\{1,2\} \cap \{1,3\} = \{1\}$

1.8 Complémentaire

Soit E un ensemble, A une partie de E. On appelle complémentaire de A par rapport à E, l'ensemble des x tels que x $\in$ E et x $\notin$ A. On le note A^C.
Par exemple : Si E $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et A $= \{1, 2, 3\}$, on a $A^C = \{4, 5\}$

1.9 Formules

Soit E un ensemble, A un sous ensemble de E.
- A $\cup$ A = A
- A $\cup$ $\emptyset$ = A
- A $\cup$ E = E
- A $\cap$ A = A
- A $\cap$ E = A
- A $\cap$ $\emptyset$ = $\emptyset$
- $(A^C)^C$ = A
- A $\cup$ A^C = E
- A $\cap$ A^C = $\emptyset$

1.10 Nombre d'éléments d'un ensemble

Il existe trois types d'ensembles :

- les ensembles finis,
- les ensembles infinis dénombrables,
- les ensembles finis non dénombrables.

Un ensemble fini est un ensemble qui contient un nombre fini d'éléments. On appelle cardinal le nombre d'éléments de l'ensemble, et on note card(E) le cardinal de l'ensemble E.

Un ensemble infini dénombrable est un ensemble qui peut être mis en correspondance avec l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$. Pour simplifier, le lecteur pourra considérer qu'un ensemble dénombrable, c'est l'ensemble des entiers naturels. Pour donner des exemples, l'espace des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ est dénombrable, l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ l'est également.

Un ensemble infini non dénombrable est un ensemble qui ne peut pas être mis en correspondance avec l'ensemble des entiers naturels. Par exemple, l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est infini non dénombrable.

Chapitre 2

Probabilités

2.1 Expérience aléatoire

Une expérience est une opération conduite sous des conditions contrôlées en vue d'illustrer une loi connue, ou de découvrir une loi inconnue, ou de tester une hypothèse. L'issue précise d'une expérience n'est pas connue d'avance avec certitude. On dit qu'il s'agit d'une expérience aléatoire.

Nous considérons un exemple d'expérience aléatoire qu'est le lancement d'une pièce de monnaie. Cette expérience est caractérisée par les faits suivants :
- (a) on ne peut pas prédire avec certitude le résultat,
- (b) on peut décrire l'ensemble de tous les résultats possibles.

Ces deux caractéristiques définissent la notion d'expérience aléatoire.

Définition 1 *Une épreuve ou expérience aléatoire est une expérience dont le résultat est influencé par des facteurs aléatoires, et qui par conséquent présente un certain degré d'incertitude. Il n'est pas possible de prédire le résultat avec certitude, mais l'ensemble des résultats possibles est connu.*

Exemple 1 *Voici des exemples d'expériences aléatoires :*

1. *le résultat de jeux de hasard : dés, loterie, roulette... ;*
2. *l'observation de la durée de vie d'individus d'une population humaine ou biologique ;*
3. *l'observation des durées de fonctionnement sans panne d'un ensemble de machines ;*
4. *un jeu de pile ou face de durée infinie ;*
5. *l'observation pendant un intervalle de temps [t1,t2] d'un bruit électronique, du signal d'un écran radar, d'un signal sismique... .*

Une expérience aléatoire se décrit mathématiquement par la donnée de l'ensemble des résultats possibles de l'expérience en question. Il est de tradition de noter ω le résultat d'une expérience aléatoire (que l'on appelle parfois aussi "épreuve" ou "issue" ou "évènement élémentaire") et de désigner alors par Ω l'ensemble formé par tous ces résultats possibles.

2.2 L'ensemble Ω

Définition 2 *L'ensemble fondamental Ω (ou "univers") d'une expérience aléatoire est l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience.*

Un ensemble fondamental peut être fini, infini dénombrable ou infini non dénombrable.

2.2.1 Ensemble fondamental fini

Si tous les résultats possibles de l'expérience sont en nombre fini, on parlera d'un ensemble fondamental fini. Les jeux de hasard en donnent de nombreux exemples.

Exemple 2 *Dans l'exemple d'un lancement de dé, l'ensemble fondamental est fini ; les résultats possibles de l'expérience sont les suivants : Ω =\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.*

2.2.2 Ensemble fondamental infini dénombrable

On peut associer à chaque résultat possible de l'expérience un nombre entier naturel de telle sorte que chacun d'entre eux ait un nombre différent.

Exemple 3 *Considérons l'expérience suivante : on lance une pièce de monnaie non truquée autant de fois qu'il est nécessaire pour obtenir face. Si on indique le résultat face par F et pile par P, l'ensemble fondamental sera le suivant :*

$$\Omega = \{F, PF, PPF, PPPF, PPPPF, ..., PPP...PF, ...\}$$

Un premier F indique qu'au premier lancement on a obtenu face ; la séquence PF indique qu'on a obtenu face qu'au deuxième lancement ; PPF vient dire que face a été obtenue au troisième lancement et ainsi de suite. Dans cette expérience, le nombre de résultats possibles est infini dénombrable.

2.2.3 Ensemble fondamental infini non dénombrable

Si le nombre de résultats possibles d'une expérience forme un ensemble infini non associable aux entiers naturels, il n'est plus possible de dénombrer tous les éléments de l'ensemble. Dans un tel cas, nous sommes en présence d'un ensemble infini non dénombrable, dit aussi un ensemble infini continu.

Exemple 4 *Les valeurs possibles de la vitesse du vent relevées dans les observatoires du pays.*

2.3 Evènement

Le résultat d'une expérience, c'est à dire une combinaison de résultats possibles, constitue un évènement.

Définition 3 *Un évènement aléatoire désigne tout évènement que l'on peut rencontrer comme résultat d'une expérience aléatoire.*

Un évènement est un sous ensemble de l'ensemble Ω des évènements.

Exemple 5 *Amener un point pair en jetant un dé est un évènement aléatoire représenté dans l'ensemble $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ des résultats possibles par le sous ensemble $A = \{2, 4, 6\}$.*

2.3.1 Evènements particuliers

Toute expérience aléatoire comprend un évènement certain et un évènement impossible. L'évènement impossible sera noté $\emptyset$ comme l'ensemble vide qui le représente dans Ω. Dans le cas du lancement de dés, l'évènement impossible pourrait être décrit par :

A = "le nombre de points est supérieur à 7",
A = $\emptyset$.

L'évènement certain sera noté Ω puisqu'il est réalisé quelque soit le résultat ω de l'expérience aléatoire. Se référant à l'exemple d'un lancement de dé, l'évènement certain pourrait être décrit par :

B = "le nombre de points est inférieur à 7",
B = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
B = Ω.

2.3.2 Opérations sur les évènements

Négation

A tout évènement A est associé son contraire, noté A^C et réalisé par définition si et seulement si A ne l'est pas. Le sous ensemble correspondant à A^C est le complémentaire du sous ensemble A dans l'ensemble Ω.

Par exemple, si l'évènement A désigne le sous ensemble "amener un point pair" :
A = $\{2, 4, 6\}$

Alors l'évènement A^C désigne le sous ensemble "amener un point impair" :
$A^C = \{1, 3, 5\}$

Intersection

Pour tout couple d'évènements A_1 et A_2, l'évènement "A_1 et A_2" est celui qui par définition est réalisé si les évènements A_1 et A_2 sont réalisés à la fois. Dans l'ensemble Ω, cet évènement "A_1 et A_2" est représenté par l'intersection de A_1 et A_2 : $A_1 \cap A_2$.

Par exemple au jet de dé, soit A_1 l'évènement "obtenir un chiffre inférieur ou égal à 4" et A_2 l'évènement "obtenir un chiffre impair", on a :
$A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$
$A_2 = \{1, 3, 5\}$
Alors l'évènement combiné $A_1 \cap A_2$ "obtenir un chiffre impair inférieur ou égal à 4" est représenté par l'intersection :
$A_1 \cap A_2 = \{1,3\}$

Réunion

Pour tout couple d'évènements A_1 et A_2, l'évènement "A_1 ou A_2" est celui qui par définition est réalisé si l'un au moins des deux évènements A_1 ou A_2 est réalisé. Il s'agit donc ici du "ou" non exclusif. Dans l'ensemble Ω, l'évènement "A_1 ou A_2" est représenté par la réunion des deux ensembles A_1 et A_2 : $A_1 \cup A_2$.

Par exemple au jet de dé, soient A_1 l'évènement "obtenir un chiffre plus petit que 3" et A_2 l'évènement "obtenir un multiple de 3", on a :
$A_1 = \{1, 2\}$
$A_2 = \{3, 6\}$
Alors l'évènement "obtenir un chiffre plus petit que 3 ou multiple de 3" est représenté par l'union $A_1 \cup A_2$:
$A_1 \cup A_2 = \{1, 2, 3, 6\}$

2.3.3 Relation entre évènements

Incompatibilité

Deux évènements sont dits incompatibles si leur réalisation simultanée est impossible, c'est à dire si l'intersection des deux évènements est vide : $A \cap B = \emptyset$.

Implication

L'évènement A implique l'évènement B si l'évènement A ne peut être réalisé sans que B ne le soit aussi ; il revient au même de dire que dans

Terminologie probabiliste	Terminologie ensembliste	Notations
Evènement	Partie de Ω	A,B,...
Evènement certain	Espace entier	Ω
Evènement impossible	Ensemble vide	$\emptyset$
Evènement contraire	Partie complémentaire	A^C
Et	Intersection	$\cap$
Evènements incompatibles	Parties disjointes	A$\cap$B=$\emptyset$
Ou (non exclusif)	Réunion	$\cup$
Implication	Inclusion	$\subset$

TAB. 2.1 – Terminologie probabiliste et ensembliste

l'ensemble Ω tout ω appartenant à A appartient aussi à B, donc que A est contenu dans B. La relation d'implication sera donc notée $A \subset B$.

2.3.4 Terminologie

Résumons ce que nous venons de dire dans ce paragraphe sur la notion d'évènement dans le tableau 2.1.

2.4 Probabilités

2.4.1 Notion de probabilité

Pour les uns, la notion de probabilité est une notion subjective, alors que pour d'autres, la probabilité est une notion objective découlant de l'expérience.

Dans le premier cas, l'homme attribue aux évènements une certain degré de confiance. Par exemple, si on lance une pièce de monnaie une seule fois, la probabilité d'obtenir pile ou face est 1/2. Il s'agit d'une conviction personnelle puisant ses fondements logiques dans la symétrie de la pièce.

Dans le deuxième cas, l'interprétation est basée sur le fait que si on lance une pièce de monnaie un grand nombre de fois, on observe que la fréquence relative des cas où on obtient pile varie de façon relativement régulière autour de 1/2. D'où l'idée que la probabilité est une réalité objective dont la connaissance peut être approchée grâce à des expériences relatives aux fréquences pour une suite infinie d'épreuves.

2.4.2 Loi empirique des grands nombres

Si nous observons la fréquence de réalisation d'un évènement A au cours d'une longue suite de répétitions de l'expérience à laquelle il est lié, nous constaterons expérimentalement que cette fréquence N_A/N fluctue de moins en moins lorsque le nombre N de répétitions de l'expérience augmente. Ce résultat expérimental appelé la loi empirique des grands nombres conduit à abstraire de l'expérience la notion de probabilité statistique d'un évènement.

Définition 4 *La probabilité statistique d'un évènement A est la limite de la fréquence N_A/N lorsque N augmente indéfiniment.*

Les fréquences F(A) = N_A/N de même que leurs valeurs limites possèdent les propriétés suivantes :
- F(A)≥0, pour tout A ;
- F(Ω) = 1 ;
- $F(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} F(A_i)$ pour toute suite finie d'évènements deux à deux incompatibles.

On retient ces propriétés pour définir de façon axiomatique les probabilités sans en faire reposer la définition sur la loi empirique des grands nombres.

2.4.3 Définition d'une probabilité

Définition 5 (Définition axiomatique selon Kolmogoroff) *Une probabilité est une application P qui à tout évènement aléatoire A associe une probabilité P(A), telle que :*
- *Axiome 1 : P(A) est un nombre réel positif ou nul : $P(A) \geq 0$;*
- *Axiome 2 : la probabilité de l'évènement certain est 1 : P(Ω) = 1 ;*
- *Axiome 3 : la probabilité d'une somme dénombrable d'évènements deux à deux incompatibles A_1, A_2, ... est égale à la somme des probabilités des évènements : $P(A_1 \cup A_2 \cup ...) = P(A_1) + P(A_2) + ...$.*

2.4.4 Règles des probabilités

Nous citons ci-après quelques règles de base.

1. La probabilité de l'évènement certain est la plus grande probabilité que peut obtenir un évènement :

$$P(\Omega) = 1$$

2. La probabilité de l'évènement impossible est égale à 0 :

$$P(\emptyset) = 0$$

3. La probabilité de l'évènement contraire A^C de A est égale à :

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

4. Si un évènement A implique un évènement B, c'est à dire si A⊂B, alors :

$$P(A) \leq P(B)$$

5. Soient A et B deux évènements incompatibles (A∩B=∅), la probabilité de la somme de A et B est égale à :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

6. Soient A et B deux évènements quelconques, la probabilité de la somme de A et B est égale à :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

2.4.5 Probabilité uniforme

Lorsque Ω est fini, si toutes les probabilités des évènements élémentaires ω sont égales entre elles, alors nécessairement

$$P(\omega) = \frac{1}{Card(\Omega)}$$

et la probabilité correspondante est dite probabilité uniforme :

$$P_u(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

Pour tout évènement, P_u(A) est le rapport du nombre de cas favorables à A au nombre total de cas possibles. Cette probabilité uniforme régit la plupart des modèles finis de jeux de hasard.
Pour cette probabilité uniforme P_u, les calculs de probabilités d'évènements sont des calculs de cardinaux d'ensembles.

Exemple 6 *On jette simultanément deux dés, on cherche la probabilité d'obtenir un total supérieur ou égal à 10. Les couples solutions sont au nombre de six : (4,6), (6,4), (5,5), (5,6), (6,5) et (6,6), sur 36 couples possibles. On a donc :*
$P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

2.4.6 Probabilités conditionnelles

Quand les évènements sont liés entre eux, l'information concernant un des évènements peut modifier la probabilité des autres évènements. On parle donc de probabilités conditionnelles.

Définition 6 *La probabilité conditionnelle P(B|A) ("probabilité de B sachant A") est la probabilité de l'évènement B sous la condition que l'évènement A s'est réalisé.*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B}{P(A)}, P(A) > 0$$

Si l'évènement A implique l'évènement B , alors P(B|A) = 1.
P(B|A) et P(B) sont en général différents l'un de l'autre. Si P(B|A) = P(B), la probabilité de B n'est pas affectée par le fait que l'évènement A se produise ou non.

Exemple 7 *Une urne contient trois boules rouges, deux noires et une verte. On tire deux boules, sans remise dans l'urne. Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ? Solution : Soit A_1 l'évènement "obtenir une boule rouge au premier tirage". Soit A_2 l'évènement "obtenir une boule rouge au deuxième tirage". On a $P(A_1) = \frac{3}{6}$. On a $P(A_2/A_1) = \frac{2}{5}$. D'après la formule des probabilités conditionnelles, on obtient : $P(\ A_1 \cap A_2\ ) = \frac{3}{6}.\frac{2}{5} = \frac{1}{5}$.*

2.4.7 Indépendance

Définition 7 *Deux évènements d'un même ensemble de probabilité sont dits indépendants lorsque la probabilité de leur intersection est donnée par la formule :*

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

La relation d'indépendance peut encore s'écrire, grâce à l'axiome des probabilités conditionnelles, sous l'une ou l'autre des deux formes équivalentes suivantes :
- P(B) = P(B|A) ;
- P(A) = P(A|B).

La première de ces égalités, par exemple, exprime que la probabilité de l'évènement B n'est pas modifié par l'information que A est réalisé.

Exemple 8 *Au jeu de pile ou face, la probabilité d'obtenir deux fois pile à deux lancés successifs de la pièce est égale au produit d'obtenir pile à chacun des deux lancers, c'est-à-dire $\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.*

Exemple 9 *Les évènements $A = \{2, 4, 6\}$ et $B = \{5, 6\}$ sont associés au lancer d'un dé. On a $A \cap B = \{6\}$ et les probabilités :*
- *$P(A) = \frac{1}{2}$;*
- *$P(B) = \frac{1}{3}$;*
- *$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.*

Ceci prouve que les évènements A et B sont indépendants : savoir que le point amené au dé est pair ne rend l'évènement B ni plus ni moins probable.

Si A et B sont des évènements indépendants, alors les évènements A^C et B, A et B^C, A^C et B^C sont aussi des évènements indépendants.

Indépendants	P(A∩B) = P(A).P(B)
Dépendants	P(A∩B) = P(A).P(B|A) = P(B).P(A|B)

TAB. 2.2 – Probabilité d'un produit d'évènements

Incompatibles	P(A∪B) = P(A) + P(B)
Compatibles	P(A∪B) = P(A) + P(B) - P(A∩B)

TAB. 2.3 – Probabilité d'une somme d'évènements

2.4.8 Calcul de probabilités

On résume dans les tableaux 2.2 et 2.3 les formules d'intersection et de réunion de deux évènements.