EPITECH
PROBABILITES ET STATISTIQUES
Année 2011-2012
Mini-projet 205inter

1 Objectif

2 Sujet / 1ère partie : intégration numérique

Le but est d'écrire un programme qui calcule les intégrales de la forme :

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Les données sont la fonction f(.) et les bornes d'intégration a et b. Pour ce calcul, on utilisera la méthode d'intégration numérique de Simpson décrite en annexe. Cette méthode est basée sur une subdivision de l'intervalle [a,b] en sous-intervalles réguliers. On choisira 20 sous-intervalles (ou plus) par intervalle unité (par exemple sur [0,1]). C'est à dire, que sur l'intervalle [a,b], on choisira comme nombre de subdivisions, l'entier le plus proche de (b-a)*20.

Pour tester votre programme, vous pourrez utiliser les résultats suivants sur l'intervalle [0,1] :

$$\int_0^1 1\,dx = 1$$

$$\int_0^1 x\,dx = 1/2$$

$$\int_0^1 x^2\,dx = 1/3$$

$$\vdots$$

$$\int_0^1 x^n\,dx = 1/(n+1) \qquad n \geq 0$$

Sujet / 2ème partie : calcul de probabilités

On considère la loi normale centrée réduite Z. On demande maintenant au programme d'évaluer les valeurs des probabilités P(a $\leq$ Z $\leq$ b) où a et b sont deux réels arguments du programme. Pour cela, il faut calculer la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, dont on rappelle la définition :

$$F(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{a} exp(-z^2/2)dz$$

Naturellement, il n'est pas question d'intégrer numériquement sur l'intervalle]-∞,a]. On se restreindra à l'intervalle [-10,a] en dehors duquel la fonction à intégrer est quasi nulle. On rappelle que l'on a la formule suivante :

$$P(a \leq Z \leq b) = F(b) - F(a)$$

3 Le logiciel

Répertoire de rendu : $\tilde{/}$../rendu/math/205inter/
Nom de l'exécutable : 205inter
Exemple de lancer :
$>$ **205inter** a b
En entrée : les deux bornes (flottants) de l'intervalle.
En sortie : la probabilité P(a $\leq$ Z $\leq$ b) affichée avec trois chiffres après la virgule. Une présentation soignée des résultats sera appréciée.

4 Exemples

P(0 $\leq$ Z $\leq$ 1,6) = 0,445
P(1 $\leq$ Z $\leq$ 1,6) = 0,104
P(-1 $\leq$ Z $\leq$ 1,6) = 0,787
P(-1,6 $\leq$ Z $\leq$ -1) = 0,104

5 Questions

1° Soit une mesure physique sujette à un assez grand nombre d'erreurs indépendantes et additives. Comment se comporte l'erreur totale ?
2° Quels sont les deux paramètres qui déterminent entièrement une loi normale ?
3° La courbe en cloche est la représentation de quelle fonction ?
4° La table de Gauss contient les valeurs de quelle fonction ?
5° Quelles sont l'espérance et la variance de la loi normale centrée réduite ?

Annexe : méthode de Simpson

Dans ce paragraphe, on décrit la méthode de Simpson qui permet de calculer numériquement une intégrale :

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

On choisit une subdivision à pas constant noté h de l'intervalle [a,b]. Le pas h est égal à :

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Les (n+1) points de la subdivision sont notés x_i et vérifient :

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_n = b \\ x_{i+1} = x_i + h, \quad i = 0, ..., n-1 \end{cases}$$

On écrit alors l'intégrale sur [a,b] comme somme d'intégrales sur chacun des sous intervalles :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

Si le pas h de la subdivision est suffisamment petit (n grand), alors on peut supposer que la fonction f(x) est quasiment constante sur chaque sous intervalle. On remplace alors la valeur de f(x) par une valeur constante. Plusieurs choix sont possibles. Soit $]x_i, x_{i+1}[$ un intervalle de la subdivision, on peut choisir :

$$\begin{cases} \text{soit } f(x) = f(x_i) & \text{valeur à gauche} \\ \text{soit } f(x) = \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} & \text{valeur milieu} \\ \text{soit } f(x) = f(x_{i+1}) & \text{valeur à droite} \\ ... & \end{cases}$$

Mais ces différents choix ne procurent pas de très bons résultats. Dans la méthode de Simpson, sur chaque sous intervalle, on utilise une formule obtenue par intégration d'un polynôme de degré 2. Cette formule est la suivante :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \frac{h}{6}\left(f(x_i) + f(x_{i+1}) + 4.f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\right)$$

On utilise alors une somme de cette formule pour l'intervalle [a,b]. On obtient l'approximation suivante :

Méthode de Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{6n}\left(f(a) + f(b) + 2.\sum_{i=1}^{n-1} f(a + i.h) + 4.\sum_{i=0}^{n-1} f(a + i.h + \frac{h}{2})\right)$$

Cette formule est exacte pour les polynômes de degré 3. L'erreur d'approximation commise est en $\frac{1}{n^4}$. C'est une méthode qui donne de très bons résultats sans que l'on soit obligé de choisir une valeur élevée pour n.