ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2

МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ЧИСЕЛ

При дослідженні систем методом імітаційного моделювання сама випадковість безпосередньо включається у процес моделювання і складає його суттєвий елемент. Кожного разу, коли на хід модельованого процесу впливає випадковий фактор, його вплив імітується за допомогою спеціального організованого розіграшу (жеребу). Таким чином, будується одна реалізація випадкового явища, що є як би результатом одного досліду. У процесі моделювання для отримання точнішої оцінки результату формується велике число реалізації (прогонів моделі). Формування (розігрування) реалізацій випадкових процесів (подій, величин і функцій) із заданими характеристиками називають ***моделюванням випадкових процесів***.

Проте програми вироблення (генератори) випадкових чисел з необхідним законом розподілу можуть виявитися дуже громіздкими. Тому випадкові числа з необхідним законом розподілу отримують не безпосередньо, а шляхом перетворення випадкових чисел, що мають деякий початковий розподіл. До початкового розподілу висувають такі вимоги: простота отримання чисел на ЕОМ; зручність перетворення випадкових чисел у розподіл із заданим законом. Встановлено, що рівномірний закон розподілу достатньою мірою задовольняє цим вимогам. Отже моделювання випадкових процесів може бути побудоване на використанні датчика випадкових чисел, рівномірно розподілених в інтервалі [0;1].

1. Моделювання дискретних випадкових величин.

Розглянемо дискретну випадкову величину X, що приймає n значень $x_1, x_2, ..., x_n$ з ймовірностями $p_1, p_2, ..., p_n$. Ця величина задається таблицею розподілу

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

при чому $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Для моделювання такої дискретної випадкової величини відрізок [0;1] розбивають на n послідовних відрізків $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$, довжини яких дорівнюють відповідним ймовірностям $p_1, p_2, ..., p_n$, тобто $\Delta_i = p_i$, $i=1,2,\ldots,n$.

Отримують випадкову величину $R\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$, рівномірно розподілену в інтервалі [0;1]. Якщо випадкове число r_k, що формується генератором випадкових чисел, котрі відповідають рівномірному закону розподілу на інтервалі [0; 1], потрапляє до інтервалу Δ_i, то випадкова величина X набуває значення x_i. з імовірністю p_i. Дійсно:

$$P(l_{i-1} < R \le l_i) = \int_{l_{i-1}}^{l_i} f_R(x)dx = p_i ,$$

де $\quad l_{i-1} = \sum_{k=1}^{i-1} p_k, \; l_i = \sum_{k=1}^{i} p_k = l_{i-1} + p_i, \quad f_R(x)$ – густина розподілу імовірності випадкової величини R:

$$f_R(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0;1] \\ 0, & x \notin [0;1] \end{cases}.$$

Має місце твердження: якщо кожному випадковому числу $r_k \in [0,1]$, яке потрапило в інтервал Δ_i, поставити у відповідність можливе значення x_i з ймовірністю p_i, то величина, яка розігрується буде мати заданий закон розподілу.

Приклад. Змоделювати 8 значень дискретної випадкової величини X, яка задана таблицею розподілу:

X	x_1=3	x_2=11	x_3=24
P	p_1=0,25	p_2=0,16	p_3=0,59

Розв’язок.

1. Розіб’ємо інтервал [0;1] точками з координатами 0,25; 0,25+0,16=0,41 на три часткових інтервали:

Δ_1=[0;0,25), Δ_2=[0,25;0.41), Δ_3=[0,41;1].

2. Згенеруємо за допомогою комп'ютера 8 випадкових чисел, наприклад, $r_1 = 0{,}10$; $r_2 = 0{,}37$; $r_3 = 0{,}08$; $r_4 = 0{,}99$; $r_5 = 0{,}12$; $r_6 = 0{,}66$; $r_7 = 0{,}31$; $r_8 = 0{,}85$.

3. Випадкове число $r_1 = 0{,}10$ належить першому частковому інтервалу, тому випадкова величина, яка розігрується прийняла можливе значення $x_1 = 3$. Випадкове число $r_2 = 0{,}37$ належить другому частковому інтервалу, тому величина, яка розігрується прийняла можливе значення $x_2 = 11$. Аналогічно отримаємо решту можливих значення дискретної випадкової величини X.

Результат: послідовність змодельованих можливих значень дискретної випадкової величини X така: {3; 11; 3; 24; 3; 24; 11; 24}.

2. Моделювання неперервних випадкових величин

Існує багато методів моделювання неперервних випадкових величин. Серед цих методів відзначимо **метод виключення** (метод Неймана).

Суть методу виключення викладена нижче.

Нехай випадкова величина X визначена на скінченому інтервалі $(a;b)$ і густина її розподілу обмежена, так що $f(x) \le M$. Тоді, використовуючи пару рівномірно розподілених на інтервалі (0;1) випадкових

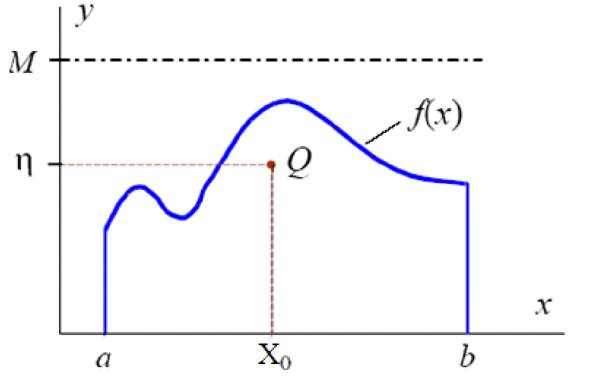


Рисунок 1 - Графічне зображення методу Неймана чисел R, здійснюємо такі дії для розіграшу (моделювання) значення X:

1. Розігруємо два значення r_1 і r_2 випадкової величини R і будуємо випадкову точку Q (див. рисунок 1) з координатами $X_0=a+r_1\cdot(b-a)$, $\eta=r_2\cdot M$.

2. Якщо $\eta>f(X_0)$, то пару значень (r_1, r_2) відкидаємо і переходимо до пункту 1; інакше приймаємо $X = X_0$.

Таким чином, визначаються координати випадкової точки $Q(X_0,\eta)$ і, якщо точка опиниться під кривою $f(x)$, то абсциса цієї точки приймається як значення випадкової величини $X=X_0=a+r_1\cdot(b-a)$ з густиною розподілу $f(x)$. В іншому випадку точка відкидається, визначаються координати наступної точки, і все повторюється.

Перевірка гіпотези про закон розподілу методом гістограм

Нехай в результаті експерименту отримано n значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$ випадкової величини X і всі вони лежать у межах $a < x_i < b$.

Суть перевірки по гістограмі така:

1. Інтервал ($a; b$) розбивається на L підінтервалів довжин Δ_j. На практиці, як правило, усі підінтервали вибираються однакової довжини. Тоді $\Delta_j=(b-a)/L$, $j=\overline{1,L}$. Число підінтервалів L можна встановити аналітично за формулою Стерджеса: $L=1+3{,}322\lg n$ де n – кількість значень випадкової величини. Нижче наведено таблицю, яка визначає число підінтервалів за об’ємом вибірки n:

n	15-22	23-45	46-90	91-180	181-360	361-710
L	5	6	7	8	9	10

Тоді при генерації послідовності $\{x_i\}$ кожне з чисел x_i потрапляє в один з підінтервалів. Всього в кожен j-й підінтервал потрапляє n_j чисел послідовності $\{x_i\}$, $i=\overline{1,n}$, (n_j називають частотою потраплянь випадкових чисел послідовності $\{x_i\}$ в кожний з підінтервалів), причому $n=\sum_{j=1}^{L} n_j$. Відносною частотою потрапляння випадкових чисел послідовності $\{x_i\}$ в кожний з підінтервалів називають величину $w_j=n_j/n$.

2. Над кожним з підінтервальних розбиттів будується прямокутник, площа якого дорівнює частоті потрапляння n_j, в цей підінтервал. Висота кожного прямокутника дорівнює частоті n_j, поділеній на Δ_j. Отриману ступінчасту лінію називають *гістограмою*. Таким чином, гістограма є графічним зображенням залежності частоти потрапляння елементів вибірки від відповідного інтервалу групування.

Знаходження числових характеристик послідовностей випадкових чисел

Нехай в результаті експерименту отримана послідовність $\{x_i\}$ змодельованих значень випадкової величини X. Знайдемо вибіркове середнє, і вибіркове середньоквадратичне відхилення (вибіркова дисперсія) цієї послідовності:

вибіркове середнє: $\overline{x_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

вибіркова дисперсія: $\sigma_n^2 = \frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_n\right)^2$.

Значення $\overline{x}_n$ і σ_n^2 можна прийняти в якості оцінок математичного очікування $M\{X\}$ і дисперсії $D\{X\}$ величини X, тобто, $M\{X\} \equiv \overline{x} \approx \overline{x}_n$, $D\{X\} \equiv \sigma^2 \approx \sigma_n^2$. Наближені рівності стають точними в межі, коли $n \to \infty$. Вибіркове середньоквадратичне відхилення σ_n дорівнює квадратному кореню з вибіркової дисперсії $\sigma_n = \sqrt{\sigma_n^2}$.

3. Порядок виконання роботи

3.1. Змоделювати послідовність із *n*=100 значень дискретної випадкової величини *X*, заданої таблицею 1.

Таблиця 1 – Таблиця розподілів

Варіант	Таблиця розподілів							
1	x_i	5	7	17	19	21	25	55
	p_i	0.01	0.05	0.3	0.3	0.3	0.02	0.02
2	x_i	1	3	7	10	15	18	23
	p_i	0.1	0.05	0.02	0.05	0.25	0.33	0.2
3	x_i	2	3	5	12	21	33	44
	p_i	0.1	0.15	0.2	0.05	0.02	0.33	0.15
4	x_i	5	8	13	16	21	24	29
	p_i	0.1	0.02	0.25	0.15	0.35	0.03	0.1
5	x_i	2	3	5	8	11	15	20
	p_i	0.1	0.15	0.25	0.05	0.05	0.3	0.1
6	x_i	1	8	17	23	37	42	50
	p_i	0.01	0.15	0.05	0.25	0.5	0.02	0.02
7	x_i	1	4	12	16	25	33	37
	p_i	0.05	0.25	0.25	0.15	0.13	0.1	0.07
8	x_i	1	10	15	23	29	38	42
	p_i	0.02	0.05	0.1	0.28	0.23	0.22	0.1
9	x_i	2	3	7	12	19	23	30

	p_i	0.04	0.15	0.2	0.25	0.2	0.15	0.01
10	x_i	1	5	7	14	21	26	31
	p_i	0.34	0.28	0.16	0.15	0.05	0.01	0.01
11	x_i	3	5	8	14	27	29	35
	p_i	0.02	0.07	0.1	0.19	0.19	0.2	0.23
12	x_i	7	16	28	33	39	46	56
	p_i	0.01	0.05	0.07	0.1	0.17	0.25	0.35
13	x_i	5	6	8	13	19	26	36
	p_i	0.05	0.07	0.2	0.23	0.17	0.23	0.05
14	x_i	3	9	18	23	29	27	45
	p_i	0.05	0.14	0.2	0.22	0.17	0.14	0.08
15	x_i	13	16	28	33	39	47	52
	p_i	0.08	0.14	0.25	0.16	0.25	0.09	0.03
16	x_i	1	6	8	13	19	24	27
	p_i	0.09	0.1	0.21	0.17	0.23	0.15	0.05
17	x_i	4	6	10	14	16	20	24
	p_i	0.04	0.1	0.1	0.27	0.33	0.13	0.03
18	x_i	2	6	12	16	22	26	32
	p_i	0.02	0.14	0.24	0.27	0.2	0.1	0.03
19	x_i	3	6	9	13	19	27	31
	p_i	0.04	0.12	0.22	0.28	0.2	0.1	0.04
20	x_i	1	3	8	11	19	29	33
	p_i	0.02	0.26	0.18	0.32	0.16	0.02	0.04

3.1.1. Оцінити математичне сподівання отриманої дискретної випадкової величини, результат вивести на екран.

3.1.2. Оцінити дисперсію отриманої дискретної випадкової величини, результат вивести на екран.

3.1.3. Побудувати частотну таблицю 2 (кількість інтервалів не менше 10), вивести її на екран.

Таблиця 2 – Частотна таблиця

Інтервал	Частота потрапляння	Відносна частота потрапляння
Δ_1	n_1	w_1
Δ_2	n_2	w_2
…	…	…
Δ_L	n_L	w_L

3.1.4. Побудувати гістограму та оцінити за її допомогою закон розподілу випадкової величини X.

3.1.5. Повторити виконання роботи для n=1000. Порівняти результати.

3.2. Змоделювати методом Неймана неперервну випадкову величину із заданою густиною розподілу ймовірності (таблиця 3).

(Функції для графіка розраховуються за формулами $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ або y= $kx+b$ (залежно від виду графіка)).

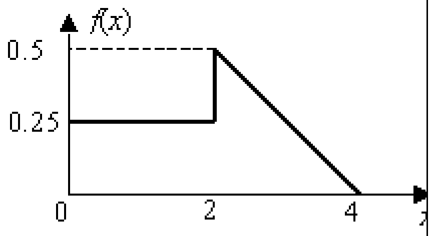
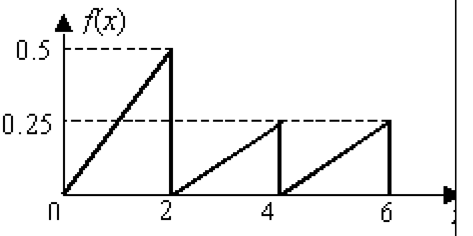
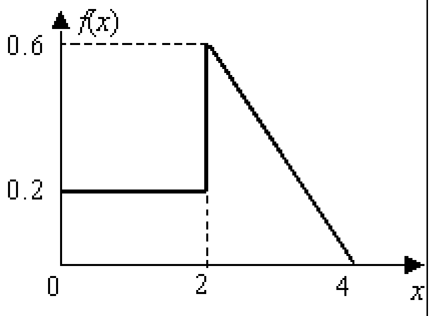
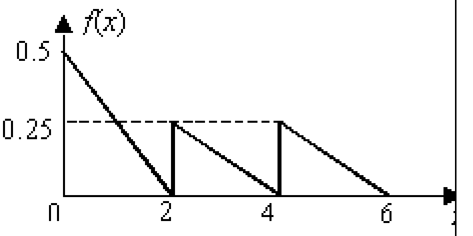
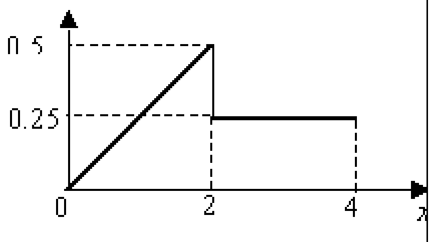
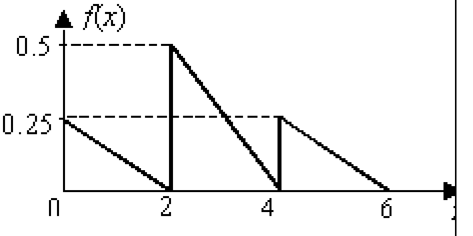
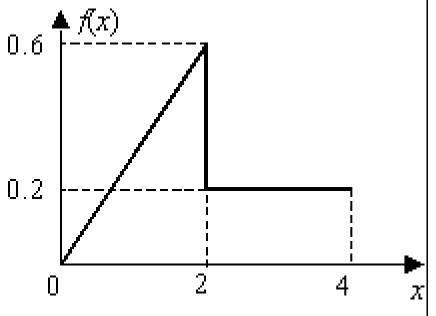
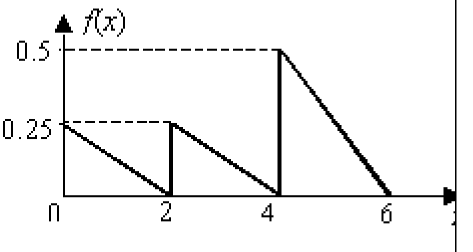
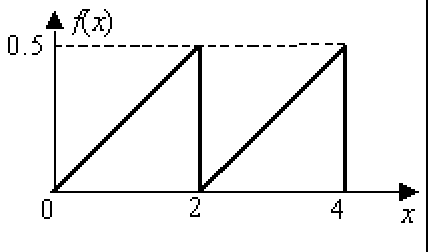
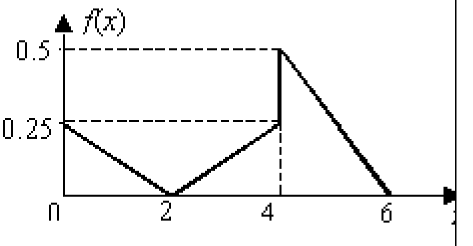
3.2.1. Оцінити математичне сподівання отриманої дискретної випадкової величини, результат вивести на екран.

3.2.2. Оцінити дисперсію отриманої дискретної випадкової величини, результат вивести на екран.

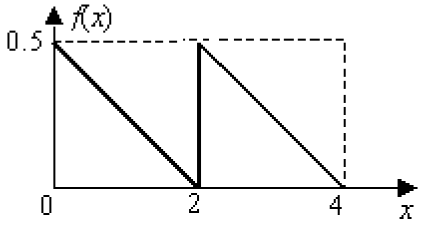
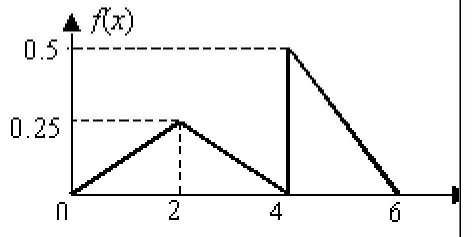
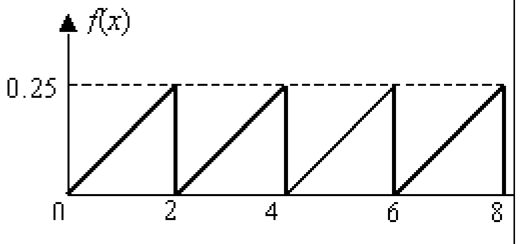
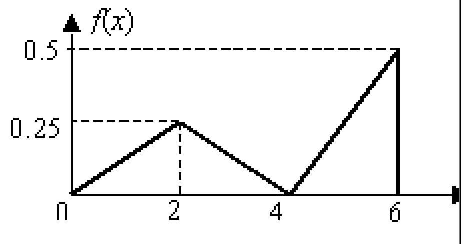
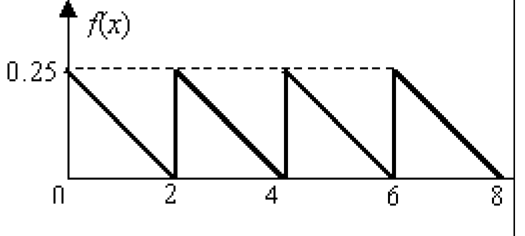
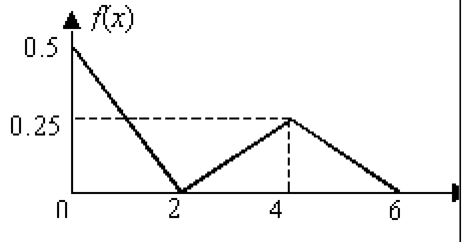
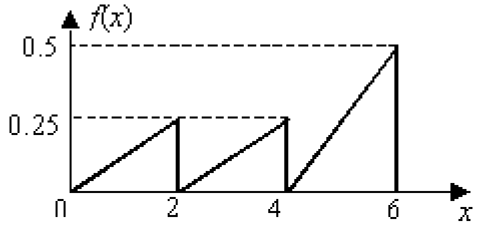
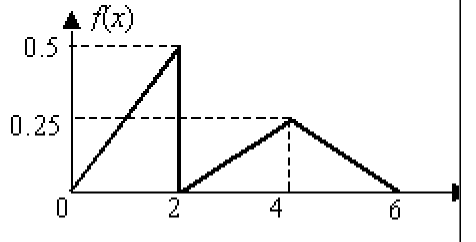
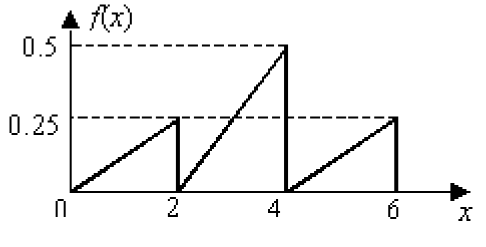
3.2.3. Побудувати частотну таблицю 2 (кількість інтервалів не менше 10), вивести її на екран.

3.2.4. Перевірити гіпотезу про закон розподілу методом гістограм, побудувати і вивести на екран гістограму

Таблиця 3 – Густина розподілу ймовірності випадкової величини.

Варіант	Густина розподілу	Варіант	Густина розподілу
1		11	
2		12	
3		13	
4		14	
5		15	

Продовження таблиці 3

Варіант	Густина розподілу	Варіант	Густина розподілу
6		16	
7		17	
8		18	
9		19	
10		20