Львівський національний університет імені Івана Франка

Факультет електроніки та комп’ютерних технологій

Звіт

Про виконання лабораторної роботи №3

МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ЧИСЕЛЗ ВІДОМИМИ ЗАКОНАМИ РОЗПОДІЛУ

Виконав

Студент групи ФеП-21

Берніш Микола

Перевірив:

Доц. Сас Н.Б

Львів 2021

Мета: Навчитись моделювати відомі випадкові процеси та визначати їхні основні характеристики.

Завдання:

3. Порядок виконання лабораторної роботи.

3.1. Змоделювати послідовність із N=100 значень випадкової величини X, розподіленою:

a) за законом Пуассона;

b) за показниковим законом;

c) за нормальним законом.

3.2. Для кожної вибірки визначити вибіркове середнє і вибіркову дисперсію та порівняти їх з теоретичними значеннями.

3.3. Побудувати гістограми та оцінити за їх допомогою закон розподілу випадкової величини X.

3.4. Повторити виконання роботи для N=1000. Порівняти результати.

Вибір параметрів моделювання

Нехай n – порядковий номер студента у журналі.

Для моделювання розподілу Пуассона $\lambda=n$, p=0,1.
Для моделювання показникового розподілу $\lambda=n/10$.
Для моделювання нормального розподілу $m=n$, $\sigma = n(\mathrm{mod}\,5)$.

Хід роботи

Завдання 3.1

1. Створимо програму яка генерує масив чисел трьох видів розподілу з параметрами даними для мого варіанту

```
puasson_lamda =3
puasson_p =0.1
poisson_vib = poisson_arr(N,lamda=puasson_lamda,p=puasson_p)
exponent_lamda = 3/10
exponent_vib = pokaznic_rand(N,exponent_lamda)
normal_m =3
normal_omega = 3
normal_vib = normal_rand(N,m=normal_m,omega=normal_omega)
```

Рис.1

Результат генерації розподілу Пуассона

```
print("Вибірка пуасона:")
print(poisson_vib)
# df = pd.DataFrame(poisson_vib,columns=["values"])
# pd.set_option('display.max_rows', df.shape[0]+1)
# print(df)
```

```
Вибірка пуасона:
[3, 3, 2, 7, 4, 1, 2, 3, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 2, 3, 1, 5, 6, 5, 4, 5, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 4, 1, 5, 4, 5, 4, 6, 4, 3, 1, 2, 3, 5, 2,
4, 3, 7, 4, 2, 4, 3, 2, 4, 4, 2, 1, 7, 3, 1, 1, 1, 0, 4, 2, 2, 2, 2, 2, 6, 1, 0, 7, 3, 3, 2, 1, 1, 5, 1, 4, 5, 5, 3, 1, 6, 4,
4, 4, 2, 3, 5, 1, 4, 5, 5, 2, 6, 2, 2, 4, 4, 2]
```

Результат генерації експоненціального розподілу

```
print("Вибірка показникова:")
print(exponent_vib)
# df = pd.DataFrame(exponent_vib,columns=["values"])
# pd.set_option('display.max_rows', df.shape[0]+1)
# print(df)
```

```
Вибірка показникова:
[4.68, 0.41, 0.6, 3.04, 0.24, 16.99, 4.0, 0.83, 0.56, 2.35, 0.04, 1.98, 0.8, 1.98, 2.34, 2.65, 0.26, 0.34, 2.81, 5.33, 1.29, 0.
83, 3.64, 9.44, 10.05, 8.6, 0.97, 7.88, 2.58, 0.14, 1.87, 7.66, 6.93, 3.37, 7.65, 1.16, 8.71, 1.21, 6.34, 4.83, 1.61, 1.43, 2.4
5, 7.66, 0.74, 1.8, 0.96, 0.05, 0.17, 3.42, 5.39, 0.06, 0.14, 3.01, 4.0, 3.54, 2.56, 5.37, 3.2, 0.14, 0.75, 2.92, 3.62, 8.52,
4.97, 3.34, 3.77, 2.2, 2.59, 1.37, 1.03, 15.44, 1.1, 2.2, 12.91, 6.97, 3.67, 1.08, 0.84, 3.36, 2.04, 3.86, 8.34, 0.79, 2.31, 0.
47, 8.2, 2.08, 0.02, 0.24, 7.87, 4.34, 0.1, 4.35, 0.91, 1.03, 0.98, 0.2, 0.09, 1.71]
```

Результат генерації нормального розподілу

```
print("Вибірка нормальна:")
print(normal_vib)
# df = pd.DataFrame(normal_vib,columns=["values"])
# pd.set_option('display.max_rows', df.shape[0]+1)
# print(df)
```

```
Вибірка нормальна:
[-0.43, 2.28, 4.27, 5.48, 8.32, -0.29, 4.73, 4.95, 4.49, 3.27, 4.55, -3.47, -0.19, 6.56, 8.38, 1.71, 3.84, 8.95, 6.46, 1.92, 2.
53, 0.62, -3.75, 2.28, 6.38, 5.49, 5.19, 6.31, 4.88, 2.77, 7.14, 0.0, 3.98, 3.98, 1.62, 3.18, 2.25, 4.51, 4.42, 1.39, 1.93, 2.8
1, -1.06, 2.96, 1.79, 4.45, 2.13, 0.11, 0.14, 3.72, -1.52, 1.96, 2.2, 2.17, 4.9, 5.61, 1.69, -1.35, 5.45, 5.59, 3.35, 2.72, 3.4
4, 4.03, -1.26, 3.51, 3.51, 3.63, 4.53, 0.3, 4.5, 2.48, 5.67, 2.52, 6.39, 5.25, 3.06, 0.54, -0.15, -2.96, 5.39, 7.56, 6.26, 1.3
6, 7.74, 0.35, 3.05, 3.95, 4.03, -1.33, 5.99, 0.95, 5.03, -0.08, 2.33, -0.38, 4.43, 1.17, 1.92, 3.14]
```

2. Тепер виведемо на екран Теоретичне середнє значення вибірок і дисперсію та порівняємо з реальними даними згенерованих вибірок

Дані розподілу Пуасона

```
print("Вибірка Пуасона:")
print(f"Теоретичне середнє - {puasson_lamda}")
poisson_ser = sum(poisson_vib)/ len(poisson_vib)

print(f"Середнє вибіркове - { poisson_ser}")
print(f"Теоретична дисперсія - {puasson_lamda}")
poisson_disp = sum([(xi - poisson_ser) ** 2 for xi in poisson_vib]) / len(poisson_vib)
print(f"Вибіркова дисперсія - {poisson_disp}")
```

```
Вибірка Пуасона:
Теоретичне середнє - 3
Середнє вибіркове - 3.21
Теоретична дисперсія - 3
Вибіркова дисперсія - 2.7858999999999976
```

Дані експоненціального розподілу

```
print("Вибірка Показникова:")

print(f"Теоретичне середнє - { exponent_lamda**(-1)}")
exponent_ser = sum(exponent_vib)/ len(exponent_vib)

print(f"Середнє вибіркове - { exponent_ser}")
print(f"Теоретична дисперсія - {exponent_lamda**(-2)}")
exponent_disp = sum([(xi - exponent_ser) ** 2 for xi in exponent_vib]) / len(exponent_vib)
print(f"Вибіркова дисперсія - {exponent_disp}")
```

```
Вибірка Показникова:
Теоретичне середнє - 3.3333333333333335
Середнє вибіркове - 3.2766
Теоретична дисперсія - 11.111111111111112
Вибіркова дисперсія - 11.141180439999998
```

Дані нормального розподілу

```
print("Вибірка Нормальна:")

print(f"Теоретичне середнє - { normal_m}")
normal_ser = sum(normal_vib)/ len(normal_vib)

print(f"Середнє вибіркове - { normal_ser}")
print(f"Теоретична дисперсія - {normal_omega**2}")
normal_disp = sum([(xi - normal_ser) ** 2 for xi in normal_vib]) / len(normal_vib)
print(f"Вибіркова дисперсія - {normal_disp}")
```

```
Вибірка Нормальна:
Теоретичне середнє - 3
Середнє вибіркове - 3.0454999999999997
Теоретична дисперсія - 9
Вибіркова дисперсія - 6.9036807499999995
```

Як видно на рисунках, отримані дані наближено дорівнюють теоретичним, при збільшенні розміру вибірки відмінність буде ставати все менша

N = 1000

Дані розподілу Пуасона

```
print("Вибірка Пуасона:")
print(f"Теоретичне середнє - {puasson_lamda}")
poisson_ser = sum(poisson_vib)/ len(poisson_vib)

print(f"Середнє вибіркове - { poisson_ser}")
print(f"Теоретична дисперсія - {puasson_lamda}")
poisson_disp = sum([(xi - poisson_ser) ** 2 for xi in poisson_vib]) / len(poisson_vib)
print(f"Вибіркова дисперсія - {poisson_disp}")
```

```
Вибірка Пуасона:
Теоретичне середнє - 3
Середнє вибіркове - 3.04
Теоретична дисперсія - 3
Вибіркова дисперсія - 2.8843999999999995
```

Дані експоненціального розподілу

```
print("Вибірка Показникова:")

print(f"Теоретичне середнє - { exponent_lamda**(-1)}")
exponent_ser = sum(exponent_vib)/ len(exponent_vib)

print(f"Середнє вибіркове - { exponent_ser}")
print(f"Теоретична дисперсія - {exponent_lamda**(-2)}")
exponent_disp = sum([(xi - exponent_ser) ** 2 for xi in exponent_vib]) / len(exponent_vib)
print(f"Вибіркова дисперсія - {exponent_disp}")
```

```
Вибірка Показникова:
Теоретичне середнє - 3.3333333333333335
Середнє вибіркове - 3.4265500000000033
Теоретична дисперсія - 11.111111111111112
Вибіркова дисперсія - 12.275097997499998
```

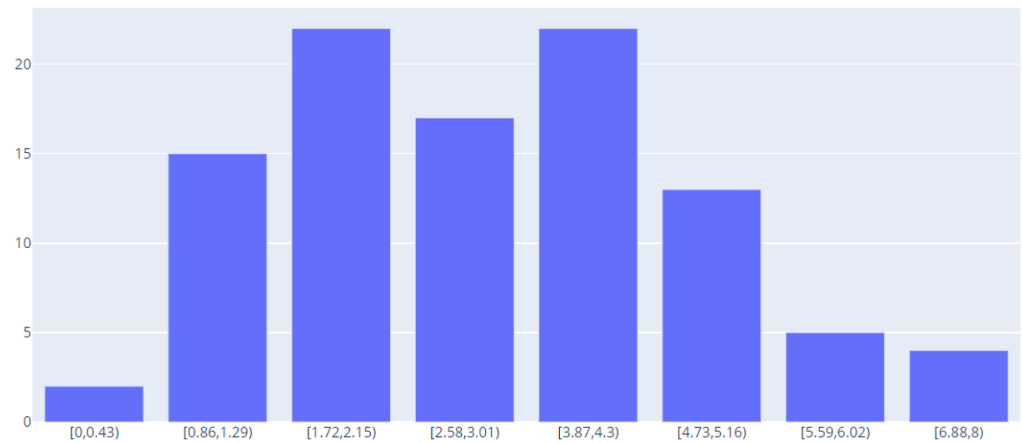
Дані нормального розподілу

```
print("Вибірка Нормальна:")

print(f"Теоретичне середнє - { normal_m}")
normal_ser = sum(normal_vib)/ len(normal_vib)

print(f"Середнє вибіркове - { normal_ser}")
print(f"Теоретична дисперсія - {normal_omega**2}")
normal_disp = sum([(xi - normal_ser) ** 2 for xi in normal_vib]) / len(normal_vib)
print(f"Вибіркова дисперсія - {normal_disp}")
```

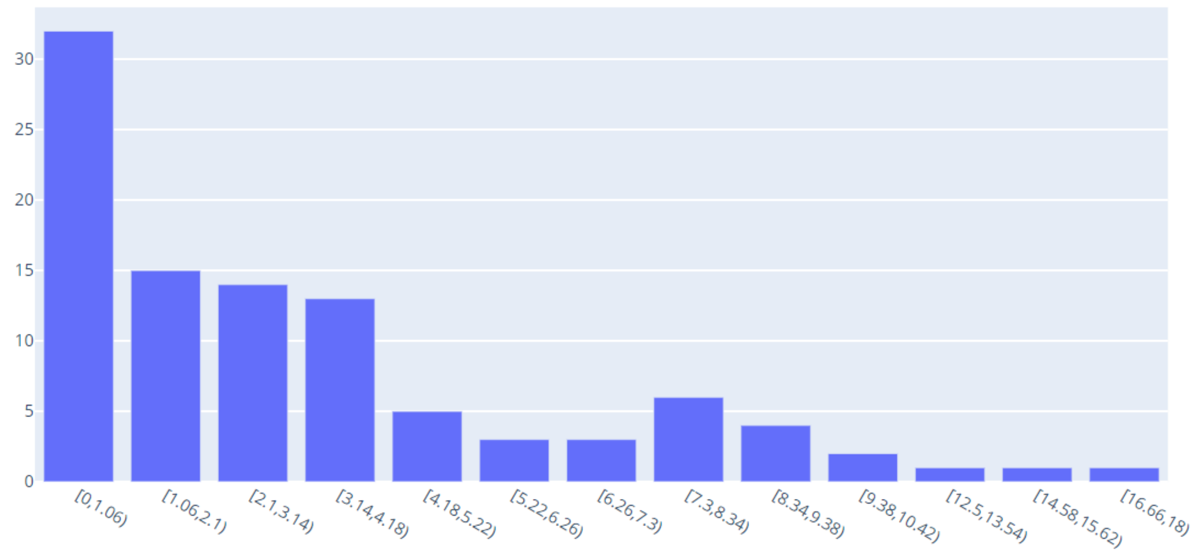
```
Вибірка Нормальна:
Теоретичне середнє - 3
Середнє вибіркове - 2.9584299999999977
Теоретична дисперсія - 9
Вибіркова дисперсія - 9.095874035100008
```

3. Тепер оцінимо гістограми вибірок (старі дані N=100)

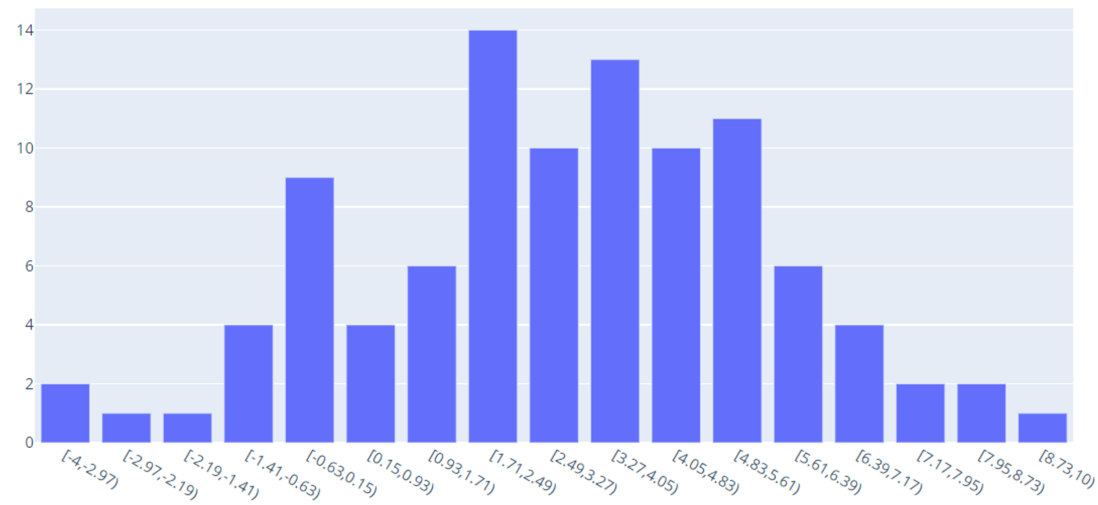
Гістограма розподілу Пуасона



Гістограма експоненціального розподілу

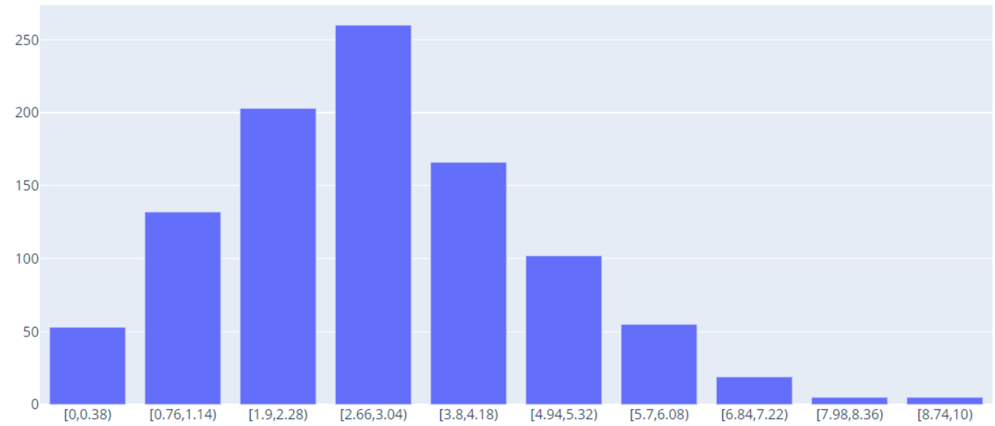


Гістограма нормального розподілу

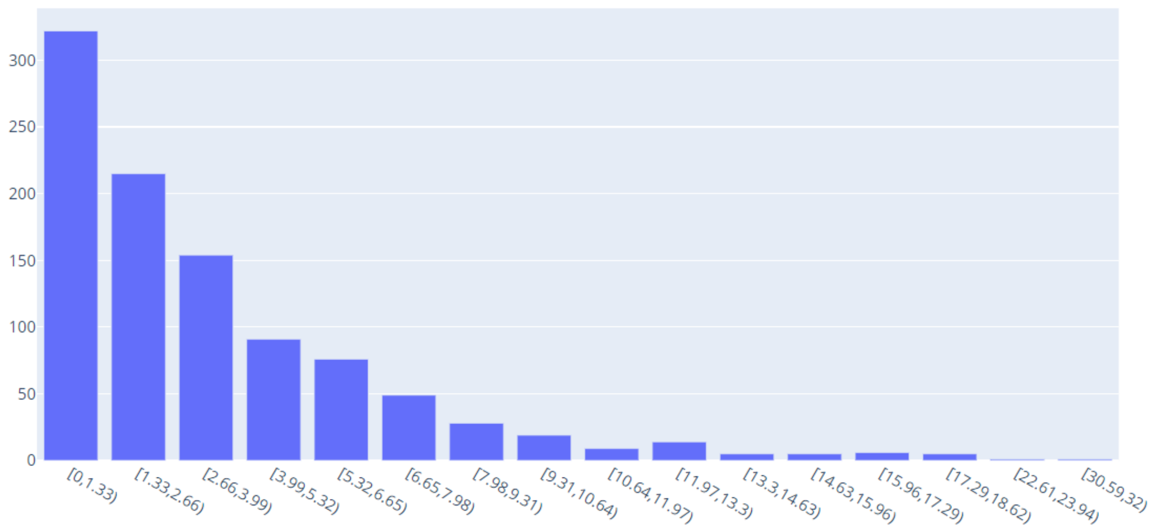


4. Та подивимося на гістограми при N = 1000

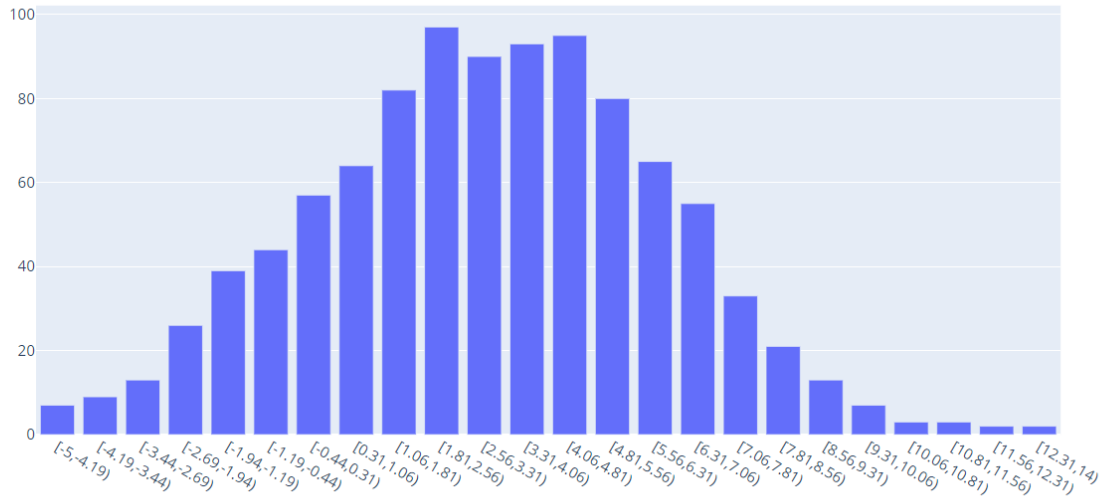
Гістограма розподілу Пуасона



Гістограма експоненціального розподілу



Гістограма нормального розподілу



5. Закон розподілу Пуассона

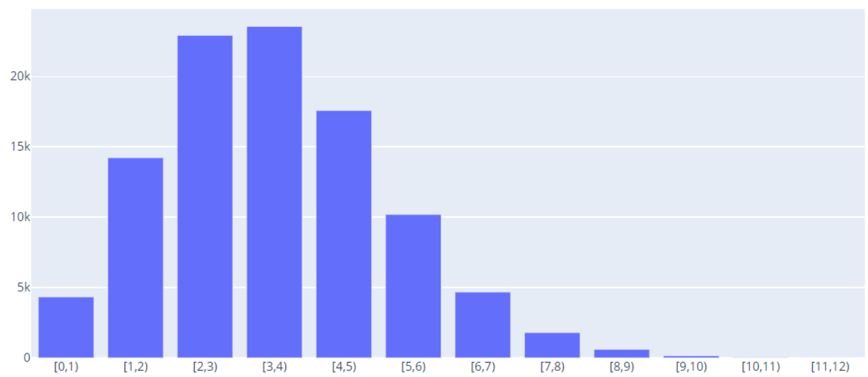
Розподілом Пуассона називається закон розподілу дискретної випадкової величини X, яка може приймати будь-які цілі невід'ємні значення k в замкнутому проміжку $[0, n]$, що описується формулою Пуассона:

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \tag{2}$$

Перевірка (N = 100000):

```
Перевірка закону розподілення Пуассона:

В околі 0-1 ймовірність дорівнює 4.979% А це при N= 100000 Дорівнює 4326, тобто 4.326043260432605 %
В околі 1-2 ймовірність дорівнює 14.936% А це при N= 100000 Дорівнює 14215, тобто 14.215142151421514 %
В околі 2-3 ймовірність дорівнює 22.404% А це при N= 100000 Дорівнює 22910, тобто 22.910229102291023 %
В околі 3-4 ймовірність дорівнює 22.404% А це при N= 100000 Дорівнює 23543, тобто 23.543235432354322 %
В околі 4-5 ймовірність дорівнює 16.803% А це при N= 100000 Дорівнює 17576, тобто 17.576175761757618 %
В околі 5-6 ймовірність дорівнює 10.082% А це при N= 100000 Дорівнює 10186, тобто 10.18610186101861 %
В околі 6-7 ймовірність дорівнює 5.041% А це при N= 100000 Дорівнює 4670, тобто 4.6700467004670045 %
В околі 7-8 ймовірність дорівнює 2.16% А це при N= 100000 Дорівнює 1791, тобто 1.7910179101791017 %
В околі 8-9 ймовірність дорівнює 0.81% А це при N= 100000 Дорівнює 599, тобто 0.5990059900599006 %
В околі 9-10 ймовірність дорівнює 0.27% А це при N= 100000 Дорівнює 151, тобто 0.15100151001510015 %
В околі 10-11 ймовірність дорівнює 0.081% А це при N= 100000 Дорівнює 29, тобто 0.0290002900029003 %
В околі 11-12 ймовірність дорівнює 0.022% А це при N= 100000 Дорівнює 3, тобто 0.0030000300003000003 %
```

Гістограма:



6. Показниковий закон розподілу

законом.

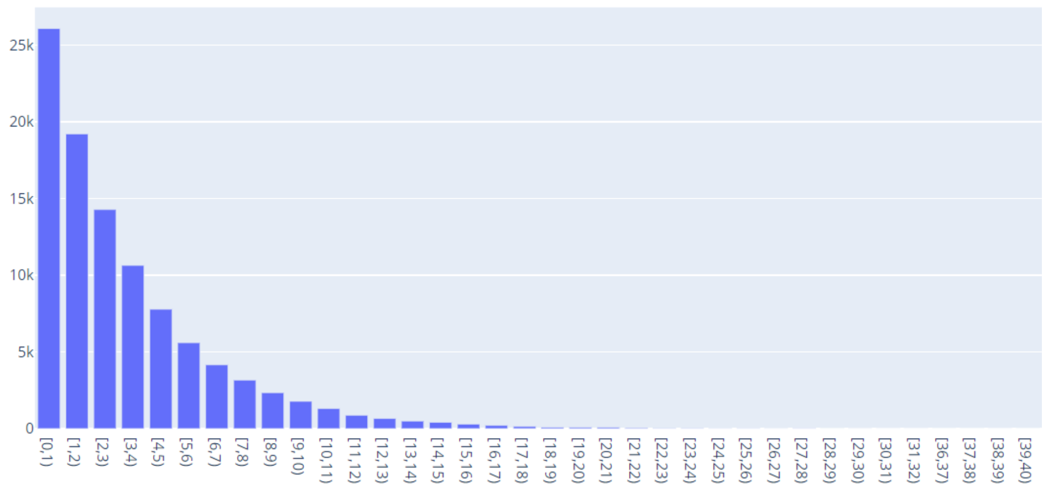
Показниковим (експоненціальним) називається закон розподілу неперервної випадкової величини X, функція густини розподілу ймовірності якої має вигляд:

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0;\end{cases} \tag{3}$$

Перевірка (N = 100000):

```
Перевірка Показникового закону розподілення :

В околі 0-1 ймовірність дорівнює 30.0% А це при N= 100000 Дорівнює 26088, тобто 26.088260882608825 %
В околі 1-2 ймовірність дорівнює 22.225% А це при N= 100000 Дорівнює 19220, тобто 19.220192201922018 %
В околі 2-3 ймовірність дорівнює 16.464% А це при N= 100000 Дорівнює 14287, тобто 14.287142871428713 %
В околі 3-4 ймовірність дорівнює 12.197% А це при N= 100000 Дорівнює 10646, тобто 10.64610646106461 %
В околі 4-5 ймовірність дорівнює 9.036% А це при N= 100000 Дорівнює 7786, тобто 7.786077860778608 %
В околі 5-6 ймовірність дорівнює 6.694% А це при N= 100000 Дорівнює 5605, тобто 5.605056050560505 %
В околі 6-7 ймовірність дорівнює 4.959% А це при N= 100000 Дорівнює 4163, тобто 4.163041630416304 %
В околі 7-8 ймовірність дорівнює 3.674% А це при N= 100000 Дорівнює 3170, тобто 3.1700317003170033 %
В околі 8-9 ймовірність дорівнює 2.722% А це при N= 100000 Дорівнює 2347, тобто 2.3470234702347024 %
В околі 9-10 ймовірність дорівнює 2.016% А це при N= 100000 Дорівнює 1786, тобто 1.7860178601786019 %
В околі 10-11 ймовірність дорівнює 1.494% А це при N= 100000 Дорівнює 1317, тобто 1.3170131701317014 %
В околі 11-12 ймовірність дорівнює 1.106% А це при N= 100000 Дорівнює 878, тобто 0.8780087800878009 %
В околі 12-13 ймовірність дорівнює 0.82% А це при N= 100000 Дорівнює 664, тобто 0.6640066400664006 %
В околі 13-14 ймовірність дорівнює 0.607% А це при N= 100000 Дорівнює 499, тобто 0.4990049900499005 %
В околі 14-15 ймовірність дорівнює 0.45% А це при N= 100000 Дорівнює 416, тобто 0.4160041600416004 %
В околі 15-16 ймовірність дорівнює 0.333% А це при N= 100000 Дорівнює 299, тобто 0.2990029900299003 %
В околі 16-17 ймовірність дорівнює 0.247% А це при N= 100000 Дорівнює 214, тобто 0.21400214002140022 %
В околі 17-18 ймовірність дорівнює 0.183% А це при N= 100000 Дорівнює 145, тобто 0.14500145001450016 %
В околі 18-19 ймовірність дорівнює 0.135% А це при N= 100000 Дорівнює 91, тобто 0.09100091000910009 %
В околі 19-20 ймовірність дорівнює 0.1% А це при N= 100000 Дорівнює 85, тобто 0.08500085000850008 %
В околі 20-21 ймовірність дорівнює 0.074% А це при N= 100000 Дорівнює 84, тобто 0.08400084000840008 %
В околі 21-22 ймовірність дорівнює 0.055% А це при N= 100000 Дорівнює 56, тобто 0.05600056000560005 %
В околі 22-23 ймовірність дорівнює 0.041% А це при N= 100000 Дорівнює 33, тобто 0.033000330003300035 %
В околі 23-24 ймовірність дорівнює 0.03% А це при N= 100000 Дорівнює 30, тобто 0.03000030000300003 %
В околі 24-25 ймовірність дорівнює 0.022% А це при N= 100000 Дорівнює 17, тобто 0.017000170001700017 %
В околі 25-26 ймовірність дорівнює 0.017% А це при N= 100000 Дорівнює 19, тобто 0.01900019000190002 %
В околі 26-27 ймовірність дорівнює 0.012% А це при N= 100000 Дорівнює 11, тобто 0.011000110001100011 %
В околі 27-28 ймовірність дорівнює 0.009% А це при N= 100000 Дорівнює 22, тобто 0.022000220002200022 %
В околі 28-29 ймовірність дорівнює 0.007% А це при N= 100000 Дорівнює 5, тобто 0.005000050000500005 %
В околі 29-30 ймовірність дорівнює 0.005% А це при N= 100000 Дорівнює 7, тобто 0.007000070000700007 %
В околі 30-31 ймовірність дорівнює 0.004% А це при N= 100000 Дорівнює 2, тобто 0.002000020000200002 %
В околі 31-32 ймовірність дорівнює 0.003% А це при N= 100000 Дорівнює 2, тобто 0.002000020000200002 %
```

Гістограма:



7. Закон нормального розподілу

2.2. Моделювання випадкової величини, розподіленої за нормальним законом. Нормальний розподіл (розподіл Гаусса) є видом розподілу, що найчастіше зустрічається. З ним доводиться стикатися при аналізі виробничих похибок, контролі технологічних процесів і режимів, при аналізі і прогнозуванні різних явищ. Цей закон є граничним, до якого наближаються інші закони розподілу.

Густина розподілу випадкової величини X, що має нормальний розподіл, виражається формулою:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (8)$$

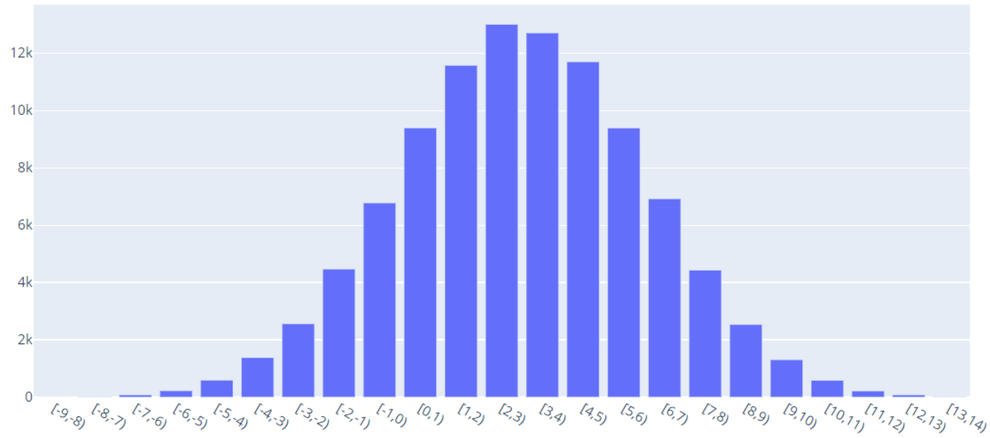
Функція розподілу ймовірностей випадкової величини X:

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(\xi-m)^2}{2\sigma^2}\right) d\xi. \quad (9)$$

Перевірка (N = 100000):

```
В околі -9 - -8 ймовірність дорівнює 0.004% А це при N= 100000 Дорівнює 1, тобто 0.001 %
В околі -8 - -7 ймовірність дорівнює 0.016% А це при N= 100000 Дорівнює 19, тобто 0.019 %
В околі -7 - -6 ймовірність дорівнює 0.051% А це при N= 100000 Дорівнює 84, тобто 0.084 %
В околі -6 - -5 ймовірність дорівнює 0.148% А це при N= 100000 Дорівнює 225, тобто 0.225 %
В околі -5 - -4 ймовірність дорівнює 0.38% А це при N= 100000 Дорівнює 595, тобто 0.595 %
В околі -4 - -3 ймовірність дорівнює 0.874% А це при N= 100000 Дорівнює 1383, тобто 1.383 %
В околі -3 - -2 ймовірність дорівнює 1.8% А це при N= 100000 Дорівнює 2564, тобто 2.564 %
В околі -2 - -1 ймовірність дорівнює 3.316% А це при N= 100000 Дорівнює 4471, тобто 4.471 %
В околі -1 - 0 ймовірність дорівнює 5.467% А це при N= 100000 Дорівнює 6776, тобто 6.776 %
В околі 0 - 1 ймовірність дорівнює 8.066% А це при N= 100000 Дорівнює 9395, тобто 9.395 %
В околі 1 - 2 ймовірність дорівнює 10.648% А це при N= 100000 Дорівнює 11575, тобто 11.575 %
В околі 2 - 3 ймовірність дорівнює 12.579% А це при N= 100000 Дорівнює 13007, тобто 13.007 %
В околі 3 - 4 ймовірність дорівнює 13.298% А це при N= 100000 Дорівнює 12706, тобто 12.706 %
В околі 4 - 5 ймовірність дорівнює 12.579% А це при N= 100000 Дорівнює 11698, тобто 11.698 %
В околі 5 - 6 ймовірність дорівнює 10.648% А це при N= 100000 Дорівнює 9393, тобто 9.393 %
В околі 6 - 7 ймовірність дорівнює 8.066% А це при N= 100000 Дорівнює 6922, тобто 6.922 %
В околі 7 - 8 ймовірність дорівнює 5.467% А це при N= 100000 Дорівнює 4433, тобто 4.433 %
В околі 8 - 9 ймовірність дорівнює 3.316% А це при N= 100000 Дорівнює 2538, тобто 2.538 %
В околі 9 - 10 ймовірність дорівнює 1.8% А це при N= 100000 Дорівнює 1307, тобто 1.307 %
В околі 10 - 11 ймовірність дорівнює 0.874% А це при N= 100000 Дорівнює 588, тобто 0.588 %
В околі 11 - 12 ймовірність дорівнює 0.38% А це при N= 100000 Дорівнює 219, тобто 0.219 %
В околі 12 - 13 ймовірність дорівнює 0.148% А це при N= 100000 Дорівнює 83, тобто 0.083 %
В околі 13 - 14 ймовірність дорівнює 0.051% А це при N= 100000 Дорівнює 16, тобто 0.016 %
```

Гістограма:



Отже, як видно на рисунках всі змодельовані види розподілу дані в даній лабораторній роботі відповідають законам згідно яких моделюються

Висновок: Отже, я навчився моделювати відомі випадкові процеси та визначати їхні основні характеристики. Створювати гістограми та перевіряти їх згідно закону розподілу.