M.Sc. Jonathan Berrisch, Prof. Florian Ziel
jonathan.berrisch@uni-due.de
Umweltökonomie, insb. Ökonomie erneuerbarer Energien
Fakultät für Wirtschatswissenschaten
University Duisburg-Essen

29. November 2022

Umweltökonomie und erneuerbare Energien - Beispiellösung zu Übung 5

Aufgabe 1

Die Nachfrage- und Angebotsfunktionen, sowie der Gesamtnutzenverlust aufgrund des externen Schadens können wie folgt dargestellt werden

$$N(x) = a_0 + a_1 x \qquad A(x) = b_0 + b_1 x \qquad U_E(x) = c_0 - c_1 x^2 \tag{1}$$

wobei die Achsenabschnitte a_0, b_0, c_0 und die Steigungskoeffizienten b_1, c_1 positiv sind; $a_0 > b_0$ gilt und $a_1 < 0$ ist.

1. Das Marktgleichgewicht der oben beschriebenen Ökonomie kann wie folgt dargestellt werden

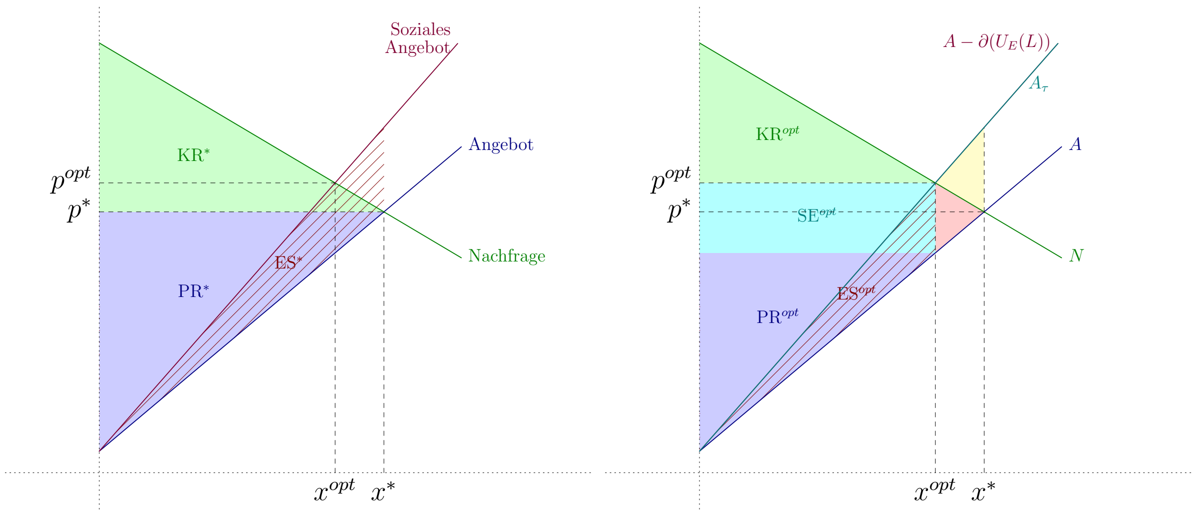

Abbildung 1: Marktgleichgewicht der Ökonomie vor und nach der Einführung einer Wertsteuer

Bevor eine Steuer auf die Produzenten erhoben wird, entspricht die Menge des zu produzierenden Gutes dem Wert x^*. In diesem Fall ist der Gesamtnutzen der Ökonomie gleich der Fläche

$$U^* = \mathrm{KR}^* + \mathrm{PR}^* - \mathrm{ES}^*, \tag{2}$$

wobei ES^* die Fläche zwischen der ursprünglichen Angebotskurve und dem sozialen Angebot im Bereich von 0 bis x^* ist.

Aus dem linken Graph wird auch ersichtlich, dass die Gesamtwohlfahrt der Ökonomie maximal ist, wenn sich das Marktgleichgewicht im Punkt (x^{opt}, p^{opt}) befindet. Damit die Ökonomie diesen optimalen Zustand erreicht, sind die Produzenten verpflichtet, eine Wertsteuer zu zahlen. Der Graph rechts stellt die Ökonomie nach der Einführung der Steuer dar. Der Gesamtnutzen dieser Ökonomie ist dann

$$U^{opt} = \mathrm{KR}^{opt} + \mathrm{PR}^{opt} + \mathrm{SE}^{opt} - \mathrm{ES}^{opt}, \tag{3}$$

wobei SE^{opt} die staatlichen Steuereinnahmen darstellt und sich die Fläche ES^{opt} im Bereich von 0 bis x^{opt} befindet.

Mit Hinsicht auf die Abbildung 1 ist $U^{opt} > U^*$. Anzumerken ist, dass die Summe KR^*+PR^* im Punkt x^* größer ist, als die Summe KR^{opt}+PR^{opt}+SE^{opt} im Punkt x^{opt}. Die Differenz zwischen den Summen entspricht dem roten Dreieck. Das rote Dreieck stellt daher den Nutzenverlust der Ökonomie auf Grund der Steuer dar. Im Punkt x^{opt} ist aber auch der Einfluss des Schadens kleiner, als im Punkt x^* ($\mathrm{ES}^{opt} < \mathrm{ES}^*$ gilt). Das rote Dreieck stellt daher auch die Fläche des vermiedenen externen Schadens dar. Es folgt daraus, dass das rote Dreieck gleichzeitig den Nutzenverlust und den Nutzengewinn der Ökonomie aus der Einführung der Steuer darstellt. Das gelbe Dreieck stellt aber nur den Nutzengewinn der Ökonomie aus der Besteuerung dar. Dieses Dreieck ist daher der Reingewinn der Ökonomie aus der Vermeidung des Schadens.

2. Die Gleichgewichtsmenge x^* lässt sich wie folgt berechnen:

$$N(x^*) = A(x^*) \tag{4}$$

$$\Leftrightarrow a_0 + a_1 x^* = b_0 + b_1 x^* \tag{5}$$

$$\Rightarrow x^* = \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1.} \tag{6}$$

Die optimale Gleichgewichtsmenge unter der Berücksichtigung des externen Schadens x^{opt} ist wiederum

$$U(x) = \int_0^x N(z) - A(z)dz + U_E(x) \tag{7}$$

$$\int_0^x a_0 + a_1 z - (b_0 + b_1 z)dz + U_E(x). \tag{8}$$

Weitere Manipulationen mit dem Integral ergeben

$$U(x) = \Big[a_0 z + \frac{a_1 z^2}{2} - b_0 z - \frac{b_1 z^2}{2}\Big]_0^x + c_0 - c_1 x^2 \tag{9}$$

$$a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} - b_0 x - \frac{b_1 x^2}{2} + c_0 - c_1 x^2. \tag{10}$$

Umordnung der obigen Gleichung führt zu

$$U(x) = (a_0 - b_0)x + \frac{x^2}{2} \cdot (a_1 - b_1) + c_0 - c_1 x^2. \tag{11}$$

Wir berechnen jetzt die erste Ableitung der obigen Gleichung, um den Punkt x^{opt} herauszufinden. Es folgt daraus, dass

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((a_0-b_0)x+\frac{x^2}{2}\cdot(a_1-b_1)+c_0-c_1x^2\right)=a_0-b_0+x(a_1-b_1)-2c_1x \quad (12)$$

$$\Leftrightarrow a_0-b_0+x(a_1-b_1)-2c_1x=0 \quad (13)$$

$$\Leftrightarrow a_0-b_0=-x(a_1-b_1)+2c_1x \quad (14)$$

$$\Leftrightarrow a_0-b_0=x(b_1-a_1+2c_1) \quad (15)$$

$$\Rightarrow \frac{a_0-b_0}{b_1-a_1+2c_1}=x^{opt}. \quad (16)$$

gilt. Beachten Sie dabei, dass die Gesamtwohlfahrt der Ökonomie unter der Berücksichtigung des externen Schadens im Punkt x^{opt} maximal ist. Daher muss eine richtig gestaltete Steuer die Ökonomie in Punkt x^{opt} bringen.

3. Erinnern Sie sich daran, dass die Produzenten verpflichtet sind, eine Wertsteuer zu zahlen. Die entsprechende Angebotsfunktion ist daher

$$A_\tau(x)=b_0+b_1x+\tau p. \quad (17)$$

Der Schnittpunkt zwischen der oben definierten Kurve und der Nachfragekurve lässt sich wie folgt darstellen

$$b_0+b_1x+\tau p=a_0+a_1x \quad (18)$$

$$b_1x-a_1x=a_0-b_0-\tau p \quad (19)$$

$$\Rightarrow x_\tau^*=\frac{a_0-b_0-\tau p_\tau^*}{b_1-a_1}. \quad (20)$$

4. Um die optimale Höhe der Wertsteuer τ zu bestimmen, müssen wir zunächst die Preisgleichung herleiten, weil die Wertsteuer vom Preis abhängt. Daher können wir die Gleichung 20 und die ursprüngliche Nachfragefunktion benutzen, um den Ausdruck für p_τ^* zu ermitteln. Folglich gilt

$$N(x_\tau^*)\Leftrightarrow p_\tau^*=a_0+a_1x_\tau^* \quad (21)$$

$$=a_0+a_1\cdot\frac{a_0-b_0-\tau p_\tau^*}{b_1-a_1}. \quad (22)$$

Beachten Sie dabei, dass sich Faktoren p_τ^* auf den beiden Seiten der obigen Gleichung befinden. Wir müssen daher die Gleichung nach p_τ^* lösen. Anzumerken ist, dass sich die obige Gleichung wie folgt darstellen lässt

$$p_\tau^*=a_0+a_1\cdot\frac{a_0-b_0}{b_1-a_1}-a_1\cdot\frac{\tau p_\tau^*}{b_1-a_1}. \quad (23)$$

Durch die Umstellung der obigen Gleichung erhalten wir

$$p_\tau^* + a_1 \cdot \frac{\tau p_\tau^*}{b_1 - a_1} = a_0 + a_1 \cdot \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1} \tag{24}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p_\tau^* b_1 - p_\tau^* a_1 + a_1 \tau p_\tau^*}{b_1 - a_1} = a_0 + a_1 \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1}. \tag{25}$$

Multipliziert man die beiden Seiten der obigen Gleichung mit $(b_1 - a_1)$, so erhält man

$$p_\tau^* b_1 - p_\tau^* a_1 + a_1 \tau p_\tau^* = a_0(b_1 - a_1) + a_1(a_0 - b_0). \tag{26}$$

Daher gilt

$$p_\tau^*(b_1 - a_1 + a_1\tau) = a_0(b_1 - a_1) + a_1(a_0 - b_0) \tag{27}$$

$$\Rightarrow p_\tau^* = \frac{a_0(b_1 - a_1) + a_1(a_0 - b_0)}{b_1 - a_1 + a_1\tau}. \tag{28}$$

$$= \frac{a_0 b_1 - a_0 a_1 + a_1 a_0 - a_1 b_0}{b_1 - a_1 + a_1\tau} \tag{29}$$

$$= \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_1 - a_1 + a_1\tau}, \tag{30}$$

wobei $a_1 < 0$ ist und b_1, a_0, b_0, τ positiv sind. Deswegen sind der Zähler $(a_0 b_1 - a_1 b_0)$ und die Differenz $(b_1 - a_1)$ immer positiv. Außerdem gilt $(b_1 - a_1) > a_1\tau$, da $p_\tau^* > 0$ ist.

5. Wir setzen nun das Ergebnis der Gleichung 30 in die Gleichung 20 ein, um die optimale Gleichgewichtsmenge x_τ^* zu bestimmen. So ergibt sich:

$$x_\tau^* = \frac{a_0 - b_0 - \tau \cdot \dfrac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_1 - a_1 + a_1\tau}}{b_1 - a_1}. \tag{31}$$

Die obige Gleichung kann alternativ wie folgt geschrieben werden[1]:

$$x_\tau^* = \underbrace{\frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1}}_{x^*} - \frac{\tau}{b_1 - a_1} \cdot \underbrace{\frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_1 - a_1 + a_1\tau}}_{p_\tau^*}. \tag{32}$$

Die Komponenten der obigen Gleichung können wie folgt erklärt werden. Der Minuend entspricht dem Ausdruck für x^*, d.h. dem Schnittpunkt zwischen den ursprünglichen Nachfrage- und Angebotskurven. Der Subtrahend ist wiederum eine positive Steueranpassung, da $\tau/(b_1 - a_1) > 0$ und $p_\tau^* > 0$ sind. Es folgt daraus, dass $x_\tau^* < x^*$ gilt.

[1] Erinnern Sie sich daran, dass $x \div y \div z = x \div (y \cdot z)$ gilt.

6. Erinnern Sie sich daran, dass das Ziel unserer Steuer darin liegt, die Ökonomie in ihren optimalen Zustand (x^{opt}) zu bringen. Daher ist

$$x^{opt} = x^*_\tau. \tag{33}$$

Verwendung von Gleichungen 16 und 32 ergibt

$$\frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1 + 2c_1} = \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1} - \frac{\tau(a_0 b_1 - a_1 b_0)}{(b_1 - a_1)(b_1 - a_1 + a_1\tau)}. \tag{34}$$

Wir müssen jetzt die obige Gleichung nach c_1 lösen. Wir bringen zunächst die Brüche rechts auf einen gemeinsamen Nenner und erhalten somit

$$\frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1 + 2c_1} = \frac{(a_0 - b_0)(b_1 - a_1 + a_1\tau) - \tau(a_0 b_1 - a_1 b_0)}{(b_1 - a_1)(b_1 - a_1 + a_1\tau)} \tag{35}$$

Klammer auflösen ergibt:

$$\frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1 + 2c_1} = \frac{(a_0 - b_0)(b_1 - a_1) + a_1\tau(a_0 - b_0) - \tau(a_0 b_1 - a_1 b_0)}{(b_1 - a_1)(b_1 - a_1 + a_1\tau)}. \tag{36}$$

Wir klammern den Faktor τ aus und erhalten

$$\frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1 + 2c_1} = \frac{(a_0 - b_0)(b_1 - a_1) + \tau(a_1 a_0 - a_1 b_0 - a_0 b_1 + a_1 b_0)}{(b_1 - a_1)(b_1 - a_1 + a_1\tau)} \tag{37}$$

$$= \frac{(a_0 - b_0)(b_1 - a_1) + \tau(a_1 a_0 - a_0 b_1)}{(b_1 - a_1)(b_1 - a_1 + a_1\tau)}. \tag{38}$$

Klammert man den Faktor a_0 aus, so folgt

$$\frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1 + 2c_1} = \frac{(a_0 - b_0)(b_1 - a_1) + a_0\tau(a_1 - b_1)}{(b_1 - a_1)(b_1 - a_1 + a_1\tau)}. \tag{39}$$

Da $(a_1 - b_1) = -(b_1 - a_1)$ gilt, ist

$$\frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1 + 2c_1} = \frac{(a_0 - b_0)(b_1 - a_1) - a_0\tau(b_1 - a_1)}{(b_1 - a_1)(b_1 - a_1 + a_1\tau)}. \tag{40}$$

$$= \frac{(b_1 - a_1)(a_0 - b_0 - a_0\tau)}{(b_1 - a_1)(b_1 - a_1 + a_1\tau)} \tag{41}$$

$$= \frac{a_0 - b_0 - a_0\tau}{b_1 - a_1 + a_1\tau}. \tag{42}$$

Erinnern Sie sich daran, dass wir uns mit der Ermittlung des Faktors c_1 beschäftigen. Wir können daher die Kehrwerte der beiden Seiten der obigen Gleichung bestimmen, damit die Berechnung vereinfacht ist. Folglich gilt

$$\frac{b_1 - a_1 + 2c_1}{a_0 - b_0} = \frac{b_1 - a_1 + a_1\tau}{a_0 - b_0 - a_0\tau} \tag{43}$$

Multipliziert man die obige Gleichung mit $(a_0 - b_0)$, so gilt

$$b_1 - a_1 + 2c_1 = \frac{(a_0 - b_0)(b_1 - a_1 + a_1\tau)}{a_0 - b_0 - a_0\tau} \tag{44}$$

$$2c_1 = \frac{(a_0 - b_0)(b_1 - a_1 + a_1\tau)}{a_0 - b_0 - a_0\tau} + a_1 - b_1 \tag{45}$$

Wir bringen jetzt die Faktoren rechts auf einen gemeinsamen Nenner und erhalten

$$2c_1 = \frac{(a_0 - b_0)(b_1 - a_1 + a_1\tau) + (a_1 - b_1)(a_0 - b_0 - a_0\tau)}{a_0 - b_0 - a_0\tau}. \tag{46}$$

Die obige Gleichung kann alternativ wie folgt dargestellt werden

$$2c_1 = \frac{(a_0 - b_0)(b_1 - a_1) + a_1\tau(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)(a_0 - b_0) - a_0\tau(a_1 - b_1)}{a_0 - b_0 - a_0\tau}. \tag{47}$$

Beachten Sie dabei, dass $(a_0 - b_0)(b_1 - a_1) + (a_1 - b_1)(a_0 - b_0) = 0$ gilt. Umstellung der obigen Gleichung lautet daher

$$2c_1 = \frac{a_1\tau(a_0 - b_0) - a_0\tau(a_1 - b_1)}{a_0 - b_0 - a_0\tau} \tag{48}$$

$$= \frac{\tau(a_1(a_0 - b_0) - a_0(a_1 - b_1))}{a_0 - b_0 - a_0\tau} \tag{49}$$

$$= \frac{\tau(a_1a_0 - a_1b_0 - a_0a_1 + a_0b_1)}{a_0 - b_0 - a_0\tau} \tag{50}$$

$$= \frac{\tau(-a_1b_0 + a_0b_1)}{a_0 - b_0 - a_0\tau} \tag{51}$$

$$= \frac{\tau(a_0b_1 - a_1b_0)}{a_0 - b_0 - a_0\tau} \tag{52}$$

und somit

$$c_1 = \frac{\tau(a_0b_1 - a_1b_0)}{2(a_0 - b_0 - a_0\tau)} \tag{53}$$

wobei $a_0\tau < (a_0 - b_0)$ gilt, weil $c_1 > 0$ ist.

Es gibt zwei Kommentare zu der Gleichung 53. Zum ersten muss τ steigen, wenn c_1 zunimmt. Dies gilt, weil τ (und der entsprechende Multiplikator) im Zähler positiv sind und im Nenner der Vorzeichnen von $a_0\tau$ negativ ist. Mit anderen Worten, ist der Einfluss des Schadens stärker, so ist die Besteuerung höher. Zum zweiten ist die Steuerrate τ kleiner als 1 bzw. als 100%, weil $a_0\tau < (a_0 - b_0)$ ist und daher $a_0\tau < a_0$ gilt.

7. Um den Faktor τ herzuleiten, multipliziert man die beiden Seiten der Gleichung 53 mit $2(a_0 - b_0 - a_0\tau)$. Daher gilt

$$2c_1(a_0 - b_0 - a_0\tau) = \tau(a_0b_1 - a_1b_0). \tag{54}$$

Umstellung der obigen Gleichung lautet

$$2c_1(a_0 - b_0) - 2c_1a_0\tau = \tau(a_0b_1 - a_1b_0) \tag{55}$$

$$\Leftrightarrow 2c_1(a_0 - b_0) = \tau(a_0b_1 - a_1b_0) + 2c_1a_0\tau. \tag{56}$$

Folglich gilt

$$2c_1(a_0 - b_0) = \tau(a_0b_1 - a_1b_0 + 2c_1a_0) \tag{57}$$

$$\frac{2c_1(a_0 - b_0)}{a_0b_1 - a_1b_0 + 2c_1a_0} = \tau. \tag{58}$$

Beachten Sie dabei, dass τ positiv ist, wenn $(a_0b_1 - a_1b_0) > 2c_1a_0$ gilt. Aus der obigen Gleichung wird es auch ersichtlich, dass die Steuerrate τ steigt, wenn der Einfluss des externen Schaden c_1 zunimmt.

Aufgabe 2

1. Erinnern Sie sich daran, dass die externen Effekte in dieser Aufgabe positiv sind. Deshalb kann die soziale Nachfragekurve mit folgender Gleichung beschrieben werden

$$N + \partial(U_E(L)) = a_0 - a_1x + c_1x \tag{59}$$

$$= a_0 - (a_1 - c_1)x. \tag{60}$$

2. Der ursprüngliche Zustand der Ökonomie x^* kann wie folgt dargestellt werden

Der Gesamtnutzen des oben skizzierten Systems ist

$$U^* = \text{KR}^* + \text{PR}^* + \text{PEE}^*. \tag{61}$$

Da die externen Effekte positiv sind, erhöht sie der Gesamtnutzen der Ökonomie. Daher ist das Vorzeichen des Faktors PEE* positiv und die soziale Nachfragekurve $(N - \partial(U_E(L)))$ oberhalb der ursprünglichen Nachfragekurve N. Außerdem ist die ursprüngliche Marktgleichgewichtsmenge x^* kleiner, als x^{opt}. Für unsere Ökonomie besteht daher ein Wachstumspotential, dass sich durch die Verwertung der externen

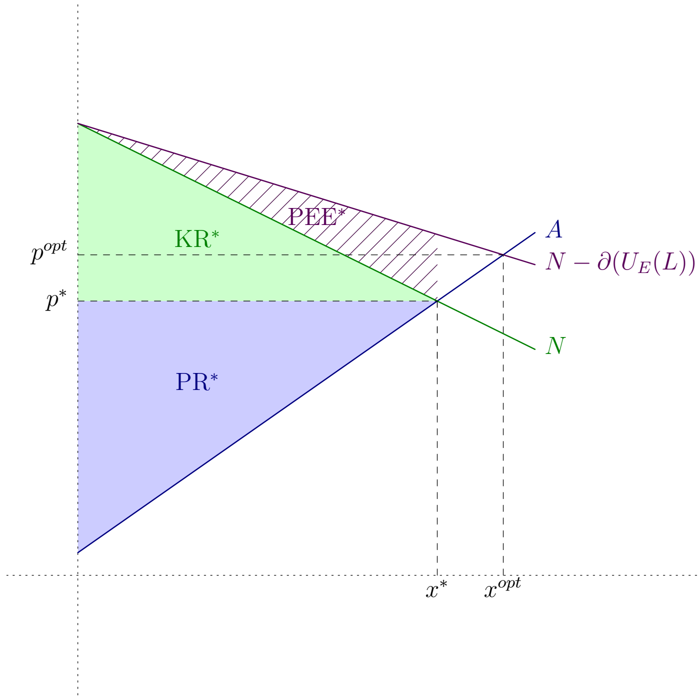

Abbildung 2: Ursprüngliche Marktgleichgewicht der Ökonomie

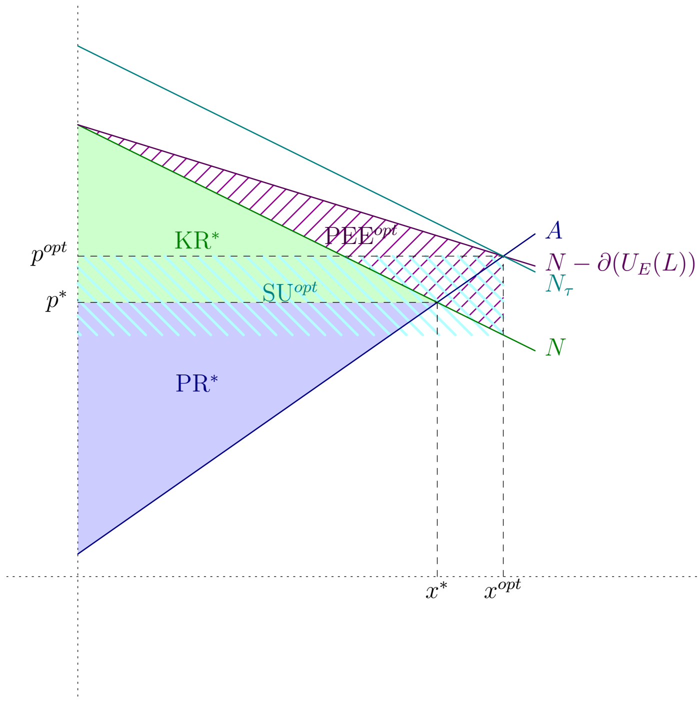

Abbildung 3: Marktgleichgewicht in der Ökonomie nach der Einführung der Subventionen. Die Konsumenten- und Produzentenrenten werden für den Punkt (x^*, p^*) dargestellt.

Effekte realisieren lässt. Um externe Effekte zu verwerten, führt der Staat die Subventionen ein, die die ursprüngliche Nachfragekurve nach oben verschieben. Dies passiert, weil die Subventionen für jede Einheit des Gutes bezahlt werden. Das Marktgleichgewicht nach der Einführung der Subventionen lässt sich in der Abbildung 3 darstellen.

Wir betrachten zunächst keine Änderung der Konsumenten- und Produzentenrenten in der Abbildung 3. Daher wird es ersichtlich, dass die Fläche der positiven externen Effekte PEE^{opt} im Punkt x^{opt} größer ist, als die Fläche PEE* im Punkt x^*. Außerdem lässt sich die Fläche der staatlichen Subventionen SU$^{opt} = \partial(U_E(L)) \cdot x^{opt}$ in der Abbildung sehen. Erinnern Sie sich daran, dass das Geld für die Subventionen von außerhalb der Ökonomie kommt. Der staatliche Eingriff beeinflusst daher weder Produzernten- noch Konsumentenrenten.

3. Wir betrachten jetzt die Ökonomie im Punkt (x^{opt}, p^{opt}). Beachten Sie dabei, dass es zwei 2 Methoden gibt, den Gesamtnutzen der Ökonomie in diesem Punkt darzustellen. Der ersten Methode zufolge ist der Gesamtnutzen gleich der Summe der sozialen Konsumentenrente und der optimalen Produzentenrente. Folglich gilt

$$U^{opt} = \text{SKR}^{opt} + \text{PR}^{opt}. \tag{62}$$

Erinnern Sie sich daran, dass SKR^{opt} = KR^{opt} + PEE^{opt} gilt. Deswegen kann man die zweite Methode erhalten, wenn man Gleichung 62 wie folgt schreibt

$$U^{opt} = \text{KR}^{opt} + \text{PR}^{opt} + \text{PEE}^{opt} \tag{63}$$

In der Abbildung 4 wird der Gesamtnutzen der Ökonomie mithilfe der beiden Methoden graphisch dargestellt. Die rechte und die linke Seiten dieser Abbildung zeigen die Komponenten der Gleichungen 62 bzw. 63.

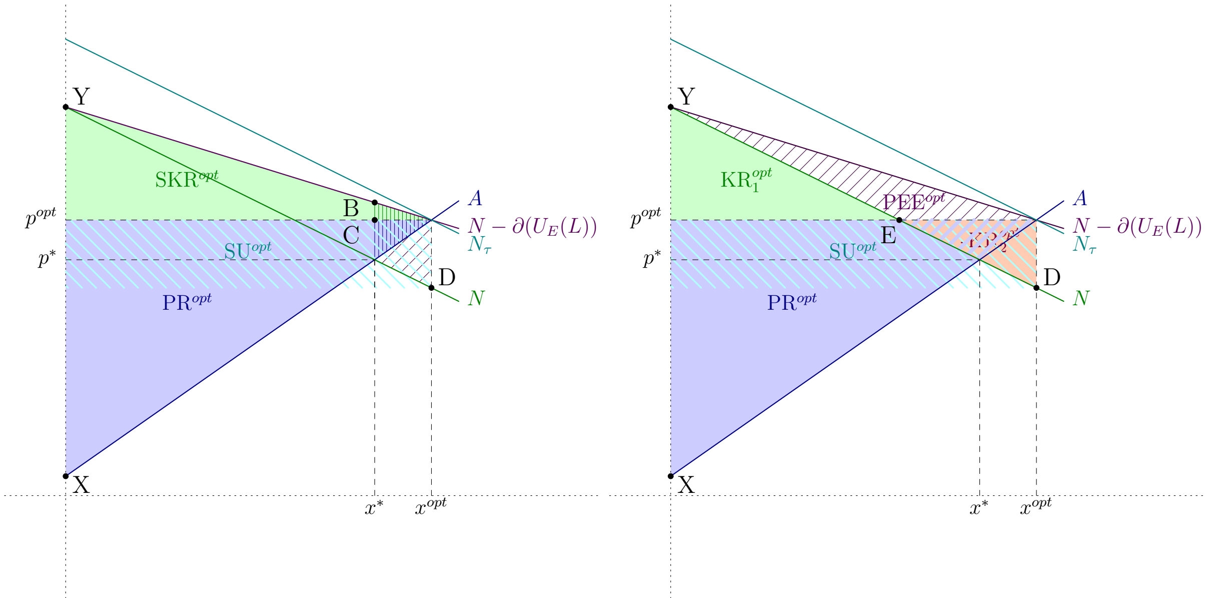

Abbildung 4: Soziale Konsumentenrente und optimale Produzentenrente (der linke Graph); optimale Konsumenten- und Produzentenrenten und der Einfluss der externen Effekte (der rechte Graph).

Bevor wir uns mit der Berechnung beschäftigen, stellen wir zunächst alle Komponente der Abbildungen 3 und 4 mathematisch dar. Die Produzentenrente lassen sich mithilfe der folgenden Formel berechnen

$$\mathrm{PR}^* = \int_0^{x^*} p^* - A(x)dx, \tag{64}$$

$$\mathrm{PR}^{opt} = \int_0^{x^{opt}} p^{opt} - A(x)dx, \tag{65}$$

$$\mathrm{SPR}^{opt} = \int_0^{x^{opt}} p^{opt} - A(x) - \partial(U_E(L))dx. \tag{66}$$

Die Konsumentenrenten sind wiederum

$$\mathrm{KR}^* = \int_0^{x^*} N(x) - p^* dx, \tag{67}$$

$$\mathrm{KR}^{opt} = \int_0^{x^{opt}} N(x) - p^{opt} dx, \tag{68}$$

$$\mathrm{SKR}^{opt} = \int_0^{x^{opt}} N(x) + \partial(U_E(L)) - p^{opt} dx. \tag{69}$$

Der Einfluss der externen Effekte entspricht der Fläche zwischen den sozialen und ursprünglichen Nachfrage- oder Angebotskurven. *In unserem Fall* kann dieser wie folgt dargestellt werden,

$$\mathrm{PEE}^* = \int_0^{x^*} (N(x) + \partial(U_E(L))) - N(x)dx = \int_0^{x^*} \partial(U_E(L))dx, \tag{70}$$

$$\mathrm{PEE}^{opt} = \int_0^{x^{opt}} (N(x) + \partial(U_E(L))) - N(x)dx = \int_0^{x^{opt}} \partial(U_E(L))dx, \tag{71}$$

Mit Hinsicht auf die obigen Formeln können wir die Abbildung 4 beschreiben. Wir konzentrieren uns zuerst auf den Graph links. Dieser stellt die Komponente der Gleichung 62 dar. Die Flächen $\mathrm{SKR}^{opt} = \{Y, (x^{opt}, p^{opt}), (0, p^{opt})\}$ und $\mathrm{PR}^{opt} = \{X, (x^{opt}, p^{opt}), (0, p^{opt})\}$ entsprechen natürlich den Gleichungen 65 bzw. 69. Die Summe dieser Flächen ergibt den Gesamtnutzen der Ökonomie.

Beachten Sie dabei, dass das Dreieck $\{B, (x^*, p^*), (x^{opt}, p^{opt})\}$ den reinen Wohlfahrtsgewinn der Ökonomie darstellt. Dieser besteht aus zwei Teilen: die Gewinne der Konsumenten bzw. der Produzenten. Dreiecke $\{B, C, (x^{opt}, p^{opt})\}$ bzw. $\{(x^*, p^*), C, (x^{opt}, p^{opt})\}$ stellen diese Teile dar. Anzumerken ist, dass die Erhöhung der Wohlfahrt durch die Erhebung der Steuer getrieben wird.

Wir betrachten nun den rechten Graph. In diesem Graph werden vor allem die Produzentenrente PR^{opt} (das Dreieck $\{X, (x^{opt}, p^{opt}), (0, p^{opt})\}$) und die Konsumentenrente KR^{opt} dargestellt. Anzumerken ist, dass die letzte aus zwei Teilen besteht. Der erste Teil ist positiv und entspricht dem grünen Dreieck $\{Y, E, (0, p^{opt})\}$. Der zweite Teil ist jedoch *negativ*. Dieser Teil wird durch das orange Dreieck $\{E, (x^{opt}, p^{opt}), D\}$ dargestellt. Die Teilung der Fläche KR^{opt} ergibt sich aus der Gleichung 68. Beachten Sie dabei, dass die Werte $N(x)$ vor dem Punkt E größer sind, als p^{opt}. Nach diesem Punkt gilt jedoch das umgekehrte Verhältnis zwischen $N(x)$ und p^{opt}. Deswegen ist die Fläche KR_1^{opt} vor dem Punkt E positiv, danach ist dennoch die Fläche KR_2^{opt} negativ. Die Summe der beiden Teilen entspricht der Gesamtfläche der Konsumentenrente KR^{opt}. Die Flächen PEE^{opt} auf der rechten Seite der Abbildung 4 und in der Abbildung 3 sind wiederum identisch.

Es gibt zwei wichtige Anmerkungen zu der Abbildung 4. Zum ersten wird das Dreieck $\{(x^*, p^*), (x^{opt}, p^{opt}), D\}$ komplett ausgeglichen, weil es gleichzeitig zu der negativen orangen Fläche $\{E, (x^{opt}, p^{opt}), D\}$, sowie zu der positiven purpur gestrichenen Fläche PEE^{opt}, gehört. Zum zweiten ist das Dreieck $\{E, (x^*, p^*), (x^{opt}, p^{opt})\}$ in unserem Fall positiv. Obwohl es ein Teil der negativen organen Fläche $\{E, (x^{opt}, p^{opt}), D\}$ ist, ist es zugleich ein Teil der positiven Produzentenrente $\{X, (x^{opt}, p^{opt}), (0, p^{opt})\}$ und zusätzlich der Fläche PEE^{opt}.

4. Erinnern Sie sich daran, dass die Gleichung 60 die soziale Nachfragekurve darstellt. Daher sind die Nachfrage-, Angebot- und soziale Nachfragekurven:

$$N(x) = a_0 - a_1 x \tag{72}$$

$$A(x) = b_0 + b_1 x \tag{73}$$

$$N + \partial(U_E(L)) = a_0 - (a_1 - c_1)x. \tag{74}$$

wobei die Faktoren a_0, b_0, a_1, b_1 und c_1 positiv sind und $a_0 > b_0$ gilt.

Berechnet man den Punkt x^*, so erhält man die Gleichung

$$a_0 - a_1 x = b_0 + b_1 x \tag{75}$$

$$\Leftrightarrow x^* = \frac{a_0 - b_0}{b_1 + a_1}. \tag{76}$$

Der Punkt x^{opt} ist wiederum

$$a_0 - (a_1 - c_1)x = b_0 + b_1 x \tag{77}$$

$$\Leftrightarrow x^{opt} = \frac{a_0 - b_0}{b_1 + a_1 - c_1}, \tag{78}$$

wobei x^{opt} größer ist, je höher der Wert c_1 ist.

Wir haben angenommen, dass die Konsumenten die Subventionen für jede Einheit des Gutes bekommen, d.h. wir betrachten hier eine negative Mengesteuer. Die Nachfragekurve unter der Berücksichtigung der Subventionen lässt sich daher wie folgt darstellen

$$N_\tau(x) = a_0 - a_1 x + \nu. \tag{79}$$

Das entsprechende Marktgleichgewicht ist dann

$$N_\tau(x) = A(x) \tag{80}$$

$$\Leftrightarrow a_0 - a_1 x + \nu = b_0 + b_1 x \tag{81}$$

$$\Leftrightarrow x^*_\tau = \frac{a_0 - b_0 + \nu}{b_1 + a_1} \tag{82}$$

Umstellung der obigen Gleichung lautet

$$x^*_\tau = \underbrace{\frac{a_0 - b_0}{b_1 + a_1}}_{x^*} + \frac{\nu}{b_1 + a_1}, \tag{83}$$

wobei die Menge x^*_τ steigt, wenn ν zunimmt.

Erinnern Sie sich daran, dass unsere Ökonomie durch die Subventionen nach in ihren optimalen Zustand gebracht werden muss. Folglich gilt

$$x^*_\tau = x^{opt} \tag{84}$$

oder

$$\frac{a_0 - b_0 + \nu}{b_1 + a_1} = \frac{a_0 - b_0}{b_1 + a_1 - c_1}. \tag{85}$$

Löst man nun die obige Gleichung nach den Faktor c_1 auf, so gilt

$$\frac{b_1 + a_1}{a_0 - b_0 + \nu} = \frac{b_1 + a_1 - c_1}{a_0 - b_0} \tag{86}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(b_1 + a_1)(a_0 - b_0)}{a_0 - b_0 + \nu} = b_1 + a_1 - c_1 \tag{87}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(b_1 + a_1)(a_0 - b_0)}{a_0 - b_0 + \nu} - b_1 - a_1 = -c_1. \tag{88}$$

Wir bringen jetzt die Faktoren links auf einen gemeinsamen Nenner und erhalten somit

$$\frac{(b_1 + a_1)(a_0 - b_0)}{a_0 - b_0 + \nu} - \frac{(b_1 + a_1)(a_0 - b_0 + \nu)}{a_0 - b_0 + \nu} = -c_1 \tag{89}$$

$$\frac{(b_1 + a_1)(a_0 - b_0) - (b_1 + a_1)(a_0 - b_0 + \nu)}{a_0 - b_0 + \nu} = -c_1 \tag{90}$$

$$\frac{(b_1 + a_1)(a_0 - b_0) - (b_1 + a_1)(a_0 - b_0) - \nu(b_1 + a_1)}{a_0 - b_0 + \nu} = -c_1 \tag{91}$$

$$-\frac{\nu(b_1 + a_1)}{a_0 - b_0 + \nu} = -c_1 \tag{92}$$

oder

$$\frac{\nu(b_1 + a_1)}{a_0 - b_0 + \nu} = c_1. \tag{93}$$

Durch die Multiplikation der beiden Seiten der obigen Gleichung mit $(a_0 - b_0 + \nu)$ lässt sich die Subventionshöhe ν berechnen. Folglich gilt

$$\nu(b_1 + a_1) = c_1(a_0 - b_0 + \nu) \tag{94}$$

$$\nu(b_1 + a_1) = c_1(a_0 - b_0) + c_1\nu \tag{95}$$

$$\nu(b_1 + a_1) - c_1\nu = c_1(a_0 - b_0) \tag{96}$$

$$\nu(b_1 + a_1 - c_1) = c_1(a_0 - b_0) \tag{97}$$

$$\nu = \frac{c_1(a_0 - b_0)}{b_1 + a_1 - c_1}. \tag{98}$$

Die Verhältnisse zwischen der Elementen der obigen Gleichung können wie in der Gleichung 53 erklärt werden.