

Código de Hamming - Detección y corrección de errores

El código Hamming es una clase de código binario, que surge a finales de la década de 1940, mientras Richard Hamming, su inventor, trabajaba en el modelo de una computadora electromecánica basada en relés con intervalos de tiempo en segundos.

El problema surge cuando, al presentar inconsistencias en los tiempos, la máquina se detenia y emitía algunas señales para que los operadores pudieran corregir el problema. Motivo suficiente para que Hamming desarrollara una serie de algoritmos que le permitieran a la máquina ubicar la posición del error y corregirlo.

Algoritmo general

La idea principal es elegir los bits de corrección de errores de modo que el índice XOR (el XOR de todas las posiciones de bits que contienen 1) sea 0.

Empleamos las posiciones 1, 10, 100, ... (en binario) como el error - bits de corrección, lo que garantiza que es posible configurar los bits de corrección de errores para que el índice XOR de todo el mensaje sea 0.

Si el receptor recibe una cadena con índice XOR 0, puede concluir que no hubo ruido o distorsión, y de lo contrario, el índice XOR indica el índice del bit corrupto.

Descripción

En un mensaje de siete bits, hay siete posibles errores de un solo bit, por lo que tres bits de control de errores podrían especificar no solo que ocurrió sino también que bit causó el error.

Sebastian Berrios 1066753315

Hamming (7, 4) \rightarrow bits en total.
 Bits de información \leftarrow Bits de paridad o Redundancia
 $7 - 4 = 3$

Para Hamming (7, 4)
 Tabla generadora.

Posición	1	2	3	4	5	6	7
Binario	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
Datos							
P ₁							
P ₂							
P ₃							
H(7, 4)							

Matriz generadora

1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1

Matriz de verificación de paridad

1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1

Observación

En XOR - Exclusivo (\oplus), la salida es falsa cuando A y B tienen el mismo valor.

A	B	\oplus
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Sebastian Perrio - 1066753315

Para Codificar **1001** con Hamming (7, 4)
 por medio de la matriz generadora, formamos
 un vector con las entradas del código a verificar,
 luego hacemos el producto con la matriz
 generadora y al resultado le aplicamos mod 2.

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Aplicamos mod 2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hamming Codificado ←

Para verificar si se produjo algún error, durante
 la transmisión utilizamos la matriz de verificación
 de paridad y la multiplicación con el código
 que se recibió, al resultado le aplicamos
 modulo 2 y si no hubo ningún error el vector
 resultante será nulo. (también se conoce como
 vector de síndrome \mathbb{Z})

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Aplicamos mod 2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

No tiene errores ←

Verificamos el código
1101001

Sebastian Poma - 4066753315

5
Comenzamos el procedimiento verificando el código
recibido con la matriz de verificación de
paridad.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Aplicamos} \\ \text{Mod 2} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Verificamos el código
0011100

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El resultado es
un vector que al
traducir su valor a
binario obtenemos 2

El vector resultante indica la posición del bit
erróneo en el mensaje recibido.

Por lo tanto, para corregir el mensaje
se invierte el valor del bit en esa posición

$$\text{bit apertado} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ Mensaje Corregido.}$$

Sebastian Perno - 1066753315