Rapport - Heuristiques pour la brûlure de Graphe

Lilian Berruet

Juin 2020

Sommaire

1 Introduction

1.1 Présentation

Je m'appelle **Lilian Berruet**, je suis étudiant à l'**Université d'Orléans**. J'ai effectué, dans le cadre de mon diplôme de licence Informatique, un projet d'étude qui consiste en l'implémentation d'heuristiques. Une **heuristique** est une méthode de calcul qui fournit rapidement une solution réalisable, pas nécessairement optimale, pour un problème d'optimisation. Ces heuristiques s'appliquent sur les graphes. Un **graphe** est un réseau de sommet (ou noeud) relié par des arêtes. On travaillera dans ce rapport uniquement sur des **graphes simples non-orientés**.

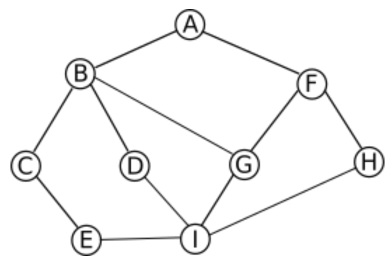

Figure 1: Exemple de graphe. L'ensemble des noeuds est $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$ et celui des arêtes est $\{(A, B), (A, F), (B, C), (B, D), (B, G), (F, G), (F, H), (C, E), (D, I), (G, I), (H, I), (E, I)\}$. Le graphe étant non orienté il est suffisant de représenter un seul sens de l'arête.

Le problème étudié dans le cadre de ce projet est la notion du **Burning number** qui demande à brûler des graphes. La brûlure d'un graphe schématise la **contagion** d'une information dans un **réseau**. Si l'on imagine le feu comme une information, les sommets comme des personnes et les arêtes le contact entre deux personne. On brûle un graphe un choisissant un **foyer initial** pour le feu puis l'on brûle les voisins des noeuds brûlés et on choisit le prochain foyer, jusqu'à ce que tous les noeuds soient brûlés. Le Burning number est le nombre de foyers sélectionnés durant la brûlure, il est donc un indice sur la vitesse à laquelle l'information se répand dans le réseau.

1.2 Définitions autour des graphes

Definition 1.1. *Un graphe non-orienté G et un couple G=(V,E) où V est un ensemble fini de sommets (ou noeuds) et E est un ensemble fini d'arêtes qui sont des paires de noeuds,* $E \subseteq \{\{x, y\} | (x, y) \in V^2 \wedge x \neq y\}$.

Definition 1.2. *Un graphe non-orienté, sans arêtes parallèles et sans boucles s'appelle un graphe simple.*

Definition 1.3. *Soit G=(V,E) un graphe. Soit* $x \in V$ *un sommet de G. On note N(x) l'ensemble des voisins de x, c'est à dire N(x)=*$\{y \in V, \{x, y\} \in E\}$.

Definition 1.4. *Le **chemin le plus court** d'un sommet vers un autre sommet est l'ensemble des arêtes qui composent le plus court chemin entre deux noeuds.*

Definition 1.5. *Soient $G = (V, E)$ un graphe, et u et v deux sommets de G. La* distance *de u à v dans G, notée $d_G(u, v)$, est la longueur d'un plus court chemin reliant u à v.*

1.3 Précision sur le Burning number

La **brûlure** d'un graphe se déroule en plusieurs étapes, prenons le graphe Figure 2 :

Étape 0 : Tous les sommets sont intacts, on choisit le premier foyer.

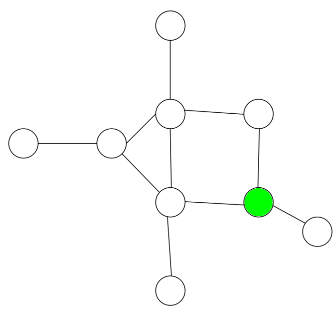

Figure 2: État initial du graphe. Premier foyer choisit en vert.

Étape 1 : On choisit un nouveau foyer non-brûlé F, s'il existe.

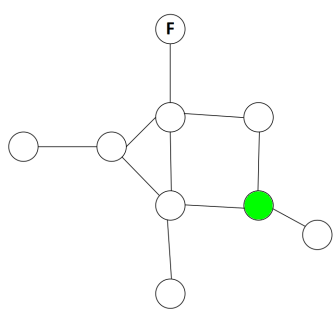

Figure 3: On choisis le nouveau foyer F.

Étape 2 : On brûle les voisins des noeuds brûlées sauf ceux de F.

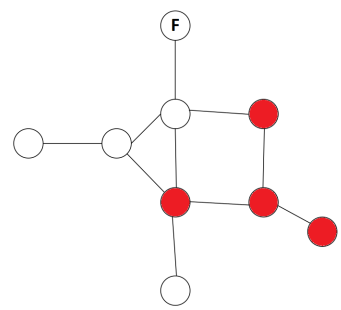

Figure 4: Le feu se répand aux voisins de foyer en vert.

Étape 3 : On retourne à l'étape 1 jusqu'à que tous les sommets soient brûlés.

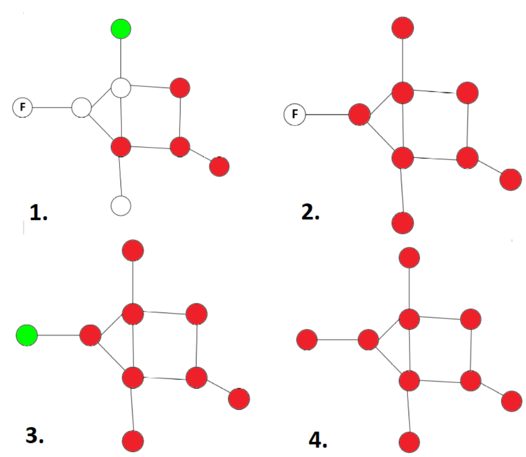

Figure 5: Dernière Étapes.

La liste des sommets choisis à l'**Étape 1 et 0** est appelé la **Burning sequence** et la taille de la plus petite Burning sequence possible est appelé le **Burning number**.

1.4 Lien avec les heuristiques

Pour obtenir le **Burning number**, La solution serait de tester toutes les **Burning sequence** possibles, mais cette solution demanderait énormément de temps dans des cas de graphe très grand. D'où la nécessité d'heuristiques qui ici seront la méthode par laquelle on choisit le prochain foyer. Le but sera d'obtenir la **Burning sequence** la plus petite possible.

2 Heuristiques des Études

Il m'a été demandé d'observer des études traitant du **Burning number**, fournis par mes responsables de stage, et également d'essayer de reproduire leurs méthodes de choix de sommet.

2.1 Brûlure par Diamètre

Cette heuristique est proposée dans une étude du 23 Mars 2020 [2]. Pour comprendre ce qu'est le **diamètre** d'un graphe, de nouvelles définitions sont nécessaires.

Definition 2.1. *L'**excentricité** d'un sommet est la plus grande distance qui le sépare des autres sommets du graphe.*

Definition 2.2. *Le **diamètre** est le maximum parmi les **excentricités** du graphe.*

Pour cette **heuristique** nous prenons le chemin le plus court du graphe de la taille du **diamètre** (le plus long des plus court chemins) .Il a été montré [1] qu'un chemin peut être brûlé en $\sqrt{diam(Graphe)}$ étapes. Une fois le chemin complètement brûlé, on choisit les prochains sommets **aléatoirement**.

On essaye ici de repérer la **"colonne vertébrale"** du graphe et de la brûler le plus vite possible. Seulement l'algorithme est efficace dans des cas de graphe bien particulier basé sur des cycles ou des graphes basés sur un très long **diamètre**. Les expériences montrent l'heuristique utile sur des graphes générés de façon artificielle qui favorise sa réussite.

2.2 Brûlure par Distance Maximum & Distance Intermédiaire

Dans cette heuristique, proposé dans cette étude [2], on choisit le premier sommet dans le **centre** du graphe.

Definition 2.3. *Le **rayon** d'un graphe est la plus petite excentricité du graphe.*

Definition 2.4. *Un sommet est dans le centre du graphe si son **excentricité** est égale au rayon du graphe.*

On calcule ensuite le **time_to_burn**, le nombre d'étapes que va mettre le sommet pour brûlé si on n'ajoute pas de nouveau foyer. C'est donc pour un sommet non-brûlés la **distance minimum** qui le sépare d'un sommet en feu. Si on prend le plus grand time_to_burn, qu'on appellera **t_max**, il s'agit du temps que mettra l'entièreté du graphe à brûler si l'on n'ajoute pas de nouveau foyer.

Dans l'heuristique de distance maximum, le sommet suivant est sélectionné si son **time_to_burn** est égal à **t_max -1** (s'il reste uniquement des noeuds isolés ils sont tous à t_max-1 on pourra donc brûler n'importe quel noeud); dans celle de distance intermédiaire s'il est égal à **t_max/2**.

Cette heuristique est également très intuitive. On commence par brûler le graphe en son **centre** pour y répandre un feu très rapidement, puis on cherche de nouveau foyer aux endroits isolés qui mettront du temps à atteindre par le feu central.

3 Heuristiques Simples

3.1 Brûlure par Degré

Cette **heuristique** consiste à brûler le sommet avec le plus haut degré.

Definition 3.1. *Soit N(x) les voisins de x, le degré de x est le nombre de voisins de x, c'est à dire* $d(x)=|N(x)|$.

On brûle donc en priorité les sommets **fortement connectés** du graphe. On se rapproche fortement d'une notion de **centralité**. Si l'on brûle un noeud de degré 10, il brûlera 10 noeuds donc en prenant toujours le degré le plus grand on brûle le graphe rapidement.

3.2 Brûlure par Centralité d'Intermédiarité

Il existe plusieurs centralités. On s'intéresse ici à la **centralité d'intermédiarité**. Elle est égale au nombre de fois qu'un sommet est sur le **chemin le plus court** entre deux autres sommets quelconques du graphe. Un sommet possède une grande intermédiarité s'il a une grande influence sur les transferts de données du graphe.

Definition 3.2.

$$\sum_{s\neq v\neq t} \frac{\sigma_{st}(v)}{\sigma_{st}} = center(v)$$

où σ_{st} *est le nombre de plus courts chemins de s à t et* $\sigma_{st}(v)$ *est le nombre de ces chemins passant par v.*

L'heuristique consiste donc à brûler le sommet avec la plus grande **centralité**. De la même façon que pour la centralité de vecteur propre.

4 Notion de Communauté

Beaucoup de **systèmes** du monde réel peuvent être représentés sous la forme de **réseau**, et un réseau sous la forme d'un **graphe**. On peut représenter des échanges **sociaux**, des structures **biologiques**, des tables **lexicales**. On peut penser aussi à Google Maps basé fortement sur une structure de graphe. Dans beaucoup de ses exemples on peut y ajouter la notion de **communauté**. Une communauté se retranscrit par un groupe de sommet fortement connecté entre eux. Il serait intéressant de lier notre problème de **brûlure** de graphe avec cette notion pour se rapprocher des **graphes du réel**.

4.1 Méthode Louvain

Avant de se demander comment interagir avec les **communautés** il faut d'abord les détecter dans un graphe. Un des algorithmes de détection est celle de la méthode **Louvain** qui a l'avantage d'être très peu complexe de l'ordre *O(n log n)*, la complexité est une mesure du temps d'exécution d'un algorithme.

4.2 Méta-Graphe

Le méta-graphe est un graphe qui simplifie un autre graphe, les sommets représentent une **communauté**, les arêtes possèdent une valeur qu'on appelle un poids qui correspond à l'interaction entre ces deux communautés.

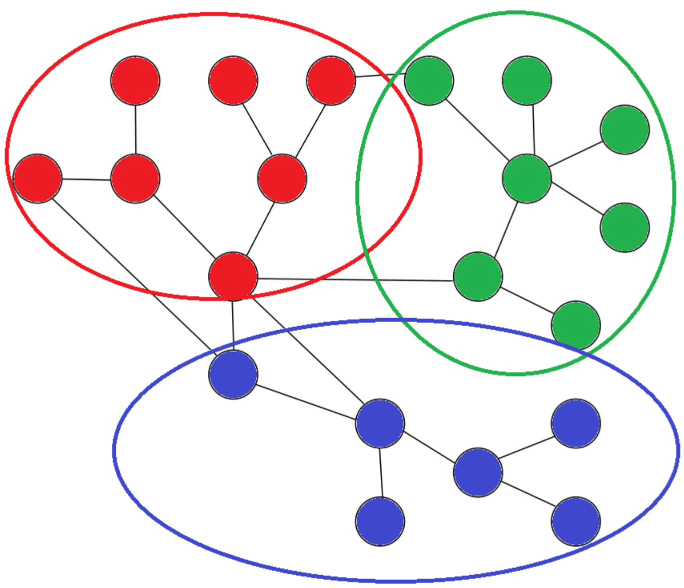

Figure 6: Exemple graphe avec ses communautés.

Sur l'image, la communauté des noeuds est indiquée par une couleur. Si l'on devait dessiner le Méta-Graphe, il ressemblerait à ceci:

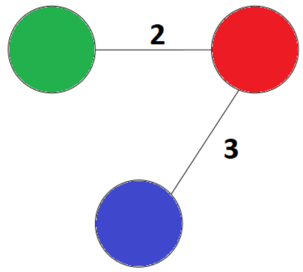

Figure 7: Exemple Méta-Grpahe de la figure 6.

Le chiffre sur les arêtes correspond à son poids, donc au nombre d'arêtes que partageaient les communautés.

5 Regard sur le Travail

Les heuristiques abordés dans ce rapport sont soit complexe en execution soit très simple en théorie, n'étant pas chercheur ni professionnel dans l'informatique, le travail réalisé est donc à titre d'exemple et nécessite une amélioration certaines, soit par de nouvelles heuristiques soit en optimisant le code existant.

References

[1] Anthony Bonato, Jeannette Janssen, and Elham Roshanbin. How to burn a graph. *Internet Mathematics*, 2016.

[2] Zahra Rezai Farokh, Maryam Tahmasbi, Zahra Haj Rajab Ali Tehrani, and Yousof Buali. New heuristics for burning graphs. *arXiv preprint arXiv:2003.09314*, 2019.