Chapter 7 Construction of a Probability Measure on $\mathbb{R}$

This chapter is an important special case of what we dealt with in Chapter 6. We assume

- $\Omega = \mathbb{R}$
- $\mathcal{B}$ be the Borel σ-algebra of $\mathbb{R}$
  - That is, $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{O})$, where $\mathcal{O}$ are the open subsets of $\mathbb{R}$

Definition 7.1

The distribution function induced by a probability P on $(\mathbb{R}; \mathcal{B})$ is the function

$$F(x) = P((-\infty, x])$$

定义了一个分布函数，跟本科学的不一样，按照现在的定义来说，分布函数是 $F(x) = P((-\infty, x])$ ，P是定义在Ω即$(\mathbb{R})$上的

记P为原概率测度，$(-\infty, x] \in \mathcal{B}$

本科：$X(w) \sim F(x) = P(\{w \in \Omega : X(w) \leq x\}) = P(\{w \in \Omega, X(w) \in (-\infty, x]\})$

现在：$P((-\infty, x]) = \ldots = P^X((-\infty, x])$

$(-\infty, x]$是原来的原像的集合

Theorem 7.1

The distribution function F characterizes the probability.
分布函数F (唯一的)定义了概率测度P

给一个 F，在 $\mathbb{R}$和 Borel-σ-代数上确定概率P
定义：给一个P，定义一个F
即 F与P之间 characterize
特征函数也能和唯一定义概率

证明：思路 证明 $F = G$时，$P = Q$

$$F(x) = P((-\infty, x])$$
$$G(x) = Q((-\infty, x])$$

Q是另一个概率测度

首先，令 $\mathcal{B}_0$是$(x, y]$这种形式的区间的有限交组成的集合，$-\infty \leq x \leq y \leq +\infty$

当 $x = y$时，$(x, y] = \emptyset$

$(x,y]=(-\infty,y]\cap(-\infty,x]^c$
若$x=y$，则上述集合为空集（一个集合与其补集之交为空集）

证明$\mathcal{B}_0$是一个代数

1. $\emptyset\in\mathcal{B}_0,\quad \mathbb{R}=(-\infty,\infty)\in\mathcal{B}_0$
2. 若 $A\in\mathcal{B}_0$，则 $A=\cup_{i=1}^n(x_i,y_i]$
   不妨设 $y_i<x_{i+1}$ ，保证A里面的集合两两不交
   $A^c=(-\infty,x_1)\cup(y_1,x_2]\cup\ldots\cup(y_{n-1},x_n)\cup(y_n,+\infty)\in\mathcal{B}_0$ （定义）
3. 对有限交封闭
   $A\in\mathcal{B}_0,B\in\mathcal{B}_0$，不妨设
   $A=(x_1,y_1]\cup(x_2,y_2]$
   $B=(x_1',y_1']\cup(x_2',y_2']$
   分类讨论：...

说明 $\mathcal{B}_0$生成的最小σ代数是一个博雷尔σ代数

- 如果(a,b)是一个开区间，则$(a,b)=\cup_{n=N}^{\infty}(a,b-\frac{1}{N}]$ （这里从N开始，保证了 $a<b-\frac{1}{N}$)
  则 $\sigma(\mathcal{B}_0)$包含了所有的开区间

$\because$ $(a,b)=\cup_{n=N}^{\infty}(a,b-\frac{1}{N}]$
$\sigma(\mathcal{B}_0):\emptyset,\Omega,\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_0^c$ $\sigma(\mathcal{B}_0)$是一个σ代数
则 $(a,b)\in\sigma(\mathcal{B}_0)$
即 $\sigma(\mathcal{B}_0)$包含了所有的开区间

- 任一个开集合可以分解为可列个开区间的并，则 $\sigma(\mathcal{B}_0)$包含了所有的开集合，$\mathcal{B}$是最小的包含了所有开集合的 σ 代数

$\mathcal{B}$是$\mathbb{R}$上的博雷尔集
$\mathcal{B}$是$\mathbb{R}$上所有开集生成的最小σ代数
则$\mathcal{B}\subset\sigma(\mathcal{B}_o)$

- $\cap_{n=1}^{\infty}(a,b+\frac{1}{n})=(a,b]$

$\cap_{n=1}^{\infty}(a,b+\frac{1}{n})\in\mathcal{B}$
$\cap_{n=1}^{\infty}(a,b+\frac{1}{n})=(a,b]\in\mathcal{B}_0$
$\forall B\in\mathcal{B}_0,B=\cup_{i=1}^m(a_i,b_i]=\cup_{i=1}^m\cap_{n=1}^{\infty}(a_i,b_i+\frac{1}{n})\in\mathcal{B}$
则 $\mathcal{B}_0\subset\mathcal{B}$

- 则 $\sigma(\mathcal{B}_0)=\mathcal{B}$

$\sigma(\mathcal{B}_0)$是包含$\mathcal{B}_0$的最小σ代数，是包含开区间的最小σ代数 $\mathcal{B}\subset\sigma(\mathcal{B}_o)$
$\mathcal{B}$是包含$\mathcal{B}_0$的σ代数，是包含开区间的最小σ代数 $\mathcal{B}_0\subset\mathcal{B}$
则$\mathcal{B}\subset\sigma(\mathcal{B}_0)\subset\mathcal{B}$
即 $\sigma(\mathcal{B}_o)=\mathcal{B}$

The relation (15) implies that $P((x,y])=F(y)-F(x)$

$F(x) = P((-\infty, x])$
$F(y) = P((-\infty, y])$

$$\begin{aligned} P((x,y]) &= P((-\infty,y] \cap (-\infty,x]^c) \\ &= P(\{(-\infty,y]^c \cup (-\infty,x]\}^c) \\ &= 1 - P((-\infty,y]^c \cup (-\infty,x]) \\ &= 1 - (F((-\infty,y]^c) + F((-\infty,x])) \\ &= 1 - (1 - F(y) + F(x)) \\ &= F(y) - F(x) \end{aligned}$$

$\text{If} \quad A \in \mathcal{B}_0 \quad A = \cup_{1\le i\le n}(x_i, y_i] \text{ with } y_i < x_{i+1}$
$\Rightarrow \quad P(A) = \sum_{1\le i\le n}\{F(y_i) - F(x_i)\}$

若 Q是另一个概率测度 $F(x) = Q((-\infty, x])$
则在先前的证明中 ，在 $\mathcal{B}_0$上 $P = Q$
由定理 6.1 可知，在 $\mathcal{B}$上 $P = Q$，则这是同样的概率测度

定理6.1：每一个定义在代数$\mathcal{A}_0$上的概率 P，在 $\mathcal{A}$上都有一个唯一的拓展
$\mathcal{A}_0$是代数，$\mathcal{A}$是σ代数
一一对应起来

The6.1	The7.1
algebra $\mathcal{A}_0$	algebra $\mathcal{B}_0$
$\sigma-$algebra $\mathcal{A}$	$\sigma-$algebra $\mathcal{B}$
$\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A}_0)$	$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{B}_0)$

则可知，对于每一个定义在代数$\mathcal{B}_0$上的概率 P，在 $\mathcal{B}$上都有一个唯一的拓展

注：定理7.1就是想证明唯一性，概率P的存在性并不需要证明。而且对于概率P，只要满足概率的两条性质（正则性、可列可加性），则就是一个概率。

Theorem 7.2

A function F is the distribution function of a (unique) probability on $(\mathbb{R}; \mathcal{B})$ if and only if one has:

1. F is non-decreasing;
2. F is right continuous;
3. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ and $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$