# El problema de los 3 cuerpos

Problema restringido en el plano y aplicación para el Sistema Sol-Júpiter por medio de simulaciones

**Jesús Bertani Ramírez**

Proyecto Final

Licenciatura en Computación Matemática
Departamento de Matemáticas
Universidad de Guanajuato
3 de junio de 2022

**Resumen.** Discutiremos primeramente la solución al problema de los 2 cuerpos y desarrollaremos las fórmulas que describen el movimiento para el caso elíptico. Posteriormente, obtendremos las fórmulas que describen el movimiento del tercer cuerpo en términos de los dos principales y concluiremos dando algunos ejemplos de trayectorias descritas por el tercer cuerpo cuando los principales son el Sol y Júpiter.

# Introducción

El problema de los 3 cuerpos es un caso particular del problema de los n-cuerpos. Este se puede plantear de la siguiente manera:

| Dadas la masa, posición y velocidad de un número $n$ de cuerpos bajo atracción gravitacional mutua, calcular sus movimientos orbitales para cualquier instante futuro [1]. |
|---|

El problema fue planteado por primera vez en *Principios matemáticos de la filosofía natural* (1687) por Sir Isaac Newton, quien resolvió el problema de manera geométrica para dos esferas que se atraen mutuamente. Posteriormente, en su tratado *Teoría del movimiento de los planetas y los cometas* (1744), Euler resolvería en su totalidad el caso para $n = 2$, describiendo todas las posibles trayectorias que los cuerpos pueden seguir dadas las condiciones iniciales [2].

Sin embargo, hablar del problema para $n > 2$ es otra historia. Resulta que el caso de dos cuerpos es el único en donde podemos resolver las ecuaciones que describen el movimiento completamente, por lo que para $n > 2$ se debe recurrir a aproximaciones para resolver el problema. [4]

Dado que es imposible obtener una solución analítica al problema de los 3 cuerpos, los matemáticos y físicos plantearon el problema con ciertas condiciones especiales. De estas condiciones especiales es de donde surge el **Problema restringido de los tres cuerpos**, del que nos ocuparemos en este proyecto. Este consiste en estudiar el movimiento de un cuerpo con masa despreciable comparada a la de otros dos cuerpos que están ejerciendo una influencia gravitatoria al mismo y entre sí. [6].

El sistema solar contiene varios ejemplos de estos sistemas, esto claro, ignorando los demás cuerpos celestes. Por ejemplo, el sistema compuesto por la Tierra y la Luna, donde el objeto de masa despreciable es un satélite; el sistema Tierra y Sol donde el tercer cuerpo es la Luna; y por su puesto, el sistema que tiene por dos cuerpos principales a el Sol y a Júpiter, que es el que simularemos en este proyecto. En este sistema, consideramos cuerpos poco masivos a asteroides o cometas que se encuentran en el sistema solar.

Aunque el sistema solar está lleno de cuerpos celestes, el 99.87 % de la masa del sistema está contenida en el Sol mientras que aproximadamente el 70 % de la masa planetaria está en Júpiter [2]. Teniendo en cuenta esto, aplicar el problema restringido de los tres cuerpos con estos dos como cuerpos principales nos dará una buena aproximación de las trayectorias que hipotéticos cometas o asteroides describirían en caso de entrar al sistema solar.

Cabe aclarar que las trayectorias obtenidas no serán siempre factibles en la vida real. Esto deriva de que nuestro modelo solo está considerando 2 cuerpos de la gran cantidad que existen en el sistema solar por lo que algunas trayectorias podrían verse alteradas o interrumpidas por acercarse o colisionar con otro cuerpo.

# 1. Las Ecuaciones de Newton

Sean primeramente 2 cuerpos cualesquiera en $\mathbb{R}^3$ con vectores de posición $\vec{p_1}$ y $\vec{p_2}$ y masas $m_1$ y $m_2$. Por la ley de gravitación universal tenemos que la magnitud de la fuerza de atracción entre ellos está dada por

$$F = \frac{Gm_1m_2}{\|\vec{p_2} - \vec{p_1}\|^2},$$

donde $G$ es la constante de gravitación universal, la cual tiene un valor de $6.673 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$.

Por la tercera ley de newton sabemos que la dirección de esta fuerza varía dependiendo de cual cuerpo estamos analizando. Queremos entonces saber además la dirección de la fuerza ejercida por el cuerpo 2 sobre el cuerpo 1, la cual llamaremos $F_{12}$. Ya que es atracción, esta fuerza tiene por dirección el vector unitario que va del centro de gravedad del cuerpo 1 al cuerpo 2. Este vector está dada por

$$\frac{\vec{p_2} - \vec{p_1}}{\|\vec{p_2} - \vec{p_1}\|},$$

y entonces, multiplicándolo por su magnitud dada por la ley de gravitación universal obtenemos que

$$F_{12} = \frac{Gm_1m_2}{\|\vec{p_2} - \vec{p_1}\|^3}(\vec{p_2} - \vec{p_1}).$$

Sabiendo entonces la expresión de la fuerza de gravitación, estamos listos para enunciar el problema general de los n-cuerpos. Supongamos que tenemos $n$ cuerpos en $\mathbb{R}^3$ con posiciones $\vec{p_1}, \vec{p_2}, \ldots, \vec{p_n} \in \mathbb{R}^3$ y masas $m_1, m_2, \ldots, m_n > 0$. Por la segunda ley de newton sabemos que $\sum F = ma$ y entonces, para cada cuerpo $i$ se tiene que

$$m_i \frac{d^2\vec{p_i}}{dt^2} = \sum_{j \neq i} F_{ij},$$

que podemos fácilmente reescribir como

$$\frac{d^2\vec{p_i}}{dt^2} = \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{\|\vec{p_j} - \vec{p_i}\|^3}(\vec{p_j} - \vec{p_i}).$$

Aquí, la derivada denota derivar el vector entrada por entrada.

Tenemos entonces un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y usando estas mismas, queremos describir el comportamiento de los n cuerpos a través del tiempo.

Para nuestro problema restringido de los 3 cuerpos resolveremos el problema para $n = 2$. Esto es así pues el hecho de que la masa del tercer objeto sea despreciable hace que las ecuaciones del movimiento de los otros dos cuerpos se simplifiquen. Si tomamos por $\vec{p_1}, \vec{p_2}$ y $\vec{p_3}$ las posiciones de los cuerpos y por $m_1, m_2, m_3$ sus masas obtendremos el siguiente sistema:

$$\frac{d^2\vec{p_1}}{dt^2} = \frac{Gm_2}{\|\vec{p_2} - \vec{p_1}\|^3}(\vec{p_2} - \vec{p_1})$$

$$\frac{d^2\vec{p_2}}{dt^2} = \frac{Gm_1}{\|\vec{p_1} - \vec{p_2}\|^3}(\vec{p_1} - \vec{p_2})$$
$$\frac{d^2\vec{p_3}}{dt^2} = \frac{Gm_1}{\|\vec{p_1} - \vec{p_3}\|^3}(\vec{p_1} - \vec{p_3}) + \frac{Gm_2}{\|\vec{p_2} - \vec{p_3}\|^3}(\vec{p_2} - \vec{p_3})$$

donde las primeras dos ecuaciones no contienen la acción del tercer cuerpo y por lo tanto corresponden al problema de los dos cuerpos con posiciones $\vec{p_1}, \vec{p_2}$ y masas $m_1, m_2$.

# 2. El caso de los dos cuerpos

Para poder dar solución a este caso particular del problema de los n-cuerpos vamos primero a demostrar una propiedad del sistema que nos será bastante útil. Esta está relacionada con el concepto de **momento angular total**, que definiremos a continuación para nuestro caso particular. Para facilitar la escritura, usaremos otra simbología para denotar las derivadas de los vectores de posición respecto al tiempo. Estos nuevos símbolos se definen como sigue:

$$\dot{\vec{p}} := \frac{d\vec{p}}{dt},$$
$$\ddot{\vec{p}} := \frac{d^2\vec{p}}{dt^2}.$$

Si en lugar de vector se tiene una cantidad escalar $x$, las derivadas de esta se denotaran de manera usual, es decir,

$$\frac{dx}{dt} = x',$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = x''.$$

Sean entonces los dos cuerpos de nuestro problema con posiciones $p_1$ y $p_2$ y masas $m_1$ y $m_2$.

**Definición 1** *El momento angular de un cuerpo representa la cantidad de movimiento de rotación de un cuerpo. Este es un vector en el origen del sistema ordenado que estemos utilizando representado con la letra $L$ donde*

$$L = m\vec{p} \times \dot{\vec{p}},$$

*para $m$ y $p$ la masa y posición de dicho cuerpo. Cuando se toma a $\mathbb{R}^n$ como el sistema ordenado, $L$ se encuentra en el origen.*

Notemos que $L$ es perpendicular en cada instante al plano generado por el vector dirección del cuerpo y su vector velocidad. Definamos ahora nuestro segundo concepto de interés.

**Definición 2** *El momento angular total está definido como la suma de los momentos angulares de todos los cuerpos del sistema. Lo denotaremos por $J$ y para nuestro sistema,*

$$J := m_1\vec{p_1} \times \dot{\vec{p_1}} + m_2\vec{p_2} \times \dot{\vec{p_2}},$$

*vector que estará ubicado en el origen.*

Por definición ocurre que $J$ es un vector perpendicular en cada instante a la dirección del movimiento del sistema tomado como un solo objeto.

Pasemos ahora a la propiedad de interés.

**Teorema 1** *(Ley de conservación del momento angular total.) $J$ es constante a través de la solución.*

**Demostración.** Nuevamente, si $J$ es constante entonces debe pasar que $\dot{J} = 0$. Por definición tenemos que

$$J = m_1 \vec{p_1} \times \dot{\vec{p_1}} + m_2 \vec{p_2} \times \dot{\vec{p_2}},$$

y entonces

$$\begin{aligned}
\dot{J} &= m_1 \left( \dot{\vec{p_1}} \times \dot{\vec{p_1}} + \vec{p_1} \times \ddot{\vec{p_1}} \right) + m_2 \left( \dot{\vec{p_2}} \times \dot{\vec{p_2}} + \vec{p_2} \times \ddot{\vec{p_2}} \right), \\
&= m_1 \vec{p_1} \times \ddot{\vec{p_1}} + m_2 \vec{p_2} \times \ddot{\vec{p_2}}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo nuevamente los valores para $\ddot{\vec{p_1}}$ y $\ddot{\vec{p_2}}$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\dot{J} &= \frac{G m_1 m_2}{\|\vec{p_1} - \vec{p_2}\|^3} \vec{p_1} \times (\vec{p_2} - \vec{p_1}) + \frac{G m_1 m_2}{\|\vec{p_1} - \vec{p_2}\|^3} \vec{p_2} \times (\vec{p_1} - \vec{p_2}) \\
&= \frac{G m_1 m_2}{\|\vec{p_1} - \vec{p_2}\|^3} \left( \vec{p_1} \times (\vec{p_2} - \vec{p_1}) - \vec{p_2} \times (\vec{p_2} - \vec{p_1}) \right) \\
&= \frac{G m_1 m_2}{\|\vec{p_1} - \vec{p_2}\|^3} (\vec{p_1} - \vec{p_2}) \times (\vec{p_2} - \vec{p_1}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

Este último teorema nos indica que el vector perpendicular al movimiento del sistema no cambia en ningún instante de la solución, es decir, no solo tiene la misma magnitud en todo momento sino que también tiene la misma orientación. Esto implica que el movimiento de dos planetas sucede en un plano, el cual está determinado por las posiciones y velocidades iniciales de ambos cuerpos. Sabiendo esto, para resolver el problema de los 2 cuerpos pasaremos a estudiarlo en un plano, deshaciéndonos así de una dimensión.

Para resolver el problema tenemos varios caminos que podemos tomar. Estos pueden consultar por ejemplo en [5]. Nosotros nos ocuparemos de la versión simplificada de la solución que Frida Gleisner llama moderna en su proyecto citado anteriormente. En esta consideraremos uno de los dos cuerpos estáticos y obtendremos una expresión para la distancia del segundo dado su posición.

Cabe resaltar que esta solución es suficiente para nuestras simulaciones. Esto pues, como se mencionó en la introducción, el Sol contiene más del 99 % de la masa del sistema solar por lo que los demás cuerpos no tendrán una influencia considerable en el desplazamiento de este. Contrario a que el Sol define casi por completo el movimiento de los planetas.

# 3. Solo un cuerpo en movimiento

Denotemos por $C_1$ y $C_2$ a los cuerpos, con masas $m_1$ y $m_2$ y mantengamos $C_1$ fijo. Como se mencionó anteriormente, el movimiento de los dos cuerpos se da en un plano por lo que las coordenadas polares son suficientes para describir el sistema. Ya que no estamos trabajando con ningún sistema de referencia en particular, podemos asumir que el cuerpo uno se encuentra en el origen y tomar por ejes a los que nos sean convenientes.

Denotemos entonces por $\vec{r}$ el vector que une a el origen con la posición del cuerpo 2 en este nuevo sistema de referencia, en otras palabras, su posición. Este se puede descomponer en magnitud y sentido por lo que escribimos

$$\vec{r} = r\vec{d}$$

donde $r$ es la magnitud y $\vec{d}$ es un vector unitario en la misma dirección que $\vec{r}$. Definimos además el *movimiento angular* como el vector $\vec{\theta}$ el cual es perpendicular a $\vec{d}$ y también es unitario. Juntos, $\vec{r}$ y $\vec{\theta}$ describirán el movimiento del segundo cuerpo. El primero dirá como cambia la distancia con respecto al origen y el segundo como cambia la dirección del movimiento en cada instante de tiempo. Todos estos vectores pueden verse en el siguiente diagrama.

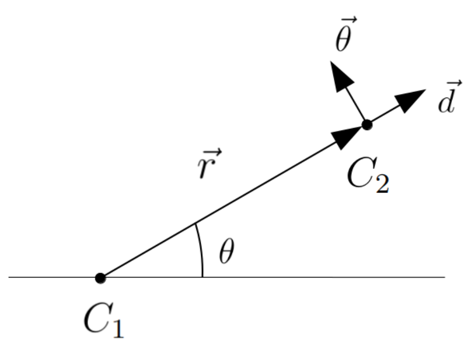


Figura 1: Vectores de interés para el sistema

Como primer paso para dar solución al problema calcularemos la **aceleración de $\vec{r}$.** Usando entonces la expresión de $\vec{r}$ y teniendo en cuenta que tanto la dirección como el sentido de $\vec{r}$ dependen del tiempo tenemos que

$$\dot{\vec{r}} = r'\vec{d} + r\dot{\vec{d}},$$
$$\ddot{\vec{r}} = r''\vec{d} + 2r'\dot{\vec{d}} + r\ddot{\vec{d}}.$$

Ahora, dado que los vectores $\vec{d}$ y $\vec{\theta}$ son unitarios, los podemos expresar usando los vectores canónicos $\vec{x}$ y $\vec{y}$. Se tiene entonces que

$$\vec{d} = \cos(\theta)\vec{x} + \sin(\theta)\vec{y}$$
$$\vec{\theta} = -\sin(\theta)\vec{x} + \cos(\theta)\vec{y}$$

y derivando,

$$\dot{\vec{d}} = -\sin(\theta)\theta'\vec{x} + \cos(\theta)\theta'\vec{y}$$

$$\dot{\vec{\theta}} = -\cos(\theta)\theta'\vec{x} - \sin(\theta)\theta'\vec{y}.$$

Usando entonces estas cuatro ecuaciones obtenemos que

$$\begin{aligned}\dot{\vec{d}} &= \vec{\theta}\theta' \\ \dot{\vec{\theta}} &= -\vec{d}\theta',\end{aligned}$$

y entonces, se sigue que

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{d}} &= \dot{\vec{\theta}}\theta' + \vec{\theta}\theta'' \\ &= -\vec{r}(\theta')^2 + \vec{\theta}\theta''.\end{aligned}$$

Usando las expresiones de la primera y segunda derivada de $\vec{d}$ nos permite escribir la aceleración de $\vec{r}$ como sigue:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= r''\vec{d} + 2r'\dot{\vec{d}} + r\ddot{\vec{d}} \\ &= r''\vec{d} + 2r'\theta'\vec{\theta} + r[-\vec{r}(\theta')^2 + \vec{\theta}\theta''] \\ &= [r'' - r(\theta')^2]\vec{r} + [2r'\theta' + r\theta'']\vec{\theta}.\end{aligned}$$

Recordemos por las leyes de Newton que la aceleración de un cuerpo tiene la misma dirección que la suma de las fuerzas que actúan sobre él. Entonces, como la única fuerza que actúa sobre $C_2$ es la de atracción hacia $C_1$, resulta que $\ddot{\vec{r}}$ tiene por dirección $\vec{r}$ y por lo tanto se debe cumplir que

$$\begin{aligned}r'' - r(\theta')^2 &= \|\ddot{\vec{r}}\| \\ 2r'\theta' + r\theta'' &= 0,\end{aligned}$$

pues en caso contrario no se cumpliría la segunda ley de Newton. Este resultado nos da las nuevas ecuaciones diferenciales a resolver.

# 4. Resolviendo $2r'\theta' + r\theta'' = 0$

Notemos que esta ecuación diferencial tiene dos variables que debemos resolver por lo que lo haremos en pasos.

## 4.1. Solución para $\theta'$

Denotemos primeramente por $w$ a $\theta'$. Sustituyendo obtenemos ahora la siguiente ecuación

$$2wr' + rw' = 0.$$

Notemos que

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial r}{\partial w} = 0$$

por lo que la ecuación es exacta y entonces

$$\frac{dw}{dr} = \frac{-2w}{r}.$$

Usando ahora el método de separación de variables obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{w}dw &= \frac{-2}{r}dr \\ \ln|w| &= \ln|r^{-2}| + h \\ w &= \frac{h}{r^2}, \end{aligned}$$

es decir

$$\theta' = \frac{h}{r^2},$$

donde $h$ es una constante.

## 4.2. Reescribiendo la ecuación

Recordemos que la fuerza de gravedad estaba dada por su magnitud, dada por las ley de gravitación universal, y su sentido. Sin embargo, ahora el sentido de esta fuerza que actúa sobre $C_2$ en nuestro nuevo sistema ordenado es $-\vec{d}$ por lo que podemos reescribir la fuerza de gravedad $F$ en función del vector $\vec{d}$ como

$$F = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\vec{d}.$$

Además, por la segunda ley de Newton tenemos que para $C_2$, $F = m_2\ddot{\vec{r}}$ y recordemos que

$$\|\ddot{\vec{r}}\| = r'' - r(\theta')^2$$

por lo que

$$F = m_2(r'' - r(\theta')^2)\vec{d}.$$

Ocupando ambas expresiones para la fuerza gravitatoria se obtiene la siguiente equivalencia de vectores

$$-\frac{Gm_1m_2}{r^2}\vec{d} = m_2(r'' - r(\theta')^2)\vec{d}$$

y puesto que ambos tienen el mismo sentido, se sigue que las magnitudes también deben ser iguales y entonces, por expresión para $\theta'$ anteriormente obtenida, se sigue que

$$\begin{aligned} -\frac{Gm_1}{r^2} &= r'' - r(\theta')^2 \\ -\frac{Gm_1}{r^2} &= r'' - \frac{h^2}{r^3}. \end{aligned}$$

Y entonces, la nueva ecuación a resolver es

$$r'' - \frac{h^2}{r^3} + \frac{Gm_1}{r^2} = 0$$

solo que no lo haremos respecto al tiempo, si no que en función de $\theta$.

## 4.3. Expresando $r$ en función de $\theta$

Expresar $r$ en función de $\theta$ implica que lo trataremos como una función de la forma $r(\theta(t))$. Debemos entonces calcular la aceleración de $r$ respecto a $\theta$; para esto usaremos la regla de la cadena. Por claridad, en la regla de la cadena se usarán diferenciales en lugar de la notación que hemos usado durante la prueba.

Primeramente tenemos que

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

y entonces

$$\begin{aligned}\frac{d^2r}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right)\\ &= \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dr}{dt}\right)\frac{d\theta}{dt}\\ &= \frac{h}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right).\end{aligned}$$

Sustituyendo nuestro nuevo valor para $r''$ en la ecuación diferencial obtenida en el paso anterior obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{h}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{h^2}{r^3} + \frac{Gm_1}{r^2} &= 0\\ h^2\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{h^2}{r} &= -Gm_1.\end{aligned}$$

## 4.4. Solución a la ecuación

Definamos ahora $u = 1/r$. Se tiene entonces que $r = 1/u$ y por lo tanto

$$\frac{dr}{du} = -\frac{1}{u^2} = -r^2.$$

De esto se sigue que

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta} = -r^2\frac{du}{d\theta}.$$

Sustituyendo entonces las nuevas expresiones para $r$ y $dr/d\theta$ en la ecuación del paso anterior obtenemos

$$\begin{aligned}-h^2\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\right) - h^2u &= -Gm_1\\ \frac{d^2u}{d\theta} + u &= \frac{Gm_1}{h^2},\end{aligned}$$

la cual es una ecuación diferencial ordinaria con coeficientes constantes, cuyas soluciones son de la forma

$$u(\theta) = A\cos(\theta) + B\sin(\theta) + \frac{Gm_1}{h^2}$$

y por lo tanto, si $k = Gm_1/h^2$,

$$r(\theta) = \frac{1}{A\cos(\theta) + B\sin(\theta) + K},$$

donde $A$ y $B$ dependen de la velocidad inicial de $C_2$.

# 5. Expresando la solución como una elipse

Ya tenemos una expresión explícita para la distancia del segundo cuerpo en función del ángulo con respecto al eje horizontal de nuestro sistema ordenado, sin embargo Newton demostró que estas órbitas son elípticas por lo que eso es lo que haremos a continuación.

La ecuación de una elipse en forma polar donde su foco derecho está en el origen está dada por

$$r(\gamma) = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos(\gamma)},$$

donde $a$ es la medida del semieje mayor y $\varepsilon$ la excentricidad. Queremos entonces que nuestra solución se asemeje a esta ecuación. Para esto usaremos la ecuación trigonométrica

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\alpha - \beta).$$

Tomando entonces $\theta_0$ y $C$ tales que

$$A = C\cos(\theta)$$
$$B = C\sin(\theta)$$

obtenemos que

$$A\cos(\theta) + B\sin(\theta) = C\cos(\theta_0 - \theta).$$

donde claramente se tiene que $C = \sqrt{A^2 + B^2}$, que elegimos ser la raíz positiva.

Se tiene entonces que podemos reescribir la solución $r$ como

$$r(\theta) = \frac{1}{K + C\cos(\theta - \theta_0)}.$$

Tomando entonces $\theta_0 = 0$ pues asumimos que ambos cuerpos comienzan en el eje horizontal, obtenemos que

$$r(\theta) = \frac{1/k}{1 + \frac{C}{K}\cos(\theta)},$$

la cual es la ecuación de una elipse si $C/K < 1$.

# 6. La solución considerando el sistema Sol-Júpiter

Sabemos ahora que la trayectoria de Júpiter alrededor del Sol está descrita por una ecuación de la forma

$$r(\theta) = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos(\theta)},$$

que es una elipse si $\varepsilon < 1$ y el Sol estará ubicado en el foco derecho de la misma. Sin embargo, estos datos ya han sido recabados en el pasado y entonces, usando por ejemplo [3] sabemos que para Júpiter,

$$\varepsilon = 0.048 \qquad \text{y} \qquad a = 7.7838 \times 10^8 \text{ km}$$

por lo que efectivamente, Júpiter describe una trayectoria elíptica alrededor del Sol.

# 7. El tercer cuerpo y la simulación

Una vez hemos obtenido la fórmula que describe el movimiento de Júpiter alrededor del Sol, ya podemos calcular la aceleración del tercer cuerpo, pues conocemos la posición de los dos cuerpos principales de nuestro sistema para todo valor de $\theta$. Como ya lo hemos recalcado, el movimiento de los dos cuerpos principales se da en un plano por lo que para facilitar los cálculos asumiremos que el tercer cuerpo también se encuentra limitado a dicho plano.

Planteemos entonces el sistema a simular con todas las consideraciones y resultados que hemos obtenido. Sean $m_1$ y $m_2$ las masa del Sol y Júpiter respectivamente. Para estos cuerpos tenemos que las constantes para la fórmula de la distancia $r$ son $\varepsilon = 0.048$ y $a = 7.7838 \times 10^8$, considerando a el Sol fijo en el origen. Sea entonces $\vec{p} = (x, y)$ la posición del tercer cuerpo en el plano descrito por el movimiento de Júpiter para algún valor de $\theta$. La aceleración del tercer cuerpo estará dada por

$$\frac{d^2\vec{p}}{dt^2} = -\frac{Gm_1}{\|\vec{p}\|^3}\vec{p} + \frac{Gm_2}{\|\vec{p_1} - \vec{p}\|^3}(\vec{p_1} - \vec{p})$$

donde $\vec{p_1}$ es la posición de Júpiter dada por

$$\vec{p_1} = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) .$$

Puesto que las cantidades en estos problemas son muy grandes o muy pequeñas[1], primeramente normalizaremos las unidades para que $G(m_1 + m_2) = 1$ y $a = 1$. Tenemos entonces que la fórmula para la distancia de Júpiter al Sol ahora es

$$r(\theta) = \frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon\cos(\theta)}.$$

Definimos a continuación el parámetro de masa

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

[1]Por ejemplo la constante de gravitación, $6.673 \times 10^{-11}$, o la masa del Sol, $1.989 \times 10^{30}$

y notamos que

$$Gm_1 = 1 - \mu, \qquad \text{y} \qquad Gm_2 = \mu.$$

Se tiene entonces que la ecuación del movimiento del tercer cuerpo puede ser reescrita como

$$\frac{d^2\vec{p}}{dt^2} = \frac{\mu - 1}{\|\vec{p}\|^3}\vec{p} + \frac{\mu}{\|\vec{p_1} - \vec{p}\|^3}(\vec{p_1} - \vec{p})$$

y dado que la derivada se mencionó es entrada por entrada, podemos separar esta ecuación en las siguientes dos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\mu - 1}{\|\vec{p}\|^3}x + \frac{\mu}{\|\vec{p_1} - \vec{p}\|^3}(r\cos(\theta) - x)$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\mu - 1}{\|\vec{p}\|^3}y + \frac{\mu}{\|\vec{p_1} - \vec{p}\|^3}(r\sin(\theta) - y).$$

Sin embargo notemos que hay un problema. La aceleración de nuestro tercer cuerpo es respecto al tiempo pero la posición de Júpiter está dada en términos de $\theta$. Recordemos que en la solución del movimiento de dos cuerpos manteniendo uno fijo obtuvimos que $d\theta/dt = h/r^2$ para alguna constante $h$. Resulta que bajo nuestro sistema reparametrizado $h^2 = 1 - \varepsilon^2$[6] por lo que

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{r^2}.$$

Considerando entonces a $x$ como en función de $\theta$ tenemos que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{r^2}\frac{dx}{d\theta}$$

y entonces, siguiendo un proceso análogo al utilizado en el cambio de variable de la prueba tenemos que

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1 - \varepsilon^2}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dx}{d\theta}\right)$$

y puesto que

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r^2}\right) = \frac{-2}{r^3}\left(\frac{\varepsilon(1 - \varepsilon^2)\sin(\theta)}{(1 + \varepsilon\cos(\theta))^2}\right),$$

obtenemos

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1 - \varepsilon^2}{r^2}\left(\frac{-2}{r^3}\left(\frac{\varepsilon(1 - \varepsilon^2)\sin(\theta)}{(1 + \varepsilon\cos(\theta))^2}\right)\frac{dx}{d\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2x}{d\theta^2}\right).$$

Análogamente,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1 - \varepsilon^2}{r^2}\left(\frac{-2}{r^3}\left(\frac{\varepsilon(1 - \varepsilon^2)\sin(\theta)}{(1 + \varepsilon\cos(\theta))^2}\right)\frac{dy}{d\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2y}{d\theta^2}\right).$$

Teniendo entonces estas expresiones ocurre que el movimiento del tercer cuerpo está dado por las ecuaciones

$$\frac{1-\varepsilon^2}{r^2}\left(\frac{-2}{r^3}\left(\frac{\varepsilon(1-\varepsilon^2)\sin(\theta)}{(1+\varepsilon\cos(\theta))^2}\right)\frac{dx}{d\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{d^2x}{d\theta^2}\right)=\frac{\mu-1}{\|\vec{p}\|^3}x+\frac{\mu}{\|\vec{p_1}-\vec{p}\|^3}(r\cos(\theta)-x)$$
$$\frac{1-\varepsilon^2}{r^2}\left(\frac{-2}{r^3}\left(\frac{\varepsilon(1-\varepsilon^2)\sin(\theta)}{(1+\varepsilon\cos(\theta))^2}\right)\frac{dy}{d\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{d^2y}{d\theta^2}\right)=\frac{\mu-1}{\|\vec{p}\|^3}y+\frac{\mu}{\|\vec{p_1}-\vec{p}\|^3}(r\sin(\theta)-y).$$

Recapitulando, conocemos para todo valor de $\theta$ la posición del Sol y Júpiter y además, ahora también conocemos una ecuación para obtener la aceleración del tercer cuerpo para todo $\theta$. Podemos entonces comenzar con las simulaciones.

# 8. Las trayectorias del tercer cuerpo

A continuación se presentan diferentes trayectorias del tercer cuerpo para distintas velocidades y posiciones iniciales. Denotaremos por $x_0, y_0$ la posición inicial del tercer cuerpo y por $Vx_0, Vy_0$ su velocidad inicial. Recordemos que nuestros datos están normalizados por lo que para la posición inicial, $1$ indica en realidad una distancia de $7.7828 \times 10^8 km$; Y puesto que nuestras ecuaciones están en términos de $\theta$, la velocidad inicial es solo la razón de cambio de posición del objeto respecto a un instante del sistema, este último determinado por el valor de $\theta$. Como nota adicional, el Sol está representado por un punto amarillo en $(0, 0)$; la trayectoria de Júpiter es color naranja y la trayectoria del tercer cuerpo es color azul.

En estas dos primeras imágenes colocamos al tercer cuerpo dentro de la elipse descrita por Júpiter y fuera de ella. Notemos que cuando se puso fuera la trayectoria no se completó, mientras que lo hizo varias veces cuando se colocó dentro. Esto es un resultado esperado pues sabemos que el año terrestre es menor que un año de Júpiter; y este a su vez es menor que un año de Saturno.

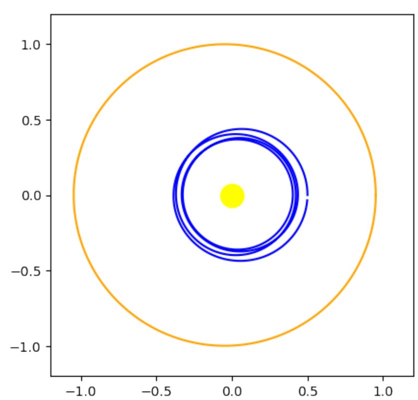


Figura 2:
$x_0 = 0.5, y_0 = 0, Vx_0 = 0, Vy_0 = 1.2$

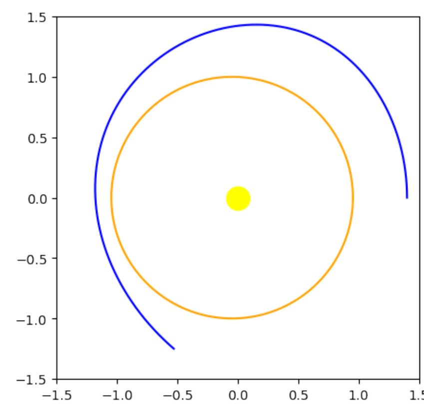


Figura 3:
$x_0 = 1.4, y_0 = 0, Vx_0 = 0, Vy_0 = 0.85$

[1] 1 año de Júpiter son 12 años terrestres mientras que 1 año de Saturno son 29 años terrestres.

Notemos que si colocamos el tercer cuerpo muy cerca de Júpiter su trayectoria que normalmente es parecida a una elipse se ve altamente alterada, pues lo único que cambió con la última trayectoria fue su posición inicial.

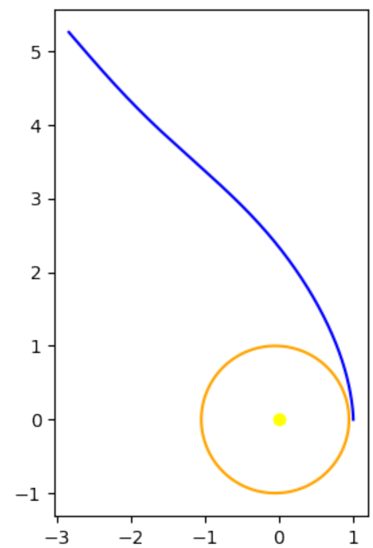


Figura 4: $x_0 = 1.01, y_0 = 0, Vx_0 = 0, Vy_0 = 0.85$

Para un último ejemplo colocaremos el tercer cuerpo considerablemente alejado del Sol y Júpiter. Notemos como pasa cercano al Sol y sin embargo, su trayectoria continúa y forma una trayectoria parecida a una elipse. Esto no es de extrañar pues los cometas describen este mismo tipo de órbitas. Cabe resaltar que para poder observar esta trayectoria se hizo que júpiter recorriera su órbita 20 veces, lo cual no es extraño pues los cometas tienen órbitas de hasta miles de años.

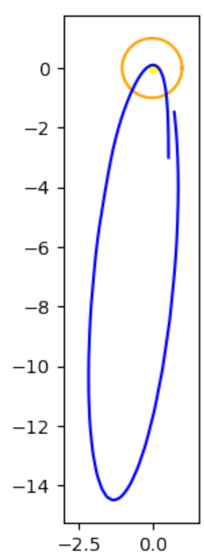


Figura 5: $x_0 = 0.5, y_0 = -2, Vx_0 = 0, Vy_0 = 1$

Para consultar como se mueven los planetas conforme cambia el valor de $\theta$ en las trayectorias anteriores hacer clic aquí. Este es una carpeta que contiene videos de las trayectorias donde el sol, Júpiter y el tercer cuerpo son representados por puntos amarillo, naranja y azul respectivamente.

# Conclusiones

Como ya se mencionó, resolver el problema de los n-cuerpos para $n > 2$ es imposible. Sin embargo, las páginas de este texto nos permitieron conocer la solución para $n = 2$ y así obtener una aproximación bastante fiel al movimiento de los planetas en el sistema solar. Este resultado nos llevó a poder realizar las simulaciones que queríamos, pues ya conocíamos las posiciones del Sol y Júpiter en todo momento y solo faltaba calcular la posición del tercer cuerpo.

Estas simulaciones tuvieron resultados ya esperados, pero aun así sorprendentes. Aunque ignoramos la acción de Júpiter sobre el Sol y la del tercer cuerpo sobre tanto el Sol como Júpiter, las trayectorias obtenidas mediante el simulador fueron bastante apegadas a la realidad. Como pudimos notar, ninguna de las trayectorias obtenidas para el tercer cuerpo fue totalmente elíptica pero esto se debe a errores numéricos. Si pudiéramos tener aún más precisión, las trayectorias que asemejaban elipses pasarían a ser verdaderas elipses.

Como última cosa cabe resaltar que aunque Júpiter es el planeta que tiene más masa en el sistema solar, su influencia en las trayectorias del tercer cuerpo es despreciable en la mayoría de los casos. Esto lo podemos notar en que casi todas las trayectorias obtenidas fueron elípticas, como si se estuviera resolviendo el problema de los dos cuerpos, y la única que no siguió este patrón fue en la que el tercer cuerpo comenzó muy cerca de Júpiter. Podemos decir entonces con bastante certeza que Júpiter solo tendrá una influencia considerable en la trayectoria del tercer cuerpo cuando este pase muy cerca de él.

## Referencias


[1] URL: https://es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_los_n_cuerpos.

[2] Carlos M. Madrid Casado. *La descripción del universo en una ecuaciones, Laplace*. 3.ª ed. RBA, 2017.

[3] Angel Franco Garcia. 2016. URL: http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/celeste/jupiter/jupiter.html.

[4] Richard Montgomery Gil Bor. «Poincaré y el problema de n-cuerpos». En: *Miscelánea Matemática* (2014), págs. 83-102.

[5] Frida Gleisner. *Three solutions to the two-body problem*. 2013.

[6] Sandra Redó Riveiro. «Restricted three body problems in the solat System: simulations». En: *Treballs de Fi de Grau* (2016).