Draft version 23 febbraio 2021
Typeset using LaTeX default style in AASTeX63

Moto accelerato di un volano

Gabriele Bertinelli[1]
1219907
Roben Bhatti[1]
1216914
Alberto Brusegan[1]
1230215

[1] *Dipartimento Fisica e Astronomia, UniPD*
Corso di Astronomia, a.a. 2019-2020

1. INTRODUZIONE

Il volano è un corpo rigido vincolato a ruotare attorno ad un asse fisso, cui è collegato da un sistema di cuscinetti a sfere; un peso in ottone, al quale è fissato un filo di refe che si può avvolgere attorno ad un cilindro munito di una scanalatura elicoidale e solidale al volano stesso, viene poi sfruttato per applicare una forza di momento noto rispetto all'asse di rotazione.

2. OBIETTIVI

1. Verifica della legge del moto;
2. misura del momento d'inerzia del volano rispetto all'asse di rotazione;
3. misura del momento delle forze d'attrito (sempre rispetto all'asse fisso).

3. DETTAGLI TECNICI SULL'APPARATO SPERIMENTALE

Uno schema dell'apparato strumentale è riportato in Fig.1.

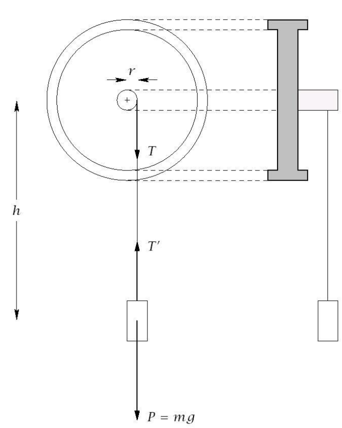

Figura 1. Schema di un volano

gabriele.bertinelli@studenti.unipd.it
roben.bhatti@studenti.unipd.it
alberto.brusegan@studenti.unipd.it

Le forze agenti sul volano sono il momento delle forze d'attrito, la tensione del filo T, la forza peso P e la tensione T'. Trattandosi di attrito tra corpi solidi (rotolamento delle sfere dei cuscinetti), il momento delle forze d'attrito che agiscono sull'asse del volano si può ritenere indipendente dalle condizioni del moto: quindi M_a è una costante.
Valori noti:
$m = 34.0 \pm 0.5\ g$ è la massa del peso;
$r = 18.95 \pm 0.01\ mm$ (si veda Fig.1 per il significato geometrico di r);
$g = 9.806 \pm 0.001\ m/s^2$ è il valore della accelerazione di gravità attesa a Padova.
Le equazioni del moto sono pertanto:

$$\begin{aligned} m\,g - T' &= m\,a \\ T\,r - M_a &= I\,\tfrac{d\omega}{dt} \end{aligned} \tag{1}$$

$\frac{d\omega}{dt}$ lo possiamo sostituire con $\frac{a}{r}$ e il filo che connette il peso al volano si può considerare di massa trascurabile, risulterà in conseguenza $T = T'$. Dopo aver fatto le dovute sostituzioni ed esplicitando per a, accelerazione del peso, troviamo

$$a = \frac{(m\,r\,g - M_a)r}{I + m\,r^2} \tag{2}$$

dove I è il momento di inerzia del volano.
Dal momento che tutte le grandezza da cui a dipende sono costanti il moto del volano sarà uniformemente accelerato.
Se il filo si considera inestensibile, lo spazio percorso dal peso è legato all'angolo ϕ di cui è ruotato il volano

$$s = \frac{1}{2}a\,t^2 = r\,\phi \tag{3}$$

La velocità angolare ω del volano in funzione del tempo è espressa da

$$\omega(t) = \frac{a}{r}t = \frac{m\,r\,g - M_a}{I + m\,r^2}t = \alpha\,t \tag{4}$$

in cui

$$\alpha = \frac{m\,r\,g - M_a}{I + m\,r^2} \tag{5}$$

è l'accelerazione angolare del moto.
Esprimendo l'angolo di rotazione in funzione dei giri del volano, $1/2\,a\,t^2 = 2\,\pi\,r\,n$, si ricava

$$\theta = 2\sqrt{\frac{\pi(I + m\,r^2)}{m\,r\,g - M_a}} \tag{6}$$

Il momento di inerzia I si ricava dalla (6); bisogna però conoscere M_a, esso è legato, in ogni istante, al valore dell'accelerazione angolare (negativa, perché misurano in decelerazione) dalla

$$-M_a = I\frac{d\omega}{dt} \tag{7}$$

Integrando

$$\omega(t) = \omega_{max} - \frac{M_a}{I}t = \omega_{max} + \beta\,t \tag{8}$$

dove

$$\beta = -\frac{M_a}{I} \tag{9}$$

rappresenta la decelerazione del moto.

4. RACCOLTA DATI

La raccolta dati è stata effettuata come quanto segue:

1. Avvolgere il filo di refe attorno al cilindro solidale al volano e lasciare quest'ultimo libero di ruotare nello stesso istante in cui si avvia il cronometro.

2. Acquisire i tempi in corrispondenza della fine di ognuno dei giri compiuti dal volano sino al 13° giro.
3. Attendere il distacco del peso dal volano.
4. Acquisire i tempi di decelerazione per effettuare 10,20,...,60 giri a partire dal distacco del peso.

Ripetere i punti 1-4 per dodici volte.
Le misure dei tempi sono state prese con un cronometro digitale con incertezza $1 \cdot 10^{-4}\,s$.
I dati raccolti, essendo uguali per tutti i gruppi, non vengono riportati.

5. ELABORAZIONE DATI

I dati sono stati elaborati nel seguente modo:

1. Calcolare i tempi medi di percorrenza di 1, 2,.., 13 giri nella fase di accelerazione rispetto le dieci misure ripetute e i tempi medi di percorrenza di 10, 20, ..., 60 giri nella fase di decelerazione.
2. Calcolare la differenza Δt_i corrispondente al tempo necessario per effettuare il giro i-esimo (i=1, ..., 13) nella fase di accelerazione. Identicamente si è calcolato Δt_{d_i} (i=10,20,...,30), tempo necessario per compiere 10 giri nella fase di decelerazione.
3. Calcolare la velocità media angolare ω_i per effettuare il giro i-esimo: $\omega_i = 2\pi/\Delta t_i$ nella fase di accelerazione. ω_i corrisponde alla velocità istantanea del volano relativa all'istante intermedio $t_{i,ist}$ dell'intervallo di tempo considerato in corrispondenza di ogni giro.
4. Nel grafico, riportato nella Fig.(2), si sono disposte le coppie $(t_{i,ist};\, \omega_i)$ e si è interpolato con una retta di equazione $\omega(t) = \omega_0 + \alpha\, t$; la pendenza α è stata calcolata in (5).
5. Analogamente si è fatto per la fase di decelerazione: la velocità media angolare ω_{i_d} per effettuare 10 giri nella fase di decelerazione vale $\omega_{i_d} = (2 \cdot 10\, pi)/t$. ω_{i_d} corrisponde alla velocità istantanea del volano relativa all'istante intermedio $t_{i_d,ist}$ dell'intervallo di tempo considerato ogni 10 giri.
6. Nel grafico della Fig.(2) si sono disposte anche le coppie $(t_{i,ist};\, \omega_i)$, della fase di decelerazione ed interpolate con la retta di equazione $\omega(t) = \omega_{max} + \beta\, t$; la pendenza β è stata calcolata in (9).
7. Ricavare I utilizzando i valori di α e β
$$I = \frac{m\,r\,g - \alpha\, m\, r^2}{\alpha - \beta} \tag{10}$$
associando ad I l'errore dato dalla formula di propagazione dell'errore.
$$\begin{aligned}\sigma_I^2 = &\left(\frac{r\,g - \alpha\, r^2}{\alpha - \beta}\sigma_m\right)^2 + \left(\frac{m\,g - 2\,\alpha\, m\, r}{\alpha - \beta}\sigma_r\right)^2 + \\ &+ \left(\frac{m\,r}{\alpha - \beta}\sigma_g\right)^2 + \left(\frac{m\,r^2\,(\alpha - \beta) + m\,g\,r - \alpha\, m\, r^2}{(\alpha - \beta)^2}\sigma_\alpha\right)^2 + \\ &+ \left(\frac{m\,r\,g - \alpha\, m\, r^2}{(\alpha - \beta)^2}\sigma_\beta\right)^2\end{aligned} \tag{11}$$
Dove gli errori su α e β sono
$$\sigma_\alpha = \sigma_\omega \sqrt{\frac{1}{\sum t_i^2 - (\sum t_i)^2}} \tag{12}$$
$$\sigma_\beta = \sigma_\omega \sqrt{\frac{1}{\sum t_i^2 - (\sum t_i)^2}} \tag{13}$$
8. Ricavare M_a da β con relativo errore, sempre dato dalla formula di propagazione dell'errore.
$$\sigma_{M_a} = \sqrt{(-\beta\, \sigma_I)^2 + (-I\, \sigma_\beta)^2} \tag{14}$$

Vediamo più in dettaglio i passaggi svolti per ricavare i dati che sono riportati nella Tabella 1 e 2.
Si è calcolato $\bar{t}$, tempo medio, con (15) ovvero la media aritmetica tra le 12 misure effettuate per ogni prova, relativo ad ogni giro.
L'errore associato è stato ricavato tramite la (16), cioè la deviazione standard corretta (al denominatore $N-1$ invece di N). Si è scelto di utilizzare questa correzione per ovviare la tendenza della formula "classica" a sottostimare le incertezze, soprattutto nel caso in cui si lavori con pochi dati, come quello che stiamo analizzando.

$$\bar{t} = \frac{\sum_{n=1}^{12} t_i}{N} \tag{15}$$

$$\sigma_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{N}(t_i - \bar{t})^2}{N-1}} \tag{16}$$

Si è poi calcolato Δt con la (17) ovvero la differenza tra $\bar{t}$ relativo a quel giro e il precedente. Come errore su Δt si è usata la (18), somma in quadratura.

$$\Delta t = \bar{t}_i - \bar{t}_{i-1} \tag{17}$$

$$\sigma_{\Delta t} = \sqrt{\sigma^2_{\bar{t}_i} + \sigma^2_{\bar{t}_{i-1}}} \tag{18}$$

Si è calcolato il t_{int}, tempo intermedio, ovvero l'istante in cui la velocità istantanea è uguale alla velocità angolare calcolata nel Δt. Esso viene calcolato con la (19), cioè con media aritmetica tra $\bar{t}_i$ e $\bar{t}_{i-1}$ e l'errore associato si calcola con la (20) ovvero con la somma in quadratura moltiplicata per un fattore di $\frac{1}{2}$.

$$t_{int} = \frac{\bar{t}_i + \bar{t}_{i-1}}{2} \tag{19}$$

$$\sigma_{t_{int}} = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2_{\bar{t}_i} + \sigma^2_{\bar{t}_{i-1}}} \tag{20}$$

In seguito si è calcolata la velocità angolare con la (21), rapportando $s\,\pi$ a Δt. L'errore associato si ricava tramite la (22), formula generale della propagazione degli errori.

$$\omega = \frac{2\,pi}{\Delta t_i} \tag{21}$$

$$\sigma_\omega = \sqrt{\left(-\frac{2\,\pi}{\Delta t^2}\sigma_{\Delta t}\right)^2} \tag{22}$$

Gli stessi passaggi sono stati svolti per la fase di decelerazione, tenendo conto che $\omega_d = (2 \cdot 10\,\pi)/\Delta t$ e quindi l'errore associato è $\sigma_{\omega_d} = \sqrt{\left(-\frac{2 \cdot 10\,\pi}{\Delta t^2}\sigma_{\Delta t}\right)^2}$.
I successivi passaggi sono stati descritti a partire dal punto (4).
I valori di α, β, I e M_a, e relative incertezze, sono riportate nella Tabella 3.
Confrontando il valore di I noto e quello ricavato 10, possiamo concludere che i due valori sono compatibili, come è anche possibile notare dalla Fig.3.

6. CONCLUSIONI

Si è verificata con successo la compatibilità del momento d'inerzia del volano rispetto all'asse di rotazione. Si è ricavato il momento d'attrito rispetto all'asse di rotazione con il suo errore e infine si è verificata la legge del moto circolare uniformemente accelerato.

APPENDIX

A. ELABORAZIONE DATI

Tabella 1. Elaborazione dati in fase di accelerazione

$\bar{t}$ (s)	Δt (s)	t_{ist} (s)	ω (rad/s)
16.8428±0.3224	16.8428±0.3224	16.8428±0.1612	0.3730±0.3224
17.8428±0.3676	7.0196±0.4889	20.3526±0.2445	0.8951±0.4800
18.8428±0.3037	5.5267±0.4768	26.6259±0.2383	1.1369±0.4768
19.8428±0.2854	4.5939±0.4167	31.6862±0.2084	1.3677±0.4167
20.8428±0.3091	4.0088±0.4207	35.9876±0.2104	1.5673±0.4207
21.8428±0.3252	3.6525±0.4487	39.8182±0.2243	1.7203±0.4487
22.8428±0.3249	3.3486±0.4597	43.3188±0.2298	1.8764±0.4597
23.8428±0.3423	3.1138±0.4719	46.5500±0.2360	2.0179±0.4719
24.8428±0.4170	2.8602±0.5395	49.5370±0.2698	2.1968±0.5395
25.8428±0.3534	2.8391±0.5466	52.3866±0.2733	2.2131±0.5466
26.8428±0.3626	2.6057±0.5087	55.1090±0.2532	2.4114±0.5064
27.8428±0.3568	2.5301±0.5087	57.6769±0.2544	2.4833±0.5087
28.8428±0.3442	2.3529±0.4958	60.1184±0.2479	2.6704±0.4958

Note—Sono riportati i dati elaborati come spiegato nella Sezione 5.

Tabella 2. Elaborazione dati in fase di decelerazione

$\bar{t}$ (s)	Δt (s)	t_{ist} (s)	ω (rad/s)
24.0383±0.7564	24.0383±0.7564	24.0383±0.3781	2.6138±0.1645
48.6321±0.7188	24.5937±1.0434	36.3352±0.5217	2.5548±0.2168
73.9499±0.7455	25.3178±1.0355	61.2910±0.5178	2.4817±0.2030
99.9417±0.7581	25.9919±1.0632	86.9458±0.5316	2.4174±0.1978
126.6681±0.8106	26.7264±1.1099	113.3049±0.5549	2.3509±0.1953
154.1599±0.8642	27.4918±1.1849	140.4140±0.5925	2.2855±0.1970

Note—Sono riportati i dati elaborati come spiegato nella Sezione 5.

Tabella 3. Valori delle incognite

α rad/s^2	β rad/s^2	I $(kg\,m^2)$	M_a $N\,m$
0.0474±0.0072	-0.0027±0.0001	0.1260±0.0180	0.0003±0.0001

Note—Vengono riportati i valori di α, β, I e M_a con i rispettivi errori. Si verifica che c'è compatibilità tra I ricavato e I noto (0.1392 ± 0.0001), come si può notare graficamente dalla Fig.3.

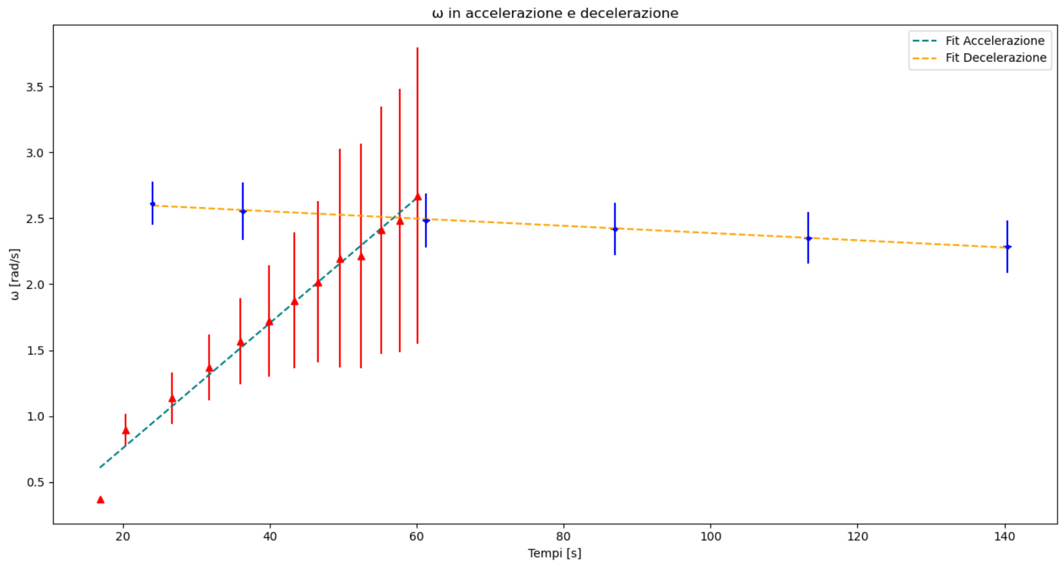

Figura 2. Grafico in cui sono rappresentate le coppie $(t_{i,ist}; \omega_i)$, gli errori relativi a ω_i, sia in fase di accelerazione che decelerazione e le rispettive rette interpolanti.

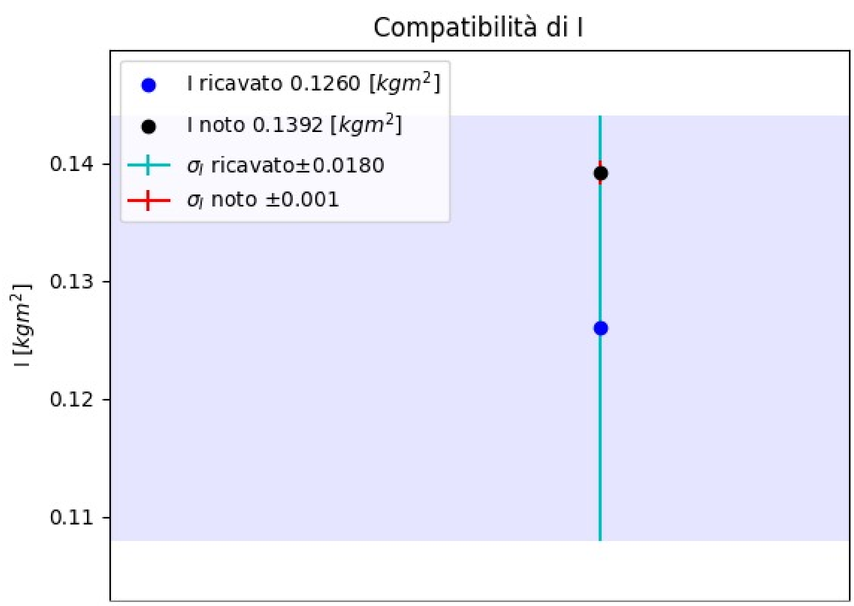

Figura 3. Compatibilità della misura di I, con il valore noto. Si può notare che I noto con la sua barra d'errore sta all'interno della zona delimitata dall'incertezza di I ricavato, indicando la buona riuscita dell'esperimento e quindi la compatibilità delle due misure.