

Verifica dell'accelerazione gravitazionale a Padova

GABRIELE BERTINELLI¹

1219907

ROBEN BHATTI¹

1216914

ALBERTO BRUSEGAN¹

1230215

¹ Dipartimento Fisica e Astronomia, UniPD

Corso di Astronomia, a.a. 2019-2020

1. INTRODUZIONE

La forza agente su un corpo che scivola (senza attrito) su di un piano, inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale, di cui forniamo una schematizzazione nella Figura(1), è la forza peso $P = m g$; questa è scomposta nelle due componenti:

- la componente normale al piano, in modulo $m g \cos \alpha$, che viene equilibrata dalla reazione vincolare N ;
- la componente parallela al piano, in modulo $m g \sin \alpha = \text{costante}$. Essendo costante il moto del corpo è uniformemente accelerato, con accelerazione $a = g \sin \alpha$; velocità e spazio percorso sono dati da $v(t) = v_0 + at$ e $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$.

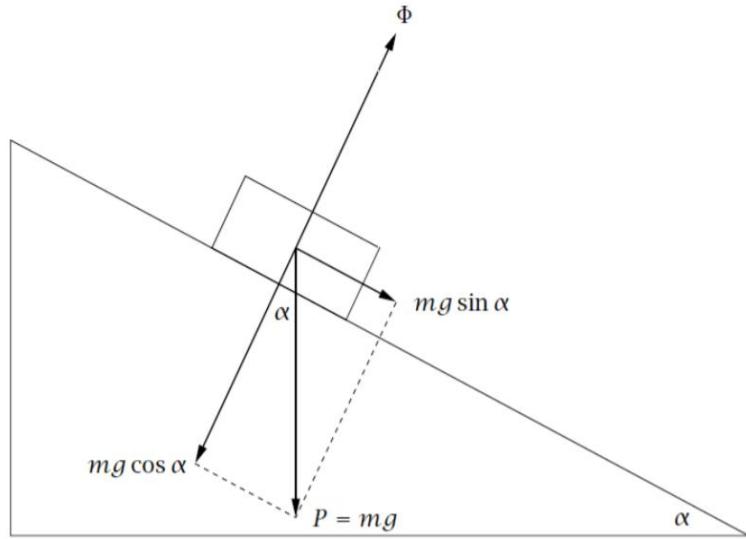


Figura 1. Rappresentazione schematica delle forze agenti su di un corpo che scivola, in assenza di attrito, su di un piano.

Si può notare che la velocità è proporzionale al tempo e il coefficiente angolare della retta, ovvero l'accelerazione, è proporzionale al seno dell'angolo di inclinazione del piano ed indipendente dalla massa della slitta. Dunque l'accelerazione di gravità g si ricava da $g = a / \sin \alpha$.

2. OBIETTIVI

Verifica del moto rettilineo uniformemente accelerato su un piano inclinato, stima del valore dell'accelerazione di gravità g e verifica della compatibilità del valore sperimentale con quello noto calcolato a Padova.

3. DETTAGLI TECNICI SULL'APPARATO SPERIMENTALE

Come piano inclinato viene utilizzata una rotaia a cuscino d'aria, capace di rendere trascurabile l'attrito tra il corpo e il piano. La rotaia è composta da un lungo tubo di metallo cavo, all'interno del quale viene soffiata aria da un compressore; l'aria fuoriesce da dei piccoli fori posti sulla parte superiore del tubo. La sua funzione di sollevare di pochi millimetri un apposito corpo chiamato carrello posto sopra la guidovia, affinché l'attrito sia con buona approssimazione trascurabile. La raccolta dati avviene tramite due fotocellule ad infrarossi poste lungo la guidovia: la prima posta sd una distanza di 40 cm dal zona di distacco del carrello, per minimizzare eventuali effetti generati dall'interferenza del magnete del meccanismo di sgancio e il carrello stesso.

La seconda fotocellula è mobile e la distanza dalla prima può essere letta su una scala graduata con incertezza sulla misura di $1 \cdot 10^{-3}\text{ m}$.

L'incertezza sulla singola misura del cronometro, collegato alle due fotocellule, è di $1 \cdot 10^{-4}\text{ s}$.

È possibile inclinare la guidovia tramite una vite, posta alla base dello strumento; un giro della vite corrisponde a $5'$ e l'incertezza è $5'/24$ o $6.06 \cdot 10^{-5}\text{ rad}$.

4. RACCOLTA DATI

La raccolta dati è stata effettuata come segue, mentre i dati raccolti sono riportati nell'Appendice A.

1. Si procede a trovare la posizione della vite per cui la guidovia è orizzontale: si ruota la vite finché la slitta non rimane immobile una volta lasciata libera. Questa operazione si ripete tre volte: al centro e alle due estremità della guidovia (a circa 40 cm e circa 120 cm). Poi la vite si regola in una posizione intermedia tra tutte quelle trovate.
2. Si inclina la guidovia a $15'$ e si utilizza la slitta scarica. Si pone la prima fotocellula alla posizione $x_i = 40\text{ cm}$ mentre la seconda a $x_f = 50\text{ cm}$.
3. Si effettuano cinque misure ripetute di intervalli di tempo impiegati dalla slitta per percorrere lo spazio $x_f - x_i$.
4. Si ripete il processo spostando la seconda fotocellula ogni volta di 10 cm arrivando fino a 130 cm .
5. Si calcola il valor medio della velocità di percorrenza per ogni tratto di 10 cm e si ricorda che tale velocità coincide con la velocità istantanea nell'istante intermedio t_{12} .
6. Si riportano in grafico i punti $(t_{12}, v(x_1, x_2))$ e si verifica che si distribuiscano intorno ad una retta.
7. Si calcolano i parametri a e b della retta interpolante $v = a + b t$, con il relativo errore.
8. Si stima il valore del modulo dell'accelerazione di gravità g a partire dalla pendenza della retta di interpolazione e si associa a tale stima l'errore calcolato con la formula di propagazione degli errori.
9. Si ripetono i punti 2-8 per l'inclinazione della guidovia pari a $30'$, $45'$, $45'$ con slitta carica.

5. ELABORAZIONE DATI

Come illustrato nella Tabella (5) si è calcolato \bar{t} , tempo medio, con (1) ovvero la media aritmetica tra le 5 misure effettuate per ogni tratta e per ogni inclinazione. L'errore associato è stato ricavato tramite la (2), cioè la deviazione standard corretta (al denominatore $N - 1$ invece di N). Si è scelto di utilizzare questa correzione per ovviare la tendenza della formula "classica" a sottostimare le incertezze, soprattutto nel caso in cui si lavori con pochi dati, come quello che stiamo analizzando.

$$\bar{t} = \frac{\sum_{n=1}^N t_i}{N} \quad (1)$$

$$\sigma_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N (t_i - \bar{t})^2}{N-1}} \quad (2)$$

Si è poi calcolato Δt con la (3) ovvero la differenza tra \bar{t} relativo a quella tratta e il precedente. Come errore su Δt si è usata la (4), somma in quadratura.

$$\Delta t = \bar{t}_i - \bar{t}_{i-1} \quad (3)$$

$$\sigma_{\Delta t} = \sqrt{\sigma_{\bar{t}_i}^2 + \sigma_{\bar{t}_{i-1}}^2} \quad (4)$$

Si è calcolato il t_{int} , tempo intermedio, ovvero l'istante in cui la velocità istantanea è uguale alla velocità calcolata nel Δt . Esso viene calcolato con la (5), cioè con media aritmetica tra \bar{t}_i e \bar{t}_{i-1} e l'errore associato si calcola con la (6) ovvero con la somma in quadratura moltiplicata per un fattore di $\frac{1}{2}$.

$$t_{int} = \frac{\bar{t}_i + \bar{t}_{i-1}}{2} \quad (5)$$

$$\sigma_{t_{int}} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{\bar{t}_i}^2 + \sigma_{\bar{t}_{i-1}}^2} \quad (6)$$

In seguito si è calcolata la velocità con la (7), rapportando la lunghezza del tratto (10 cm) a Δt . L'errore associato si ricava tramite la (8), formula generale della propagazione degli errori.

$$v = \frac{0.1}{\Delta t_i} \quad (7)$$

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{\partial v^2}{\partial x^2} \sigma_x^2 + \frac{\partial v^2}{\partial \Delta t^2} \sigma_{\Delta t}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta t} \sigma_x\right)^2 + \left(-\frac{x}{\Delta t^2} \sigma_{\Delta t}\right)^2} \quad (8)$$

Nella Figura (2) si sono graficati i punti $(t_{12}, v(x_1, x_2))$ e si è ricavata la retta interpolante $v = b + at$ e i relativi coefficienti con il metodo dei minimi quadrati.

Il parametro a , che indica la pendenza della retta, è l'accelerazione, in quanto derivata della velocità. Si ricava l'errore sull'accelerazione con il metodo dei minimi quadrati, dove σ_a è dato dalla media dei singoli σ_{v_i} .

Si nota come previsto che il moto è uniformemente accelerato e che la massa non influenza l'accelerazione; infatti i due fit, dei dati raccolti con inclinazione pari a $45'$ sono sovrapposti. L'incertezza sulla velocità è predominante rispetto all'incertezza sul tempo, infatti l'incertezza sull'ascissa è delle stesse dimensioni del punto sul grafico quindi non è apprezzabile.

$$\sigma_a = \sigma_v \sqrt{\frac{N}{\Delta}} = \sigma_v \sqrt{\frac{1}{\sum t_i^2 - (\sum t_i)^2}} \quad (9)$$

Nella Tabella (6) sono riportati i valori di g per ogni inclinazione della slitta, ricavati con la (10) e i rispettivi errori con la formula generale di propagazione degli errori (11).

$$g = \frac{a}{\sin \alpha} \quad (10)$$

$$\sigma_g = \sqrt{g^2 \left(\frac{\sigma_a^2}{a^2} + \frac{\sigma_\alpha^2}{\tan^2 \alpha} \right)} \quad (11)$$

Nella Figura (3) è riportato g in funzione dell'inclinazione con il relativo errore, la media pesata tra i quattro valori di g e il suo errore calcolato con la somma in quadratura tra i σ_{g_i} .

Si nota che i valori calcolati sono incompatibili con il valore dell'accelerazione di gravità noto. L'incompatibilità è data, con buona probabilità, da errori sistematici quali una errata calibrazione dell'inclinazione della guidovia ripetuta per tutte le inclinazioni o ad errori sistematici legati alla misurazione dei tempi; inoltre anche l'aver trascurato l'attrito con l'aria può aver influito.

6. CONCLUSIONI

Si è verificato il moto rettilineo uniformemente accelerato su un piano inclinato e si è stimato il valore dell'accelerazione di gravità, purtroppo incompatibile con il valore noto per i motivi descritti sopra.

APPENDIX

A. RACCOLTA ED ELABORAZIONE DATI

Tabella 1. Raccolta dati con inclinazione di $15'$

Intervallo tra le fotocellule ($10^{-2} m$)	Δt					
	(s)					
40.0-50.0	0.6530	0.6522	0.6596	0.6579	0.6569	
40.0-60.0	1.2253	1.2204	1.2079	1.2212	1.2160	
40.0-70.0	1.7058	1.7201	1.7174	1.7188	1.7306	
40.0-80.0	2.1619	2.1750	2.1838	2.1762	2.1758	
40.0-90.0	2.5913	2.5949	2.6040	2.6128	2.6099	
40.0-100.0	3.0144	3.0076	3.0068	3.0094	3.0166	
40.0-110.0	3.3815	3.3884	3.3740	3.3989	3.3567	
40.0-120.0	3.7246	3.7216	3.7316	3.7292	3.7134	
40.0-130.0	4.0616	4.0701	4.0557	4.0608	4.0626	

NOTE—L'incertezza sulla misura di intervallo è di 0.1 cm .
L'incertezza sulla misura di tempo è 10^{-4} s .

Tabella 2. Raccolta dati con inclinazione di $30'$

Intervallo tra le fotocellule ($10^{-2} m$)	Δt					
	(s)					
40.0-50.0	0.4570	0.4560	0.4576	0.4567	0.4572	
40.0-60.0	0.8542	0.8527	0.8513	0.8506	0.8506	
40.0-70.0	1.2026	1.2034	1.2040	1.2038	1.2054	
40.0-80.0	1.5268	1.5226	1.5207	1.5212	1.5234	
40.0-90.0	1.8256	1.8246	1.8235	1.8208	1.8186	
40.0-100.0	2.0954	2.0946	2.0966	2.0940	2.1009	
40.0-110.0	2.3595	2.3631	2.3615	2.3602	2.3628	
40.0-120.0	2.6126	2.6060	2.6095	2.6132	2.6144	
40.0-130.0	2.8452	2.8505	2.8467	2.8475	2.8436	

NOTE—L'incertezza sulla misura di intervallo è di 0.1 cm .
L'incertezza sulla misura di tempo è 10^{-4} s .

Tabella 3. Raccolta dati con inclinazione di $45'$

Intervallo tra le fotocellule ($10^{-2} m$)	Δt					
	(s)					
40.0-50.0	0.3716	0.3718	0.3716	0.3717	0.3712	
40.0-60.0	0.6926	0.6952	0.6930	0.6928	0.6927	
40.0-70.0	0.9800	0.9808	0.9780	0.9792	0.9801	
40.0-80.0	1.2380	1.2395	1.2385	1.2388	1.2386	
40.0-90.0	1.4823	1.4806	1.4824	1.4826	1.4822	
40.0-100.0	1.7073	1.7094	1.7060	1.7096	1.7074	
40.0-110.0	1.9216	1.9223	1.9194	1.9194	1.9201	
40.0-120.0	2.1236	2.1228	2.1277	2.1254	2.1214	
40.0-130.0	2.3168	2.3147	2.3140	2.3166	2.3130	

NOTE—L'incertezza sulla misura di intervallo è di 0.1 cm .
L'incertezza sulla misura di tempo è 10^{-4} s .

Tabella 4. Raccolta dati con inclinazione di $45'$ con slitta carica

Intervallo tra le fotocellule ($10^{-2} m$)	Δt					
	(s)					
40.0-50.0	0.3732	0.3730	0.3730	0.3730	0.3734	
40.0-60.0	0.6950	0.6952	0.6952	0.6949	0.6952	
40.0-70.0	0.9824	0.9814	0.9824	0.9816	0.9808	
40.0-80.0	1.2430	1.2432	1.2423	1.2440	1.2431	
40.0-90.0	1.4847	1.4856	1.4844	1.4866	1.4850	
40.0-100.0	1.7126	1.7116	1.7106	1.7107	1.7116	
40.0-110.0	1.9218	1.9220	1.9236	1.9222	1.9230	
40.0-120.0	2.1234	2.1242	2.1225	2.1234	2.1240	
40.0-130.0	2.3158	2.3150	2.3150	2.3160	2.3154	

NOTE—L'incertezza sulla misura di intervallo è di 0.1 cm .
L'incertezza sulla misura di tempo è 10^{-4} s .

Tabella 5. Elaborazione dati

Inclinazione 15'					Inclinazione 30'				
Δx	\bar{t}	Δt	t_{int}	v	\bar{t}	Δt	t_{int}	v	
($10^{-2} m$)	($10^{-2} s$)	($10^{-2} s$)	($10^{-2} s$)	($10^{-2} m/s$)	($10^{-2} s$)	($10^{-2} s$)	($10^{-2} s$)	($10^{-2} m/s$)	
10.00±0.05	65.59±0.32	65.59±0.32	32.79±0.15	15.24±0.07	45.69±0.06	45.69±0.06	22.84±0.03	21.88±0.03	
20.00±0.05	121.81±0.66	56.22±0.73	93.70±0.36	17.78±0.23	85.18±0.15	39.49±0.17	65.44±0.08	25.31±0.11	
30.00±0.05	171.85±0.88	50.00±1.00	146.83±0.55	19.98±0.44	120.36±0.13	35.17±0.21	102.77±0.10	28.42±0.17	
40.00±0.05	217.45±0.79	45.00±1.00	194.65±0.59	21.92±0.57	152.29±0.24	31.93±0.28	136.32±0.14	31.31±0.27	
50.00±0.05	260.25±0.93	42.00±1.00	238.85±0.61	23.36±0.66	182.26±0.29	29.96±0.38	167.27±0.19	33.36±0.42	
60.00±0.05	301.09±0.43	41.00±1.00	280.67±0.51	24.48±0.61	209.65±0.27	27.38±0.39	195.95±0.19	36.51±0.53	
70.00±0.05	338.00±1.00	37.00±1.00	319.54±0.82	27.00±1.00	236.14±0.16	26.49±0.31	222.89±0.16	37.74±0.45	
80.00±0.05	372.60±0.86	35.00±1.00	355.29±0.90	29.00±1.00	261.11±0.34	24.97±0.37	248.62±0.18	40.04±0.60	
90.00±0.05	406.21±0.52	33.00±1.00	389.41±0.50	29.75±0.88	284.67±0.26	23.55±0.43	272.89±0.21	42.45±0.77	

Inclinazione 45'				Inclinazione 45' con slitta carica			
\bar{t}	Δt	t_{int}	v	\bar{t}	Δt	t_{int}	v
($10^{-2} s$)	($10^{-2} s$)	($10^{-2} s$)	($10^{-2} m/s$)	($10^{-2} s$)	($10^{-2} s$)	($10^{-2} s$)	($10^{-2} m/s$)
37.16±0.02	37.16±0.02	18.57±0.01	26.91±0.02	37.31±0.02	37.31±0.02	18.65±0.01	26.80±0.01
69.32±0.10	32.16±0.11	53.24±0.06	31.08±0.11	69.51±0.01	32.19±0.02	53.41±0.01	31.06±0.02
97.96±0.11	28.63±0.15	83.64±0.07	34.92±0.19	98.17±0.07	28.66±0.07	83.84±0.04	34.89±0.09
123.86±0.05	25.90±0.12	110.91±0.06	38.60±0.18	124.31±0.06	26.14±0.09	111.24±0.05	38.25±0.13
148.20±0.08	24.33±0.10	136.03±0.50	41.09±0.16	148.52±0.09	24.21±0.11	136.41±0.05	41.29±0.18
170.79±0.15	22.59±0.17	159.49±0.08	44.26±0.34	171.13±0.08	22.60±0.12	159.82±0.06	44.23±0.23
192.05±0.13	21.26±0.20	181.42±0.10	47.03±0.45	192.25±0.08	21.11±0.11	181.69±0.05	47.35±0.25
212.41±0.24	20.36±0.28	202.23±0.14	49.11±0.67	212.35±0.07	20.09±0.10	202.30±0.05	49.75±0.25
231.50±0.16	19.08±0.29	221.96±0.15	52.40±0.81	231.54±0.05	19.19±0.08	221.94±0.04	52.10±0.22

NOTE—Sono riportati i dati elaborati come spiegato nella sezione Raccolta dati (4).

Tabella 6. Compatibilità di g

	g (m/s^2)
15'	9.350 ± 0.478
30'	9.311 ± 0.357
45'	9.435 ± 0.388
45'+massa	9.557 ± 0.190
Media pesata	9.393 ± 0.247
Valore noto	9.806

NOTE—Sono riportati i valori di g calcolati per ogni inclinazione. Sono fornite la media pesata dei valori calcolati e il valore noto per un confronto immediato.

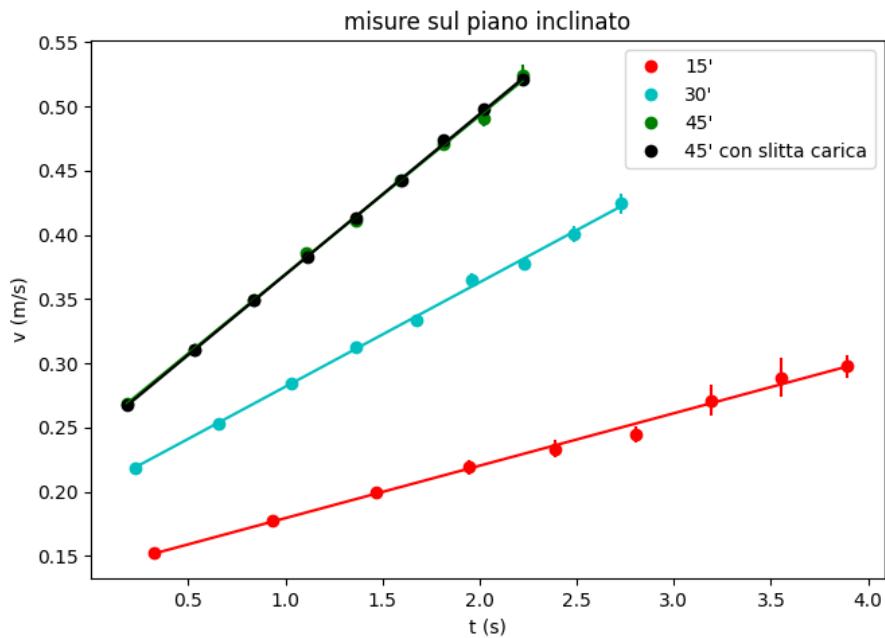


Figura 2. Relazione tra i punti di coordinate $(t_{12}, v(x_1, x_2))$. L'incertezza sulla velocità è predominante rispetto all'incertezza sul tempo, infatti l'incertezza sull'ascissa è delle stesse dimensioni del punto sul grafico, quindi non è apprezzabile.

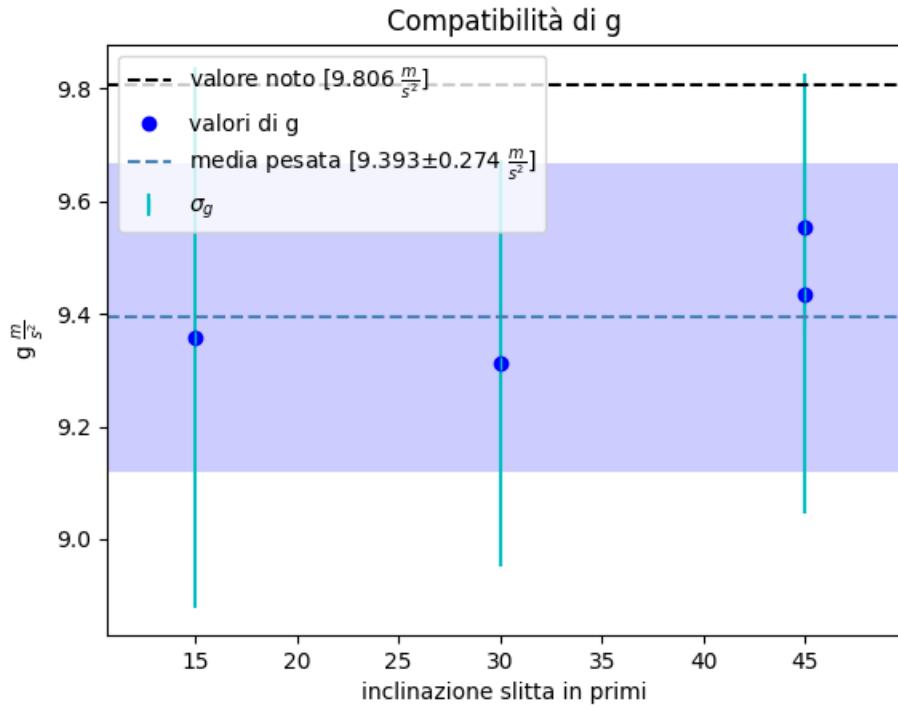


Figura 3. Verifica della compatibilità del valore g calcolato sperimentalmente con il valore noto. I due valori non sono compatibili a causa di errori sistematici.