

Verifica della legge di Hooke

GABRIELE BERTINELLI¹

1219907

ROBEN BHATTI¹

1216914

ALBERTO BRUSEGAN¹

1230215

¹*Dipartimento Fisica e Astronomia, UniPD
Corso di Astronomia, a.a. 2019-2020*

1. INTRODUZIONE

La legge di Hooke descrive la deformazione di un corpo solido (es. cilindro retto) vincolato quando viene sottoposto all'azione di una forza. Questa definizione è proporzionale al modulo della forza applicata, almeno fino a che la forza esercitata non superi i limiti di elasticità e di rottura. Un corpo si dice elastico se la sua deformazione segue una legge lineare, la legge di Hooke che andremo a verificare, in funzione della forza applicata. Quindi a un cilindro retto, nel nostro caso un filo, di materiale elastico la legge di Hooke impone che si allunghi o accorci di una quantità $x - x_0 = K F$, dove x_0 rappresenta la lunghezza del corpo a riposo e K è la costante elastica. Per un filo si dimostra che K è inversamente proporzionale alla sezione e al modulo di Young (E): $E = \frac{x_0}{S K}$.

2. OBIETTIVI

1. la verifica della risposta elastica lineare, ovvero la dipendenza lineare del modulo dell'allungamento (accorciamento) Δx di un corpo elastico dal modulo della forza applicata F_{app} : $\Delta x = K F_{app}$;
2. nel caso di un corpo cilindrico, stima del modulo di Young $E = \frac{x_0}{S K}$, dove S è la sezione del cilindro, K è la costante di proporzionalità di Δx e F e x_0 la lunghezza del filo a riposo.

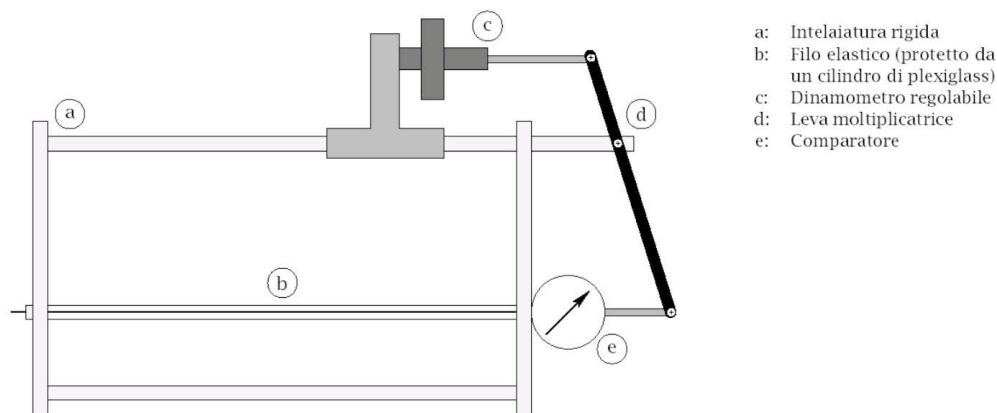
3. DETTAGLI TECNICI SULL'APPARATO SPERIMENTALE

L'estensimetro è uno strumento che permette di misurare l'allungamento subito da un filo elastico a seguito dell'applicazione di una forza di intensità nota ad un'estremità dello stesso (l'altra estremità essendo invece vincolata). Lo schema rappresentativo dell'apparato è riportato in Figura 1.

La misura dell'allungamento del filo è effettuata attraverso un minimetro, comparatore associato ad una lancetta rotante: 1 giro completo della lancetta corrisponde ad 1 mm di allungamento del filo (sensibilità al centesimo di millimetro). Allungamenti superiori ad 1 mm (n. giri completi) sono visualizzati nella finestrella all'interno del quadrante.

La forza viene applicata al filo mediante un dinamometro attraverso la rotazione di una ghiera: la forza effettiva applicata F_{app} è pari a quattro volte il valore F letto sulla scala graduata, che è espressa in grammi-peso.

In laboratorio sono disponibili 16 estensimetri in acciaio ($E_{acciaio} = (20.5 \pm 0.1) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$), due estensimetri in tungsteno ($E_{tung} = (37.9 \pm 1.5) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$) ed uno di ottone ($E_{ottone} = (9.6 \pm 0.2) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$)

**Figura 1.** Schema di un estensimetro**Tabella 1.** Caratteristiche del filo

N°	Materiale	Lunghezza (mm)	Diametro (mm)
1	tungsteno	1000 ± 2	$0.250 \pm 1\%$
3	ottone	1000 ± 2	$0.500 \pm 1\%$
6	acciaio	950 ± 2	$0.305 \pm 1\%$
7	acciaio	950 ± 2	$0.330 \pm 1\%$
10	acciaio	950 ± 2	$0.406 \pm 1\%$
12	acciaio	950 ± 2	$0.279 \pm 1\%$
14	acciaio	800 ± 2	$0.279 \pm 1\%$
15	acciaio	700 ± 2	$0.279 \pm 1\%$
17	acciaio	500 ± 2	$0.279 \pm 1\%$
18	acciaio	400 ± 2	$0.279 \pm 1\%$
19	acciaio	300 ± 2	$0.279 \pm 1\%$

NOTE—Sono forniti i valori di lunghezza a riposo x_0 e diametro D caratteristici di ciascun estensimetro.

4. RACCOLTA DATI

Nella sezione A è fornita la tabella della raccolta dati degli 11 estensimetri da noi analizzati, le cui caratteristiche sono riportate nella tabella 1.

È bene precisare che solo i dati riguardanti l'estensimetro $n^\circ 15$ sono stati raccolti dal nostro gruppo; gli altri dati sono stati forniti dalla prof.essa Rodighiero.

La raccolta dati è stata effettuata come illustrato di seguito:

1. Posizionare la ghiera in modo che il valore della forza F letto sulla scala sia pari a 200 g (quello effettivamente applicato sarà $4 \cdot 200\text{ g} = 800\text{ g}$).
2. Azzerare la scala del minimetro posizionando la ghiera in modo che lo zero corrisponda alla posizione della lancetta (che è associata a $F = 200\text{ g}$).
3. Aumentare la forza applicata al filo variando F di 100 g in 100 g fino a 1100 g ; per ogni valore di F misurare l'allungamento Δx indotto sul filo elastico. Si otterranno 10 coppie di valori $(F_i, \Delta x_i)$, $i = 1, \dots, 10$.

4. Partendo da $F = 1100\text{ g}$, diminuire la forza applicata al filo in modo che F vari di 100 g in 100 g sino a tornare al valore di 200 g ; per ogni valore di F misurare l'accorciamento Δx indotto sul filo elastico. Si otterranno 10 coppie di valori $(F_i, \Delta x_i)$, $i = 1, \dots, 10$.
5. Ripetere i punti 1-4 fino ad esaurimento degli estensimetri a disposizione.

5. ELABORAZIONE DATI

Di seguito riportiamo la Tabella 2, mentre nella sezione B i grafici, dei dati elaborati e necessari per la trattazione finale.

L'analisi dei dati è stata svolta come illustrato di seguito:

1. Definendo il valore iniziale della forza applicata $F_{app,0} = 4 \cdot F_0$ e con $\Delta F_{app,i} = F_{app,i} - F_{app,0}$ la differenza dell' i -esima misura rispetto la forza applicata iniziale, riportare in grafico la dipendenza $(\Delta F_{app,i}, \Delta x_i)$ nella fase di allungamento e accorciamento del filo. Interpolare i dati relativi alla fase di allungamento con una retta di equazione $y = a + bx$ e nella fase di accorciamento con una retta del tipo $y = c + dx$. Riportare i valori di a, b, c, d con i relativi errori dati dall'interpolazione lineare e verificare la compatibilità di a e c e la compatibilità di b e d rispettivamente. La costante K del filo è data da b e d rispettivamente. Come errore su x utilizzare $1/3$ del valore dato dall'errore di sensibilità dello strumento.
2. Calcolare il modulo di Young E a partire dai valori di b e d così ricavati usando come diametro e lunghezza del filo i valori indicati sullo strumento utilizzato.

Ricordiamo che

$$E = \frac{x_0}{SK} = \frac{4x_0}{\pi D^2 K} \quad (1)$$

dove S è la sezione del filo, K la costante di proporzionalità di Δx e F e x_0 la lunghezza del filo a riposo, calcolare l'errore sul modulo di Young E attraverso la formula di propagazione:

$$\sigma_E = E \sqrt{\left(\frac{\sigma_{x_0}}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_K}{K}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_D}{D}\right)^2} \quad (2)$$

3. Calcolare la media pesata dei valori del modulo di Young $E_i \pm \sigma_{E_i}$ ottenuti dalle misure di allungamento e di accorciamento, ricordando che la media pesata è fornita dalla seguente relazione:

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_i \frac{E_i}{\sigma_{E_i}^2}}{\sum_i \frac{1}{\sigma_{E_i}^2}} \quad \text{dove} \quad \sigma_{\langle E \rangle} = \sqrt{\frac{1}{\sum_i \frac{1}{\sigma_{E_i}^2}}} \quad (3)$$

4. Calcolare la media pesata $\langle K \rangle$ dei valori $K_i \pm \sigma_{K_i}$ ottenuti dalle misure di allungamento e accorciamento, ricordando che la media è fornita dalla relazione (3), con opportuni aggiustamenti.
5. Verificare la compatibilità della stima $\langle E \rangle$ con E_{pes} ricavata usando la media pesata $\langle K \rangle$:

$$E_{pes} = \frac{4x_0}{\pi D^2 \langle K \rangle} \quad \sigma_{E_{pes}} = E \sqrt{\left(\frac{\sigma_{x_0}}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\langle K \rangle}}{\langle K \rangle}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_D}{D}\right)^2} \quad (4)$$

6. Ripetere i punti 1-5, esaurendo tutti gli estensimetri.
7. Per gli estensimetri in acciaio verificare la dipendenza lineare di $\langle K \rangle$ rispetto a $1/S$, S sezione del filo, e di $\langle K \rangle$ rispetto x_0 , x_0 lunghezza a riposo del filo, riportando in grafico $\langle K \rangle$ in funzione di $1/S$ e x_0 .
8. Verificare che il rapporto $R = \langle K \rangle / x_0$ è costante, utilizzando come valori di $\langle K \rangle$ la media pesata al punto 4. Riportare in grafico il valore R in ordinata rispetto a x_0 in ascissa. Associare ad ogni valore di R l'errore dato dalla propagazione

$$\sigma_R = R \sqrt{\left(\frac{\sigma_{x_0}}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\langle K \rangle}}{\langle K \rangle}\right)^2} \quad (5)$$

9. Verificare che il prodotto $P = \langle K \rangle D^2$ è costante, riportando il valore P in grafico (con i relativi errori) in ordinata rispetto a D^2 in ascissa. Associare ad ogni valore di P l'errore dato dall'interpolazione:

$$\sigma_P = P \sqrt{4 \left(\frac{\sigma_D}{x_D} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\langle K \rangle}}{\langle K \rangle} \right)^2} \quad (6)$$

Tabella 2. Relazione Δx e ΔF

N°		K		E (1)		$\langle E \rangle$ (3)	$\langle K \rangle$ (4)	E_{pes} (5)
		(10^{-5} m/N)		(10^{10} N/m^2)		(10^{10} N/m^2)	(10^{-5} m/N)	(10^{10} N/m^2)
		Allung.	Accorc.	Allung.	Accorc.			
(a)	1	5.26	5.29	38.7±0.8	38.5±0.8	38.6±0.6	5.28±0.02	38.6±0.8 *
(b)	3	4.95	3.52	11.1±0.8	10.9±0.8	11.0±0.6 *	4.64±0.23	11.0±0.6 *
(c)	6	6.39	6.38	20.4±0.4	20.4±0.4	20.4±0.3 *	6.38±0.01	20.4±0.4
(d)	7	5.49	5.56	20.2±0.4	20.0±0.4	20.1±0.3	5.52±0.02	20.1±0.4 *
(e)	10	3.53	3.53	20.8±0.4	20.8±0.4	20.8±0.3	3.53±0.01	20.8±0.4 *
(f)	12	7.45	7.46	20.8±0.4	20.8±0.4	20.8±0.3	7.46±0.01	20.8±0.4 *
(g)	14	6.39	6.35	20.5±0.4	20.6±0.4	20.5±0.3 *	6.37±0.01	20.5±0.4
(h)	15	5.53	5.53	20.7±0.4	20.7±0.4	20.7±0.3 *	5.53±0.01	20.7±0.4
(i)	17	3.92	3.91	20.9±0.4	20.9±0.4	20.9±0.3	3.91±0.01	20.9±0.4 *
(j)	18	3.36	3.29	19.5±0.4	19.9±0.4	19.7±0.3	3.32±0.01	19.7±0.4 *
(k)	19	2.38	2.42	20.6±0.5	20.3±0.4	20.4±0.3 *	2.40±0.01	20.5±0.4

NOTE—La tabella riporta l'elaborazione dei dati al fine di valutare la bontà o meno dell'esperimento. L'analisi di valori è fornita di seguito.

Nella Sezione B sono riportati i grafici dei singoli estensimetri separatamente in allungamento e in accorciamento per permettere una comprensione migliore degli stessi. Si nota senz'altro una dipendenza lineare tra i dati interpolati ovvero tra la forza F e l'allungamento/accorciamento Δx . L'incertezza sulla forza è predominante rispetto all'incertezza sull'allungamento/accorciamento, per questo motivo è assimilabile alle dimensioni del punto nel grafico ovvero di $5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$. Nel grafico dell'estensimetro 3 si nota sia in allungamento che in accorciamento un punto che si discosta dalla retta di fit; probabilmente è dovuto ad un errore sistematico dal momento che è presente in entrambe le misurazioni. Data la numerosa presenza di altre misure e l'impossibilità di ripetere la raccolta dati abbiamo deciso di tenere tale errore. Nella Tabella 2 sono riportati per ogni estensimetro i valori di $\langle K \rangle$ con le relative incertezze; si noti come l'incertezza su $\langle K \rangle$ dell'estensimetro 3 si discosti da quelle degli altri estensimetri.

Per calcolare il modulo di Young sono stati utilizzati due metodi:

1. Si è calcolato il modulo di Young per ogni estensimetro sia in allungamento che in accorciamento dal coefficiente angolare delle rette interpolanti con la formula (1) e poi si è calcolata la media pesata tra il modulo di Young in allungamento e in accorciamento usando la (3).
2. Si è calcolato il modulo di Young, E_{pes} , con la media pesata della costante elastica K , $\langle K \rangle$, per ogni estensimetro, utilizzando la (4).

Quindi si sono trovati due valori del modulo di Young per ogni estensimetro. Nella Tabella 2 sono stati segnati i valori più compatibili ai valori forniti dal laboratorio con un asterisco e si nota che la miglior stima sia proprio E_{pes} .

Nella Figura 2 si è riportato $\langle K \rangle$ rispetto $1/S$ per gli estensimetri in acciaio con lunghezza a riposo costante; mentre nella Figura 3 si è riportato in grafico $\langle K \rangle$ e x_0 degli estensimetri in acciaio con diametro D costante. Come si vede

nelle due figure sopra citate si nota una chiara dipendenza lineare tra $\langle K \rangle$ e x_0 e un'inversa proporzionalità tra $\langle K \rangle$ e S . Con questi grafici si verifica che la dipendenza lineare derivata da Young, per ricavare E dalla geometria del materiale sottoposto a tensione, è garantita.

Nella Figura 4 si verifica che il rapporto tra $\langle K \rangle$ e x_0 è costante per estensimetri con stesso diametro e lunghezza a riposo diversa; infatti se il rapporto non fosse costante non verrebbe conservata la linearità nella Figura 3.

Nello stesso modo nella Figura 5 si è verificato che il prodotto tra $\langle K \rangle$ e S è costante per gli estensimetri in acciaio con stessa lunghezza a riposo e diametro differente; difatti il prodotto deve rimanere costante per mantenere il modulo di Young, che dipende dal materiale cui è composto il corpo sottoposto a tensione, coerente per gli estensimetri analizzati.

6. CONCLUSIONI

Abbiamo verificato la validità della legge di Hooke ovvero la dipendenza lineare tra l'allungamento/accorciamento e la forza applicata su un corpo rigido. Abbiamo calcolato con due metodi diversi il modulo di Young E e verificato la loro compatibilità rispetto ai valori noti dei materiali e constatato che in generale la miglior stima del modulo di Young sia E_{pes} , fornito dalla (4). Infine si è verificato che le dipendenze geometriche rispetto alla sezione e alla lunghezza fossero costanti per K .

APPENDIX

A. RACCOLTA DATI

Tabella 3. Raccolta dati in fase di allungamento e accorciamento

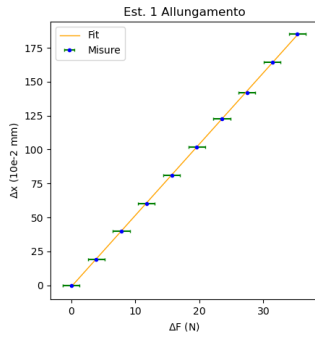
		Estensimetro 1		Estensimetro 3		Estensimetro 6		Estensimetro 7	
		Allung.	Accorc.	Allung.	Accorc.	Allung.	Accorc.	Allung.	Accorc.
Forza	Forza	Δx	Δx	Δx	Δx	Δx	Δx	Δx	Δx
(<i>kg - peso</i>)	(<i>N</i>)	(10^{-2} mm)	(10^{-2} mm)	(10^{-2} mm)	(10^{-2} mm)	(10^{-2} mm)	(10^{-2} mm)	(10^{-2} mm)	(10^{-2} mm)
0.200±33%	1.96	0.0±0.5	0.0±0.5	0.0±0.5	0.0±0.5	0.0±0.5	0.00±0.5	0.0±0.5	0.0±0.5
0.300±33%	2.94	19.0±0.5	19.0±0.5	20.0±0.5	19.0±0.5	25.5±0.5	23.0±0.5	23.0±0.5	19.0±0.5
0.400±33%	3.92	40.0±0.5	40.0±0.5	41.0±0.5	39.0±0.5	49.5±0.5	48.0±0.5	45.0±0.5	41.0±0.5
0.500±33%	4.91	60.0±0.5	60.0±0.5	60.0±0.5	59.0±0.5	74.5±0.5	73.0±0.5	68.0±0.5	62.0±0.5
0.600±33%	5.89	81.0±0.5	81.0±0.5	80.0±0.5	79.0±0.5	100.0±0.5	98.0±0.5	87.0±0.5	84.0±0.5
0.700±33%	6.87	102.0±0.5	101.0±0.5	100.0±0.5	100.0±0.5	125.0±0.5	122.5±0.5	108.0±0.5	106.0±0.5
0.800±33%	7.85	122.5±0.5	123.0±0.5	120.0±0.5	120.0±0.5	150.0±0.5	148.5±0.5	130.5±0.5	128.5±0.5
0.900±33%	8.83	142.1±0.5	145.0±0.5	139.5±0.5	139.5±0.5	175.0±0.5	173.5±0.5	151.5±0.5	150.0±0.5
1.000±33%	9.81	164.5±0.5	164.0±0.5	159.0±0.5	160.5±0.5	201.0±0.5	199.0±0.5	173.5±0.5	172.0±0.5
1.100±33%	10.79	185.0±0.5	186.0±0.5	179.0±0.5	181.0±0.5	225.0±0.5	224.0±0.5	195.0±0.5	195.0±0.5

Estensimetro 10		Estensimetro 12		Estensimetro 14		Estensimetro 15	
Allung.	Accorc.	Allung.	Accorc.	Allung.	Accorc.	Allung.	Accorc.
Δx	Δx	Δx	Δx	Δx	Δx	Δx	Δx
(10^{-2} mm)	(10^{-2} mm)	(10^{-2} mm)	(10^{-2} mm)	(10^{-2} mm)	(10^{-2} mm)	(10^{-2} mm)	(10^{-2} mm)
0.0±0.5	0.0±0.5	0.0±0.5	0.0±0.5	0.0±0.5	0.0±0.5	0.0±0.5	0.0±0.5
15.0±0.5	13.5±0.5	28.5±0.5	28.0±0.5	25.0±0.5	35.5±0.5	22.5±0.5	22.0±0.5
28.5±0.5	27.5±0.5	58.0±0.5	56.5±0.5	49.0±0.5	51.0±0.5	43.0±0.5	43.0±0.5
42.5±0.5	41.0±0.5	87.0±0.5	86.0±0.5	75.0±0.5	77.0±0.5	66.0±0.5	65.5±0.5
56.0±0.5	55.0±0.5	117.0±0.5	114.0±0.5	99.0±0.5	100.0±0.5	87.5±0.5	86.5±0.5
70.5±0.5	69.1±0.5	146.0±0.5	144.0±0.5	125.0±0.5	125.0±0.5	109.5±0.5	109.0±0.5
84.0±0.5	83.0±0.5	175.5±0.5	174.0±0.5	150.5±0.5	150.0±0.5	131.0±0.5	130.5±0.5
97.5±0.5	97.0±0.5	204.5±0.5	203.0±0.5	175.0±0.5	176.5±0.5	151.5±0.5	151.5±0.5
111.5±0.5	110.5±0.5	233.5±0.5	233.0±0.5	200.5±0.5	200.0±0.5	175.0±0.5	173.5±0.5
125.0±0.5	124.5±0.5	262.0±0.5	262.5±0.5	225.0±0.5	224.0±0.5	194.5±0.5	195.0±0.5

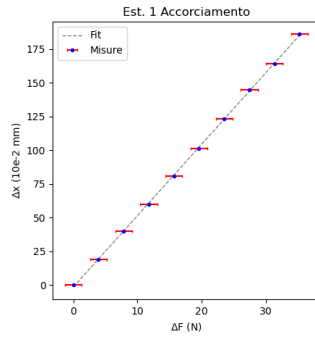
Estensimetro 17		Estensimetro 18		Estensimetro 19	
Allung.	Accorc.	Allung.	Accorc.	Allung.	Accorc.
Δx	Δx	Δx	Δx	Δx	Δx
(10^{-2} mm)	(10^{-2} mm)	(10^{-2} mm)	(10^{-2} mm)	(10^{-2} mm)	(10^{-2} mm)
0.0±0.5	0.0±0.5	0.0±0.5	0.0±0.5	0.0±0.5	0.0±0.5
15.0±0.5	15.0±0.5	13.0±0.5	13.0±0.5	8.0±0.5	9.0±0.5
30.0±0.5	31.0±0.5	28.0±0.5	27.0±0.5	17.0±0.5	18.5±0.5
45.5±0.5	46.5±0.5	41.0±0.5	39.5±0.5	26.0±0.5	28.5±0.5
61.0±0.5	62.5±0.5	53.5±0.5	53.0±0.5	36.0±0.5	37.0±0.5
76.5±0.5	77.2±0.5	66.0±0.5	66.0±0.5	46.0±0.5	47.0±0.5
91.0±0.5	93.0±0.5	79.5±0.5	78.0±0.5	55.5±0.5	57.0±0.5
107.0±0.5	108.0±0.5	93.0±0.5	90.0±0.5	64.0±0.5	66.0±0.5
123.0±0.5	122.0±0.5	106.0±0.5	103.0±0.5	73.5±0.5	76.0±0.5
138.0±0.5	138.0±0.5	118.5±0.5	117.0±0.5	83.0±0.5	85.0±0.5

NOTE—Sono riportati i dati nella fase di allungamento e di accorciamento del filo dello strumento.

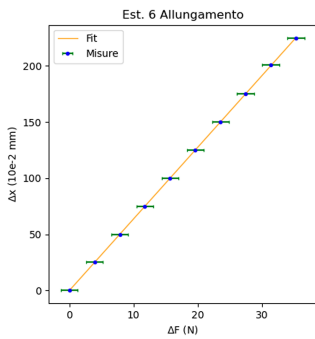
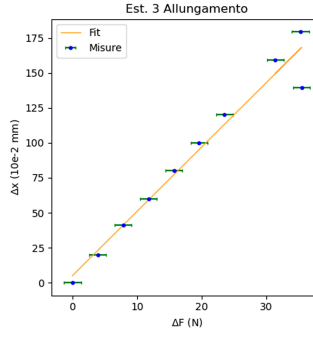
B. ELABORAZIONE DATI



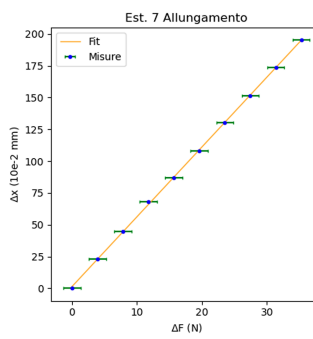
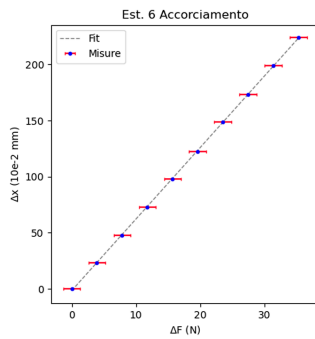
(a)



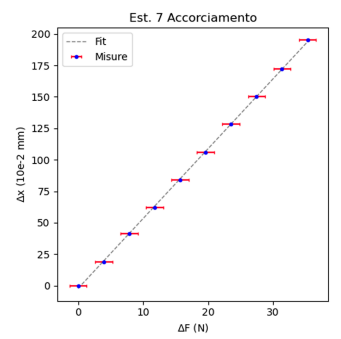
(b)

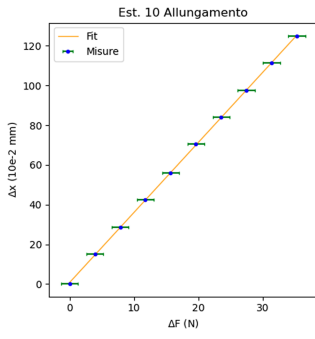


(c)

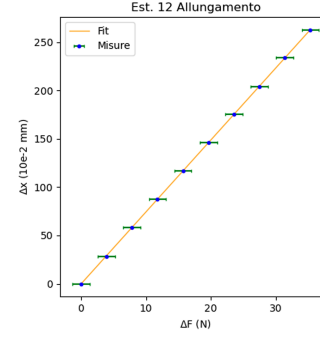
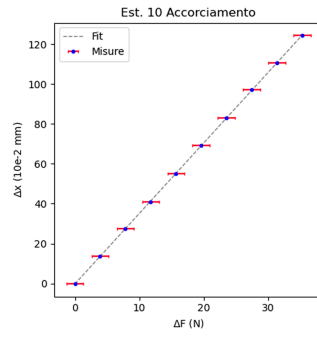


(d)

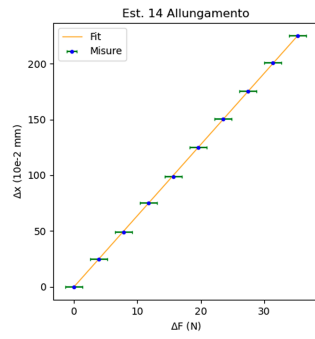
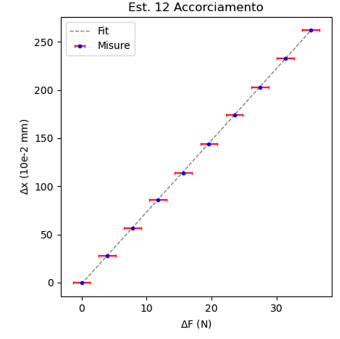




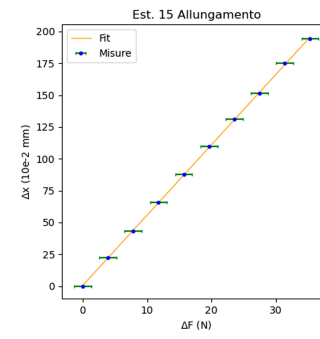
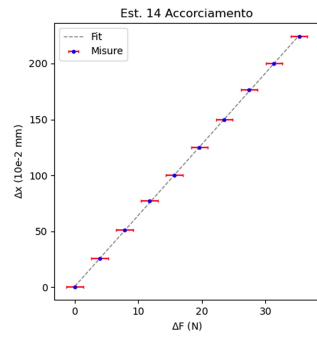
(e)



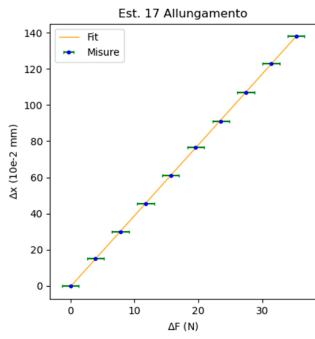
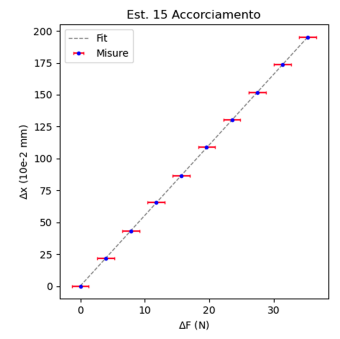
(f)



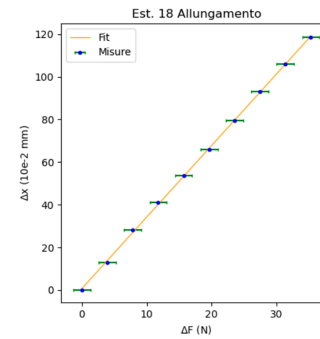
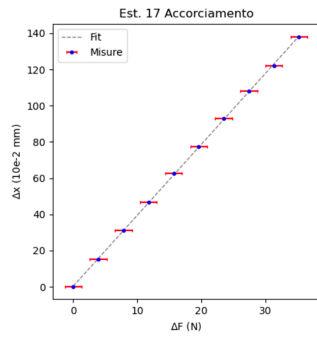
(g)



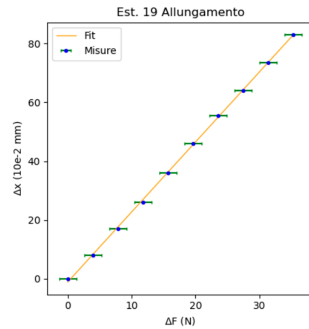
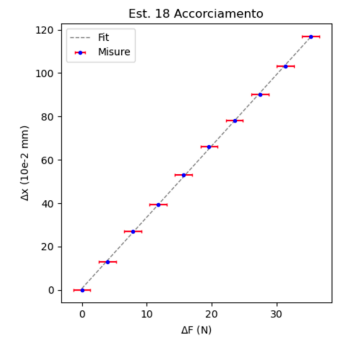
(h)



(i)



(j)



(k)

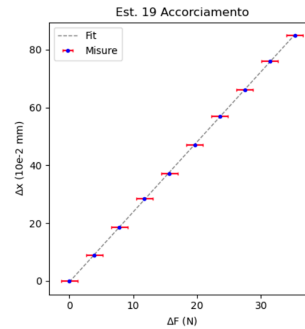


Tabella 4. Valori di R e P

Estensimetro	R	P
	$(10^{-5} \text{ m}^2/\text{N})$	$(10^{-12} \text{ m}^3/\text{N})$
6	...	4.66 ± 0.09
7	...	4.76 ± 0.09
10	...	4.57 ± 0.09
12	7.85 ± 0.02	4.56 ± 0.09
14	7.96 ± 0.03	...
15	7.90 ± 0.03	...
17	7.83 ± 0.04	...
18	8.30 ± 0.05	...
19	7.98 ± 0.06	...

NOTE—Sono riportati i valori di R e P e relative incertezze, calcolati rispettivamente con la (5) e la (6)

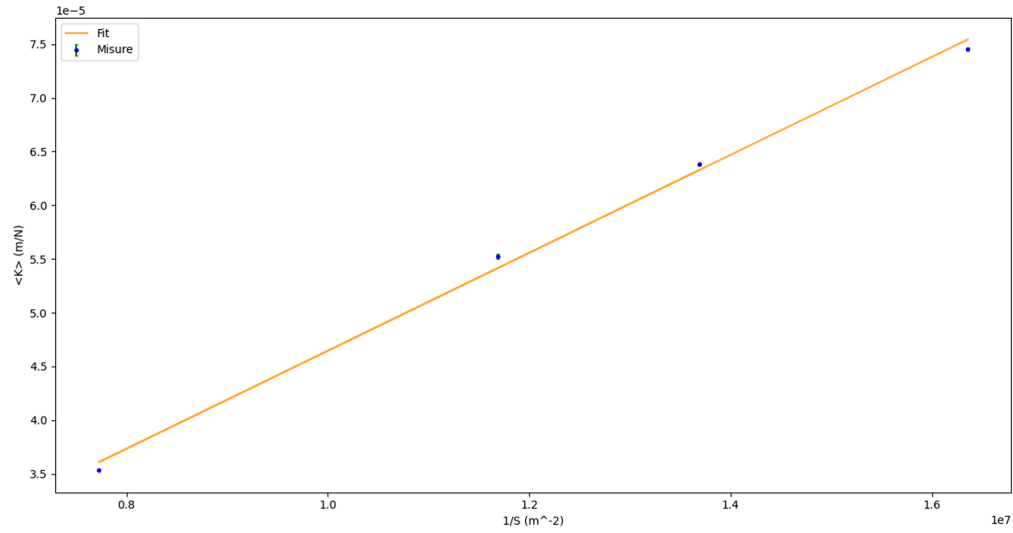


Figura 2. Dipendenza lineare tra $\langle K \rangle$ e $1/S$. Le incertezze sono rispettivamente, per $\langle K \rangle$, quelle riportate nella Tabella 2, per $1/S$ sono dell'ordine di 10^{-14} m^2

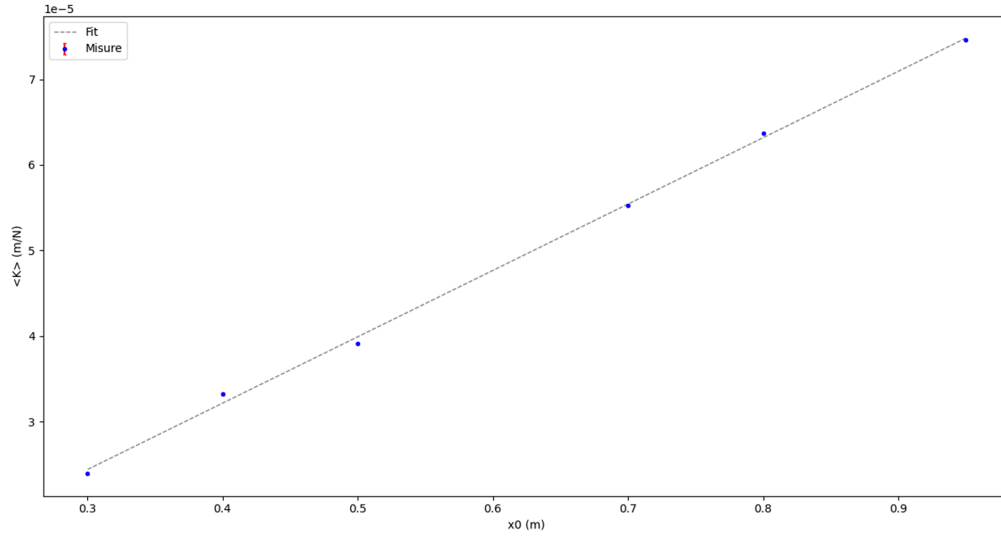


Figura 3. Dipendenza lineare tra $\langle K \rangle$ e x_0 . Le incertezze sono rispettivamente, per $\langle K \rangle$, quelle riportate nella Tabella 2, per x_0 , quelle nella Tabella 1

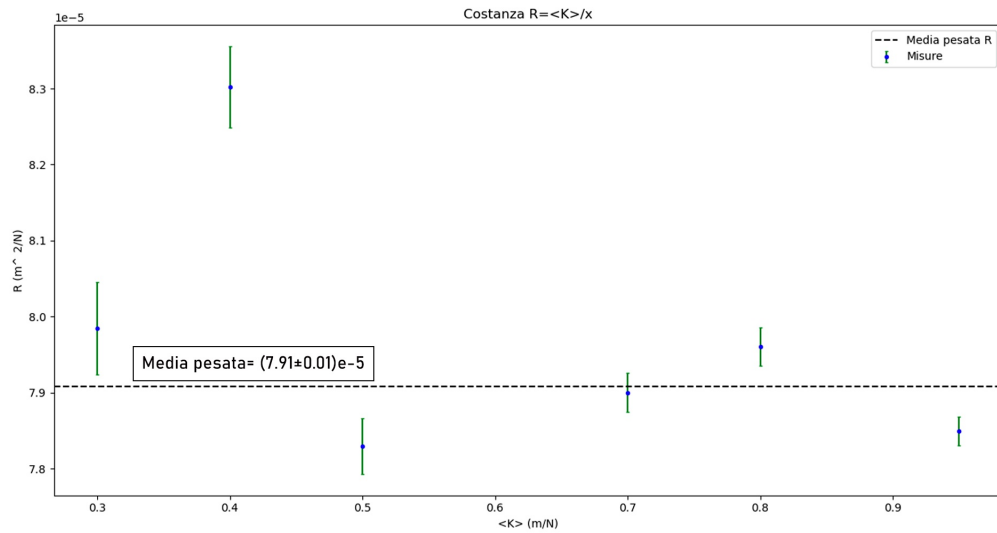


Figura 4. Costanza del rapporto $\langle K \rangle / x_0$, con $\langle K \rangle$ media pesata dei valori K , calcolata al punto (4) e x_0 lunghezza a riposo del filo, valori riportati nella Tabella 1. La media pesata ha un valore di $(7.91 \pm 0.01) \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{N}$. I valori di R sono riportati nella Tabella 4. Si verifica che il rapporto è costante.

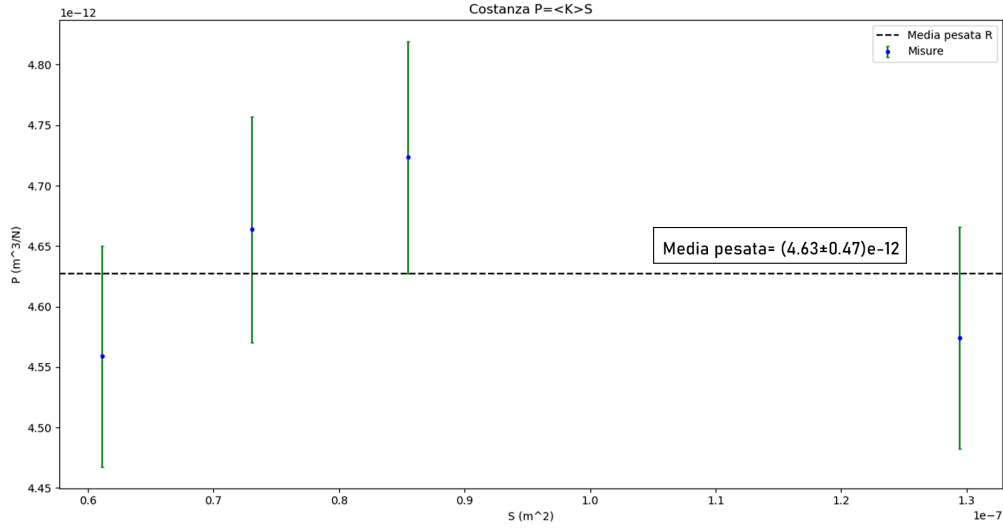


Figura 5. Costanza del prodotto $\langle K \rangle S$, con $\langle K \rangle$ media pesata dei valori K , calcolata al punto (4) e S sezione del filo calcolata con le misure del diametro riportate nella Tabella 1. La media pesata ha un valore di $(4.63 \pm 0.47) \cdot 10^{-12} \text{ m}^3/\text{N}$. I valori di P sono riportati nella Tabella 4. Si verifica che il prodotto è costante.