

Corso di Laurea in Astronomia
Laurea Triennale

**Sperimentazioni di
Fisica 2**

Stefano Ciroi

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Università di Padova

2019–2020

Indice

1	Introduzione	5
1.1	Indice di rifrazione	5
1.2	Riflessione e rifrazione	5
1.3	Cammino ottico	7
2	Dioottro sferico	11
2.1	Definizione dei fuochi	13
2.2	Formazione dell'immagine	14
3	Lenti	17
3.1	Lenti sottili	17
3.2	Lenti spesse	24
3.3	Esempi	29
3.3.1	Lente biconvessa simmetrica	29
3.3.2	Lente biconvessa asimmetrica	29
3.3.3	Lente divergente simmetrica	30
3.3.4	Lente piano-convessa	31
3.3.5	Lente menisco-convergente	31
3.3.6	Lente convesso-concava	32
3.3.7	Lente concentrica	32
3.3.8	Considerazioni	33
3.4	Lenti sottili separate	34
3.5	I doppietti	35
3.6	Stop e pupille	38
4	Specchio sferico	41
5	Le aberrazioni	47
5.1	Aberrazione sferica	47
5.1.1	Aberrazione sferica nello specchio sferico	51
5.1.2	Esempio	53
5.1.3	Aberrazione sferica nella lente sottile	54
5.2	Aberrazione cromatica	57
5.2.1	Esempio	61
5.2.2	Doppietto acromatico	62
5.2.3	Oculare acromatico	63
6	Teoria di Seidel delle aberrazioni	65
6.1	L'equazione iconale	65
6.2	Il teorema di Malus	68
6.2.1	Esempio	72
6.3	La funzione di aberrazione	73
6.4	Le 5 aberrazioni primarie di Seidel	81
6.4.1	Aberrazione sferica	81
6.4.2	Aberrazioni di astigmatismo e curvatura di campo	84
6.4.3	Aberrazione di distorsione	85
6.4.4	Aberazione di coma	86
6.4.5	Riassunto	88

INDICE

7 Telescopi	89
7.1 Il telescopio riflettore	91
7.2 Coefficienti di aberrazione	94
7.3 Telescopio Newton	96
7.4 Telescopio Cassegrain	97
7.5 Telescopio Ritchey-Chrétien	100
7.6 Telescopio Schmidt	102
8 Esperienze	111
8.1 Banco ottico	111
8.1.1 Cavalieri portalenti	112
8.1.2 Cavaliere portaschermo	112
8.1.3 Lenti e diaframmi	113
8.2 Misura della focale di una lente convergente sottile	117
8.2.1 Metodo della collimazione	117
8.2.2 Metodo dei punti coniugati	118
8.2.3 Metodo di Bessel	119
8.2.4 Variante di Silbermann	121
8.3 Misura della focale di una lente divergente sottile	122
8.3.1 Metodo della divergenza di un fascio collimato	122
8.3.2 Metodo dei minimi quadrati	124
8.4 Misura dell'aberrazione sferica di una lente convergente sottile . .	125
8.5 Misura dell'aberrazione cromatica	128

1

Introduzione

1.1 Indice di rifrazione

Sappiamo che la luce si propaga sottoforma di onda elettromagnetica:

$$\psi(t, \vec{r}) = A \cos(\varphi + \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (1.1)$$

dove A è l'ampiezza dell'onda, φ la costante di fase, ω la frequenza e infine $k = 2\pi/\lambda$ il numero d'onda, e che la sua velocità dipende dal mezzo in cui essa si propaga. In particolare, definiamo indice di rifrazione del mezzo n la quantità:

$$n = \frac{c}{v_p} \quad (1.2)$$

dove $v_p = \omega/k$ è la velocità di fase.

L'indice di rifrazione dipende dalla lunghezza d'onda, cioè $n = n(\lambda)$. Nel 1836 Cauchy determinò una relazione empirica fra la lunghezza d'onda e l'indice di rifrazione:

$$n(\lambda) = B + \frac{C}{\lambda^2}$$

poi ripresa e sviluppata da Sellmeier nel 1871:

$$n^2(\lambda) = 1 + \frac{B_1 \lambda^2}{\lambda^2 - C_1} + \frac{B_2 \lambda^2}{\lambda^2 - C_2}$$

dove i termini B e C , B_1 , B_2 , C_1 e C_2 dipendono dal tipo di materiale. Inoltre, B , B_1 e B_2 sono adimensionali, mentre C , C_1 e C_2 sono in unità di μm^2 (Fig. 1.1).

L'indice di rifrazione vale 1 nel vuoto, praticamente 1 nell'aria ($n_{\text{aria}} = 1.000293$) e nella gran parte dei gas, mentre è in generale maggiore di 1 nei liquidi ($n_{\text{acqua}} = 1.333$) e nei solidi trasparenti ($n_{\text{diamante}} = 2.419$).

1.2 Riflessione e rifrazione

Nelle più semplici applicazioni dell'ottica le grandezze in gioco sono molto maggiori della lunghezza d'onda della radiazione considerata, e quindi possiamo assumere che la luce si propaghi in linea retta, nonostante il suo comportamento ondulatorio. Parliamo perciò di **ottica geometrica**.

CAPITOLO 1. INTRODUZIONE

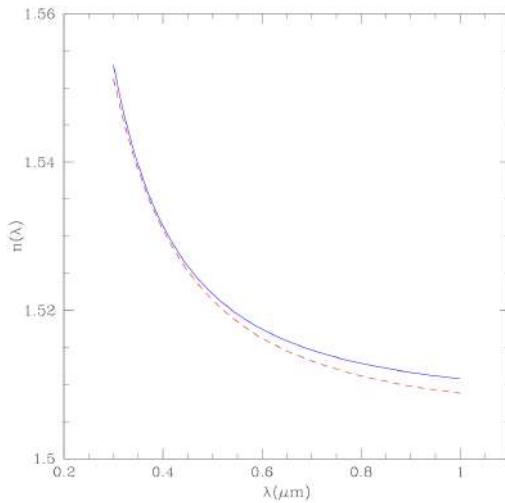


Figura 1.1: Indice di rifrazione per un vetro BK7. La curva rossa tratteggiata è ottenuta con la relazione di Cauchy, mentre quella continua blu è ottenuta con la relazione di Sellmeier.

Quando inviamo un raggio di luce verso una superficie opaca e riflettente, il raggio verrà riflesso con un angolo i' rispetto alla normale alla superficie pari all'angolo di incidenza i :

$$i = i' \quad \boxed{1.3}$$

Inoltre, raggio incidente, raggio riflesso e normale alla superficie, giacciono tutti nello stesso piano (Fig. 1.2).

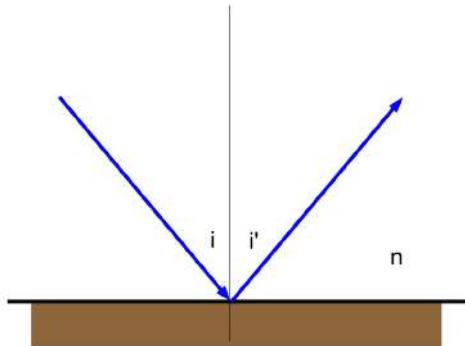


Figura 1.2: Rappresentazione schematica della riflessione.

1.3. CAMMINO OTTICO

Quando un raggio luminoso attraversa due mezzi omogenei e trasparenti con indice di rifrazione diverso, subisce una deviazione nella direzione di propagazione. Anche in questo caso, raggio incidente, raggio rifratto e normale alla superficie di separazione sono contenuti nello stesso piano (Fig. 1.3).

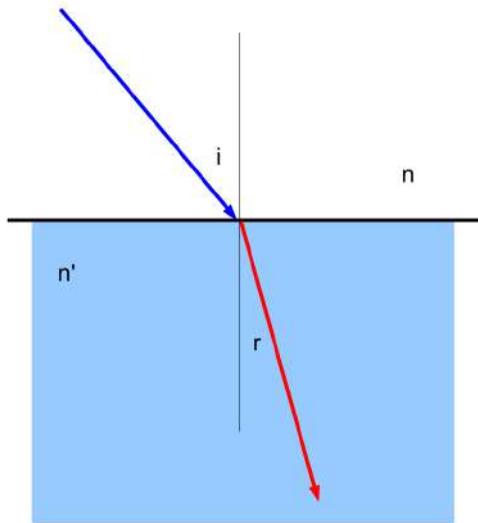


Figura 1.3: Rappresentazione schematica della rifrazione.

La legge di Snell fornisce la relazione fra gli angoli di incidenza i e di rifrazione r :

$$n \sin i = n' \sin r \quad (1.4)$$

dove n e n' sono gli indici di rifrazione.

In realtà la rifrazione avviene solo se il raggio è inclinato rispetto alla normale della superficie di separazione fra i due mezzi. Nel caso in cui sia parallelo alla normale, cioè quando $i = 0$ non c'è deviazione.

Dalla formula di Snell è possibile ricavare l'angolo critico i_c oltre il quale si avrà riflessione totale. Questo angolo è tale per cui $r = 90^\circ$, per cui:

$$i_c = \arcsin \left(\frac{n'}{n} \right)$$

Per $i > i_c$ si ha riflessione totale, ma questo può avvenire solo se $n' < n$, cioè nel passaggio da un mezzo più denso a uno meno denso.

1.3 Cammino ottico

Il cammino d di un raggio di luce che si propaga in un mezzo con indice di rifrazione n , vale:

$$d = v \cdot t = \frac{c}{n} \cdot t$$

CAPITOLO 1. INTRODUZIONE

da cui

$$nd = ct$$

Il prodotto $l = nd$ è detto **cammino ottico** e come si vede dalla relazione precedente rappresenta la distanza che la luce percorre nel vuoto nello stesso tempo impiegato per percorrere la distanza d nel mezzo. Più in generale quando la luce attraversa vari mezzi con indici di rifrazione diversi:

$$l = \sum_i n_i \cdot d_i$$

Nel 1650 circa Pierre de Fermat enunciò un fondamentale principio che porta il suo nome, **principio di Fermat**, secondo cui

Il percorso fra due punti preso da un raggio di luce è quello che è attraversato nel minor tempo.

Attraverso il principio di Fermat possiamo descrivere le proprietà di riflessione e rifrazione, e possiamo anche derivare la legge di Snell, come vediamo di seguito.

Consideriamo un raggio di luce che emesso da un punto P raggiunge il punto Q dopo aver toccato in un punto C la superficie riflettente posta al di sotto di P e Q . Assumiamo poi che entrambi i punti si trovino in un mezzo con indice di rifrazione n (Fig. 1.4).

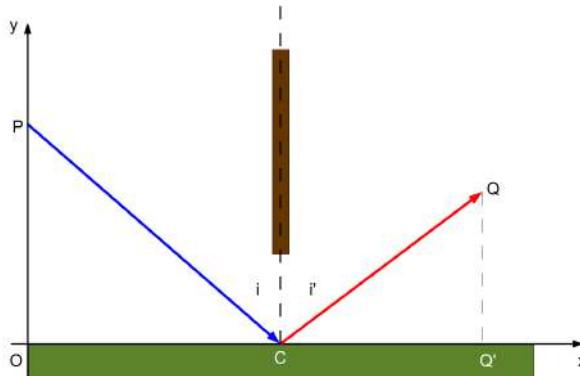


Figura 1.4: P è una sorgente di luce che emette raggi in tutte le direzioni. Uno schermo permette di considerare solo i raggi che colpiscono la superficie riflettente e raggiungono il punto Q .

Il cammino ottico del raggio di luce da P a Q è:

$$l = n \cdot \overline{PC} + n \cdot \overline{CQ}$$

Passiamo alle coordinate cartesiane e assumiamo come variabile x la distanza del punto C dall'origine. Le coordinate dei punti P e Q saranno rispettivamente $(0, y_P)$ e (x_Q, y_Q) .

1.3. CAMMINO OTTICO

Avremo quindi:

$$l = n \cdot \sqrt{x^2 + y_P^2} + n \cdot \sqrt{(x_Q - x)^2 + y_Q^2}$$

Se il mezzo in cui la luce si propaga è omogeneo e isotropo la traiettoria che richiede il minor tempo coincide con quello della minima distanza. Perciò applicare il principio di Fermat significa calcolare il minimo valore di l :

$$\frac{dl}{dx} = 0$$

da cui:

$$n \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_P^2}} - n \cdot \frac{(x_Q - x)}{\sqrt{(x_Q - x)^2 + y_Q^2}} = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y_P^2}} - \frac{(x_Q - x)}{\sqrt{(x_Q - x)^2 + y_Q^2}} = 0$$

$$\sin O\hat{P}C - \sin Q'\hat{Q}C = 0$$

$$\sin i = \sin i'$$

e infine:

$$i = i'$$

Calcolando la derivata seconda di l possiamo verificare che si tratta proprio di un minimo:

$$\frac{d^2l}{dx^2} = n \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y_P^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y_P^2}}}{x^2 + y_P^2} - n \cdot \frac{-\sqrt{(x_Q - x)^2 + y_Q^2} + \frac{(x_Q - x)^2}{\sqrt{(x_Q - x)^2 + y_Q^2}}}{(x_Q - x)^2 + y_Q^2}$$

$$\frac{d^2l}{dx^2} = n \cdot \frac{(x^2 + y_P^2) - x^2}{(x^2 + y_P^2)\sqrt{x^2 + y_P^2}} - n \cdot \frac{-[(x_Q - x)^2 + y_Q^2] + (x_Q - x)^2}{[(x_Q - x)^2 + y_Q^2]\sqrt{(x_Q - x)^2 + y_Q^2}}$$

$$\frac{d^2l}{dx^2} = n \cdot \frac{y_P^2}{(x^2 + y_P^2)\sqrt{x^2 + y_P^2}} + n \cdot \frac{y_Q^2}{[(x_Q - x)^2 + y_Q^2]\sqrt{(x_Q - x)^2 + y_Q^2}} > 0$$

Possiamo quindi affermare che la condizione imposta dalla legge della riflessione è quella che minimizza il cammino ottico da P a Q.

Consideriamo ora il caso in cui un raggio di luce emesso dal punto P che si trova in un mezzo con indice di rifrazione n raggiunge il punto Q che invece si trova in un mezzo diverso con indice di rifrazione n' , passando attraverso la superficie di separazione dei due mezzi (Fig. 1.5).

Il cammino ottico questa volta sarà:

CAPITOLO 1. INTRODUZIONE

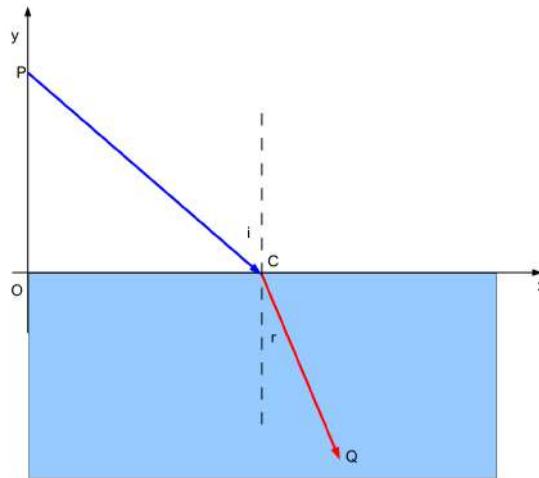


Figura 1.5: Un raggio di luce dal punto P attraversa la superficie di separazione fra due mezzi con indice di rifrazione diverso e arriva nel punto Q.

$$l = n \cdot \sqrt{x^2 + y_P^2} + n' \cdot \sqrt{(x_Q - x)^2 + y_Q^2}$$

Ponendo di nuovo uguale a zero la derivata di l , avremo:

$$n \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_P^2}} - n' \cdot \frac{(x_Q - x)}{\sqrt{(x_Q - x)^2 + y_Q^2}} = 0$$

$$n \sin i - n' \sin r = 0$$

e infine:

$$n \sin i = n' \sin r$$

2

Diottro sferico

Si indica con il termine **diottro sferico** una calotta sferica che separa due mezzi con indice di rifrazione diverso. La congiungente il centro di curvatura C della calotta con il vertice V viene chiamata asse principale del diottro.

Sia P il punto-oggetto sull'asse del diottro, n ed n' gli indici di rifrazione dei due mezzi separati dal diottro, Q il punto-immagine, $\overline{PP'}$ un raggio incidente sulla superficie del diottro, $\overline{P'Q}$ il corrispondente raggio rifratto, $\overline{CP'}$ il raggio di curvatura del diottro, i ed r gli angoli di incidenza e di rifrazione, φ , φ' e ω gli angoli compresi rispettivamente fra raggio incidente, raggio rifratto e raggio di curvatura del diottro con l'asse ottico. P e Q vengono chiamati **punti coniugati** e i piani passanti per essi e perpendicolari all'asse ottico (π e π') vengono chiamati **piani coniugati** (Fig. 2.1).

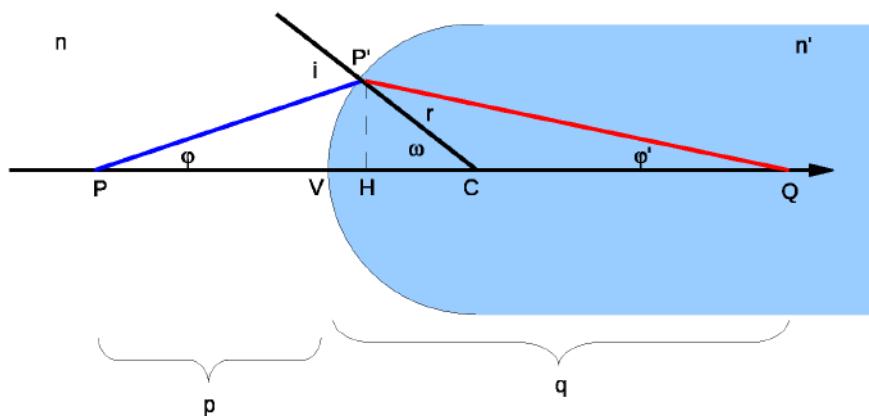


Figura 2.1: Schema ottico del diottro sferico.

Impostiamo la legge della rifrazione di Snell:

$$n \sin i = n' \sin r$$

Dalla figura, possiamo scrivere $i = \varphi + \omega$ e $r = \omega - \varphi'$, e sostituendo si ha:

$$n \sin(\varphi + \omega) = n' \sin(\omega - \varphi')$$

CAPITOLO 2. DIOTTRO SFERICO

$$n[\sin \omega \cos \varphi + \sin \varphi \cos \omega] = n'[\sin \omega \cos \varphi' - \sin \varphi' \cos \omega]$$

Esprimiamo ora le funzioni trigonometriche in termini di segmenti. Chiamiamo R il raggio di curvatura del diottro.

$$n \left[\frac{\overline{P'H}}{R} \frac{\overline{PH}}{\overline{PP'}} + \frac{\overline{P'H}}{\overline{PP'}} \frac{\overline{HC}}{R} \right] = n' \left[\frac{\overline{P'H}}{R} \frac{\overline{HQ}}{\overline{P'Q}} - \frac{\overline{P'H}}{\overline{P'Q}} \frac{\overline{HC}}{R} \right]$$

Per angoli φ e ω piccoli, $H \rightarrow V$, $\frac{\overline{HC}}{R} \rightarrow 1$, $\frac{\overline{HQ}}{\overline{P'Q}} \rightarrow 1$ e $\frac{\overline{PH}}{\overline{PP'}} \rightarrow 1$. Se ora chiamiamo p la distanza fra l'oggetto e il vertice del diottro e q la distanza fra il vertice del diottro e l'immagine, otteniamo:

$$n \left[\frac{\overline{P'H}}{R} + \frac{\overline{P'H}}{p} \right] = n' \left[\frac{\overline{P'H}}{R} - \frac{\overline{P'H}}{q} \right]$$

$$n \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{p} \right] = n' \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{q} \right]$$

e infine:

$$\boxed{\frac{n}{p} + \frac{n'}{q} = \frac{n' - n}{R}} \quad (2.1)$$

che è nota con il nome di **formula di Gauss per il diottro sferico**.

È possibile ottenere lo stesso risultato partendo da:

$$n \sin(\varphi + \omega) = n' \sin(\omega - \varphi')$$

e applicando l'espansione in serie di McLaurin di sin e cos arrestate al primo ordine:

$$\sin \theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots$$

Da cui:

$$n(\varphi + \omega) \cong n'(\omega - \varphi')$$

$$n\varphi + n\omega = n'\omega - n'\varphi'$$

$$n\varphi + n'\varphi' = (n' - n)\omega$$

E infine:

$$n \frac{\overline{P'H}}{\overline{PH}} + n' \frac{\overline{P'H}}{\overline{HQ}} = (n' - n) \frac{\overline{P'H}}{\overline{HC}}$$

2.1. DEFINIZIONE DEI FUOCHI

$$\frac{n}{p} + \frac{n'}{q} = \frac{n' - n}{R}$$

come ottenuto prima.

L'approssimazione applicata a questa trattazione, chiamata anche **parassiale**, è nota come **approssimazione di Gauss**. Essa consiste non soltanto nel considerare raggi che formano un angolo piccolo con l'asse ottico, ma che oltre a ciò incidono in un'area ristretta intorno al vertice della calotta sferica. Perciò dato un punto-oggetto che si trovi fuori dall'asse ottico, ma non troppo distante da esso, la formula di Gauss per il diottro sferico può servire a calcolare la distanza del punto-immagine. In definitiva possiamo ragionevolmente assumere che solamente in approssimazione di Gauss il diottro sferico si comporti come un sistema stigmatico ed ortoscopico, cioè un sistema in cui tutti i raggi uscenti da P vanno ad incontrarsi in Q e in cui un oggetto che si trovi in un piano π abbia un'immagine simile in un piano π' .

2.1 Definizione dei fuochi

Ripartendo dalla (2.1) e assumendo che l'immagine si formi all'infinito ($q \rightarrow \infty$), si ottiene:

$$\frac{n}{f} = \frac{n' - n}{R}$$

dove $f = p = \overline{FV}$.

Se invece è l'oggetto a trovarsi all'infinito ($p \rightarrow \infty$) avremo:

$$\frac{n'}{f'} = \frac{n' - n}{R}$$

dove $f' = q = \overline{VF'}$.

Le quantità f e f' vengono chiamate **fuochi** del diottro (Fig. 2.2).

Si deduce facilmente la relazione fra i fuochi:

$$\frac{n}{f} = \frac{n' - n}{R} = \frac{n'}{f'}$$

da cui:

$$\frac{f'}{f} = \frac{n'}{n} \quad \boxed{2.2}$$

cioè la distanza del fuoco dal vertice del diottro è tanto maggiore quanto maggiore è il valore dell'indice di rifrazione del mezzo. Le posizioni dei fuochi sono simmetriche solo nel caso in cui i due mezzi abbiano lo stesso indice di rifrazione, cosa che si verifica nel caso in cui la superficie sferica del diottro abbia uno spessore molto sottile rispetto alla distanze in gioco.

CAPITOLO 2. DIOTTO SFERICO

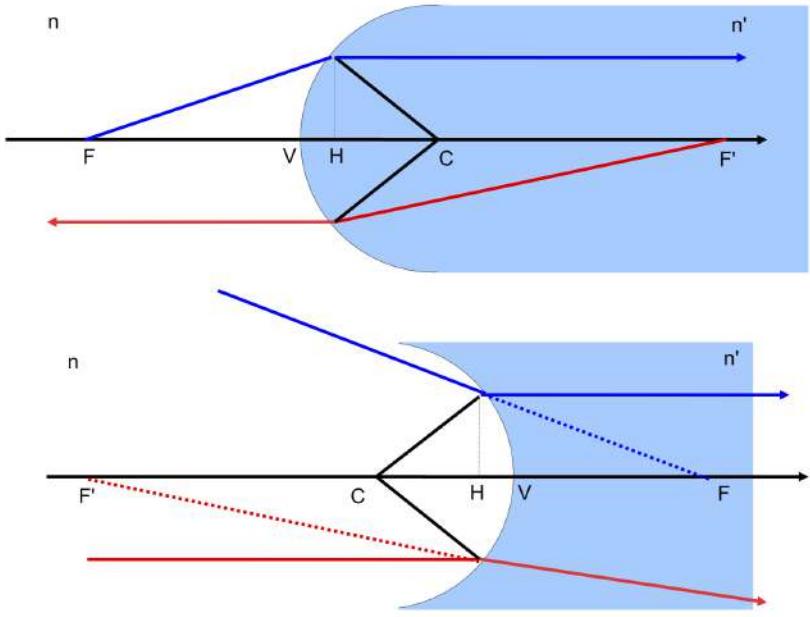


Figura 2.2: In alto uno diotto sferico convergente. I raggi uscenti dal fuoco F o dal fuoco F' diventano un fascio parallelo all'asse ottico. In basso un diotto sferico divergente. I raggi, i cui prolungamenti sono diretti verso il fuoco F , diventano paralleli all'asse ottico.

2.2 Formazione dell'immagine

Per costruire l'immagine di un oggetto esteso possiamo sfruttare le proprietà appena viste del diotto.

Assumiamo per semplicità che l'oggetto si trovi in un piano ortogonale all'asse ottico del diotto. Inoltre l'oggetto abbia un'estremità sull'asse ottico (A) e l'altra si trovi nella parte superiore, che per convenzione indichiamo positiva (B). La dimensione dell'oggetto sarà \overline{AB} . Da B tracciamo un raggio parallelo all'asse ottico, e lo prolunghiamo nel mezzo n' in modo che intersechi il fuoco F' . Sempre da B tracciamo un secondo raggio, diretto verso il centro di curvatura del diotto (C): questo raggio non subirà rifrazione in quanto la sua direzione è ortogonale alla superficie del diotto nel punto di attraversamento. L'intersezione fra i due raggi darà la posizione del punto-immagine B' . Mentre per avere il punto-immagine A' basterà tracciare da B' la normale all'asse ottico (Fig. 2.3).

Il punto-oggetto A si troverà a distanza p dal vertice V del diotto, mentre il punto-immagine A' sarà a distanza q . Consideriamo ora i triangoli ABC e A'B'C. Come si vede sono simili, per cui se è R il raggio di curvatura del diotto, possiamo scrivere:

$$\frac{\overline{A'B'}}{q - R} = \frac{\overline{AB}}{p + R}$$

2.2. FORMAZIONE DELL'IMMAGINE

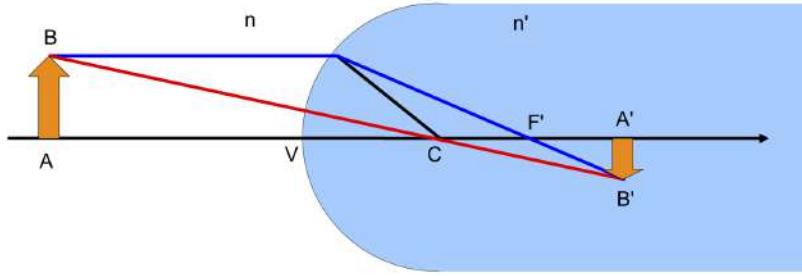


Figura 2.3: Costruzione dell'immagine di una sorgente estesa di dimensione \overline{AB} .

da cui, definiamo la quantità **ingrandimento** m come:

$$m = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{q - R}{p + R} \quad (2.3)$$

Dalla formula si può notare che man mano che aumenta la distanza dell'oggetto dal diottro, l'immagine diventa più piccola e al limite tende a zero quando l'oggetto è all'infinito. Inoltre l'ingrandimento vale 1 (Fig. 2.4) quando l'oggetto è a distanza:

$$p = q - 2R$$

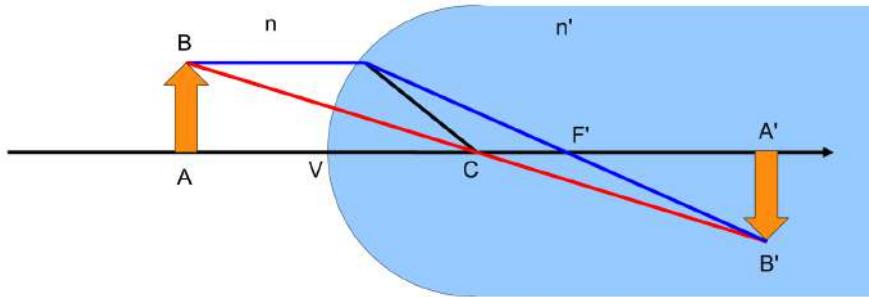


Figura 2.4: Condizione per avere ingrandimento pari a 1, cioè $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

ed è maggiore di 1 (Fig. 2.5) quando:

$$p < q - 2R$$

mentre è minore di 1 nel caso opposto. Si noti inoltre che l'immagine appare rovesciata.

Proviamo adesso a considerare il caso del diottro sferico concavo (Fig. 2.6).

Come prima tracciamo da B verso il diottro un raggio parallelo all'asse ottico del sistema. A causa della rifrazione questo divergerà e dovremo quindi

CAPITOLO 2. DIOTTO SFERICO

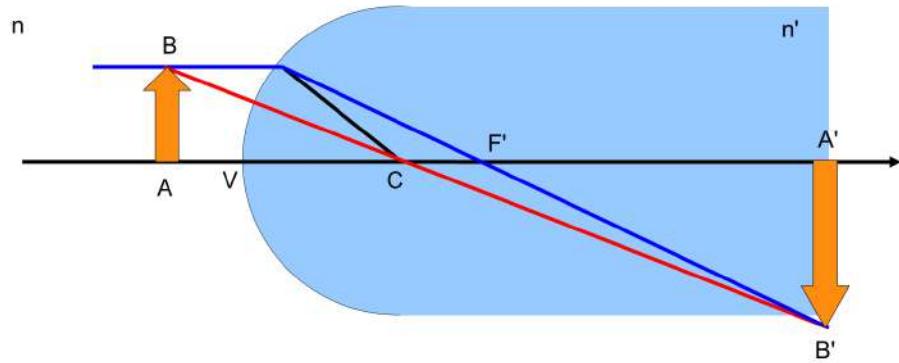


Figura 2.5: L'ingrandimento aumenta quando la sorgente si avvicina al vertice V.

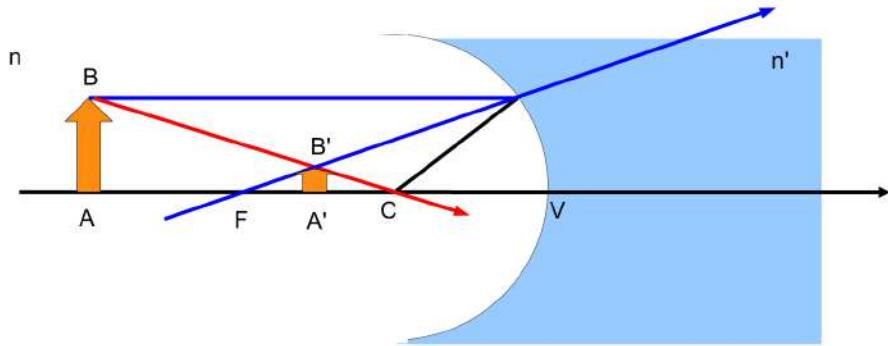


Figura 2.6: Costruzione dell'immagine nel caso di un diottro sferico divergente.

considerare il prolungamento all'indietro del raggio rifratto verso il punto focale F. Poi tracciamo da B un raggio che intersechi il centro ottico del diottro. I due raggi definiranno il punto immagine B'. Come si nota, l'immagine ottenuta è virtuale, dalla stessa parte dell'oggetto e dritta.

3

Lenti

3.1 Lenti sottili

Indichiamo con il termine **lente** un sistema ottico costituito da materiale trasparente e omogeneo limitato da due superfici che possono essere entrambe sferiche oppure una piana ed una sferica (ma mai entrambe piane!), le quali separano un mezzo di indice di rifrazione n' da un mezzo di indice di rifrazione n .

Una lente si dice **sottile** quando si può assumere che il suo spessore sia piccolo in confronto alle lunghezze in gioco, come ad esempio i raggi di curvatura, le lunghezze focali e le distanze dell'immagine e dell'oggetto. In pratica, in termini di ottica geometrica, la lente si considera assimilata a un piano e si trascura ciò che avviene all'interno di essa quando è attraversata da raggi di luce.

Esistono due famiglie principali di lenti: **convergenti** e **divergenti**. E all'interno di esse abbiamo varie categorie come ad esempio la lente biconvessa, o biconcava, piano-convessa o piano-concava, menisco-convergente o menisco-divergente, ecc. (Fig. 3.1)

Consideriamo ora due diottri **concavi** addossati, che creano una sorta di lente spessa (chiamiamo d lo spessore della lente) avente indice di rifrazione n (Fig. 3.2). I due diottri abbiano raggi di curvatura R_1 e R_2 diversi. Poniamo una sorgente luminosa in P e consideriamo un raggio che da P si propaga verso il primo diottro. Per effetto della rifrazione andrà a divergere e dovremo considerarne il prolungamento all'indietro fino al punto Q' sull'asse ottico. Il raggio prosegue dentro i due diottri e viene nuovamente rifratto, andando a incrociare l'asse ottico nel punto Q .

Impostiamo le equazioni dei due diottri, assumendo che $p' = q + d$:

$$\frac{1}{p} - \frac{n}{q} = \frac{n-1}{R_1}$$

$$\frac{n}{q+d} + \frac{1}{q'} = \frac{1-n}{R_2}$$

Nell'approssimazione della lente sottile $d \ll q$ e quindi possiamo scrivere:

$$\frac{n}{q} + \frac{1}{q'} = \frac{1-n}{R_2}$$

CAPITOLO 3. LENTI

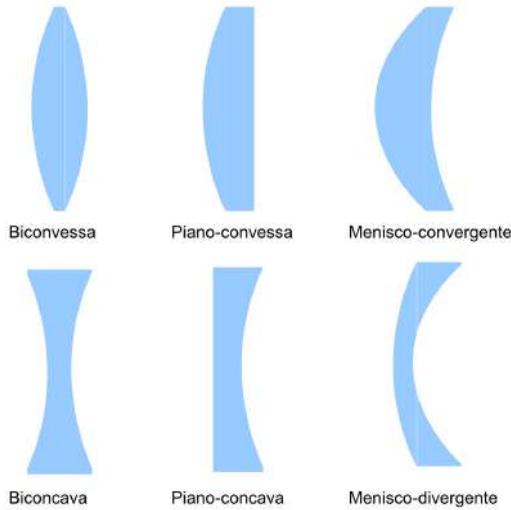


Figura 3.1: Esempi di lenti. In alto lenti convergenti, in basso lenti divergenti.

Da cui, sommando membro a membro le due equazioni, otteniamo:

$$\frac{1}{p} - \frac{n}{q} + \frac{n}{q} + \frac{1}{q'} = \frac{n-1}{R_1} + \frac{1-n}{R_2}$$

e infine:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q'} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (3.1)$$

Quindi, nel caso della lente sottile, ciò che avviene all'interno della lente si può trascurare.

Torniamo adesso alla vecchia notazione e indichiamo con p la distanza del punto-oggetto e con q la distanza del punto-immagine dalla lente. Immaginiamo di portare la sorgente all'infinito ($p \rightarrow \infty$). I raggi paralleli e vicini all'asse ottico andranno a concentrarsi in un punto detto fuoco della lente.

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad \text{[3.1]}$$

Simmetricamente, se mettiamo la sorgente nel fuoco della lente, l'immagine si forma all'infinito. Come si può facilmente capire dalla formula, la distanza focale f è una sola per la lente sottile. Nel caso di una lente convergente non necessariamente simmetrica, avremo che $R_1 > 0$ e $R_2 < 0$, per cui alla fine la lunghezza focale sarà positiva ($f > 0$). Al contrario, per una lente divergente avremo che $R_1 < 0$ e $R_2 > 0$, per cui sarà $f < 0$. Si noti inoltre che nella lente menisco-convergente entrambi i raggi sono positivi, ma $R_2 > R_1$ per cui $f > 0$, mentre nella lente menisco-divergente sono ancora entrambi positivi, ma $R_2 < R_1$ e quindi $f < 0$.

3.1. LENTI SOTTILI

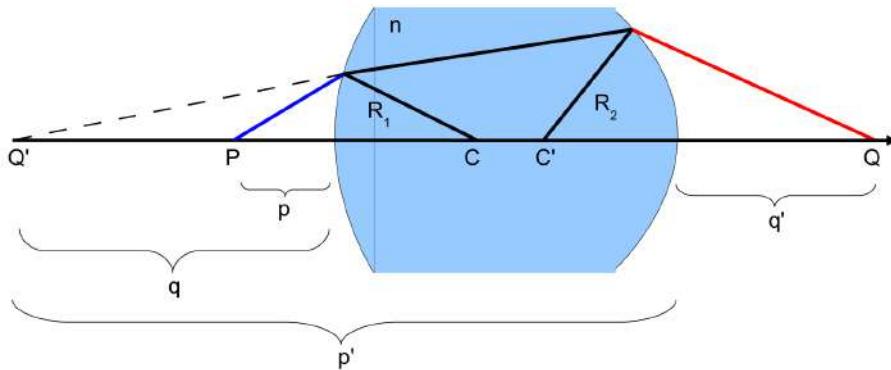


Figura 3.2: Schema ottico nel caso generale della lente: due diottri addossati.

In definitiva possiamo scrivere che l'equazione dei punti coniugati (o **formula di Gauss**) per la lente sottile è la seguente:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad (3.2)$$

È possibile ottenere questo risultato seguendo un semplice ragionamento basato sulla similitudine dei triangoli (Fig. 3.3).

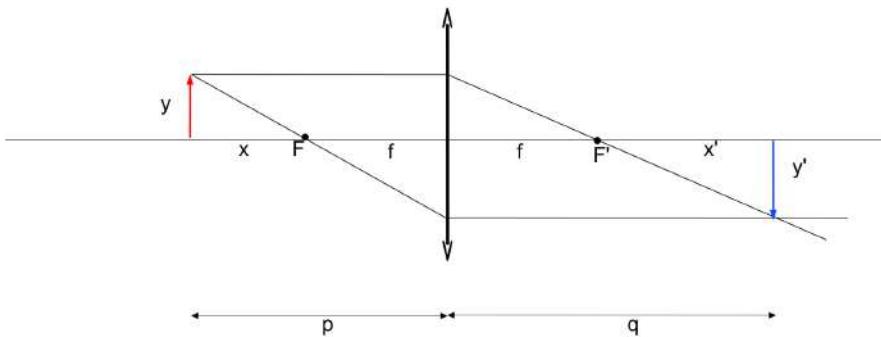


Figura 3.3: Immagine di una sorgente estesa.

$$\frac{y - y'}{q} = \frac{y}{f}$$

$$\frac{y - y'}{p} = -\frac{y'}{f}$$

e sommando membro a membro si ha:

$$\frac{y - y'}{p} + \frac{y - y'}{q} = \frac{y}{f} - \frac{y'}{f}$$

CAPITOLO 3. LENTI

da cui si riottiene la formula di Gauss:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

È possibile mettere in relazione la focale della lente non solo alla distanze di oggetto e immagine dalla lente stessa, ma anche alle distanze di oggetto e immagine dai fuochi:

$$\frac{x}{f} = \frac{y}{-y'} \quad \frac{x'}{f} = \frac{-y'}{y}$$

Moltiplicando membro a membro si ottiene:

$$x \cdot x' = f^2 \quad (3.3)$$

nota come **formula di Newton**.

Definiamo ora l'**ingrandimento** di una lente sottile come il rapporto fra la dimensione dell'immagine e la dimensione dell'oggetto. Sempre dalla Fig. 3.3 e dalla similitudine fra triangoli possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{-y'}{f} &= \frac{y - y'}{f + x} \\ \frac{y}{f} &= \frac{y - y'}{f + x'} \end{aligned}$$

da cui, dividendo membro a membro, otteniamo:

$$m = \frac{-y'}{y} = \frac{f + x'}{f + x} = \frac{q}{p} \quad (3.4)$$

cioè l'ingrandimento è dato banalmente dal rapporto fra le distanze dei piani coniugati dal centro della lente.

Consideriamo l'equazione dei punti coniugati e scriviamola in una forma diversa:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} &= \frac{1}{f} \\ 1 + \frac{p}{q} &= \frac{p}{f} \\ \frac{p}{q} &= \frac{p - f}{f} \end{aligned}$$

E infine:

$$m = \frac{f}{p - f}$$

L'asintoto verticale si ha quando $p = f$ (Fig. 3.4).

3.1. LENTI SOTTILI

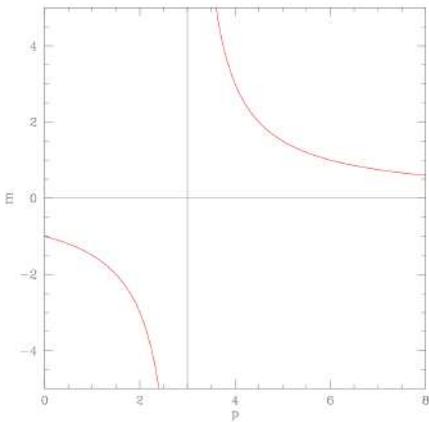


Figura 3.4: Ingrandimento in funzione della distanza dell'oggetto dalla lente, per una data distanza focale.

Per $p > f$, cioè ponendo l'oggetto a distanza dalla lente maggiore della distanza focale, l'ingrandimento è positivo, $m > 0$, e si forma un'immagine reale e capovolta dalla parte opposta rispetto alla lente. Quando invece $p < f$, cioè quando l'oggetto si trova fra il fuoco dalla lente e la lente stessa l'ingrandimento è negativo, $m < 0$, e si forma un'immagine virtuale dritta dalla stessa parte dell'oggetto.

Si ha ingrandimento pari a 1 quando:

$$p - f = f \Rightarrow p = 2f$$

Per cui, allontanare l'oggetto a distanze $p > 2f$ significa produrre un'immagine reale che diventa via via sempre più piccola e che si avvicina alla lente. Quando invece l'oggetto si trova a distanze $f < p < 2f$, l'ingrandimento cresce. Quando l'oggetto si trova a distanze $0 < p < f$, l'immagine è dritta e sempre più grande dell'oggetto. Ma avvicinando l'oggetto alla lente, l'immagine tende a rimpicciolirsi fino a coincidere con l'oggetto quando questo è a contatto con la lente (Fig. 3.5).

Per confronto, si veda il caso della lente divergente, che produce sempre un'immagine dritta, virtuale, con ingrandimento minore di 1 e che si forma tra il fuoco e la lente dalla parte dell'oggetto. Con l'avvicinarsi dell'oggetto alla lente, l'immagine si ingrandisce e si avvicina anch'essa alla lente fino a coincidere con l'oggetto quando questo è a contatto con la lente (Fig. 3.6).

Si definisce **potere diottrico** di una lente la quantità:

$$P = \frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (3.5)$$

Viene misurato in diottrie se la distanza focale è espressa in metri.

Immaginiamo adesso un sistema fatto di due (o più lenti) sottili addossate. Poniamo una sorgente di luce all'infinito: i raggi paralleli che incidono sulla prima lente dovrebbero convergere nel fuoco secondario F'_1 posto alla distanza

CAPITOLO 3. LENTI

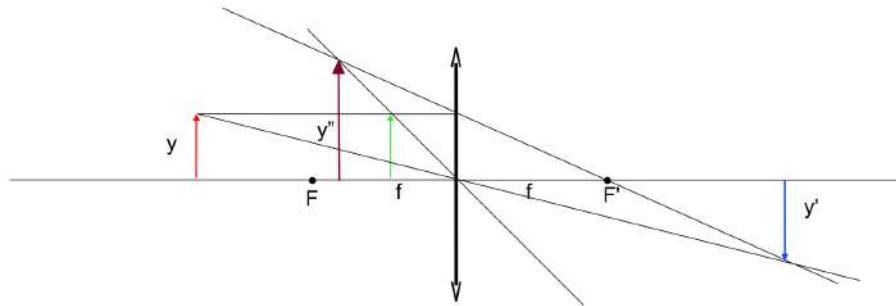


Figura 3.5: L'oggetto (in rosso) si trova a distanza maggiore di f , l'immagine (in blu) è reale e capovolta. Se l'oggetto (in verde) si trova a distanza minore di f , l'immagine (in magenta) è virtuale e dritta.

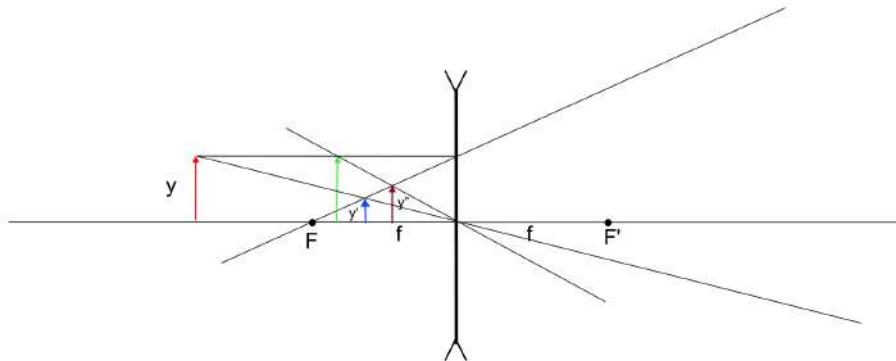


Figura 3.6: Nel caso della lente divergente si ottiene sempre un'immagine virtuale e dritta.

f_1 , ma incontrano la seconda lente. Il fuoco F'_1 diventa l'oggetto virtuale per la seconda lente che ha distanza focale f_2 . Il punto in cui si forma l'immagine finale è per definizione il fuoco secondario del sistema di due lenti, e la sua distanza dalle lenti, f , si calcola applicando la formula dei punti coniugati:

$$\frac{1}{-f_1} + \frac{1}{f} = \frac{1}{f_2}$$

da cui:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (3.6)$$

O anche:

$$P = P_1 + P_2 \quad (3.7)$$

Quindi, possiamo affermare che il potere diottrico di lenti sottili a contatto è dato dalla somma dei poteri diottrici delle singole lenti. Si tenga sempre a

3.1. LENTI SOTTILI

mente che queste equazioni sono valide solo per lenti sottili addossate. Nel caso in cui esse fossero distanziate di una quantità non trascurabile, il potere diottico finale sarebbe dipendente dalla separazione. Nel caso, però, che il fascio emergente dalla prima lente sia parallelo all'asse ottico, l'effetto sulla seconda lente diventa indipendente dalla distanza fra le due lenti e tutto avviene come se fossero addossate.

Introduciamo infine il concetto di **profondità di campo**.

Immaginiamo una sorgente luminosa posta in P , la cui immagine è il punto Q . Spostiamo ora la sorgente di un tratto $\overline{PP'} = \Delta p$. L'immagine si sposterà della quantità $\overline{QQ'} = \Delta q$ (Fig. 3.7). Come sono legati Δp e Δq ?

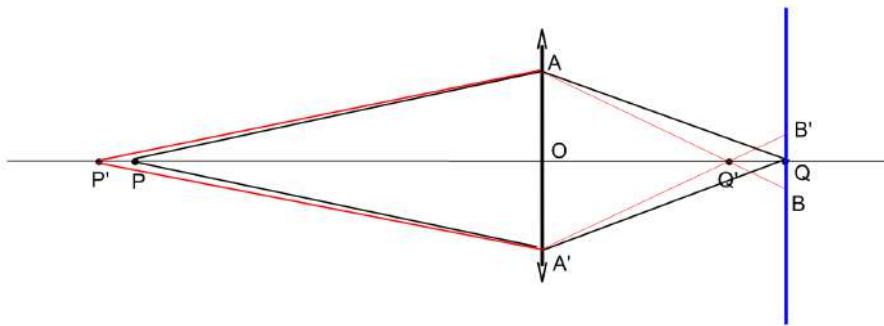


Figura 3.7: L'oggetto in P viene spostato in P' , l'immagine in Q si sposta in Q' .

Prendiamo la legge dei punti coniugati e differenziamo ambo i membri:

$$-\frac{\Delta p}{p^2} - \frac{\Delta q}{q^2} = 0$$

Se $p \gg f$, cioè se l'oggetto è molto lontano dalla lente, come accade per i telescopi e in genere per le macchine fotografiche, possiamo assumere che $q \cong f$. Quindi:

$$\Delta p \cong -p^2 \frac{\Delta q}{f^2}$$

Se adesso $\overline{AO} = h$ e $\overline{B'Q} = \epsilon$, per la similitudine fra i triangoli $AQ'A'$ e $BQ'B'$, avremo:

$$\frac{\Delta q}{2\epsilon} \cong \frac{f}{2h}$$

ossia:

$$\Delta q \cong \epsilon \frac{f}{h}$$

CAPITOLO 3. LENTI

Se adesso i dischetti di diametro non superiore a 2ϵ possono essere considerati in prima approssimazione immagini puntiformi, segue che tutti i punti-oggetto compresi fra $p - \Delta p$ e $p + \Delta p$, con

$$|\Delta p| \cong \frac{p^2}{f^2} \epsilon \frac{f}{h} = \epsilon \frac{p^2}{hf}$$

avranno un'immagine nitida e puntiforme.

La quantità $2\Delta p$ si chiama **profondità di campo**, per oggetti a distanza p e sotto l'apertura h .

Come si può notare, se teniamo costanti ϵ e f , sia Δp che Δq , crescono al decrescere di h . Quindi la profondità di campo aumenta quando si passa da raggi marginali a raggi parassiali. Inoltre, se teniamo costanti ϵ e h , Δp cresce al decrescere della lunghezza focale. Le macchine fotografiche a fuoco fisso hanno in genere focale corta e piccola apertura, in modo da avere grande profondità di campo.

3.2 Lenti spesse

Nel caso in cui non possiamo considerare lo spessore della lente trascurabile, le formule fin qui utilizzate non sono direttamente applicabili. Ciò nonostante, è possibile trattare il caso delle lenti spesse in modo relativamente semplice, utilizzando i cosiddetti **piani principali**, che possono essere definiti come quei due piani coniugati per cui l'ingrandimento vale +1.

Consideriamo una lente spessa, biconcava e asimmetrica. Poniamo una sorgente di luce nel fuoco primario F_1 , dalla parte opposta della lente emergerà un fascio di raggi paralleli. Vediamo cosa avviene all'interno della lente: i raggi provenienti dal fuoco raggiungono la prima superficie e subiscono una rifrazione, poi raggiungono la seconda superficie e subiscono una seconda rifrazione. Prolunghiamo i raggi incidenti e i raggi emergenti dentro la lente e otteniamo così il primo piano principale H_1 . Ripetiamo la procedura per il fuoco secondario F_2 e otteniamo il secondo piano principale H_2 (Fig. 3.8).

Le intersezioni di questi piani con l'asse ottico della lente definiscono i **punti principali**. I raggi tra i piani principali si propagano paralleli all'asse ottico, e quindi una volta definita la loro posizione è possibile utilizzarli al posto della lente spessa, per esempio per costruire l'immagine esattamente come nel caso di una lente sottile (Fig. 3.9).

Si faccia attenzione che indichiamo con f_1 ed f_2 le **distanze focali**, misurate dai vertici V_1 e V_2 della lente ai rispettivi fuochi F_1 e F_2 , mentre f è la **lunghezza focale** della lente, misurata dai piani principali. In una lente spessa in generale $f_1 \neq f_2 \neq f$.

In una lente sottile al contrario non c'è distinzione fra queste due quantità, i piani principali coincidono fra di loro i punti principali coincidono con il centro della lente e con i vertici delle calotte.

Determiniamo ora la lunghezza focale f di una lente spessa avente spessore d e indice di rifrazione n .

Chiamiamo d la distanza fra i vertici V_1 e V_2 della lente e consideriamo la lente spessa come il risultato di due diottri addossati. Ogni diotto avrà due distanze

3.2. LENTI SPESSE

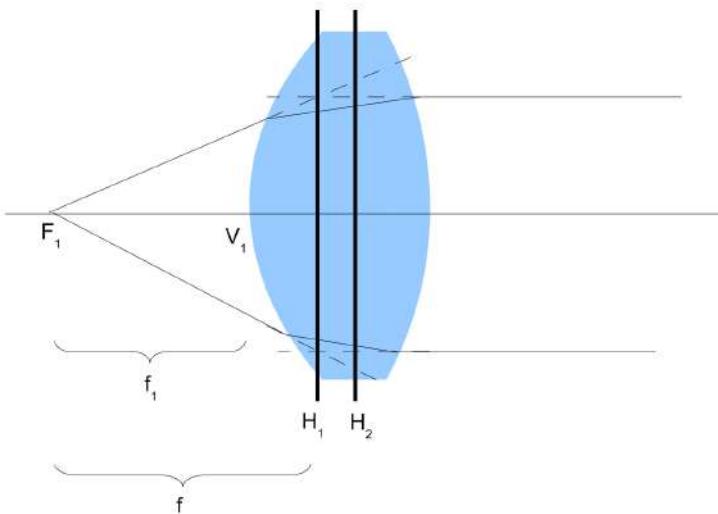


Figura 3.8: Costruzione geometrica dei piani principali H_1 e H_2 di una lente spessa. f_1 è la distanza focale del primo fuoco della lente, mentre f è la lunghezza focale della lente.

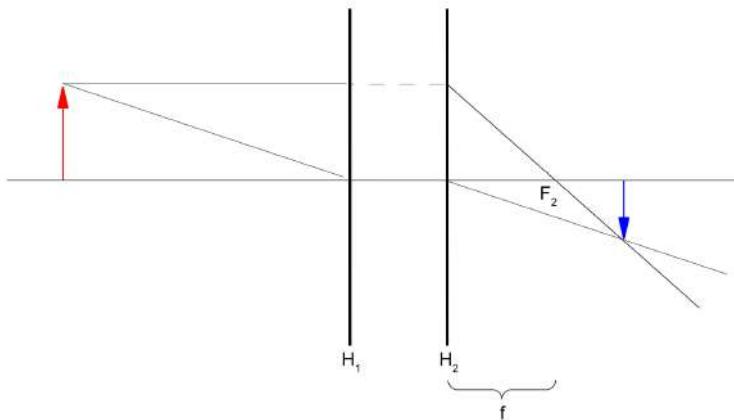


Figura 3.9: Costruzione dell'immagine di una sorgente estesa per mezzo dei piani principali.

focali : f_{11} e f_{12} siano le distanze focali del primo diottro, e f_{21} e f_{22} le distanze focali del secondo diottro (Fig. 3.10).

Immaginiamo che la luce provenga da sinistra e dall'infinito ($p \rightarrow \infty$). Scriviamo l'equazione del primo diottro:

$$\frac{n}{f_{12}} = \frac{n-1}{R_1}$$

dove R_1 è il raggio di curvatura del primo diottro, che vale:

CAPITOLO 3. LENTI

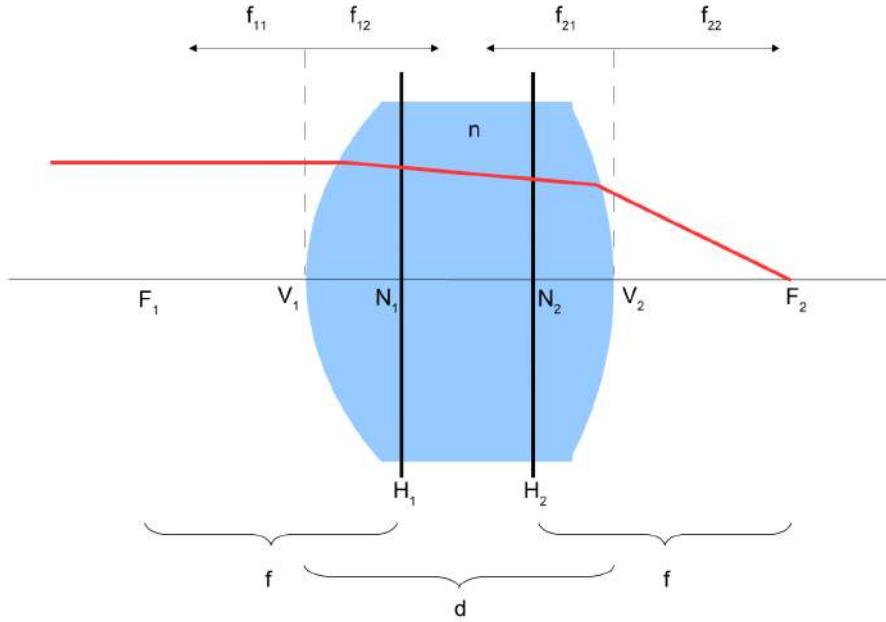


Figura 3.10: La lente spessa è considerata come due diottri addossati. f_{11} , f_{12} , f_{21} e f_{22} sono le distanze focali rispettivamente del primo e del secondo diottro.

$$R_1 = \frac{n-1}{n} f_{12}$$

Il fuoco f_{12} diventerà punto-oggetto per il secondo diottro:

$$\frac{n}{-(f_{12}-d)} + \frac{1}{V_2 F_2} = \frac{1-n}{-R_2} = \frac{n}{f_{21}}$$

dove R_2 è il raggio di curvatura del secondo diottro, che vale:

$$R_2 = \frac{n-1}{n} f_{21}$$

Da cui si ottiene:

$$\frac{1}{V_2 F_2} = \frac{n}{f_{12}-d} + \frac{n}{f_{21}} = n \frac{f_{21} + f_{12} - d}{f_{21}(f_{12}-d)}$$

$$\frac{1}{V_2 F_2} = \frac{f_{21}(f_{12}-d)}{n(f_{21} + f_{12} - d)}$$

Ora facciamo delle considerazioni basate sulle proprietà dei piani principali e dei punti nodali (Fig. 3.11). Dato un punto-oggetto fuori asse, consideriamo quello tra i raggi incidenti che emerge dalla lente parallelo a se stesso. I due punti di intersezione dei suoi prolungamenti con l'asse ottico sono detti **punti nodali**. Per una lente in aria (o immersa in un mezzo con un unico indice di

3.2. LENTI SPESSE

rifrazione) i punti nodali coincidono con i punti principali.

Siano adesso O_1 e O_2 i centri di curvatura dei diottri, C il centro ottico della lente, B_1 e B_2 i punti dove incide ed emerge il raggio di luce, N_1 e N_2 i punti nodali.

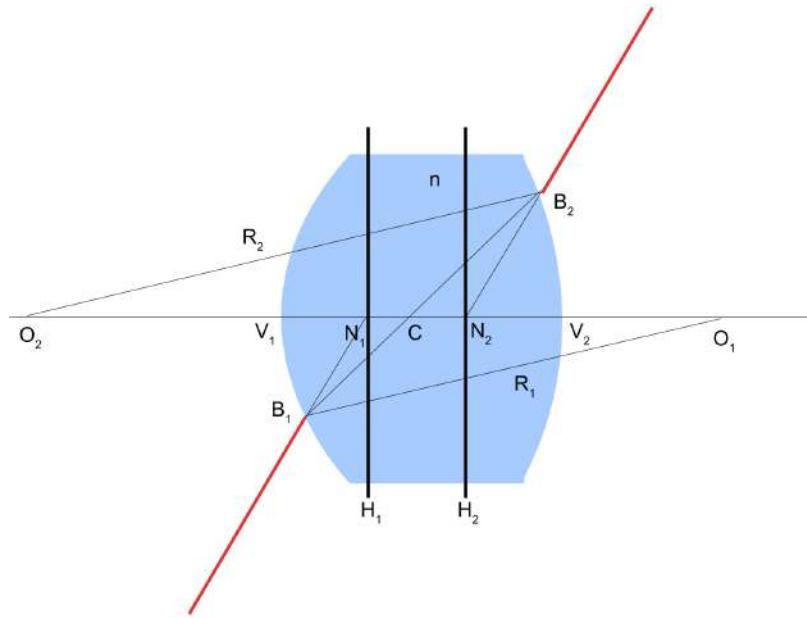


Figura 3.11: Un raggio fuori asse incide sulla lente in modo tale da uscire parallelo a se stesso.

Dalla similitudine dei triangoli B_1CO_1 e B_2CO_2 si ottiene:

$$\frac{O_1C}{O_2C} = \frac{O_1B_1}{O_2B_2} = \frac{R_1}{-R_2}$$

$$O_2O_1 = O_1C - O_2C = O_1C + \frac{R_2}{R_1}O_1C = \frac{R_1 + R_2}{R_1}O_1C$$

da cui:

$$O_1C = \frac{R_1}{R_1 + R_2}O_2O_1$$

Adesso,

$$O_2O_1 = (R_1 - d) + d + (R_2 - d) = R_1 + R_2 - d$$

e quindi

$$O_1C = \frac{R_1}{R_1 + R_2}(R_1 + R_2 - d) = R_1 - \frac{dR_1}{R_1 + R_2}$$

CAPITOLO 3. LENTI

Calcoliamo adesso le distanze dei vertici della lente dal centro ottico della lente stessa.

$$V_1C = O_1V_1 - O_1C = R_1 - R_1 + \frac{dR_1}{R_1 + R_2} = \frac{dR_1}{R_1 + R_2}$$

$$V_2C = d - V_1C = d - \frac{dR_1}{R_1 + R_2} = \frac{dR_2}{R_1 + R_2}$$

Sostituendo l'espressione dei raggi in funzione delle focali, si ottiene:

$$V_1C = \frac{\frac{d}{n}f_{12}}{\frac{n-1}{n}f_{12} + \frac{n-1}{n}f_{21}} = \frac{df_{12}}{f_{12} + f_{21}}$$

$$V_2C = \frac{df_{21}}{f_{12} + f_{21}}$$

A questo punto possiamo ricavare la distanza del secondo piano principale dal vertice del secondo diottro. I punti C e N₂ sono coniugati, in particolare se C è il punto-oggetto, N₂ è il punto-immagine.

$$\frac{n}{V_2C} - \frac{1}{V_2N_2} = \frac{1-n}{-R_2} = \frac{n}{f_{21}}$$

$$\frac{1}{V_2N_2} = \frac{n}{V_2C} - \frac{n}{f_{21}} = n \left(\frac{f_{12} + f_{21}}{df_{21}} \right) - \frac{n}{f_{21}} = \frac{n}{df_{21}}(f_{12} + f_{21} - d)$$

$$V_2N_2 = \frac{df_{21}}{n(f_{12} + f_{21} - d)}$$

Infine possiamo calcolare la lunghezza focale della lente:

$$f = V_2F_2 + V_2N_2 = \frac{f_{21}(f_{12} - d)}{n(f_{21} + f_{12} - d)} + \frac{df_{21}}{n(f_{12} + f_{21} - d)}$$

da cui si ottiene:

$$f = \frac{f_{12}f_{21}}{n(f_{21} + f_{12} - d)} \quad (3.8)$$

oppure:

$$\frac{1}{f} = \frac{n}{f_{12}} + \frac{n}{f_{21}} - \frac{nd}{f_{12}f_{21}} \quad (3.9)$$

Possiamo riscrivere a questo punto le distanze dei piani principali dai vertici della lente, usando la lunghezza focale:

$$V_2 N_2 = \frac{df_{21}}{n(f_{12} + f_{21} - d)} = \frac{d}{f_{12}} f \quad (3.10)$$

e analogamente per l'altro vertice:

$$V_1 N_1 = \frac{d}{f_{21}} f \quad (3.11)$$

Sulla base delle relazioni fra le focali dei due diottri e i rispettivi raggi di curvatura, è possibile ottenere espressioni equivalenti per la lunghezza focale della lente spessa:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_{11}} + \frac{1}{f_{22}} - \frac{d}{n(f_{11}f_{22})} = \frac{n}{f_{12}} + \frac{1}{f_{22}} - \frac{d}{f_{12}f_{22}} = \frac{1}{f_{11}} + \frac{n}{f_{21}} - \frac{d}{f_{11}f_{21}} \quad (3.12)$$

3.3 Esempi

Secondo le convenzioni fin qui adottate, i fuochi sono positivi per diottri convessi ($R > 0$), mentre sono negativi per i diottri concavi ($R < 0$).

3.3.1 Lente biconvessa simmetrica

$R_1 = 12$ cm, $R_2 = 12$ cm, $d = 1.2$ cm, $n = 1.5$

$$f_{12} = \frac{1.5}{1.5 - 1} 12 = 36 \text{ cm} \quad f_{21} = \frac{1.5}{1.5 - 1} 12 = 36 \text{ cm}$$

$$f = \frac{36 \cdot 36}{1.5(36 + 36 - 1.2)} = 12.2 \text{ cm}$$

$$V_1 N_1 = \frac{1.2 \cdot 12.2}{36} = 0.4 \text{ cm} \quad V_2 N_2 = \frac{1.2 \cdot 12.2}{36} = 0.4 \text{ cm}$$

I due piani principali sono interni alla lente e simmetrici rispetto al centro della lente (Fig. 3.12).

3.3.2 Lente biconvessa asimmetrica

$R_1 = 6$ cm, $R_2 = 12$ cm, $d = 2$ cm, $n = 1.5$

$$f_{12} = \frac{1.5}{1.5 - 1} 6 = 18 \text{ cm} \quad f_{21} = \frac{1.5}{1.5 - 1} 12 = 36 \text{ cm}$$

$$f = \frac{18 \cdot 36}{1.5(18 + 36 - 2)} \simeq 8.3 \text{ cm}$$

CAPITOLO 3. LENTI

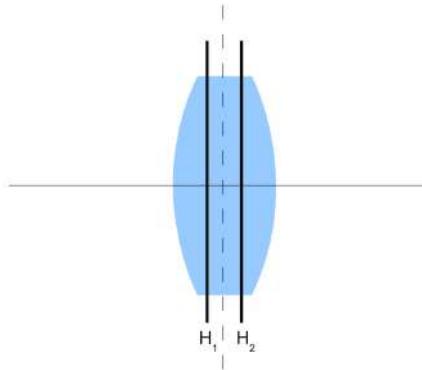


Figura 3.12: Piani principali nella lente biconvessa simmetrica.

$$V_1 N_1 = \frac{2 \cdot 8.3}{36} = 0.46 \text{ cm} \quad V_2 N_2 = \frac{2 \cdot 8.3}{18} = 0.92 \text{ cm}$$

I due piani principali sono interni alla lente, ma spostati verso il diottro con minore raggio di curvatura (Fig. 3.13).

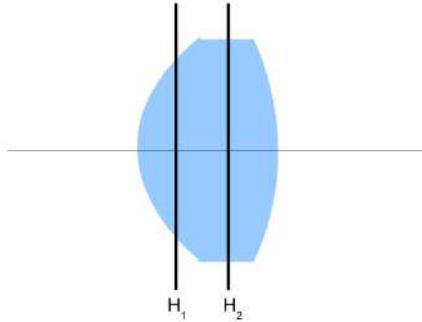


Figura 3.13: Piani principali nella lente biconvessa asimmetrica.

3.3.3 Lente divergente simmetrica

$R_1 = -8 \text{ cm}$, $R_2 = -8 \text{ cm}$, $d = 2 \text{ cm}$, $n = 1.5$

$$f_{12} = \frac{1.5}{1.5 - 1}(-8) = -24 \text{ cm} \quad f_{21} = \frac{1.5}{1.5 - 1}(-8) = -24 \text{ cm}$$

$$f = \frac{(-24) \cdot (-24)}{1.5(-24 - 24 - 2)} = -7.7 \text{ cm}$$

$$V_1 N_1 = \frac{2 \cdot (-7.7)}{(-24)} = 0.64 \text{ cm} \quad V_2 N_2 = \frac{2 \cdot (-7.7)}{(-24)} = 0.64 \text{ cm}$$

I due piani principali sono interni alla lente e simmetrici rispetto al centro della lente (Fig. 3.14).

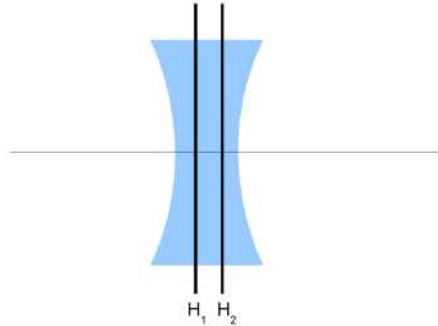


Figura 3.14: Piani principali nella lente divergente asimmetrica.

3.3.4 Lente piano-convessa

$$R_1 = 6 \text{ cm}, R_2 = \infty, d = 1 \text{ cm}, n = 1.5$$

$$f_{12} = \frac{1.5}{1.5 - 1} 6 = 18 \text{ cm} \quad f_{21} = \infty$$

Dall'equazione 3.9 otteniamo:

$$\frac{1}{f} = \frac{n}{f_{12}}$$

e quindi, la focale di questa lente vale:

$$f = \frac{18}{1.5} = 12 \text{ cm}$$

$$V_1 N_1 = 0 \text{ cm} \quad V_2 N_2 = \frac{1 \cdot 12}{18} = 0.67 \text{ cm}$$

Il primo piano principale è tangente al vertice del primo diottro, il secondo piano è interno alla lente (Fig. 3.15).

3.3.5 Lente menisco-convergente

$$R_1 = 20 \text{ cm}, R_2 = -50 \text{ cm}, d = 2 \text{ cm}, n = 1.5$$

$$f_{12} = \frac{1.5}{1.5 - 1} 20 = 60 \text{ cm} \quad f_{21} = \frac{1.5}{1.5 - 1} (-50) = -150 \text{ cm}$$

$$f = \frac{60 \cdot (-150)}{1.5(60 - 150 - 2)} = 65.2 \text{ cm}$$

$$V_1 N_1 = \frac{2 \cdot 65.2}{-150} = -0.87 \text{ cm} \quad V_2 N_2 = \frac{2 \cdot 65}{60} = 2.17 \text{ cm}$$

I due piani principali sono entrambi esterni alla lente (Fig. 3.16)

CAPITOLO 3. LENTI

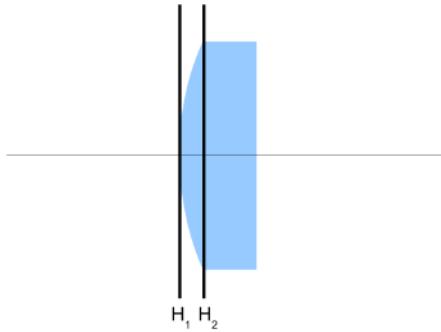


Figura 3.15: Piani principali nella lente piano-convessa.

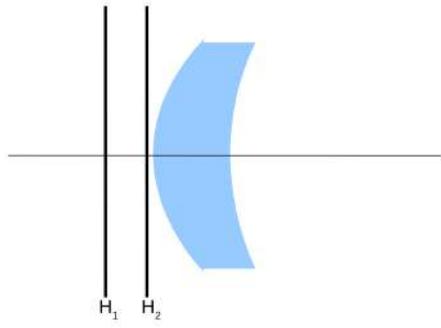


Figura 3.16: Piani principali nella lente menisco-convergente.

3.3.6 Lente convesso-concava

$$R_1 = 10 \text{ cm}, R_2 = -10 \text{ cm}, d = 2 \text{ cm}, n = 1.5$$

$$f_{12} = \frac{1.5}{1.5 - 1} 10 = 30 \text{ cm} \quad f_{21} = \frac{1.5}{1.5 - 1} (-10) = -30 \text{ cm}$$

$$f = \frac{30 \cdot (-30)}{1.5(30 - 30 - 2)} = 300 \text{ cm}$$

$$V_1 N_1 = \frac{2 \cdot 300}{-30} = -20 \text{ cm} \quad V_2 N_2 = \frac{2 \cdot 300}{30} = 20 \text{ cm}$$

I due piani principali sono lontani dalla lente, dal lato del primo dietro e sono separati da una distanza pari allo spessore della lente sull'asse ottico (Fig. 3.17).

3.3.7 Lente concentrica

$$R_1 = 12 \text{ cm}, R_2 = -10 \text{ cm}, d = 2 \text{ cm}, n = 1.5$$

$$f_{12} = \frac{1.5}{1.5 - 1} 12 = 36 \text{ cm} \quad f_{21} = \frac{1.5}{1.5 - 1} (-10) = -30 \text{ cm}$$

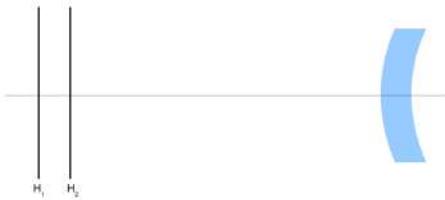


Figura 3.17: Piani principali nella lente convesso-concava.

$$f = \frac{36 \cdot (-30)}{1.5(36 - 30 - 2)} = -180 \text{ cm}$$

$$V_1 N_1 = \frac{2 \cdot (-180)}{-30} = 12 \text{ cm} \quad V_2 N_2 = \frac{2 \cdot (-180)}{36} = -10 \text{ cm}$$

I due piani principali sono coincidenti e si trovano in corrispondenza ai centri di curvatura (anch'essi coincidenti) della lente (Fig. 3.18).

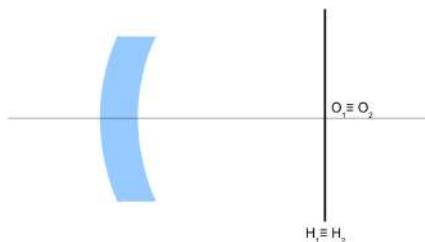


Figura 3.18: Piani principali nella lente concentrica.

3.3.8 Considerazioni

Possiamo raggruppare le proprietà di lenti e piani principali dicendo che:

- le lenti biconvesse e biconcave hanno i piani principali all'interno, equidistanti dai vertici se simmetriche;
- le lenti piano-convesse e piano-concave hanno un piano tangente alla faccia curva della lente;
- il menisco ha in genere i due piani esterni alla lente.

CAPITOLO 3. LENTI

Poniamoci adesso la seguente domanda: è possibile avere una lente che in apparenza sia convergente (o divergente), ma che in realtà ha potere diottrico nullo?

Vediamo il seguente caso:

$$R_1 = 25 \text{ mm}, R_2 = -24 \text{ mm}, d = 5 \text{ mm}, n = 1.6$$

$$f_{12} = \frac{1.6}{1.6 - 1} 25 = 66.67 \text{ mm} \quad f_{21} = \frac{1.6}{1.6 - 1} (-24) = -64 \text{ mm}$$

$$f = \frac{66.67 \cdot (-64)}{1.6(66.67 - 64 - 5)} = 1144.55 \text{ mm}$$

Quindi questa lente è convergente.

Se la lente fosse sottile avremmo che $d = 0$, per cui la focale sarebbe:

$$f = \frac{66.67 \cdot (-64)}{1.6(66.67 - 64)} = -998.80 \text{ mm}$$

cioè sarebbe una lente divergente.

Quando il potere diottrico vale 0 ?

$$\frac{1}{f} = 0 \Rightarrow \frac{n}{f_{12}} + \frac{n}{f_{21}} = \frac{nd}{f_{12}f_{21}}$$

da cui si ottiene:

$$d = f_{12} + f_{21} \quad (3.13)$$

Nel caso specifico, la lente dovrebbe avere spessore $d = 2.67$ affinché il suo potere diottrico fosse nullo.

3.4 Lenti sottili separate

Nel caso in cui, anziché due diottri consideriamo due lenti sottili separate da una distanza d (Fig. 3.19), il ragionamento è analogo a quello della lente spessa, con però un'importante semplificazione:

$$f_{11} = f_{12} = f_1$$

$$f_{21} = f_{22} = f_2$$

$$n = 1$$

da cui si ottiene l'equazione della **focale equivalente** per un sistema ottico formato da due lenti:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad (3.14)$$

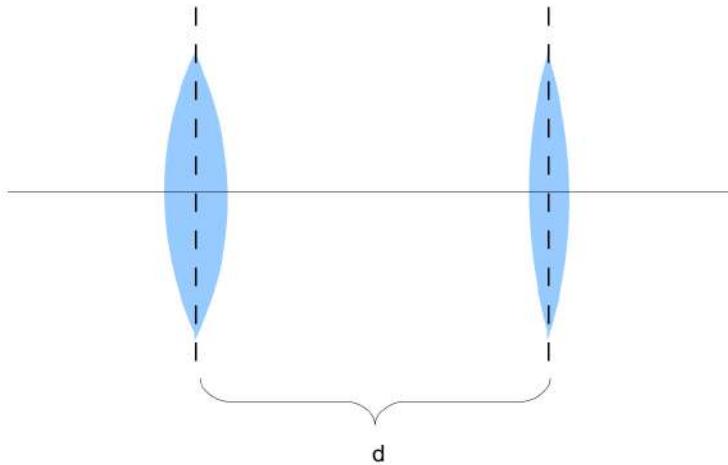


Figura 3.19: Lenti sottili convergenti a distanza d .

Si ha il massimo potere diottrico quando $d = 0$, cioè quando le lenti sono addossate. Mentre, si ha potere diottrico nullo quando:

$$\frac{1}{f} = 0 \Rightarrow \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{d}{f_1 f_2} \Rightarrow f_1 + f_2 = d$$

Supponiamo di avere un sistema di due lenti sottili convergenti di lunghezza focale $f_1 = 10$ cm e $f_2 = 20$ cm, e poniamole a distanze pari a $d = 0, 5, 10$ cm. Vediamo come cambia la lunghezza focale del sistema.

$$d = 0 \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} = 0.15 \Rightarrow f = 6.67 \text{ cm}$$

$$d = 5 \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} - \frac{5}{10 \cdot 20} = 0.125 \Rightarrow f = 8 \text{ cm}$$

$$d = 10 \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} - \frac{10}{10 \cdot 20} = 0.1 \Rightarrow f = 10 \text{ cm}$$

In quest'ultimo caso come si può vedere, la presenza della seconda lente non ha alcun effetto.

3.5 I doppietti

Se prendiamo due lenti piano-convesse, con la stessa focale, $f_1 = f_2 = f$, separate di una distanza d e con il lato curvo rivolto l'uno verso l'altro, otteniamo il **doppietto di Ramsden** (Fig. 3.20).

È chiaro che se $d = f$, la seconda lente non ha alcun effetto, quindi in genere si usa una distanza inferiore del tipo $d = 0.8f$. In questo modo si ha:

CAPITOLO 3. LENTI

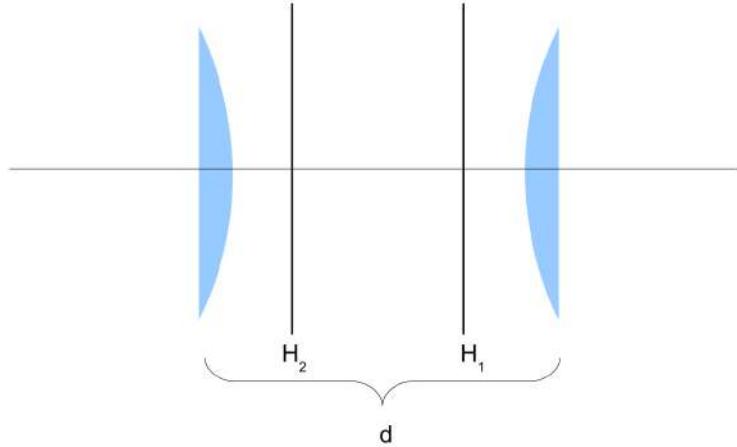


Figura 3.20: Schema ottico del doppietto di Ramsden.

$$\frac{1}{f_R} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f} - \frac{0.8f}{f^2} = \frac{2}{f} - \frac{0.8}{f} = \frac{1.2}{f}$$

da cui, la lunghezza focale del doppietto di Ramsden si può esprimere come $f_R = 0.833f$.

Calcoliamo le posizioni dei piani principali:

$$V_1 N_1 = \frac{fd}{f_{21}} = \frac{0.833f \cdot 0.8f}{f} = 0.667f$$

$$V_2 N_2 = \frac{fd}{f_{12}} = \frac{0.833f \cdot 0.8f}{f} = 0.667f$$

Come si vede i piani principali sono invertiti.

Nel **doppietto di Huygens** (Fig. 3.21) invece si ha tipicamente $f_1 = 2f_2$ e la condizione è tale che $\frac{1}{f} = \frac{3}{2f_1}$. Vediamo quanto vale la separazione fra le due lenti:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{2}{f_1} - 2 \frac{d}{f_1^2} = \frac{3}{2f_1}$$

da cui:

$$d = \frac{3}{4}f_1$$

che corrisponde alla semisomma delle lunghezze focali delle due lenti.

Calcoliamo le distanze dei piani principali dai vertici del doppietto:

$$V_1 N_1 = \frac{\frac{2}{3}f_1 \cdot \frac{3}{4}f_1}{\frac{1}{2}f_1} = f_1$$

3.5. I DOPPIETTI

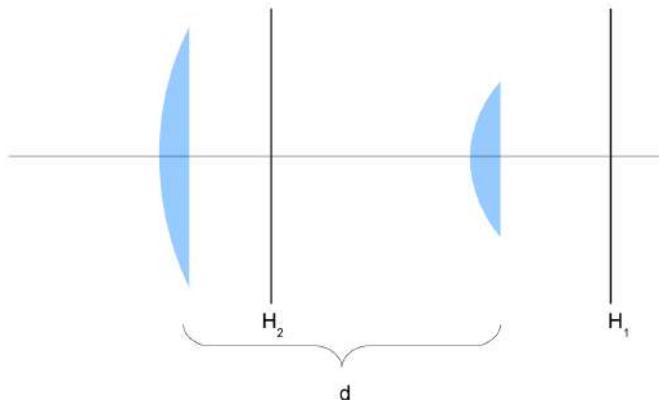


Figura 3.21: Schema ottico del doppietto di Huygens.

$$V_2 N_2 = \frac{\frac{2}{3} f_1 \cdot \frac{3}{4} f_1}{f_1} = \frac{f_1}{2}$$

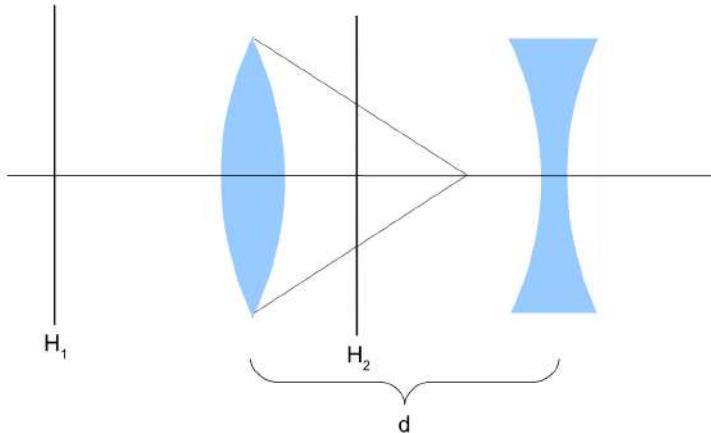


Figura 3.22: Lente positiva più lente negativa di uguale potenza.

Interessante è la combinazione di una lente positiva con una negativa, ma di uguale potenza (Fig. 3.22). Assumiamo che le lunghezze focali siano identiche, cambieranno solo i segni: $f_1 = -f_2 = f$

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} - \frac{1}{f} + \frac{d}{f^2}$$

$$F = \frac{f^2}{d}$$

$$V_1 N_1 = \frac{\frac{f^2}{d} d}{-\frac{f}{d}} = -f$$

$$V_2 N_2 = \frac{\frac{f^2}{d} d}{\frac{f}{d}} = f$$

3.6 Stop e pupille

Introduciamo adesso i concetti di **stop** e **pupilla** che saranno importanti quando tratteremo le aberrazioni.

A dispetto del suo nome, uno stop è un'apertura, tipicamente un diaframma, ma anche una lente o uno specchio, che è in grado di limitare le dimensioni di un fascio di raggi luminosi che entrano in un sistema ottico, oppure di limitare l'angolo di entrata del fascio incidente. Nel primo caso si parla di **stop di apertura**, che limita la quantità di luce, mentre nel secondo caso di **stop di campo**, che limita la dimensione del campo inquadrato.

Si definisce **pupilla di entrata** l'immagine dello stop di apertura formata dal sistema ottico che lo precede, e **pupilla di uscita** l'immagine dello stop di apertura formata dal sistema ottico che lo segue. Allo stesso modo, si definiscono **finestra di entrata** e **finestra di uscita** le immagini dello stop di campo formate dal sistema ottico rispettivamente quando questo lo procede e lo segue.

Consideriamo il caso di una lente convergente sottile e un diaframma $A'B'$ posto fra la lente e il fuoco secondario F (Fig. 3.23). Come si può notare dalla figura, il diaframma limita l'angolo di entrata del fascio di luce incidente, ma non determina l'apertura del fascio, A_1B_1 , la quale corrisponde all'immagine virtuale del diaframma A_2B_2 , ed è chiamata **pupilla di entrata**, perché rappresenta la vera apertura del fascio di luce utilizzato. Al contrario, il diaframma viene chiamato **pupilla di uscita**, perché rappresenta il limite del fascio uscente. Il raggio che passa per il centro della pupilla di entrata E_1 e della pupilla di uscita E_2 si chiama **raggio principale**.

Se invece mettiamo il diaframma prima della lente, fra essa e il suo fuoco primario F_1 (Fig. 3.24), si ottiene che il diaframma funge da pupilla d'entrata, che limita l'apertura del fascio di raggi e anche l'angolo di entrata del fascio, mentre l'immagine virtuale del diaframma funge da pupilla di uscita. È chiaro che se avviciniamo il diaframma fino a portarlo a contatto con la lente, pupilla di entrata e di uscita coincideranno.

Se invece abbiamo a che fare con un sistema di lenti e poniamo il diaframma all'interno (Fig. 3.25), chiameremo pupilla d'entrata l'immagine del diaframma formata dalla lente o dalle lenti che lo precedono, mentre chiameremo pupilla d'uscita l'immagine formata dalla lente o dalle lenti che lo seguono. I piani che contengono diaframmi e pupille sono piani coniugati. In condizioni di assenza di aberrazioni, ogni punto del piano delimitato dal diaframma ha per immagine un punto delle due pupille.

3.6. STOP E PUPILLE

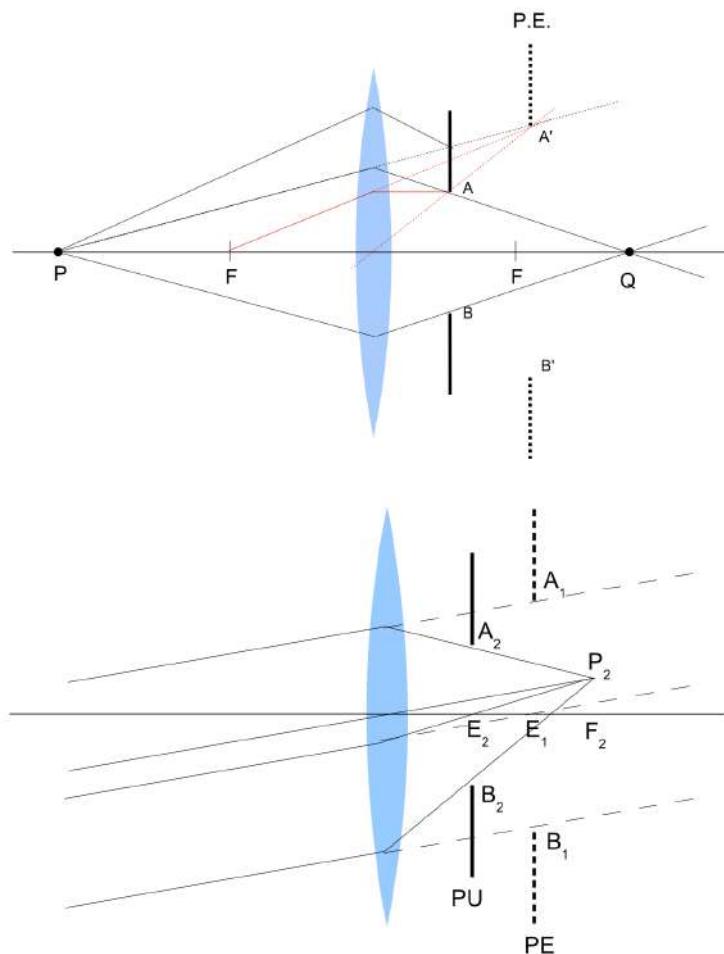


Figura 3.23: Esempio di stop di apertura (AB) e pupilla di entrata ($A'B'$).

CAPITOLO 3. LENTI

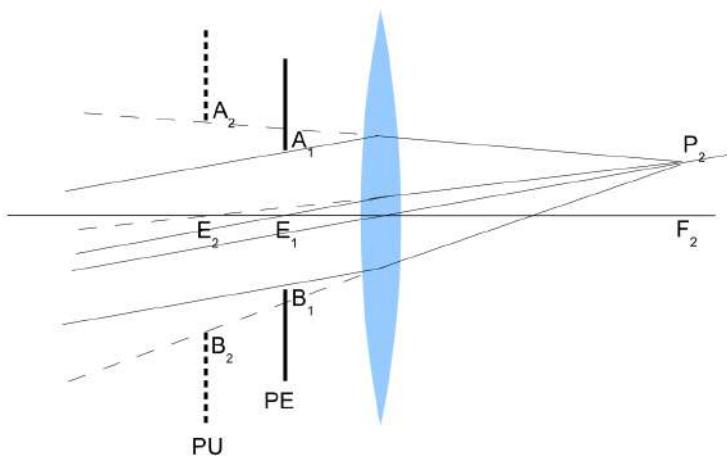


Figura 3.24:

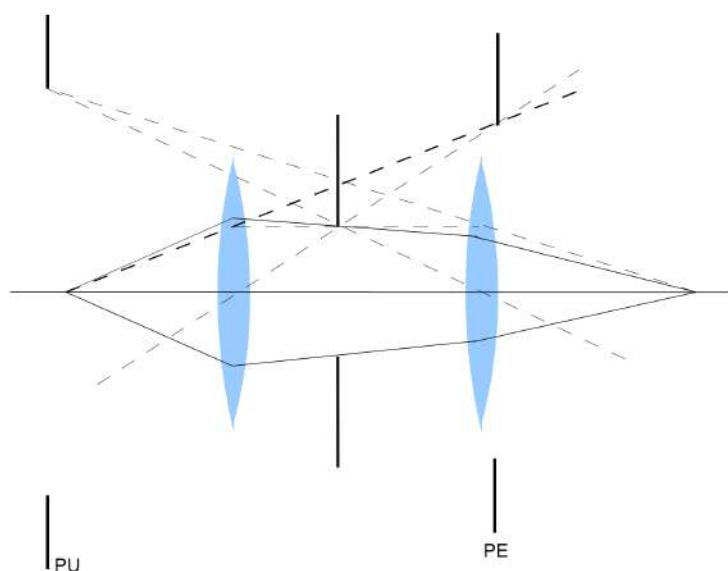


Figura 3.25:

4

Specchio sferico

Se al posto di un diottro sferico consideriamo una superficie sferica riflettente e concava, otteniamo lo **specchio sferico**. Anche in questo caso abbiamo una lunghezza focale, che si ottiene considerando un fascio di raggi parassiali, cioè raggi vicini all'asse ottico del sistema. E questo equivale all'approssimazione di angoli piccoli (Fig. 4.1).

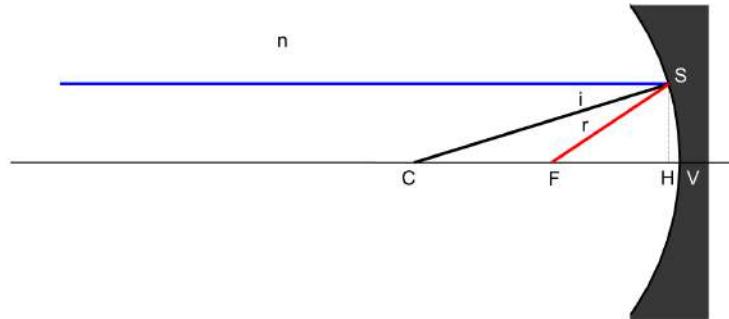


Figura 4.1: Raggi parassiali dall'infinito si concentrano in un punto F , detto fuoco dello specchio. C è il centro di curvatura dello specchio e V il vertice dello specchio, cioè il punto in cui l'asse ottico interseca lo specchio.

Consideriamo una sorgente all'infinito ($p \rightarrow \infty$). Un raggio parassiale incide sulla superficie sferica riflettente nel punto S . L'angolo di incidenza i sarà compreso fra il raggio incidente e il raggio di curvatura CS (R). Per la legge della riflessione, angolo di incidenza e di riflessione coincidono, $i = r$, il raggio torna indietro e interseca l'asse ottico nel punto F . La distanza di F dal vertice V definisce la lunghezza focale dello specchio sferico f .

Come si vede dalla figura, il triangolo CFS è isoscele, e quindi $\overline{CF} = \overline{FS}$. Per angoli piccoli, il segmento \overline{FS} tende ad approssimare FV , quindi si ha:

$$\overline{CF} \cong \overline{FV} = \frac{R}{2}$$

$$f = \frac{R}{2}$$

CAPITOLO 4. SPECCHIO SFERICO

Consideriamo adesso una sorgente luminosa puntiforme posta a distanza finita p sull'asse ottico di uno specchio sferico (Fig. 4.2).

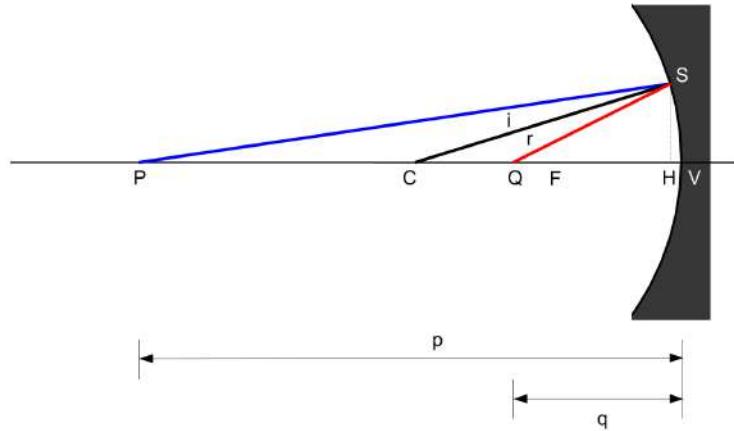


Figura 4.2: Immagine di una sorgente puntiforme prodotta da uno specchio sferico.

Un raggio da P incide sullo specchio nel punto S e viene riflesso incontrando l'asse nel punto Q , che si trova a distanza q dal vertice dello specchio. Come nel caso del diottro, P e Q sono punti coniugati. Gli angoli \hat{PSC} e \hat{CSQ} sono uguali, ossia il segmento \overline{CS} è bisettrice dell'angolo in \hat{S} nel triangolo PSQ . Poiché la bisettrice di un angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati, possiamo scrivere:

$$\frac{PS}{QS} = \frac{PC}{CQ}$$

e nell'approssimazione di Gauss, ossia di angoli piccoli:

$$PS \approx PV = p$$

$$QS \approx QV = q$$

Quindi:

$$\frac{p}{q} = \frac{p - R}{R - q}$$

$$p(R - q) = q(p - R)$$

$$pR + qR = 2pq$$

E dividendo ambo i membri per pqR :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f}$$

(4.1)

che è la stessa relazione che si ha nelle lenti sottili.

Esprimiamo ora la distanza dell'immagine dal vertice dello specchio in funzione della distanza dell'oggetto e della lunghezza focale:

$$q = \frac{pf}{p-f} \Rightarrow q = \frac{f}{1 - \frac{f}{p}}$$

L'ingrandimento m anche in questo caso è dato da:

$$\frac{y'}{y} = \frac{R-q}{p-R}$$

Ma dalla relazione precedente sappiamo che:

$$\frac{p-R}{R-q} = \frac{p}{q}$$

per cui

$$m = \frac{q}{p} = \frac{\frac{f}{p}}{1 - \frac{f}{p}} = \frac{1}{\frac{p}{f} - 1}$$

Se poniamo l'oggetto a distanza $p > R$, otteniamo un'immagine reale, rovesciata, rimpiccioluta ($m < 1$) e a distanza $q > f$ (Fig.4.3).

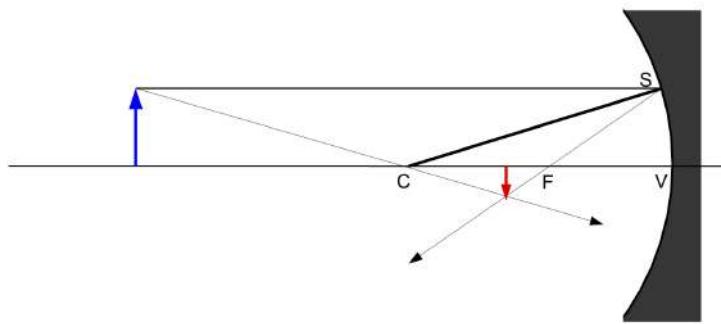


Figura 4.3: Costruzione dell'immagine di una sorgente estesa.

Se invece l'oggetto si trova a distanza $p = R$, cioè in corrispondenza del centro di curvatura, si ha ancora un'immagine capovolta, ma con ingrandimento pari a 1 e posizionata anch'essa nel centro di curvatura dello specchio (Fig. 4.4).

CAPITOLO 4. SPECCHIO SFERICO

Poniamo ora l'oggetto tra fuoco e centro di curvatura ($f < p < R$). L'immagine si forma a una distanza $q > R$, è capovolta e ingrandita (Fig. 4.5).

Infine, se mettiamo l'oggetto fra fuoco e specchio, $p < f$, si ottiene un'immagine virtuale, dritta e ingrandita (Fig. 4.6).

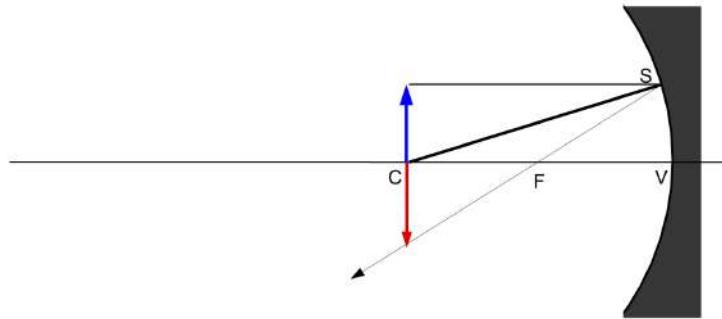


Figura 4.4: L'oggetto esteso si trova esattamente nel centro di curvatura dello specchio.

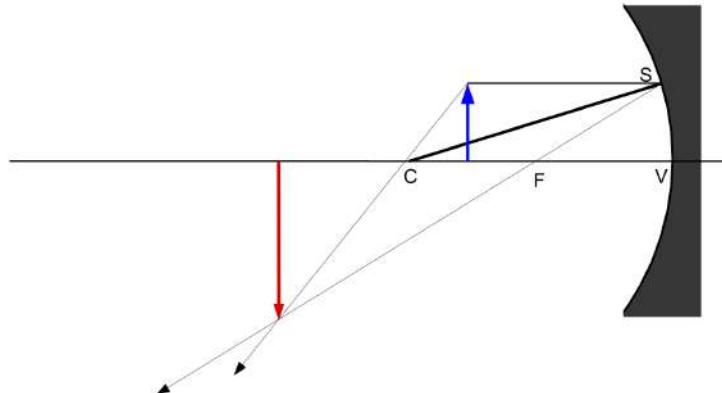


Figura 4.5: L'oggetto si trova fra il centro di curvatura e il fuoco dello specchio.

Interessante è il caso dello **specchio convesso**. Sia il raggio di curvatura che il fuoco si trovano dall'altra parte rispetto alla superficie riflettente. Perciò per determinare la traiettoria di un raggio riflesso da uno specchio convesso, bisogna tenere presente che la normale alla superficie dello specchio è la semiretta che parte dal punto di riflessione e che appartiene alla retta che congiunge il punto stesso con il centro di curvatura. Se consideriamo un raggio parallelo all'asse principale, il corrispondente raggio riflesso sarà divergente, ma in modo che i suoi prolungamenti dalla parte opposta dello specchio si intersechi con il prolungamento della normale alla superficie riflettente, producendo un'immagine virtuale (Fig. 4.7). Si verifica facilmente che qualunque sia il punto dove l'oggetto viene situato, la sua immagine sarà sempre virtuale, dritta e rimpicciolita.

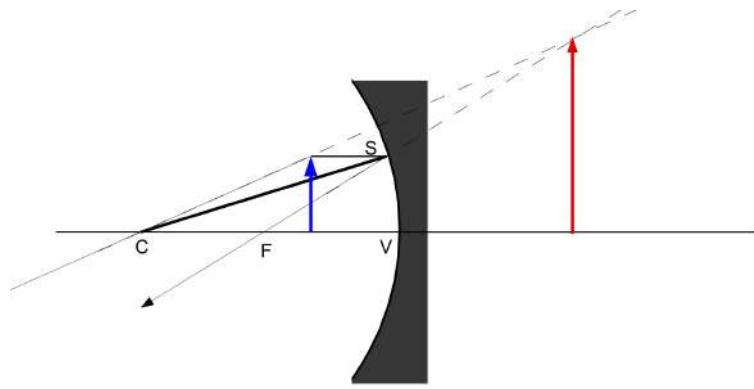


Figura 4.6: L'oggetto si trova fra il fuoco e il vertice dello specchio.

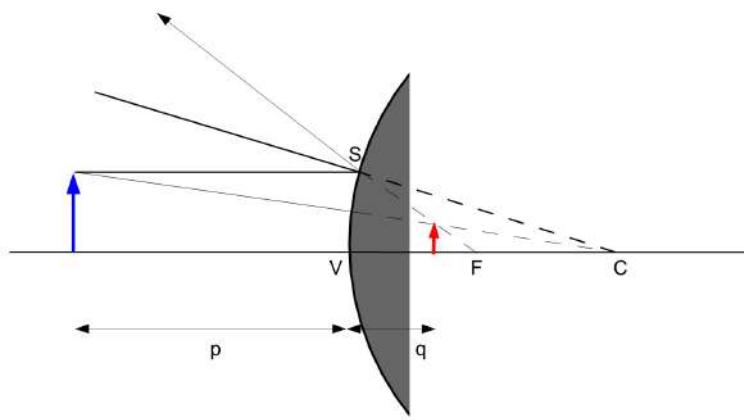


Figura 4.7: Caso dello specchio convesso.

5

Le aberrazioni

5.1 Aberrazione sferica

In approssimazione di Gauss, i raggi parassiali prodotti da una sorgente puntiforme posta sull'asse di un sistema ottico vanno a incontrarsi in un punto-immagine posto anch'esso sull'asse (Fig. 5.1).

In generale questo non avviene, cioè i raggi si incontrano in punti diversi dell'asse a seconda della loro distanza dall'asse stesso.

Riprendiamo la trattazione del diottro.

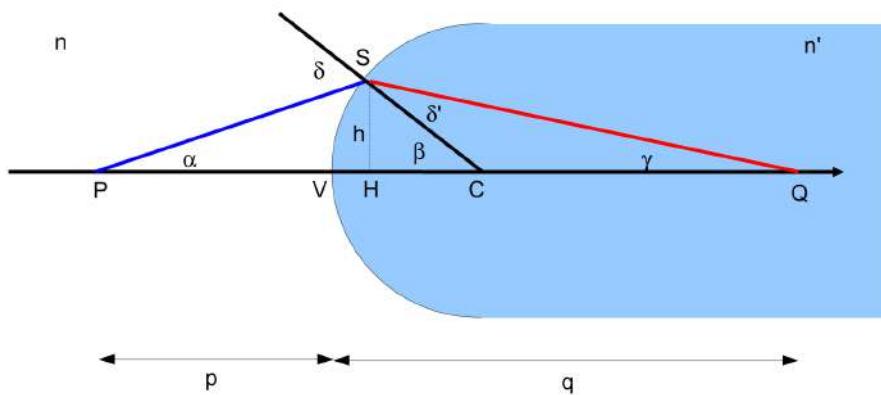


Figura 5.1: Formazione dell'immagine nel diottro in condizioni di raggi non parassiali.

CAPITOLO 5. LE ABERRAZIONI

Consideriamo i triangoli PSC e QSC . Applichiamo il teorema dei seni e la legge di Snell:

$$\frac{\sin \alpha}{R} = \frac{\sin (\pi - \delta)}{p + R} = \frac{\sin \delta}{p + R}$$

$$\frac{\sin \delta'}{q - R} = \frac{\sin \gamma}{R}$$

$$\frac{\sin \delta}{\sin \delta'} = \frac{n'}{n}$$

Dividendo le prime due equazioni si ottiene:

$$\frac{\sin \delta'}{q - R} \cdot \frac{p + R}{\sin \delta} = \frac{\sin \gamma}{R} \cdot \frac{R}{\sin \alpha}$$

$$\frac{p + R}{q - R} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \frac{n'}{n} = \frac{n'}{n} \frac{\overline{PS}}{\overline{QS}}$$

Utilizziamo ora il teorema dei coseni:

$$\overline{PS}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{SC}^2 - 2\overline{PC} \cdot \overline{SC} \cdot \cos \beta$$

$$\overline{PS}^2 = (p + R)^2 + R^2 - 2R \cdot (p + R) \cdot \cos \beta$$

$$\overline{QS}^2 = \overline{SC}^2 + \overline{CQ}^2 - 2\overline{SC} \cdot \overline{CQ} \cdot \cos (\pi - \beta)$$

$$\overline{QS}^2 = R^2 + (q - R)^2 + 2R \cdot (q - R) \cdot \cos \beta$$

Se adesso β non è molto grande, possiamo esprimere $\cos \beta$ in serie:

$$\cos \beta = 1 - \frac{\beta^2}{2}$$

e approssimare β alla sua tangente:

$$\tan \beta \cong \beta = \frac{h}{R}$$

da cui:

$$\overline{PS} = \sqrt{(p + R)^2 + R^2 - 2R \cdot (p + R) \cdot \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right)} = \sqrt{p^2 + (p + R) \frac{h^2}{R}}$$

5.1. ABERRAZIONE SFERICA

$$\overline{QS} = \sqrt{R^2 + (q - R)^2 + 2R \cdot (q - R) \cdot \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right)} = \sqrt{q^2 + (R - q) \frac{h^2}{R}}$$

A questo punto abbiamo che:

$$\frac{p+R}{q-R} = \frac{n'}{n} \frac{\sqrt{p^2 + (p+R)\frac{h^2}{R}}}{\sqrt{q^2 + (R-q)\frac{h^2}{R}}} = \frac{n' p}{n q} \frac{\sqrt{1 + (p+R)\frac{h^2}{p^2 R}}}{\sqrt{1 + (R-q)\frac{h^2}{q^2 R}}}$$

Espandiamo in serie i due termini sotto radice quadrata, ricordando che: $\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{1}{2}x$:

$$\frac{p+R}{q-R} = \frac{n' p}{n q} \left[\frac{1 + \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{R}\right) \frac{h^2}{2p}}{1 + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{R}\right) \frac{h^2}{2q}} \right]$$

da cui segue:

$$n \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{R} \right) \left[1 + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{R} \right) \frac{h^2}{2q} \right] = n' \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{q} \right) \left[1 + \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{R} \right) \frac{h^2}{2p} \right]$$

$$\frac{n}{p} + \frac{n'}{q} = \frac{n' - n}{R} + \left[n \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{R} \right) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{q} \right) \frac{h^2}{2q} + n' \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{q} \right) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{R} \right) \frac{h^2}{2p} \right]$$

Adesso, applicando l'equazione dei punti coniugati del diottro sferico si ottiene:

$$\frac{n}{p} + \frac{n'}{q} = \frac{n' - n}{R} + \left[\frac{h^2 n^2}{2n'} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{R} \right)^2 \left(\frac{1}{q} + \frac{n'}{np} \right) \right]$$

$$\frac{n}{p} + \frac{n'}{q} = \frac{n' - n}{R} + \frac{h^2 n^2}{2n'} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{R} \right)^2 \left[\frac{1}{R} - \frac{n}{n'} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{R} \right) + \frac{n'}{np} \right]$$

$$\frac{n}{p} + \frac{n'}{q} = \frac{n' - n}{R} + \frac{h^2 n^2}{2n'} \frac{n' - n}{n'} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{R} \right)^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{n' + n}{np} \right)$$

e infine dalla definizione di fuoco secondario del diottro sferico $f = \frac{n'R}{n'-n}$, si ottiene la seguente relazione:

CAPITOLO 5. LE ABERRAZIONI

$$\frac{n}{p} + \frac{n'}{q} = \frac{n' - n}{R} + \left[\left(\frac{h^2 n^2 R}{2 f_p n'} \right) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{R} \right)^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{n' + n}{np} \right) \right] \quad (5.1)$$

Tenendo conto che gli indici di rifrazione, il raggio di curvatura e la focale sono costanti, una volta posizionata la sorgente a distanza p dal vertice, l'immagine si formerà a distanza $q(h)$.

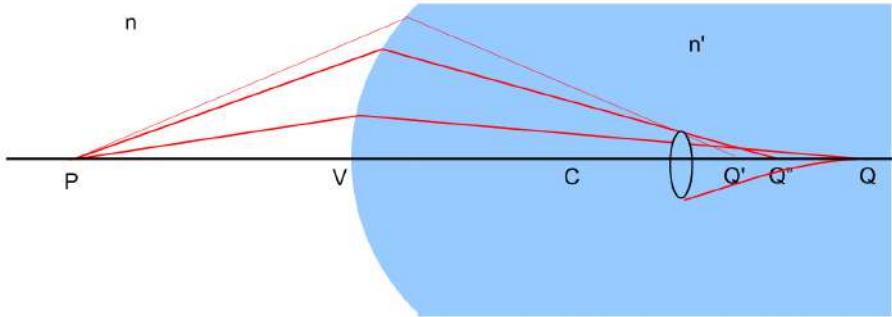


Figura 5.2: Formazione della caustica causata da aberrazione sferica.

Consideriamo un fascio di raggi uscente da una sorgente puntiforme e vediamo che tipo di immagine si forma. Già sappiamo che per effetto della **diffrizione**, l'immagine di una sorgente puntiforme non è mai un punto geometrico, bensì una figura di estensione finita, chiamata generalmente **centrica**, e formata da una zona centrale luminosa attorniata da anelli chiari e scuri con intensità decrescente allontanandosi dal centro (**disco di Airy**).

L'aberrazione di **sfericità** è causata dal fatto che raggi a distanze diverse dall'asse ottico vanno a incontrarsi in punti diversi lungo l'asse stesso. In particolare, si ha aberrazione sferica **longitudinale** e **trasversale**, e nello spazio la composizione di queste due produce una figura chiamata **caustica** (Fig. 5.2). L'aberrazione sferica è l'unica delle aberrazioni monocromatiche che dipende solo dall'apertura.

Se h è la distanza del punto di incidenza del raggio sul diottro rispetto all'asse ottico e f_p il fuoco secondario del diottro nell'approssimazione di Gauss, abbiamo:

$$\frac{n}{p} + \frac{n'}{q(h)} = \frac{n' - n}{R} + \left[\left(\frac{h^2 n^2 R}{2 f_p n'} \right) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{R} \right)^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{n' + n}{np} \right) \right] \quad (5.2)$$

Poniamo adesso la sorgente luminosa all'infinito ($p \rightarrow \infty$). Un raggio marginale, a distanza h dall'asse ottico, si focalizza a distanza $f'(h) \neq f_p$.

$$\frac{n'}{f'(h)} = \frac{n' - n}{R} + \left[\left(\frac{h^2 n^2 R}{2 f_p n'} \right) \frac{1}{R^2} \frac{1}{R} \right] \quad (5.3)$$

$$\frac{n'}{f'(h)} = \frac{n'}{f_p} + \frac{h^2 n^2}{2 f_p n' R^2} \quad (5.4)$$

5.1. ABERRAZIONE SFERICA

Da cui si ottiene l'equazione:

$$f'(h) = \frac{f_p}{\frac{n^2}{1 + \frac{2n'^2 R^2}{2n'^2} h^2}} \quad (5.5)$$

che indica che la distanza focale decresce al crescere della distanza dei raggi marginali dall'asse stesso.

5.1.1 Aberrazione sferica nello specchio sferico

Mettiamoci adesso nella condizione più semplice da trattare, cioè quella dello specchio sferico (Fig. 5.3).

$PSC = C\hat{S}F'_m = S\hat{C}V = \omega$, per cui il triangolo CSF'_m è isoscele. Tracciamo la verticale da F'_m al raggio di curvatura CS , per cui $CH = HS = \frac{R}{2}$. Essendo CHF'_m un triangolo rettangolo, $CH < CF'_m$ e quindi $F'_m V = f' < \frac{R}{2}$. Quindi, in generale possiamo dire che $f' \neq \frac{R}{2}$ e in particolare $f' < \frac{R}{2}$.

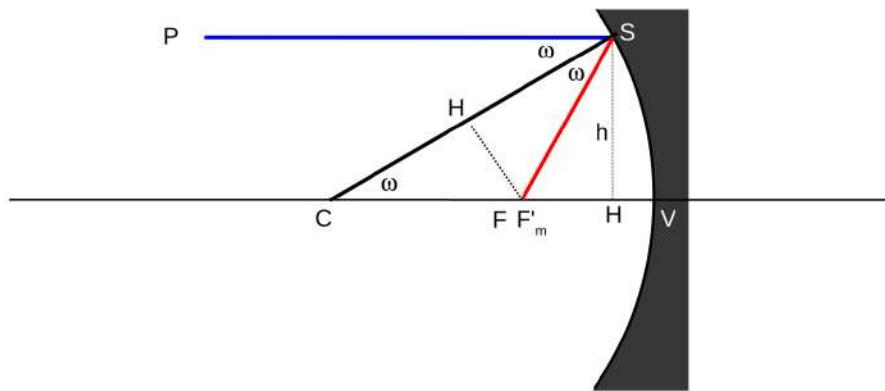


Figura 5.3: Un raggio marginale proveniente dall'infinito viene riflesso in un punto F'_m diverso dal fuoco F , definito dai raggi parassiali.

Calcoliamo ora la distanza fra i due fuochi F , dato dall'approssimazione gaussiana, e F'_m .

$$\overline{FF'_m} = \overline{CF'_m} - \overline{CF} = \frac{\overline{CH}}{\cos \omega} - \frac{R}{2} = \frac{R}{2} \left(\frac{1}{\cos \omega} - 1 \right)$$

Espandiamo in serie il $\cos \omega$:

$$\cos \omega \cong 1 - \frac{\omega^2}{2}$$

$$\overline{FF'_m} = \frac{R}{2} \left(\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{2}} - 1 \right)$$

CAPITOLO 5. LE ABERRAZIONI

Moltiplicando e dividendo per $1 + \frac{\omega^2}{2}$ e trascurando i termini di grado superiore al secondo:

$$\overline{FF'_m} = \frac{R}{2} \left(1 + \frac{\omega^2}{2} - 1 \right) = \frac{R\omega^2}{4}$$

Chiamiamo **aberrazione sferica longitudinale principale** (“principale” indica per convenzione che il punto-oggetto è all’infinito), la quantità:

$$l = \frac{f\omega^2}{2}$$

Esprimiamo l in funzione di h .

$$\begin{aligned} \sin \omega &= \frac{h}{R} = \frac{h}{2f} \Rightarrow \omega = \arcsin \left(\frac{h}{2f} \right) \cong \frac{h}{2f} + \frac{1}{6} \left(\frac{h}{2f} \right)^3 \\ l &= \frac{f}{2} \left[\frac{h}{2f} + \frac{1}{6} \left(\frac{h}{2f} \right)^3 \right]^2 \cong \frac{h^2}{8f} \end{aligned} \quad (5.6)$$

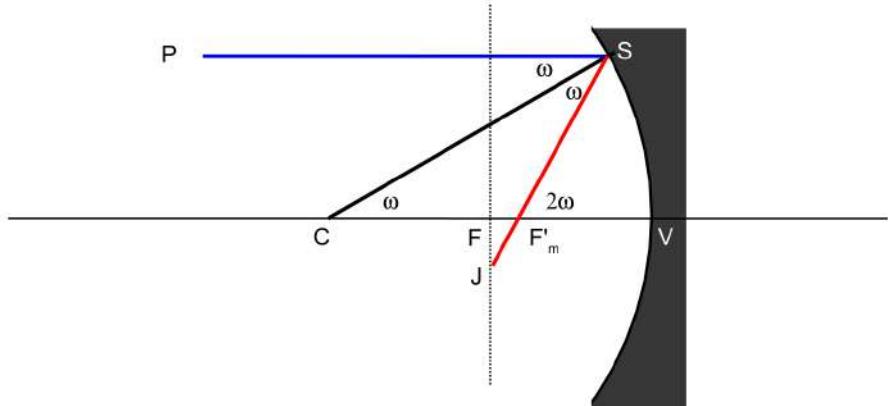


Figura 5.4: Il prolungamento di F'_m incontra il piano focale nel punto J .

Definiamo **aberrazione sferica trasversale principale** (Fig. 5.4), la quantità:

$$t = 2 \cdot \overline{FJ} = 2l \cdot \tan 2\omega$$

Espandiamo in serie la tangente, e otteniamo:

$$\overline{FJ} \cong l \left[2\omega + \frac{1}{3}(2\omega)^3 \right]$$

Sostituendo i valori di ω e di l trovati prima, si ha:

$$t = 2 \cdot \frac{h^2}{8f} \left[2 \left(\frac{h}{2f} + \frac{1}{6} \frac{h^3}{8f^3} \right) + \frac{8}{3} \left(\frac{h}{2f} + \frac{1}{6} \frac{h^3}{8f^3} \right)^3 \right]$$

E approssimando:

$$t \cong 2 \frac{h^2}{8f} \frac{2h}{2f} = \frac{h^3}{4f^2} \quad (5.7)$$

5.1.2 Esempio

Consideriamo uno specchio sferico di diametro $D = 100$ mm e lunghezza focale $f = 400$ mm. La dimensione sul piano focale dell'immagine di una sorgente puntiforme in assenza di aberrazioni è data dalla diffrazione:

$$d = 2 \cdot \frac{1.22\lambda}{D} \cdot f$$

Assumiamo $\lambda = 5500$ Å, e otteniamo $d \cong 0.0054$ mm.

Calcoliamo adesso l'aberrazione sferica longitudinale e trasversale per raggi a distanza $h = 10, 20, 30, 40$ mm dall'asse ottico della lente.

h (mm)	l (mm)	t (mm)
10	0.0312	0.0015
20	0.1250	0.0125
30	0.2812	0.0422
40	0.5000	0.1000

Come si vede, l'effetto dell'aberrazione sferica è quasi sempre superiore a quello della diffrazione. E inoltre l'aberrazione sferica longitudinale è maggiore di quella trasversale. Infatti:

$$l > t \Rightarrow \frac{h^2}{8f} > \frac{h^3}{4f^2} \Rightarrow h < \frac{f}{2}$$

Poiché $h \leq \frac{D}{2}$ e sapendo che in genere le lenti hanno $f/D \geq 1$, si ottiene che $h < \frac{f}{2}$.

CAPITOLO 5. LE ABERRAZIONI

5.1.3 Aberrazione sferica nella lente sottile

L'espressione dell'aberrazione sferica longitudinale nel caso della lente sottile è più complicata di quella relativa allo specchio sferico. In particolare vale:

$$l = \frac{R^2 f^2}{2} \frac{n-1}{n^2} \left\{ \left[-\frac{1}{R_2} + (n+1)(n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right] \left[-\frac{1}{R_2} + (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right]^2 + \frac{1}{R_1^3} \right\}$$

Il termine fra parentesi {} dipende dai raggi di curvatura della lente e dal suo indice di rifrazione. È dunque una quantità costante, quindi conviene scrivere:

$$l = c \frac{R^2}{f} \quad (5.8)$$

dove c è una costante adimensionale ($[L]^3 \cdot \{[L]^{-1} \cdot [L]^{-2} + [L]^{-3}\}$).

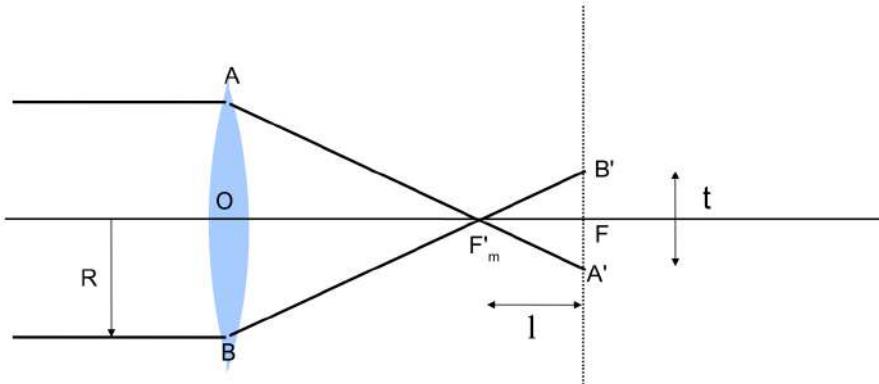


Figura 5.5: Aberrazione sferica longitudinale e trasversale in una lente.

Dalla Fig. 5.5 si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} &= \frac{\overline{F'_m F}}{\overline{O F'_m}} \\ \frac{t}{2R} &= \frac{l}{f'_m} \\ t &= \frac{2Rl}{f'_m} \cong \frac{2Rl}{f} = 2c \frac{R^3}{f^2} \end{aligned}$$

Dove f è il fuoco dei raggi parassiali $\frac{1}{f_p} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$ e c è una costante che dipende dall'indice di rifrazione e dai raggi di curvatura, $c(n(\lambda), |R_1|, |R_2|)$.

5.1. ABERRAZIONE SFERICA

Se chiamiamo h la distanza dall'asse ottico della lente, possiamo esprimere la posizione del fuoco al variare di h :

$$f(h) = f_p - c \frac{h^2}{f_p}$$

Definiamo ora, *fattore di forma* la quantità:

$$q = \frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1} = \frac{\frac{R_2}{R_1} + 1}{\frac{R_2}{R_1} - 1}$$

da cui:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{q+1}{q-1}$$

È possibile minimizzare l'aberrazione sferica trovando il valore di q che minimizza la costante c :

$$\frac{dc}{dq} = 0$$

Vediamo alcuni casi (Fig. 5.6) in cui assumiamo che l'indice di rifrazione valga $n = 1.5$:

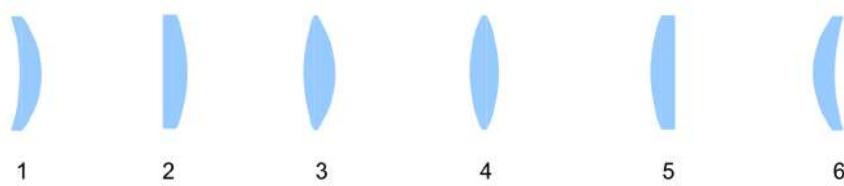


Figura 5.6: Fattore di forma per lenti di vario tipo, da concavo-convesso (1) a convesso-concavo (6).

- 1) $|R_1| > R_2$
Siano $R_1 = -10$ cm e $R_2 = -3.33$ cm.
Si ottiene $f = 10$ cm, $q \cong -2$ e $c = 9.66$.

CAPITOLO 5. LE ABERRAZIONI

2) $|R_1| \rightarrow \infty$

Sia $R_2 = -5.0$ cm.

Si ottiene $f = 10$ cm, $q = -1$ e $c = 4.5$.

3) $|R_1| > R_2$

Siano $R_1 = 20$ cm e $R_2 = -6.66$ cm.

Si ottiene $f = 10$ cm, $q \cong -0.5$ e $c = 2.79$.

4) $R_1 = |R_2|$

Siano $R_1 = 10$ cm e $R_2 = -10$ cm.

Si ottiene $f = 10$ cm, $q = 0$ e $c = 1.7$.

5) $R_2 \rightarrow \infty$

Sia $R_1 = 5.0$ cm.

Si ottiene $f = 10$ cm, $q = 1$ e $c \cong 1.17$.

6) $|R_2| > R_1$

Siano $R_1 = 3.33$ cm e $R_2 = 10$ cm.

Si ottiene $f = 10$ cm, $q \cong 2$ e $c \cong 3$

Se confrontiamo l'espressione per l'aberrazione sferica longitudinale e trasversa dello specchio sferico con quelle della lente sottile, abbiamo:

$$l = \frac{h^2}{8f} = c \frac{R^2}{f} \quad t = \frac{h^3}{4f^2} = 2c \frac{R^3}{f^2}$$

da cui, assumendo $R = h$ si ricava che $c = 1/8$.

Mentre per la lente sottile simmetrica, in cui $R_1 = |R_2| = R$ e $\frac{1}{f} = \frac{2(n-1)}{R}$, avremo:

$$c = \frac{f^3}{2} \frac{n-1}{n^2} \left\{ \left[\frac{1}{R} + (n^2 - 1) \frac{2}{R} \right] \left[\frac{1}{R} + (n-1) \frac{2}{R} \right]^2 + \frac{1}{R^3} \right\}$$

Sviluppando e semplificando si ottiene la seguente relazione:

$$c = \frac{4n^3 - 4n^2 - n + 2}{8n(n-1)^2} \quad \boxed{5.9}$$

Se assumiamo che $n = 1.5$, otteniamo $c \cong 1.7$.

5.2 Aberrazione cromatica

Riprendiamo il concetto di indice di rifrazione n . Come abbiamo visto nel Cap. 1, n è il rapporto fra la velocità della luce nel vuoto e nel mezzo, e dipende dalla lunghezza d'onda della radiazione che attraversa il mezzo. In particolare, per mezzi trasparenti come il vetro, si osserva che n decresce al crescere della lunghezza d'onda:

$$\frac{dn}{d\lambda} < 0$$

Questo implica che quando consideriamo una lente e un fascio di raggi che l'attraversano, l'effetto della rifrazione sui raggi dipenderà dall'indice di rifrazione. In particolare, verranno deviati maggiormente i raggi a lunghezza d'onda minore, rispetto a quelli a lunghezza d'onda maggiore. Questo meccanismo è alla base dell'effetto di **aberrazione cromatica** (Fig. 5.7).

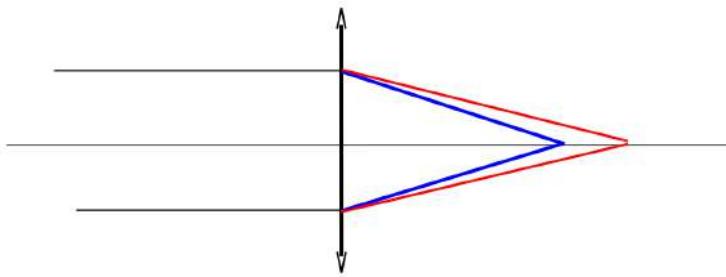


Figura 5.7: Al variare della lunghezza d'onda varia la distanza focale: il fuoco dei raggi blu è più corto di quello dei raggi rossi.

Per studiare questa aberrazione abbiamo bisogno di un set di tre filtri interferenziali. I filtri sono sistemi ottici in grado di selezionare un certo intervallo di lunghezze d'onda, bloccando tutte le altre. In particolare i filtri interferenziali consentono di fare passare radiazione centrata ad una certa λ ma con un intervallo molto stretto (50 – 60 Å o meno).

Il set di filtri utilizzato è il seguente: $\lambda_F = 4861 \text{ \AA}$ (riga $H\beta$ dell'idrogeno), $\lambda_D = 5892 \text{ \AA}$ (doppietto del sodio), $\lambda_C = 6563 \text{ \AA}$ (riga $H\alpha$ dell'idrogeno). Le lettere F, D, C corrispondono alla notazione di Fraunhofer. Più in generale si parla di filtro $H\alpha$, $H\beta$, ecc.

Dalla definizione di lunghezza focale della lente, possiamo scrivere:

$$\frac{1}{f_F} = (n_F - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad \frac{1}{f_C} = (n_C - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\frac{1}{f_F} - \frac{1}{f_C} = (n_F - 1 - n_C + 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = (n_F - n_C) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

CAPITOLO 5. LE ABERRAZIONI

Per poter eliminare il termine contenente i raggi di curvatura utilizziamo il filtro D :

$$\frac{1}{f_D} = (n_D - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \Rightarrow \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{f_D(n_D - 1)}$$

Da cui:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_F} - \frac{1}{f_C} &= \frac{1}{f_D} \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} \\ \frac{f_C - f_F}{f_F f_C} &= \frac{1}{f_D} \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} \end{aligned}$$

Definiamo quindi **aberrazione cromatica longitudinale (principale)** la quantità:

$$A = f_C - f_F = f(\lambda_C) - f(\lambda_F)$$

Chiamiamo **potere dispersivo** ω del materiale la quantità:

$$\omega = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1}$$

e **numero di Abbe** ν la quantità:

$$\nu = \frac{1}{\omega} = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$$

I vetri ottici possono essere raggruppati in due grandi famiglie: 1) Crown, aventi $n \approx 1.5$ e $\nu \approx 60$ (basso potere dispersivo), 2) Flint, aventi $n \approx 1.6$ e $\nu \approx 30$ (alto potere dispersivo). Ad esempio, consideriamo un vetro Schott BK7 avente:

$$\begin{aligned} n_F &= 1.52238 \\ n_D &= 1.51680 \quad \Rightarrow \quad \omega = 0.0156 \quad \Rightarrow \quad \nu = 64 \\ n_C &= 1.51342 \end{aligned}$$

Dalla definizione di aberrazione cromatica otteniamo:

$$A = \frac{f_F f_C}{f_D} \frac{n_F - n_C}{n_D - 1}$$

5.2. ABERRAZIONE CROMATICA

Se assumiamo la seguente approssimazione: $f_F f_C \cong f_D^2$, abbiamo:

$$A \cong \omega f_D = \frac{f_D}{\nu}$$

Cerchiamo ora di comprendere il significato del numero di Abbe.
Ripartiamo dalla definizione di lunghezza focale della lente e differenziamo ambo i membri:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) n - \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\ -\frac{1}{f^2} df &= \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) dn \\ \frac{df}{dn} &= -f^2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned}$$

Assumendo $f = f_D$, cioè la focale corrispondente alla lunghezza d'onda del doppietto del sodio, come rappresentativa della focale della lente:

$$\frac{1}{f_D} = (n_D - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

E poi approssimando: $dn \cong \Delta n = n_C - n_F$, $df \cong \Delta f$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta n} &= -f_D^2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\ \frac{\Delta f}{\Delta n} &= -f_D \left[f_D \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right] \\ \frac{\Delta f}{\Delta n} &= \frac{-f_D}{n_D - 1} \\ \frac{\Delta f}{f_D} &= \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} = \frac{1}{\nu} = \omega \end{aligned}$$

Essendo $\nu > 0$ per i vetri ottici, il numero di Abbe è inversamente proporzionale alla dispersione cromatica della lunghezza focale.

Vediamo adesso cosa accade quando la sorgente puntiforme non si trova all'infinito ma a distanza finita p . Ovviamente applichiamo la legge dei punti coniugati per calcolare l'effetto dell'aberrazione cromatica sulla misura di q .

CAPITOLO 5. LE ABERRAZIONI

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q_F} = \frac{n_F - 1}{f_D(n_D - 1)} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q_C} = \frac{n_C - 1}{f_D(n_D - 1)}$$

Sottraendo membro a membro:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_F} - \frac{1}{q_C} &= \frac{n_F - 1 - n_C + 1}{f_D(n_D - 1)} = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} \frac{1}{f_D} = \frac{1}{\nu f_D} \\ \frac{q_C - q_F}{q_F q_C} &= \frac{1}{\nu f_D} \quad \Rightarrow \quad q_C - q_F = \frac{q_F q_C}{\nu f_D} \end{aligned}$$

Esplicitiamo q_F e q_C usando l'equazione dei punti coniugati:

$$q_F = \frac{1}{\left(\frac{n_F - 1}{n_D - 1}\right) \frac{1}{f_D} - \frac{1}{p}} \quad q_C = \frac{1}{\left(\frac{n_C - 1}{n_D - 1}\right) \frac{1}{f_D} - \frac{1}{p}}$$

Se approssimiamo $\left(\frac{n_C - 1}{n_D - 1}\right) \cong 1$, abbiamo:

$$q_C - q_F \cong \frac{1}{\nu f_D \left(\frac{1}{f_D} - \frac{1}{p} \right)^2}$$

Sappiamo che:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q_D} = \frac{1}{f_D}$$

Quindi l'aberrazione cromatica $q_C - q_F$ vale:

$$q_C - q_F = \frac{q_D^2}{\nu f_D} = \frac{f_D}{\nu} \left(\frac{q_D}{f_D} \right)^2$$

Da questa relazione si ricava che:

- $q_C - q_F \propto q_D^2$;
- $q_D > f_D \Rightarrow \frac{q_D}{f_D} > 1$, cioè l'aberrazione cromatica cresce rapidamente con il crescere della distanza dell'immagine dalla lente;
- $q_D < f_D \Rightarrow \frac{q_D}{f_D} < 1$, cioè l'aberrazione cromatica decresce rapidamente con il decrescere della distanza dell'immagine dalla lente.

Come si nota dalla Fig. 5.8, possiamo definire anche l'**aberrazione cromatica trasversa d** .

5.2. ABERRAZIONE CROMATICA

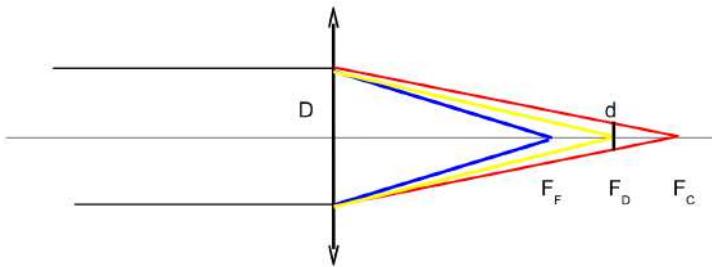


Figura 5.8: Distanze focali ottenute con il filtro blu, giallo e rosso. La focale corrispondente al colore giallo è assunta essere la distanza focale della lente. D è il diametro del fascio di luce.

$$\frac{d}{f_C - f_D} = \frac{D}{f_C}$$

Applicando le seguenti approssimazioni: $f_C \approx f_D$ e $f_C - f_D \approx \frac{f_C - f_F}{2}$, si ottiene:

$$\frac{d}{\frac{f_C - f_F}{2}} \cong \frac{D}{f_D}$$

da cui:

$$d = \frac{1}{2} \frac{f_C - f_F}{f_D} D \cong \frac{1}{2} \frac{D}{\nu}$$

5.2.1 Esempio

Consideriamo una lente in vetro Schott FK5, avente diametro $D = 50$ mm e lunghezza focale $F = 150$ mm.

Calcoliamo prima il diametro del disco di Airy alla lunghezza d'onda $\lambda = 5500\text{\AA}$:

$$\phi = 2 \frac{1.22\lambda}{D} F = 4\mu$$

Supponiamo che la lente abbia i seguenti indici di rifrazione: $n_C = 1.48535$, $n_D = 1.48749$, $n_F = 1.49227$. Il valore del numero di Abbe sarà $\nu \cong 70$. Allora l'aberrazione cromatica longitudinale vale: $A = \frac{150}{70} \cong 2.15$ mm, mentre quella trasversa vale: $d = \frac{50}{2 \cdot 70} \cong 0.35$ mm.

CAPITOLO 5. LE ABERRAZIONI

5.2.2 Doppietto acromatico

È possibile combinare lenti con caratteristiche diverse per annullare l'aberrazione cromatica?

Sappiamo che addossando lenti sottili, il potere diottrico risultante è la somma dei poteri diottrici delle singole lenti:

$$D_{tot} = \sum_i D_i$$

Prendiamo due lenti con lunghezze focali f e f' , avremo:

$$\frac{1}{F_F} = \frac{1}{f_F} + \frac{1}{f'_F} \quad \frac{1}{F_C} = \frac{1}{f_C} + \frac{1}{f'_C}$$

Sottraendo membro a membro:

$$\frac{1}{F_F} - \frac{1}{F_C} = \frac{F_C - F_F}{F_F F_C} = \frac{1}{f_F} + \frac{1}{f'_F} - \frac{1}{f_C} - \frac{1}{f'_C} = \left(\frac{1}{f_F} - \frac{1}{f_C} \right) + \left(\frac{1}{f'_F} - \frac{1}{f'_C} \right)$$

L'aberrazione cromatica del doppietto sarà $A_{tot} = F_C - F_F$, per cui:

$$\begin{aligned} \frac{A_{tot}}{F_F F_C} &= \frac{A}{f_F f_C} + \frac{A'}{f'_F f'_C} \\ \frac{A_{tot}}{F_F F_C} &\cong \frac{A}{f_D^2} + \frac{A'}{f'_D^2} \\ \frac{A_{tot}}{F_F F_C} &= \frac{1}{\nu f_D} + \frac{1}{\nu' f'_D} \end{aligned}$$

Imponiamo ora la condizione di acromatizzazione: $A_{tot} = 0$.

$$\nu f_D + \nu' f'_D = 0$$

Se $\nu = \nu'$, cioè se le due lenti hanno lo stesso potere dispersivo, la condizione implica che: $f_D = -f'_D$, cioè serve una lente convergente e una divergente. Purtroppo il potere diottrico di un tale doppietto è $D_{tot} = 0$, cioè la lente non ha nessun poter di convergenza.

Se invece $\nu \neq \nu'$, si ha: $\frac{1}{\nu f_D} = -\frac{1}{\nu' f'_D}$. Poiché $\nu, \nu' > 0$, le focali delle due lenti hanno segni opposti.

È chiaro quindi che non basta semplicemente addossare una lente positiva a una negativa per avere un doppietto acromatico, bisogna essere certi che le due lenti siano composte di un materiale diverso.

5.2. ABERRAZIONE CROMATICA

Se ad esempio la lente convergente è un vetro Crown, il doppietto ha potere diottrico positivo quando $f < f'$, ed è acromatico quando $\nu > \nu'$, e quindi quando il vetro della lente divergente è un Flint.

5.2.3 Oculare acromatico

È possibile ottenere un sistema acromatico utilizzando due o più lenti spaziate?

Sappiamo che il potere diottrico risultante di due lenti sottili separate da una distanza d è:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

Da cui, differenziando membro a membro:

$$\begin{aligned} -\frac{df}{f^2} &= \left(-\frac{1}{f_1^2} + \frac{d}{f_1^2 f_2} \right) df_1 + \left(-\frac{1}{f_2^2} + \frac{d}{f_1 f_2^2} \right) df_2 \\ -\frac{df}{f^2} &= -\frac{df_1}{f_1^2} \left(1 - \frac{d}{f_2} \right) - \frac{df_2}{f_2^2} \left(1 - \frac{d}{f_1} \right) \end{aligned}$$

Facciamo la seguente approssimazione:

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{f_1} &\approx \frac{\Delta f_1}{f_1} = \frac{1}{\nu_1} \\ \frac{df}{f^2} &\cong \frac{1}{\nu} \left[\frac{1}{f_1} \left(1 - \frac{d}{f_2} \right) + \frac{1}{f_2} \left(1 - \frac{d}{f_1} \right) \right] \end{aligned}$$

Imponiamo adesso la condizione di acromatizzazione: $\frac{df}{f^2} = 0$,

$$\frac{f_2 - d + f_1 - d}{f_1 f_2} = 0$$

$$f_1 + f_2 - 2d = 0$$

$$d = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

Quindi per avere un sistema acromatico bisogna che le due lenti siano separate di una distanza pari alla media delle due focali.

Infine:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \left(\frac{f_1 + f_2}{2} \right) \frac{1}{f_1 f_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{1}{2f_1} - \frac{1}{2f_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \right)$$

6

Teoria di Seidel delle aberrazioni

6.1 L'equazione iconale

Passiamo ora alla trattazione delle aberrazioni al cosiddetto III° ordine, nota anche come Teoria di Seidel.

Cominciamo considerando l'onda piana che si propaga nella direzione dell'asse x (Fig. 6.1) :

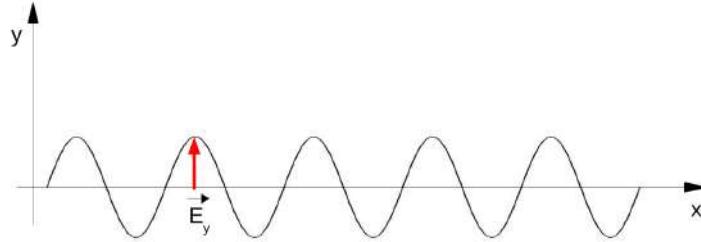


Figura 6.1: Grafico di un'onda piana. La freccia rossa indica la direzione del campo elettrico.

$$E_y(x, t) = E_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right]$$

Essendo $n = \frac{c}{v}$, possiamo scrivere il campo elettromagnetico:

$$E_y(x, t) = E_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{nx}{c} \right) \right]$$

Più in generale, utilizzando la notazione complessa:

$$E'(x, t) = E_0 e^{i\omega(t - \frac{nx}{c})}$$

Dalla definizione di numero d'onda nel vuoto $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ e frequenza di oscillazione $\omega = \frac{2\pi}{T}$, si ottiene:

CAPITOLO 6. TEORIA DI SEIDEL DELLE ABERRAZIONI

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{2\pi T}{\lambda_0 T} = \frac{\omega}{c}$$

da cui:

$$E'(x, t) = E_0 e^{i(-nk_0x + \omega t)}$$

L'espressione generale per $n = \text{cost.}$, è:

$$E(\vec{r}, t) = E_0 e^{i(-n\vec{k}_0 \cdot \vec{r} + \omega t)}$$

Questa espressione soddisfa l'equazione di d'Alembert:

$$\Delta E - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

Se invece $n \neq \text{cost.}$ e in particolare $n = n(\vec{r})$, ma varia comunque su scale molto maggiori della lunghezza d'onda della radiazione, l'espressione per l'onda è:

$$E(\vec{r}, t) = E_0 e^{i(-k_0 S(\vec{r}) + \omega t)}$$

La funzione $S(\vec{r})$ soddisfa l'**equazione iconale**:

$$(\vec{\nabla} S)^2 = n^2(\vec{r}) \quad [6.1]$$

Ricaviamo adesso questa equazione.

Assumiamo il caso generale in cui anche l'ampiezza dell'onda varia: $E_0 = e^{A(\vec{r})}$.

Per praticità di notazione, indichiamo $A = A(\vec{r})$ e $\phi = -k_0 S(\vec{r}) + \omega t$.

Calcoliamo intanto la derivata prima di E rispetto ad \vec{r} :

$$\frac{\partial E}{\partial \vec{r}} = e^A \left(\frac{\partial A}{\partial \vec{r}} \right) e^{i\phi} + e^A e^{i\phi} \left(-ik_0 \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} \right)$$

e poi la derivata seconda:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \vec{r}^2} = e^A \left(\frac{\partial A}{\partial \vec{r}} \right) \left(\frac{\partial A}{\partial \vec{r}} \right) e^{i\phi} + e^A \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \vec{r}^2} \right) e^{i\phi} + e^A \left(\frac{\partial A}{\partial \vec{r}} \right) e^{i\phi} \left(-ik_0 \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} \right)$$

$$+ e^A \left(\frac{\partial A}{\partial \vec{r}} \right) e^{i\phi} \left(-ik_0 \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} \right) + e^A e^{i\phi} \left(-ik_0 \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} \right) \left(-ik_0 \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} \right) + e^A e^{i\phi} \left(-ik_0 \frac{\partial^2 S}{\partial \vec{r}^2} \right) =$$

6.1. L'EQUAZIONE ICONALE

$$= e^A e^{i\phi} (\vec{\nabla} A)^2 + e^A e^{i\phi} \Delta A - i2k_0 e^A e^{i\phi} \vec{\nabla} A \cdot \vec{\nabla} S - e^A e^{i\phi} k_0^2 (\vec{\nabla} S)^2 - ik_0 e^A e^{i\phi} \Delta S$$

Ora calcoliamo la derivata prima e seconda di E rispetto al tempo t :

$$\frac{\partial E}{\partial t} = e^A e^{i\phi} (i\omega)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = e^A e^{i\phi} (i\omega)^2 = -\omega^2 e^A e^{i\phi}$$

Sostituendo otteniamo:

$$(\vec{\nabla} A)^2 + \Delta A - i2k_0 \vec{\nabla} A \cdot \vec{\nabla} S - k_0^2 (\vec{\nabla} S)^2 - ik_0 \Delta S + \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 = 0$$

$$\left[(\vec{\nabla} A)^2 + \Delta A - k_0^2 (\vec{\nabla} S)^2 + \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \right] + i \left[-2k_0 \vec{\nabla} A \cdot \vec{\nabla} S - k_0 \Delta S \right] = 0$$

Separando parte reale da parte immaginaria, otteniamo due equazioni:

$$(\vec{\nabla} A)^2 + \Delta A - k_0^2 (\vec{\nabla} S)^2 + \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 = 0$$

$$2k_0 \vec{\nabla} A \cdot \vec{\nabla} S + k_0 \Delta S = 0$$

Esprimiamo il termine $\frac{\omega}{v}$ in funzione di k_0 e n :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} n = \frac{c}{v} \Rightarrow \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi n}{T c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} n = k_0 n$$

Le due equazioni diventano:

$$\Delta A + (\vec{\nabla} A)^2 + k_0^2 [n^2 - (\vec{\nabla} S)^2] = 0 \quad (6.2)$$

$$\Delta S + 2\vec{\nabla} A \cdot \vec{\nabla} S = 0 \quad (6.3)$$

A questo punto, nell'ipotesi in cui $A(\vec{r})$ varia su scale molto grandi, cioè $\vec{\nabla} A \approx 0$, e di conseguenza $\Delta A \approx 0$, la prima equazione è soddisfatta se:

$$(\vec{\nabla} S)^2 = n^2$$

che è appunto l'equazione iconale.

6.2 Il teorema di Malus

Vediamo adesso il significato della funzione $S(\vec{r})$.

Da quanto detto prima, possiamo affermare che l'ottica geometrica è una sorta di caso limite dell'ottica ondulatoria per $\lambda \rightarrow 0$.

$$(\vec{\nabla}S)^2 = \vec{\nabla}S \cdot \vec{\nabla}S$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = n^2(x, y, z)$$

Consideriamo di nuovo l'onda:

$$E(\vec{r}, t) = E_0 e^{i(-k_0 S(\vec{r}) + \omega t)}$$

La condizione $S(\vec{r}) = \text{cost.}$ definisce in ogni istante t i punti di ugual fase, cioè definisce l'**equazione della superficie d'onda**.

Nel caso di un'onda piana che si propaga in mezzo omogeneo ($n = \text{cost.}$):

$$S = nx = \text{cost.} \quad \Rightarrow \quad x = \text{cost.}$$

cioè, nel caso di onde piane, le superfici d'onda sono piani ortogonali alla direzione di propagazione (Fig. 6.2).

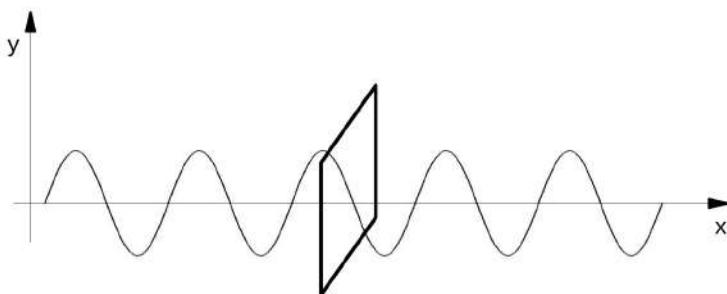


Figura 6.2: Le superfici d'onda di un fascio di onde piane in fase sono piani ortogonali alla direzione di propagazione delle onde.

Se abbiamo invece a che fare con un'onda nello spazio, conviene definire il versore:

$$\vec{s} = \frac{\vec{\nabla}S}{n}$$

che indica la direzione e il verso di propagazione della superficie d'onda (Fig. 6.3).

6.2. IL TEOREMA DI MALUS

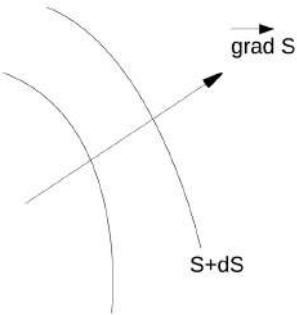


Figura 6.3: Derivando la superficie d'onda si ottiene la direzione di propagazione dei raggi luminosi.

Prima proposizione del Teorema di Malus
le superfici d'onda e i raggi luminosi in un mezzo isotropo qualsiasi formano due sistemi ortogonali

Come si può facilmente capire, è lungo \vec{s} che si propaga l'energia. Infatti la quantità di energia elettromagnetica che ogni secondo si propaga attraverso una superficie unitaria ortogonale alla direzione di propagazione del campo elettromagnetico, è descritta la vettore di Poynting $|\vec{P}| = |\vec{E} \wedge \vec{B}|$, avente dimensione $[P] = \text{Watt}/m^2$.

Riprendiamo ora il concetto di cammino ottico: *cammino nel vuoto percorso dalla radiazione nel tempo impiegato a compiere il cammino reale (nel mezzo) fra due punti considerati.*

Se l è il percorso reale da un punto P_1 a un punto P_2 in un mezzo omogeneo, cioè con indice di rifrazione costante, si ha:

$$\bar{t} = \frac{l}{v} \quad v = \frac{c}{n} \quad \Rightarrow l_0 = c\bar{t} = c\frac{l}{v} = c\frac{l}{\frac{c}{n}} = nl$$

Essendo $n > 1$ si ha $l_0 > l$.

Se al contrario $n \neq \text{cost.}$, l'espressione per il cammino ottico sarà:

$$[P_1P_2] = \int_{P_1}^{P_2} n \, ds \quad (6.4)$$

dove s è l'ascissa curvilinea definita lungo il percorso.

Per un'onda piana in un mezzo omogeneo:

CAPITOLO 6. TEORIA DI SEIDEL DELLE ABERRAZIONI

$$S(x) = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad nx = \text{cost}$$

che significa cammini ottici uguali.

Di conseguenza possiamo affermare che: *la superficie d'onda $S(\vec{r})$ non è solo il luogo dei punti di ugual fase, ma è anche il luogo dei punti tali che i tragitti ottici da una fase all'altra sono gli stessi.*

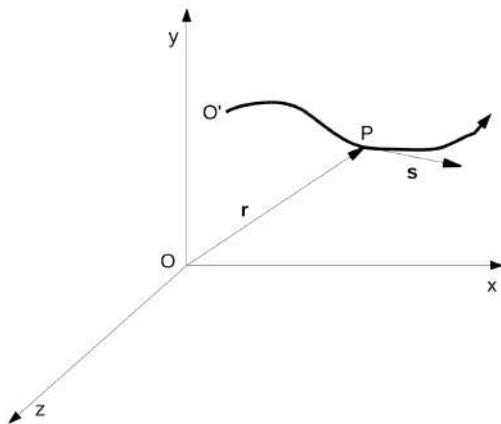


Figura 6.4: Percorso ipotetico di un raggio luminoso in un sistema di riferimento con origine O.

In generale definiamo l'ascissa curvilinea \vec{s} (Fig. 6.4) come:

$$\vec{s} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

Dall'equazione iconale, moltiplicando scalarmente membro a membro \vec{s} , si ottiene:

$$\vec{s} \cdot \vec{s} = \frac{\vec{\nabla} S}{n} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}$$

da cui:

$$n ds = \vec{\nabla} S \cdot d\vec{r}$$

$$n ds = \frac{\partial S}{\partial x} dx + \frac{\partial S}{\partial y} dy + \frac{\partial S}{\partial z} dz = dS$$

Introduciamo questo risultato nell'espressione del cammino ottico:

6.2. IL TEOREMA DI MALUS

$$[P_1 P_2] = \int_{P_1}^{P_2} n \, ds = S(P_2) - S(P_1) = S_2 - S_1$$

Essendo S_1, S_2 superfici d'onda, ne segue che $[P_1 P_2] = \text{cost}$, indipendentemente dalla coppia di punti scelti, purché siano coppie di punti appartenenti a diverse superfici d'onda e intercettati da un medesimo raggio (*punti corrispondenti*).

Seconda proposizione del Teorema di Malus

I cammini ottici misurati fra punti corrispondenti qualsiasi di due superfici d'onda S_1 e S_2 sono sempre uguali fra loro

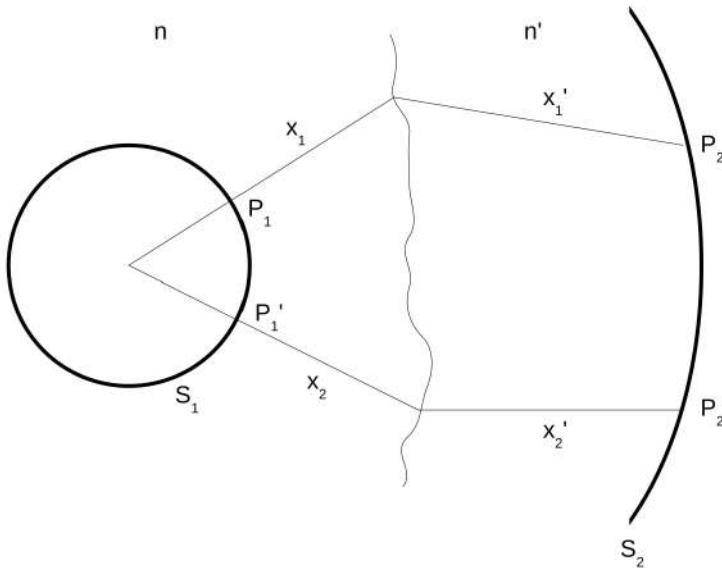


Figura 6.5: S_1 e S_2 sono due superfici d'onda in due mezzi con indice diverso n e n' . P_1 e P_2 , P'_1 e P'_2 sono punti corrispondenti.

Dalla Fig. 6.5, essendo (P_1, P_2) e (P'_1, P'_2) coppie di punti corrispondenti, possiamo scrivere:

$$[P_1 P_2] = [P'_1 P'_2]$$

$$nx_1 + n'x'_1 = nx_2 + n'x'_2$$

Si noti che: *si passa da superfici d'onda a raggi luminosi tramite derivazione*. Quindi, in definitiva, raggi luminosi e leggi dell'ottica geometrica non sono in contraddizione con la concezione ondulatoria della luce.

CAPITOLO 6. TEORIA DI SEIDEL DELLE ABERRAZIONI

6.2.1 Esempio

Vediamo cosa accade nel caso di una lente piano-convessa (Fig.6.6).

Consideriamo una sorgente all'infinito, i raggi che arrivano alla lente sono paralleli all'asse ottico. In altri termini possiamo dire che alla lente arrivano superfici d'onda piane e parallele fra loro.

Come sarà la superficie d'onda dopo che i raggi hanno attraversato la lente?

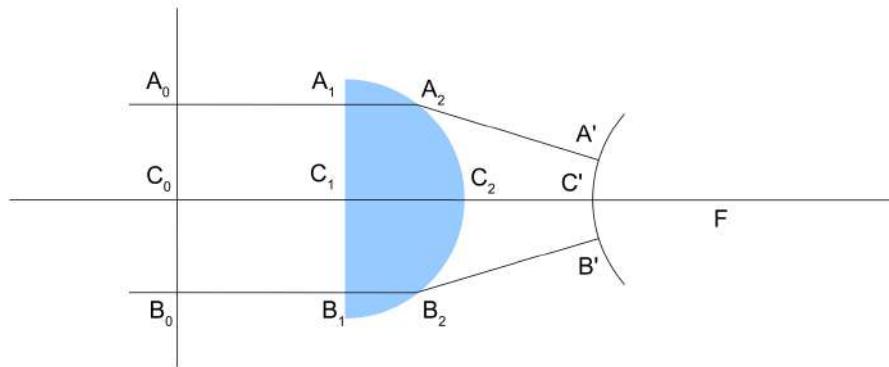


Figura 6.6: La lente trasforma le superfici d'onda piane in superfici sferiche che vanno a concentrarsi nel fuoco.

Dalla seconda proposizione del Teorema di Malus abbiamo:

$$[A_0A'] = [B_0B'] = [C_0C']$$

D'altra parte possiamo scrivere che:

$$[A_0A'] = \overline{A_0A_1} + n\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A'}$$

$$[C_0C'] = \overline{C_0C_1} + n\overline{C_1C_2} + \overline{C_2C'}$$

Ora, $\overline{A_0A_1} = \overline{C_0C_1}$, mentre $\overline{A_1A_2} < \overline{C_1C_2}$, perché è minore il percorso fatto dal raggio dentro la lente. Segue che: $\overline{A_2A'} > \overline{C_2C'}$. Lo stesso può dirsi per il raggio B , simmetrico di A rispetto all'asse ottico: $\overline{B_2B'} > \overline{C_2C'}$.

Si comprende facilmente che la superficie S_2 è una superficie sferica con centro nel fuoco F .

6.3. LA FUNZIONE DI ABERRAZIONE

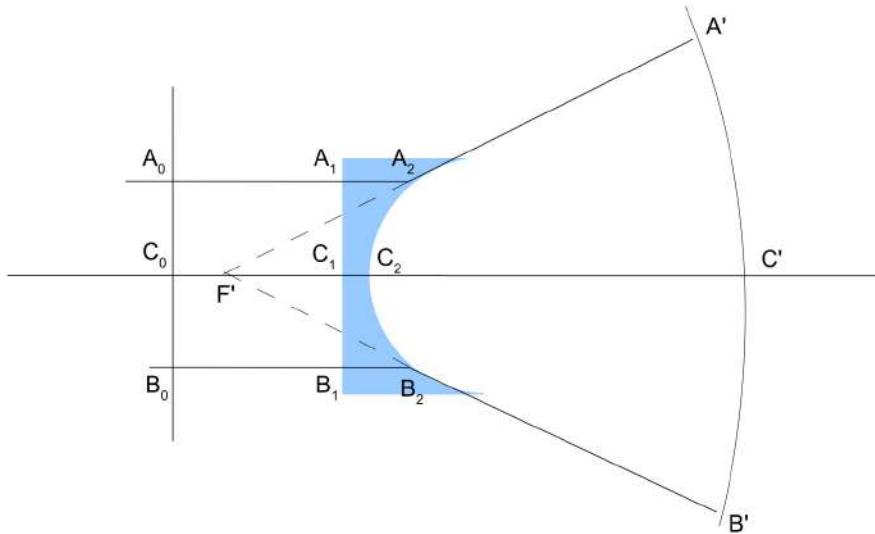


Figura 6.7: La lente trasforma le superfici d'onda piane in superficie sferiche che provengono dal fuoco.

Cambiamo il tipo di lente, consideriamo una lente piano-concava (Fig. 6.7).

Come prima: $[A_0A'] = [B_0B'] = [C_0C']$.

$$\overline{A_0A_1} + n\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A'} = \overline{C_0C_1} + n\overline{C_1C_2} + \overline{C_2C'}$$

La lente è più sottile al centro e più spessa ai bordi, quindi: $\overline{A_1A_2} > \overline{C_1C_2}$, e $\overline{B_1B_2} > \overline{C_1C_2}$. Ne segue che: $\overline{A_2A'} < \overline{C_2C'}$ e $\overline{B_2B'} < \overline{C_2C'}$.

Ancora una volta S_2 è una superficie sferica, questa volta centrata sul fuoco F' .

In conclusione: *le due lenti mettendo a fuoco raggi paralleli, trasformano superfici d'onda piane in sferiche.*

6.3 La funzione di aberrazione

Prendiamo due superfici d'onda che si propagano in un mezzo non omogeneo ($n \neq 0$) (Fig. 6.8). Il cammino ottico fra due punti corrispondenti P_0 e P_1 sarà costante:

$$[P_0P_1] = \int_{P_0}^{P_1} n \, ds = S_1(P_1) - S_0(P_0)$$

Chiamiamo *funzione caratteristica di Hamilton*:

CAPITOLO 6. TEORIA DI SEIDEL DELLE ABERRAZIONI

$$V(P_0, P_1) = [P_0 P_1]$$

il cammino ottico da P_0 a P_1 in funzione delle loro coordinate, cioè:

$$[P_0 P_1] = \int_{P_0}^{P_1} n \, ds = V(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1) = S(x_1, y_1, z_1) - S(x_0, y_0, z_0)$$

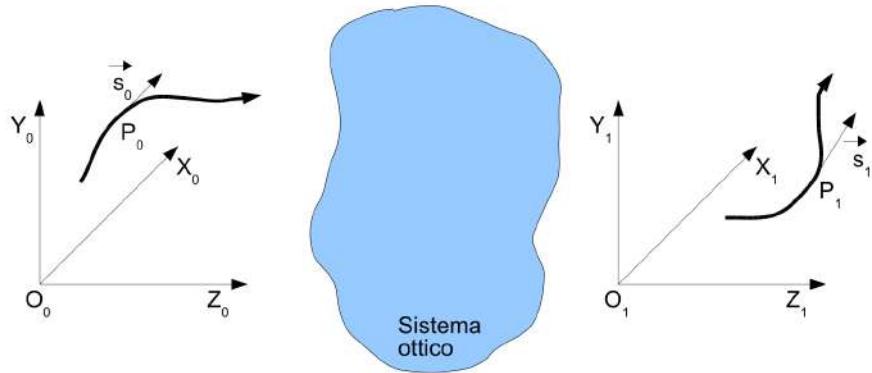


Figura 6.8: Caso generale del percorso di un raggio luminoso attraverso un sistema ottico.

Sappiamo che $\vec{\nabla} S = n \vec{s}$, per cui otteniamo:

$$\vec{\nabla}_{P_0} V = -\vec{\nabla} S(x_0, y_0, z_0) = -n \vec{s}_0$$

$$\vec{\nabla}_{P_1} V = n \vec{s}_1$$

e in generale possiamo scrivere:

$$\vec{\nabla}_{P_i} V = \pm n \vec{s}_i \quad (6.5)$$

Consideriamo adesso il piano degli oggetti, il piano della pupilla di entrata, il piano della pupilla di uscita e il piano delle immagini. Definiamo su ogni piano un sistema di assi cartesiani xyz di origine O_0 , O'_0 , O'_1 e O_1 rispettivamente. Le origini siano allineate lungo l'asse z , che coincide con l'asse ottico del sistema. Il piano della pupilla di entrata si trovi a distanza D_0 dal piano degli oggetti, mentre il piano della pupilla di uscita si trovi a distanza $-D_1$ dal piano delle immagini. Infine sia P_0 un punto sul piano degli oggetti, e siano P'_0 , P'_1 e P_1 , le immagini del punto su ogni piano (Fig. 6.9). Se il sistema fosse privo di aberrazioni, l'immagine di P_0 dovrebbe formarsi in P_1^* .

6.3. LA FUNZIONE DI ABERRAZIONE

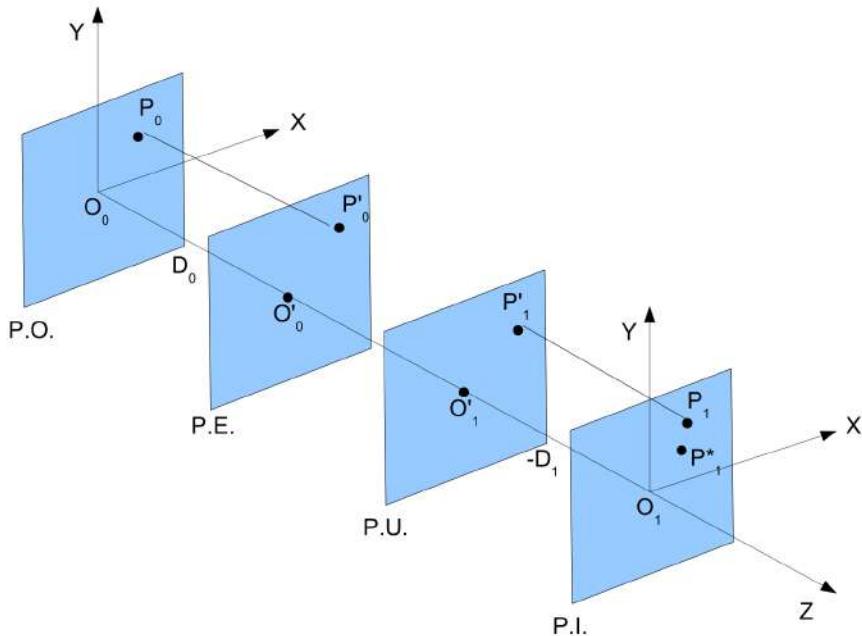


Figura 6.9: Un raggio luminoso emesso dal punto P_0 sul piano degli oggetti passa attraverso la pupilla di entrata, la pupilla di uscita e raggiunge il piano delle immagini in P_1 . In assenza di aberrazioni il punto-immagine sarebbe P_1^* .

Definiamo quindi *aberrazione del raggio* la quantità $\overline{P_1^*P_1} \equiv (X_1 - X_1^*, Y_1 - Y_1^*, 0)$. È conveniente trattare il problema in termini di aberrazione d'onda usando l'equazione iconale: come i raggi si ottengono derivando le superfici d'onda, così le aberrazioni dei raggi si ottengono derivando le aberrazioni d'onda.

La Fig. 6.10 mostra il confronto fra un'ipotetica superficie d'onda S e la stessa aberrata W . Il cammino ottico da \overline{Q} a Q è la funzione di aberrazione:

$$\tilde{\Phi} = [\overline{QQ}] = [P_0Q] - [P_0\overline{Q}]$$

Si assume che la funzione $\tilde{\Phi} > 0$ quando entrambi \overline{Q} e P_1 si trovano da lati opposti rispetto a Q .

Da quanto detto prima sappiamo che:

$$[P_0Q] = \int_{P_0}^Q n \, ds = S(Q) - S(P_0) = V_Q(P_0, Q)$$

dove $Q \equiv Q(X, Y, Z)$ è tale che $(X - X_1^*)^2 + (Y - Y_1^*)^2 + Z^2 = R^2$.

CAPITOLO 6. TEORIA DI SEIDEL DELLE ABERRAZIONI

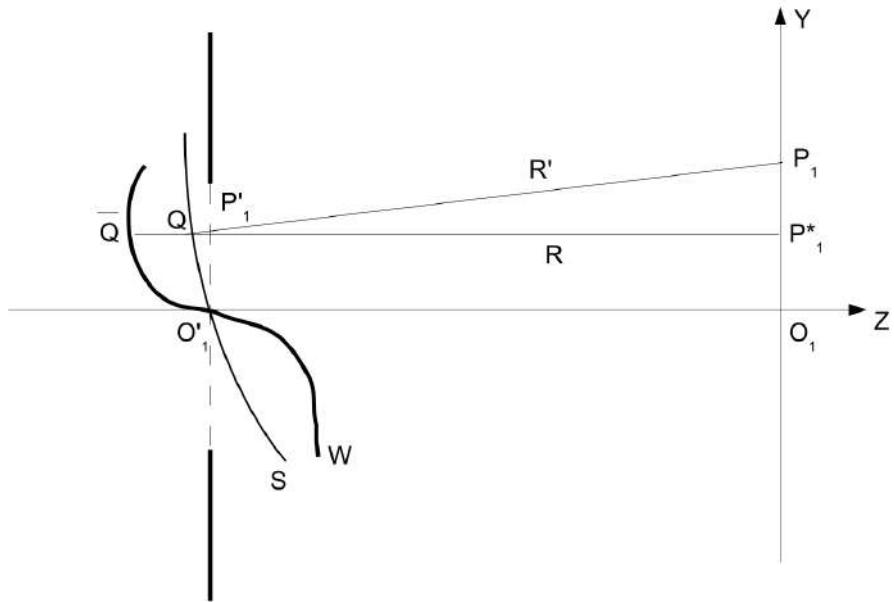


Figura 6.10: Il piano della pupilla di uscita (a sinistra) e delle immagini (a destra) visti dall'asse X. Q e \bar{Q} sono punti corrispondenti, il primo appartenente alla superficie d'onda in caso di assenza di aberrazioni, il secondo appartenente alla superficie aberrata.

Poiché \bar{Q} e O'_1 appartengono allo stesso fronte d'onda, per la seconda proposizione del teorema di Malus, i cammini ottici da P_0 a \bar{Q} e da P_0 a O'_1 coincidono.

$$[P_0 \bar{Q}] = \int_{P_0}^{\bar{Q}} n \, ds = [P_0 \bar{O}'_1] = \int_{P_0}^{O'_1} n \, ds = V_{\bar{Q}}(P_0, O'_1)$$

$$\tilde{\Phi} = V_Q(P_0, Q) - V_{\bar{Q}}(P_0, O'_1) = V_Q(X_0, Y_0, 0, X, Y, Z) - V_{\bar{Q}}(X_0, Y_0, 0, 0, 0, -D_1)$$

Deriviamo adesso la funzione di aberrazione:

$$\left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial X} \right|_Q = \frac{\partial V_Q}{\partial X} + \frac{\partial V_Q}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial X}$$

$$\frac{\partial V_Q}{\partial X} = n s_X = n \cos \alpha$$

$$\frac{\partial V_Q}{\partial Z} = n s_Z = n \cos \gamma$$

dove $\cos \alpha$ e $\cos \gamma$ sono i coseni direttori di \vec{s} .

6.3. LA FUNZIONE DI ABERRAZIONE

$$Z = \sqrt{R^2 - (X - X_1^*)^2 - (Y - Y_1^*)^2} \Rightarrow \frac{\partial Z}{\partial X} = -\frac{X - X_1^*}{Z}$$

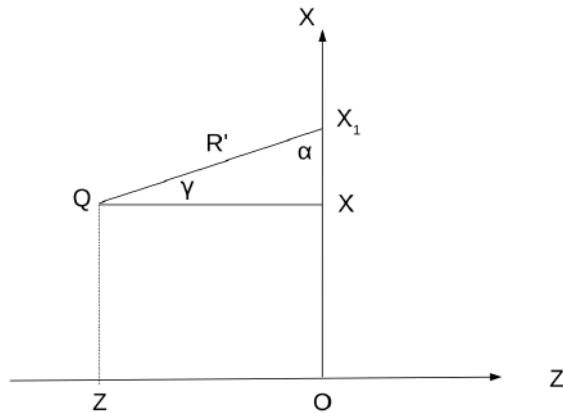


Figura 6.11: Il piano delle immagini visto dall'asse Y. γ è l'angolo formato dalla direzione di propagazione della superficie d'onda da Q a P_1 con l'asse Z, mentre α è l'angolo formato con l'asse X.

Dalla Fig. 6.11 si vede che:

$$\cos \alpha = \frac{X_1 - X}{R'} \quad \cos \gamma = \frac{0 - Z}{R'}$$

da cui, sostituendo:

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial X} = -n \frac{X - X_1}{R'} - n \frac{Z}{R'} \left(-\frac{X - X_1^*}{Z} \right) = \frac{n}{R'} (X_1 - X_1^*)$$

Si può dimostrare che con un ragionamento analogo si ottiene:

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial Y} = \frac{n}{R'} (Y_1 - Y_1^*)$$

Rigirando queste espressioni si ha:

$$X_1 - X_1^* = \frac{R'}{n} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial X} \quad Y_1 - Y_1^* = \frac{R'}{n} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial Y}$$

Le derivate di $\tilde{\Phi}$ si riferiscono al punto Q , che non ha una posizione fisicamente identificabile. È meglio utilizzare il punto P'_1 , che si trova sul piano della pupilla di uscita. Inoltre le formule appena scritte contengono R' anziché R . Operiamo un cambio di variabili: $\partial X \rightarrow \partial X'_1$, $\partial Y \rightarrow \partial Y'_1$, $R' \rightarrow -D_1$,

CAPITOLO 6. TEORIA DI SEIDEL DELLE ABERRAZIONI

$$\tilde{\Phi}(X_0, Y_0, X, Y) \rightarrow \tilde{\Phi}(X_0, Y_0, X'_1, Y'_1).$$

$$X_1 - X_1^* = -\frac{D_1}{n} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial X'_1} \quad Y_1 - Y_1^* = -\frac{D_1}{n} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial Y'_1}$$

Introduciamo a questo punto le *variabili ridotte di Seidel*.

Consideriamo il piano degli oggetti e delle immagini. Scegliamo un segmento arbitrario l_0 come unità di lunghezza sul piano degli oggetti e il suo coniugato l_1 sul piano delle immagini in modo tale che l'ingrandimento trasversale fra i due piani sia $G = \frac{l_1}{l_0}$.

Definiamo le coordinate ridotte x_0, y_0, x_1 e y_1 come:

$$\begin{aligned} x_0 &= C \frac{X_0}{l_0} & x_1 &= C \frac{X_1}{l_1} \\ y_0 &= C \frac{Y_0}{l_0} & y_1 &= C \frac{Y_1}{l_1} \end{aligned}$$

dove C è una costante arbitraria.

In approssimazione di Gauss (I^o ordine) si avrebbe:

$$\begin{aligned} \frac{x_0}{x_1} &= C \frac{X_0}{l_0} \frac{l_1}{CX_1} = 1 \\ \frac{y_0}{y_1} &= C \frac{Y_0}{l_0} \frac{l_1}{CY_1} = 1 \end{aligned}$$

Scegliamo sui piani della pupilla di entrata e di uscita i segmenti arbitrari λ_0 e λ_1 tali che $G = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \frac{X'_0}{\lambda_0} & \xi_1 &= \frac{X'_1}{\lambda_1} \\ \eta_0 &= \frac{Y'_0}{\lambda_0} & \eta_1 &= \frac{Y'_1}{\lambda_1} \end{aligned}$$

In approssimazione di Gauss si avrebbe $\frac{\xi_0}{\xi_1} = 1$ e $\frac{\eta_0}{\eta_1} = 1$.

Effettuiamo un altro cambio di variabili della funzione di aberrazione: $\tilde{\Phi}(X_0, Y_0, X'_1, Y'_1) \rightarrow \tilde{\Phi}(x_0, y_0, \xi_1, \eta_1)$.

$$\begin{aligned} X_1 - X_1^* &= \frac{l_1}{C} (x_1 - x_1^*) \cong \frac{l_1}{C} (x_1 - x_0) = -\frac{D_1}{n} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial X'_1} \\ \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial X'_1} &= \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial X'_1} = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \xi_1} \frac{1}{\lambda_1} \\ \frac{l_1}{C} (x_1 - x_0) &= -\frac{D_1}{n} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \xi_1} \frac{1}{\lambda_1} \end{aligned}$$

6.3. LA FUNZIONE DI ABERRAZIONE

Da cui si ottengono le seguenti equazioni:

$$x_1 - x_0 = -\frac{D_1}{n} \frac{C}{l_1 \lambda_1} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \xi_1}$$

$$y_1 - y_0 = -\frac{D_1}{n} \frac{C}{l_1 \lambda_1} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta_1}$$

Conviene assumere come costante C la quantità: $C = \frac{n \lambda_1 l_1}{D_1}$, la cui unità di misura è una lunghezza. C è infatti una costante legata al cammino ottico.

Le due nuove equazioni differenziali di $\tilde{\Phi}$ in coordinate ridotte sono:

$$x_1 - x_0 = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \xi_1} \quad y_1 - y_0 = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta_1} \quad [6.6]$$

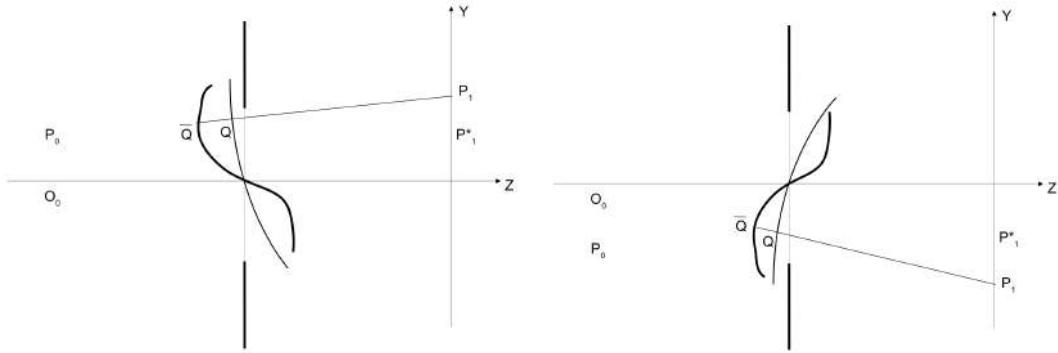


Figura 6.12: Due casi simmetrici.

Immaginiamo ora di effettuare una trasformazione di simmetria che riguardi $P_0 \equiv P_0(X_0, Y_0, 0)$, $P'_1 \equiv P'_1(X'_1, Y'_1, D_1)$, $\tilde{\Phi} > 0$ e $Y_1 - Y'_1 > 0$:

$$\begin{aligned} X_0 &\rightarrow -X_0 \\ Y_0 &\rightarrow -Y_0 \\ X'_1 &\rightarrow -X'_1 \\ Y'_1 &\rightarrow -Y'_1 \end{aligned}$$

Si ottiene che $Y_1 - Y'_1 < 0$, ma $\tilde{\Phi} > 0$.

Se P_0 è fisso $\tilde{\Phi}$ non deve variare per una rotazione rigida di un angolo ϑ degli assi (x_0, y_0) e (ξ_1, η_1) . Infatti $\tilde{\Phi}$ è una differenza di cammino e non dipende dalla descrizione fatta dal sistema di riferimento. Quindi $\tilde{\Phi}$ deve essere una funzione di combinazioni di x_0 , y_0 , ξ_1 e η_1 invarianti per rotazione e si può dimostrare che con 4 variabili si possono costruire 3 invarianti:

$$e_1 = x_0^2 + y_0^2 \quad e_2 = x_0 \xi_1 + y_0 \eta_1 \quad e_3 = \xi_1^2 + \eta_1^2$$

CAPITOLO 6. TEORIA DI SEIDEL DELLE ABERRAZIONI

per cui, $\tilde{\Phi} \equiv \tilde{\Phi}(e_1, e_2, e_3)$.

Mostriamo a titolo di esempio, che $x_0^2 + y_0^2$ è un invariante per rotazione (Fig. 6.13).

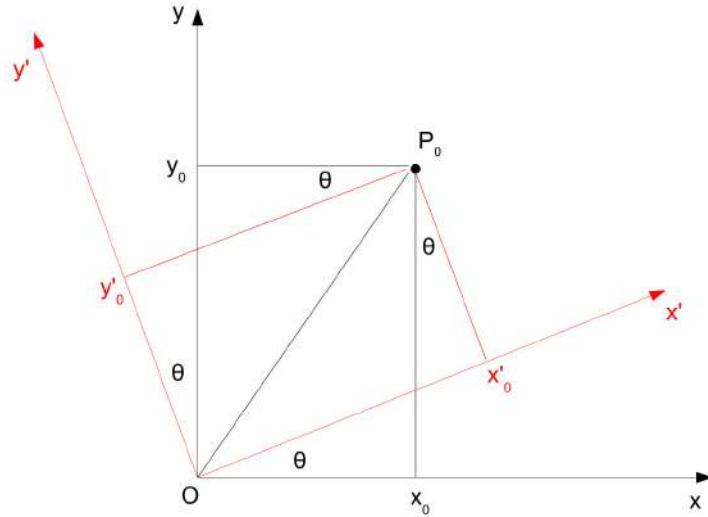


Figura 6.13: In rosso il sistema di riferimento XOY ruotato di un angolo θ . Il punto P_0 avrà coordinate x'_0 e y'_0 .

$$x_0 = x'_0 \cos \vartheta - y'_0 \sin \vartheta$$

$$y_0 = x'_0 \sin \vartheta + y'_0 \cos \vartheta$$

Da cui:

$$\begin{aligned} x_0^2 + y_0^2 &= x'^2_0 \cos^2 \vartheta + y'^2_0 \sin^2 \vartheta - 2x'_0 y'_0 \sin \vartheta \cos \vartheta + \\ &+ x'^2_0 \sin^2 \vartheta + y'^2_0 \cos^2 \vartheta + 2x'_0 y'_0 \sin \vartheta \cos \vartheta = x'^2_0 + y'^2_0 \end{aligned}$$

6.4. LE 5 ABERRAZIONI PRIMARIE DI SEIDEL

Ritorniamo alla funzione di aberrazione e applichiamo un'espansione in serie di MacLaurin:

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi} \cong A_0 + (A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3) + \frac{1}{2}(A_{11} e_1^2 + 2A_{12} e_1 e_2 + 2A_{13} e_1 e_3 + A_{22} e_2^2 + 2A_{23} e_2 e_3 + A_{33} e_3^2) + \\ + \frac{1}{6}(A_{111} e_1^3 + 3A_{122} e_1 e_2^2 + ...) + \dots\end{aligned}$$

Lungo l'asse ottico l'aberrazione d'onda è nulla: $\tilde{\Phi} = 0 \Rightarrow e_1 = e_2 = e_3 = 0 \Rightarrow A_0 = 0$.

In approssimazione di Gauss, l'aberrazione del raggio è nulla e quindi:

$$\begin{aligned}x_1 - x_0 &\cong -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \xi_1} = -A_2 x_0 - 2A_3 \xi_1 = 0 \\ y_1 - y_0 &\cong -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta_1} = -A_2 y_0 - 2A_3 \eta_1 = 0\end{aligned}$$

Poiché queste equazioni devono valere per qualsiasi combinazione di x_0 , y_0 , ξ_1 e η_1 , la soluzione deve essere: $A_2 = 0$ e $A_3 = 0$.

Se vogliamo migliorare l'approssimazione di Gauss occorre salire di ordine: Gauss $\Rightarrow \sin \gamma \cong \gamma$, Seidel $\Rightarrow \gamma - \frac{\gamma^3}{3!}$.

Inoltre, A_1, A_{11} , etc. si possono trascurare perché sono costanti quando si deriva rispetto a ξ_1 e η_1 . Si ottiene quindi: $\tilde{\Phi} \cong \tilde{\Phi}^{(4)} + \tilde{\Phi}^{(6)} + \dots$, dove (4) e (6) indicano termini di 4° e 6° grado nelle coordinate.

Se ci limitiamo a $\tilde{\Phi}^{(4)}$ otteniamo le **5 aberrazioni primarie di Seidel**. A meno di una costante avremo:

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi} \cong \tilde{\Phi}^{(4)} &= A_{12} e_1 e_2 + A_{13} e_1 e_3 + \frac{1}{2} A_{22} e_2^2 + A_{23} e_2 e_3 + \frac{1}{2} A_{33} e_3^2 \\ \tilde{\Phi} \cong \tilde{\Phi}^{(4)} &= E e_1 e_2 - \frac{1}{2} D e_1 e_3 - C e_2^2 + F e_2 e_3 - \frac{1}{4} B e_3^2\end{aligned}\quad (6.7)$$

dove B, C, D, E, F sono i coefficienti di aberrazione sferica, astigmatismo, curvatura di campo, distorsione e coma.

6.4 Le 5 aberrazioni primarie di Seidel

6.4.1 Aberrazione sferica

Supponiamo che $B \neq 0$, mentre $C = D = E = F = 0$.

La funzione di aberrazione vale:

$$\tilde{\Phi} = -\frac{1}{4} B e_3^2 = -\frac{1}{4} B (\xi_1^2 + \eta_1^2)^2$$

CAPITOLO 6. TEORIA DI SEIDEL DELLE ABERRAZIONI

Derivando rispetto a ξ_1 e η_1 :

$$x_1 - x_0 = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \xi_1} = \frac{1}{4}B(2(\xi_1^2 + \eta_1^2)2\xi_1) = B\xi_1(\xi_1^2 + \eta_1^2)$$

$$y_1 - y_0 = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta_1} = B\eta_1(\xi_1^2 + \eta_1^2)$$

Eseguiamo una trasformazione in coordinate polari (ρ, ϑ) sul piano della pupilla di uscita (Fig. 6.14): $\xi_1 = \rho \sin \vartheta$ e $\eta_1 = \rho \cos \vartheta$, con $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

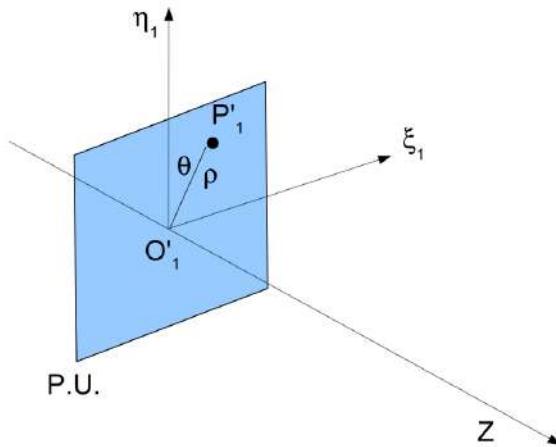


Figura 6.14: La posizione del punto aberrato P'_1 sul piano della pupilla di uscita in coordinate polari.

$$x_1 - x_0 = B\rho \sin \vartheta (\rho^2 \sin^2 \vartheta + \rho^2 \cos^2 \vartheta) = B\rho^3 \sin \vartheta$$

$$y_1 - y_0 = B\rho^3 \cos \vartheta$$

Da cui si deduce che fissato ρ , al variare di ϑ sul piano di Gauss viene descritta una circonferenza di centro (x_0, y_0) e di raggio $B\rho^3$.

Per semplicità poniamo $x_0 = 0$. Il vettore $P_1^*P_1$ (Fig. 6.15) ruota la variare di ϑ . La sua lunghezza è $B\rho^3$ e quindi aumenta al crescere di ρ .

Se adesso consideriamo tutti i raggi uscenti dalla pupilla di uscita e poniamo che $0 < \rho < \rho_{max}$, dove ρ_{max} è la massima apertura del fascio di raggi, osserviamo che l'immagine della sorgente puntiforme P_0 è un disco di raggio $B\rho_{max}$.

La dimensione del disco non dipende da y_0 , e questo significa che non serve eliminare il fuori-asse per far sparire l'aberrazione di sfericità; dipende invece da ρ_{max}^3 , cioè è necessario diminuire l'apertura del fascio. Infine, corrisponde all'aberrazione sferica trasversa, $t = 2c\frac{R^3}{f^2}$.

$$\tilde{\Phi} = -\frac{1}{4}Be_3^2 = -\frac{1}{4}B(\rho^2 \sin^2 \vartheta + \rho^2 \cos^2 \vartheta)^2 = -\frac{1}{4}B\rho^4$$

6.4. LE 5 ABERRAZIONI PRIMARIE DI SEIDEL



Figura 6.15: L'aberrazione sferica trasforma l'immagine di una sorgente puntiforme in un disco di raggio $B\rho^3$ centrato sulla posizione del punto non aberrato.

La seguente figura (Fig. 6.16) mostra l'andamento della funzione di aberrazione. Quando si considerano raggi parassiali, la funzione è appiattita attorno allo zero, mentre all'aumentare della distanza dall'asse, l'aberrazione sferica cresce rapidamente.

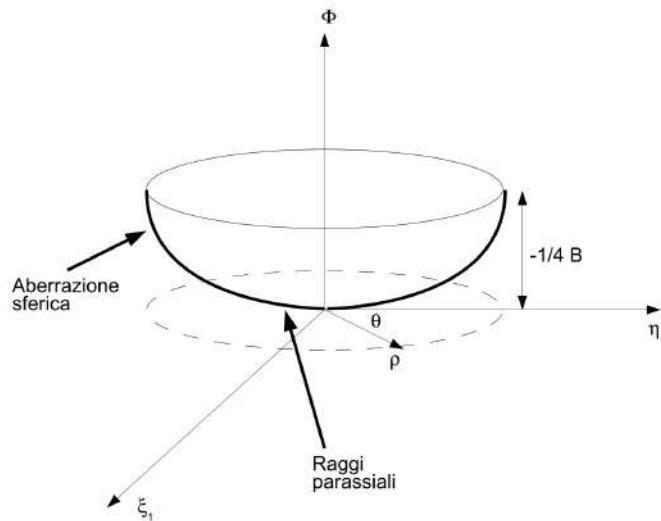


Figura 6.16: La funzione di aberrazione nel caso di sola aberrazione sferica. Quando si considerano solo raggi parassiali, cioè quando ρ è piccolo, l'aberrazione è praticamente nulla, mentre cresce rapidamente al crescere di ρ .

CAPITOLO 6. TEORIA DI SEIDEL DELLE ABERRAZIONI

6.4.2 Aberrazioni di astigmatismo e curvatura di campo

Siano $C \neq 0$ e $D \neq 0$, mentre $B = E = F = 0$.

Il termine che riguarda l'astigmatismo è $-Ce_2^2$, mentre quello della curvatura di campo è $-\frac{1}{2}De_1e_3$.

La funzione di aberrazione vale:

$$\tilde{\Phi} = -\frac{1}{2}De_1e_3 - Ce_2^2 = -\frac{1}{2}D(x_0^2 + y_0^2)(\xi_1^2 + \eta_1^2) - C(x_0\xi_1 + y_0\eta_1)^2$$

Assumiamo anche in questo caso $x_0 = 0$, si ottiene: $\tilde{\Phi} = -\frac{1}{2}Dy_0^2(\xi_1^2 + \eta_1^2) - Cy_0^2\eta_1^2$.

Le equazioni diventano:

$$x_1 = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \xi_1} = Dy_0^2\xi_1$$

$$y_1 - y_0 = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta_1} = Dy_0^2\eta_1 + 2Cy_0^2\eta_1 = y_0^2\eta_1(2C + D)$$

Effettuiamo il cambio in coordinate polari:

$$x_1 = Dy_0^2\rho \sin \vartheta$$

$$y_1 = y_0 + (2C + D)y_0^2\rho \cos \vartheta$$

Sul piano di Gauss la figura descritta da queste equazioni è un'ellisse di semiassi $Dy_0^2\rho$ e $(2C + D)y_0^2\rho$. Al crescere di y_0 , cresce anche l'ellisse.

Quando $D = 0$ si ha l'astigmatismo sagittale descritto da $x_1 = 0$ e $y_1 = y_0 + 2y_0^2C\rho \cos \vartheta$, mentre quando $2C + D = 0$ si l'astigmatismo tangenziale descritto da $x_1 = Dy_0^2\rho \sin \vartheta$ e $y_1 = y_0$ (Fig. 6.17).

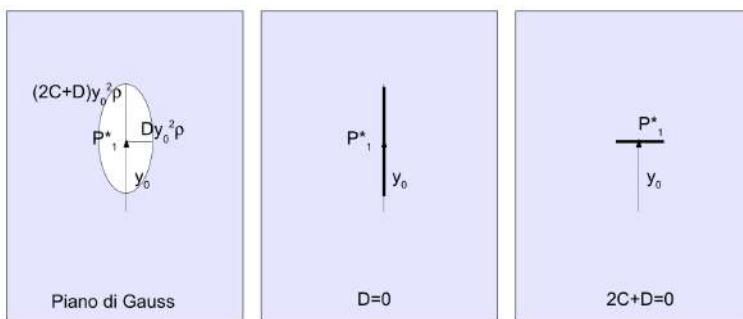


Figura 6.17: L'effetto combinato di astigmatismo e curvatura di campo produce un'immagine di forma ellittica.

6.4. LE 5 ABERRAZIONI PRIMARIE DI SEIDEL

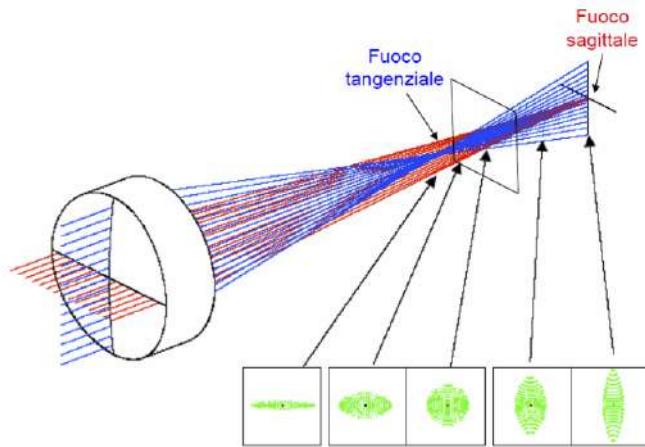


Figura 6.18: L'immagine è a fuoco ma ha una forma ellittica, schiacciata in direzione tangenziale oppure in direzione sagittale a seconda che si consideri una posizione intrafocale o extrafocale.

6.4.3 Aberrazione di distorsione

Sia ora $E \neq 0$, mentre $B = C = D = F = 0$. La funzione di aberrazione diventa: $\tilde{\Phi} = E(x_0^2 + y_0^2)(x_0\xi_1 + y_0\eta_1)$.

Da cui:

$$x_1 - x_0 = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \xi_1} = -E(x_0^2 + y_0^2)x_0 = -E|OP_0|^2 x_0$$

$$y_1 - y_0 = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta_1} = -E|OP_0|^2 y_0$$

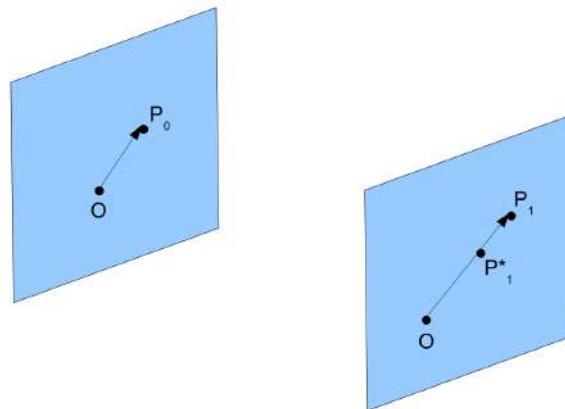


Figura 6.19: La distorsione dipende solo dal fuori-asse.

CAPITOLO 6. TEORIA DI SEIDEL DELLE ABERRAZIONI

Come si nota dalla Fig. 6.19, l'aberrazione del raggio sul piano delle immagini corrisponde al segmento $P_1^*P_1 \equiv P_1^*P_1(-E|OP_0|^2x_0, -E|OP_0|^2y_0)$. E inoltre $\overrightarrow{P_1^*P_1} \parallel \overrightarrow{OP_0}$. La distorsione non dipende da ϑ perché non dipende né da ξ_1 né da η_1 e non fa perdere di stigmatismo al sistema.

$$P_1^*P_1 = \sqrt{[-E|OP_0|^2x_0]^2 + [-E|OP_0|^2y_0]^2} = E|OP_0|^2\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = E|OP_0|^3$$

Quindi la distorsione avviene nella stessa direzione del vettore $\overrightarrow{OP_0}$ ma con verso concorde o discorde a seconda che $E < 0$ o che $E > 0$ rispettivamente. Il suo modulo aumenta con il cubo del fuori-asse (Fig. 6.20).

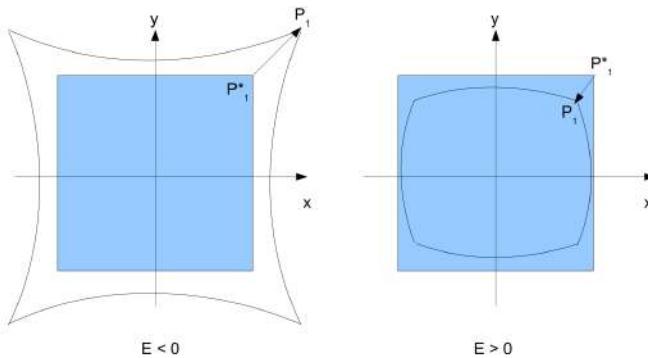


Figura 6.20: A seconda del valore di E , positivo o negativo, il punto aberrato si avvicina all'asse ottico oppure si allontana da esso.

6.4.4 Aberazione di coma

Sia $F \neq 0$, mentre $B = C = D = E = 0$.

La funzione di aberrazione vale: $\tilde{\Phi} = Fe_2e_3 = F(x_0\xi_1 + y_0\eta_1)(\xi_1^2 + \eta_1^2)$. Assumiamo per semplicità che $x_0 = 0$, e otteniamo: $\tilde{\Phi} = Fy_0\eta_1(\xi_1^2 + \eta_1^2)$. Ripetiamo i passaggi precedenti:

$$x_1 = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \xi_1} = -2Fy_0\eta_1\xi_1$$

$$y_1 - y_0 = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta_1} = -Fy_0(\xi_1^2 + \eta_1^2) - 2Fy_0\eta_1^2$$

Passiamo in coordinate polari come prima:

$$x_1 = -2Fy_0\rho \sin \vartheta \rho \cos \vartheta = -Fy_0\rho^2 \sin 2\vartheta$$

$$y_1 = y_0 - 2Fy_0\rho^2 \cos^2 \vartheta - Fy_0(\rho^2 \sin^2 \vartheta + \rho^2 \cos^2 \vartheta) = y_0 - 2Fy_0\rho^2 \cos^2 \vartheta - Fy_0\rho^2 =$$

6.4. LE 5 ABERRAZIONI PRIMARIE DI SEIDEL

$$= y_0 - Fy_0\rho^2(2 \cos^2 \vartheta + 1) = y_0 - Fy_0\rho^2(\cos 2\vartheta + 2) = y_0 - 2Fy_0\rho^2 - Fy_0\rho^2 \cos 2\vartheta$$

Queste due espressioni indicano che a causa dell'aberrazione di coma i raggi uscenti da mezza pupilla formano sul piano di Gauss una circonferenza di raggio $Fy_0\rho^2$ e di centro spostato rispetto a P_1^* della quantità $2Fy_0\rho^2$ (con $F < 0$).

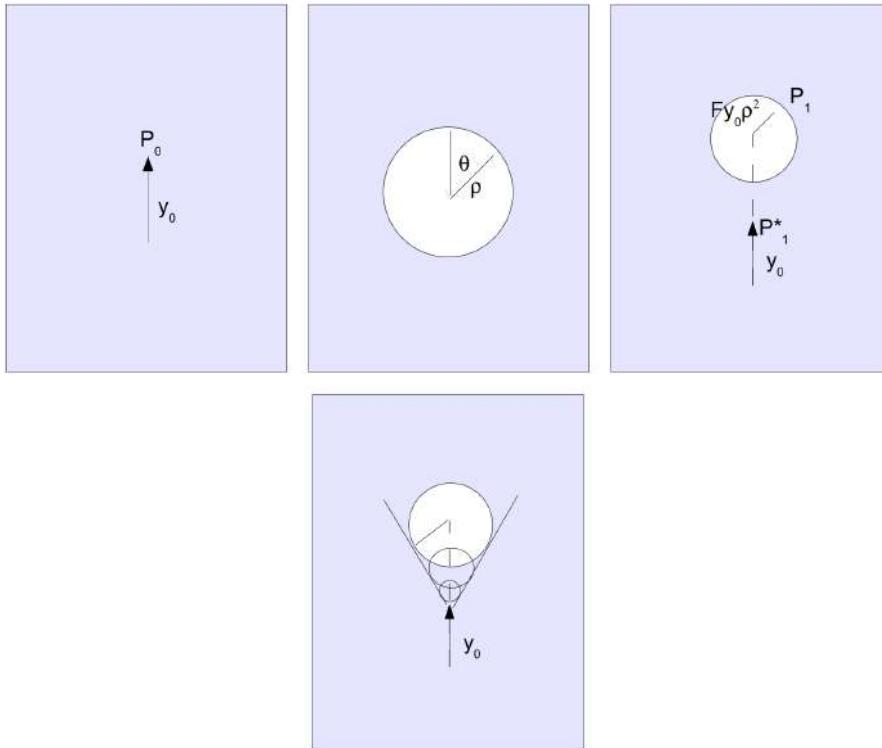


Figura 6.21: L'aberrazione di coma dipende sia dal raggio di apertura che dal fuori asse. Causa la formazione di un disco il cui centro è a distanza pari al doppio del suo raggio dal punto non aberrato. La figura di coma è un'immagine allungata con una punta in corrispondenza del punto non aberrato.

Al diminuire del valore di ρ non solo si formano circonferenze di raggio minore, ma il loro centri si spostano verso P_1^* . È facile mostrare che si forma un'immagine circolare che si assottiglia fino a diventare a punta in corrispondenza di P_1^* , e l'angolo di apertura è di 60° (Fig. 6.21). Basta infatti tracciare da P_1^* le due tangenti a una circonferenza qualsiasi di raggio ρ e si ottiene:

$$\frac{Fy_0\rho^2}{2Fy_0\rho^2} = \frac{1}{2} = \sin \theta \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

Quindi a causa dell'aberrazione di coma l'immagine di una sorgente puntiforme è una figura allungata, tondeggiante da un lato e appuntita dall'altro, e con la punta rivolta verso l'asse ottico. Dipende sia dal fuori-asse che dal quadrato dell'apertura del fascio luminoso.

CAPITOLO 6. TEORIA DI SEIDEL DELLE ABERRAZIONI

6.4.5 Riassunto

Riassumiamo qui le dipendenze delle varie aberrazioni. Abbiamo chiamato con y_0 il fuori-asse e con ρ_{max} la massima apertura della pupilla di uscita. Mentre l'aberrazione sferica, la coma e l'astigmatismo fanno perdere di stigmatismo al sistema, la distorsione e la curvatura di campo spostano semplicemente il punto-immagine.

Sferica	\rightarrow	\propto	ρ_{max}^3
Coma	\rightarrow	\propto	$\rho_{max}^2 y_0$
Ast.+Curv.	\rightarrow	\propto	$\rho_{max} y_0^2$
Distorsione	\rightarrow	\propto	y_0^3

7

Telescopi

Consideriamo il più semplice tipo di telescopio: un obiettivo (lente o specchio) di diametro D e lunghezza focale f . Definiamo **rapporto di apertura** f/D la quantità f/D . Il telescopio Galileo di Asiago, dopo le recenti modifiche (sostituzione dello specchio secondario, metà del 2011) ha $D = 120$ cm e lunghezza focale equivalente $f = 1200$ cm, quindi il suo rapporto di apertura è $f/10$. Mentre il telescopio Copernico di Cima Ekar ha $D = 180$ cm e $f = 1638$ cm, quindi è un $f/9$. (Attenzione, non stiamo considerando qui le lunghezze focali dei singoli specchi primari ma quella totale).

Consideriamo una sorgente in cielo di dimensione angolare α . La sua distanza è tale per cui α può essere considerato molto piccolo. Da ogni punto della sorgente proviene un fascio di raggi paralleli, con inclinazione crescente, al crescere della distanza dall'asse ottico. Sia h la dimensione lineare dell'immagine sul piano focale del telescopio. Come si vede dalla Fig. 7.1:

$$\frac{h}{f} = \tan \alpha \cong \alpha \Rightarrow h = f\alpha \Rightarrow \frac{\alpha}{h} = \frac{1}{f}$$

con α in radianti. Definiamo **scala del telescopio**, il rapporto tra la dimensione angolare della sorgente in cielo (θ) espressa in secondi d'arco e la dimensione dell'immagine sul piano focale (h), calcolata in mm. La scala è quindi la quantità $S = \frac{\theta}{h}$, dove $\theta = \alpha \cdot 206265$. Per cui:

$$S = \frac{\theta}{h} = \frac{206265}{f} \quad (7.1)$$

La lunghezza focale si esprime in mm e la scala in unità di **arcsec/mm**. Quindi, nota la dimensione angolare di una sorgente e la focale del telescopio, è facilmente calcolabile la dimensione lineare dell'immagine che si forma sul piano focale. Consideriamo come esempio la Luna piena che ha un diametro angolare di circa $30'$. Il telescopio Galileo di Asiago ha una scala di circa $17''/\text{mm}$, e quindi la Luna ha un diametro di circa 106 mm sul piano focale. Il telescopio Copernico di Cima Ekar ha una scala di $12.6''/\text{mm}$ e quindi la Luna ha un diametro lineare di circa 143 mm. Al diminuire della scala, quindi, aumentano le dimensioni lineari sul piano focale del telescopio.

Proviamo ora a confrontare i due strumenti di Asiago. Un telescopio con obiettivo più grande raccoglie una maggior quantità di luce, questa in particolare cresce con l'area della lente o dello specchio, quindi con il quadrato del raggio o del diametro. Quindi, dal rapporto tra i diametri al quadrato ($180^2/120^2$),

CAPITOLO 7. TELESCOPI

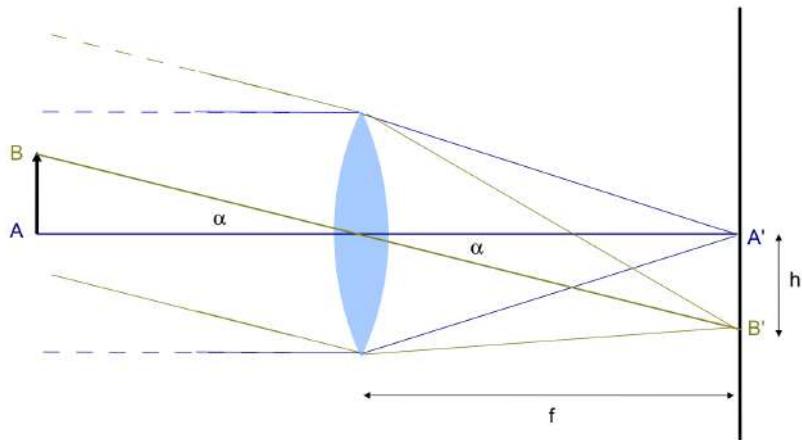


Figura 7.1: Sorgente estesa posta all'infinito e osservata con un telescopio, qui schematizzato da una lente convergente. Da ogni punto della sorgente provengono fasci di raggi paralleli inclinati in modo crescente, al crescere della distanza dall'asse ottico.

otteniamo che il 180 cm raccoglie 2.25 volte la luce raccolta dal 120 cm. D'altra parte, il 180 cm ha una lunghezza focale superiore al 120 cm, e questo implica una scala spaziale minore, quindi ogni mm^2 sul piano focale dei due telescopi corrisponde ad un'area di cielo minore nel caso del 180 cm ($12.6 \times 12.6 \text{ arcsec}^2$) rispetto al 120 cm ($17 \times 17 \text{ arcsec}^2$), e quindi a una minore quantità di luce raccolta. In particolare, dal rapporto elevato al quadrato fra le due lunghezze focali ($1638^2/1200^2$) si ottiene un fattore circa 1.9 a favore del 120 cm, e quindi in definitiva il telescopio di Cima Ekar è appena 1.2 volte più luminoso del telescopio Galileo. Questi calcoli non sono in realtà corretti perché non tengono conto della presenza in entrambi i telescopi dello specchio secondario, che causa ostruzione. In particolare, il secondario del 180 cm ha un diametro di 58 cm, mentre il secondario del 120 cm ha un diametro di 52 cm. Per cui, il rapporto fra la quantità di luce raccolta dallo specchio primario del 182 cm e quella raccolta dal 120 cm, vale $(180^2 - 58^2)/(120^2 - 52^2) = 2.48$. In definitiva, considerando tutti i fattori in gioco, il 180 cm è più luminoso del 120 cm di un fattore circa 1.3, invece di 2.25, ottenuto considerando solo le dimensioni degli specchi primari.

Se accoppiamo due sistemi ottici, ad esempio due lenti, di cui una sarà l'obiettivo e l'altra l'oculare, in modo tale che i loro piani focali coincidano, possiamo calcolare l'ingrandimento prodotto da questo telescopio (Fig. 7.2):

$$\tan \alpha = \frac{h}{f_1} \quad \tan \beta = \frac{h}{f_2}$$

$$I = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{h}{f_2} \cdot \frac{f_1}{h} = \frac{f_1}{f_2}$$

cioè il numero di ingrandimenti si calcola dal rapporto fra la lunghezza focale dell'obiettivo (f_1) e la lunghezza focale dell'oculare (f_2). Ad esempio un telescopio

7.1. IL TELESCOPIO RIFLETTORE

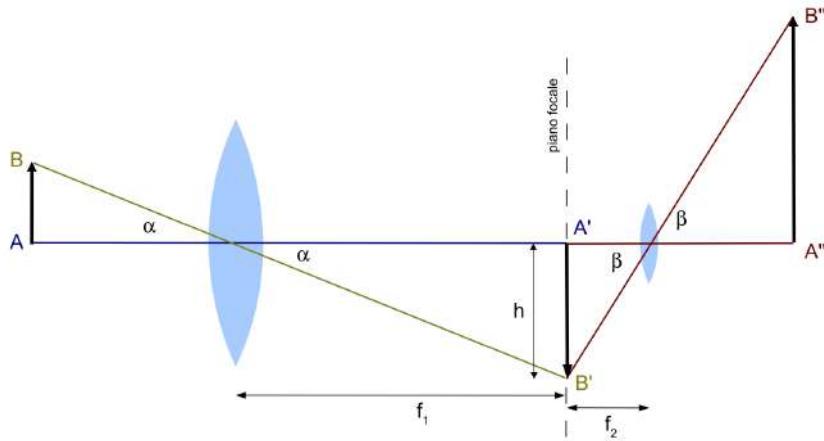


Figura 7.2: Accoppiamento obiettivo-oculare: l'immagine dell'oggetto si forma sul piano focale dell'obiettivo, che è anche piano focale dell'oculare, del quale essa diventa oggetto.

con $f_1 = 4$ m a cui viene accoppiato un oculare che ha $f_2 = 20$ mm, produce 200 ingrandimenti.

7.1 Il telescopio riflettore

Il telescopio riflettore è costituito da uno specchio di forma concava o convessa la cui superficie è descritta dall'equazione di una conica in coordinate cilindriche:

$$(1+b)z^2 - 2Rz + r^2 = 0 \quad (7.2)$$

dove z e r sono le variabili delle coordinate cilindriche ($r \cos \vartheta, r \sin \vartheta, z$), e R è il raggio di curvatura della conica. Al variare di b , cambia il tipo di conica:

$b > 0$	ellissoide prolato
$b = 0$	sfera
$-1 < b < 0$	ellissoide oblato
$b = -1$	paraboloide
$b < -1$	iperboloide

Ricaviamo ora l'espressione per la lunghezza focale f della conica che, come si vede in Fig. 7.3, vale $f = z + z_0$. Cominciamo esplicitando z in funzione di r :

$$z = \frac{R - \sqrt{R^2 - (1+b)r^2}}{1+b} = \frac{R}{1+b} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}(1+b)} \right]$$

Si noti che delle due soluzioni consideriamo quella con il segno $-$. Questo perché i punti sulla superficie della conica avranno sempre $z < R$ (Fig. 7.3).

CAPITOLO 7. TELESCOPI

Consideriamo il termine sotto radice quadrata: $\frac{r}{R} \ll 1$ perché nei telescopi il raggio di curvatura è più grande del diametro dello specchio, quindi la radice quadrata si può espandere in serie di Taylor. Se chiamiamo $u = -\frac{r^2}{R^2}(1+b)$, possiamo scrivere:

$$\sqrt{1+u} \cong 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + \dots$$

Da cui:

$$\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}(1+b)} \cong 1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2}(1+b) - \frac{1}{8}\frac{r^4}{R^4}(1+b)^2 - \frac{1}{16}\frac{r^6}{R^6}(1+b)^3 - \dots$$

Sostituendo nell'espressione di z si ha:

$$\begin{aligned} z &= \frac{R}{1+b} \left[1 - 1 + \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2}(1+b) + \frac{1}{8}\frac{r^4}{R^4}(1+b)^2 + \frac{1}{16}\frac{r^6}{R^6}(1+b)^3 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{2}\frac{r^2}{R} + \frac{1}{8}\frac{r^4}{R^3}(1+b) + \frac{1}{16}\frac{r^6}{R^5}(1+b)^2 + \dots \end{aligned}$$

A questo punto dobbiamo determinare z_0 . Consideriamo la Fig. 7.3: la tangente alla curva nel punto P è ortogonale al raggio di curvatura R e taglia l'asse z nel punto H. Il triangolo rettangolo HPP_z è simile al triangolo rettangolo HCP , quindi l'angolo $\hat{H}PP_z$ è uguale all'angolo $\hat{H}CP$, che è uguale a ϑ . Inoltre, poiché P_zP e l'asse r sono paralleli, l'angolo che la tangente in P forma con l'asse r è proprio ϑ . Per cui, la derivata della curva in P fornisce la $\tan \vartheta$:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dr} &= \frac{d}{dr} \left[\frac{R}{1+b} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}(1+b)} \right) \right] = \\ &= -\frac{1}{2}\frac{R}{1+b} \frac{-\frac{1+b}{R^2}2r}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}(1+b)}} = \frac{\frac{r}{R}}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}(1+b)}} \end{aligned}$$

Rigirando l'espressione di z :

$$z = \frac{R}{1+b} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}(1+b)} \right]$$

otteniamo che:

$$\frac{1+b}{R}z = 1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}(1+b)}$$

da cui:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{\frac{r}{R}}{1 - \frac{1+b}{R}z} = \frac{r}{R - (1+b)z} = \tan \vartheta$$

La lunghezza focale sarà $f = z + z_0$ e come si vede dalla figura $\tan 2\vartheta = \frac{r}{z_0}$, da cui:

$$\tan 2\vartheta = \frac{\sin 2\vartheta}{\cos 2\vartheta} = \frac{2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta} = \frac{2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{\cos^2 \vartheta (1 - \tan^2 \vartheta)} = \frac{2 \tan \vartheta}{1 - \tan^2 \vartheta} = \frac{r}{z_0}$$

7.1. IL TELESCOPIO RIFLETTORE

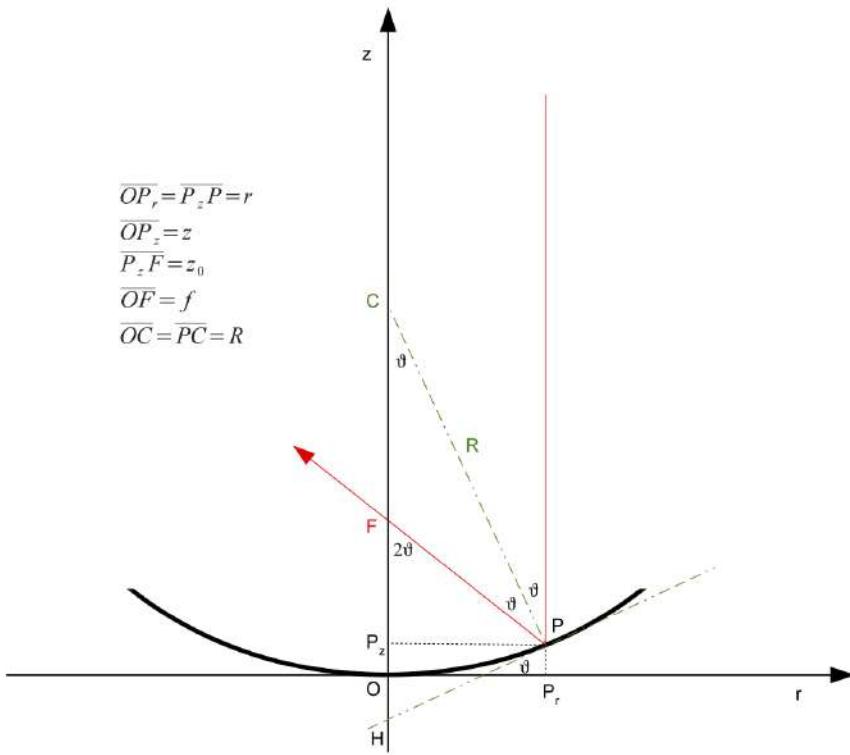


Figura 7.3: Un raggio luminoso dall'infinito (in rosso) raggiunge la superficie nel punto $P(r, z)$ e viene riflesso verso il fuoco F . L'angolo di riflessione è ϑ . La lunghezza focale f è data da z a cui si somma il segmento z_0 .

$$z_0 = \frac{r(1 - \tan^2 \vartheta)}{2 \tan \vartheta}$$

Sostituendo il valore di $\tan \vartheta$ appena calcolato, si ottiene:

$$z_0 = \frac{r \left(1 - \frac{r^2}{(R - (1+b)z)^2} \right)}{2 \frac{r}{R - (1+b)z}} =$$

$$= \frac{r}{2} \frac{(R - (1+b)z)^2 - r^2}{(R - (1+b)z)^2} \frac{R - (1+b)z}{r} =$$

$$= \frac{R - (1+b)z}{2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R - (1+b)z}$$

Calcoliamo ora l'espressione per la lunghezza focale:

$$f = z + \frac{R - (1+b)z}{2} - \frac{r^2}{2[R - (1+b)z]} = \frac{R}{2} + \frac{(1-b)z}{2} - \frac{r^2}{2[R - (1+b)z]}$$

CAPITOLO 7. TELESCOPI

E sostituendo l'espressione di z in serie di Taylor:

$$f = \frac{R}{2} - (1+b)\frac{r^2}{4R} - (1+b)(3+b)\frac{r^4}{16R^3} - \dots \quad (7.3)$$

Questa è l'espressione della focale di una conica generica. Come si vede dalla formula, il valore della focale dipende dal tipo di conica (b), dall'apertura del fascio (r), e infine dal raggio di curvatura (R). Quando $b = -1$, cioè quando la conica è un paraboloido, si ottiene:

$$f = \frac{R}{2}$$

quindi abbiamo un'unica focale che dipende solo dal raggio di curvatura della superficie ed è indipendente dall'apertura del fascio: i raggi marginali e i raggi parassiali vanno a fuoco sullo stesso piano focale. Invece, quando $b = 0$, cioè quando la conica è una superficie sferica, si ottiene:

$$f = \frac{R}{2} - \frac{r^2}{4R} - \frac{3}{16} \frac{r^4}{R^3} - \dots$$

quindi, al variare dell'apertura del fascio (r), varia la posizione del piano focale e in particolare, la focale si accorcia, al crescere dell'apertura del fascio. Nel caso in cui r sia piccolo, cioè se consideriamo solo i raggi parassiali, la quantità $\frac{r}{R} \ll 1$ e la focale vale $f = \frac{R}{2}$.

7.2 Coefficienti di aberrazione

Riprendiamo adesso le espressioni dei termini di aberrazione visti nel capitolo precedente e scriviamo la funzione di aberrazione (con l'assunzione $x_0 = 0$):

$$\tilde{\Phi} = -\frac{1}{4}B(\xi_1^2 + \eta_1^2)^2 - Cy_0^2\eta_1^2 - \frac{1}{2}Dy_0^2(\xi_1^2 + \eta_1^2) + Ey_0^3\eta_1 + Fy_0\eta_1(\xi_1^2 + \eta_1^2)$$

Sul piano delle immagini, l'aberrazione lungo gli assi cartesiani XY, vale:

$$\Delta x = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \xi_1} = B\xi_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) + Dy_0^2\xi_1 - 2Fy_0\xi_1\eta_1$$

$$\Delta y = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta_1} = B\eta_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) + 2Cy_0^2\eta_1 + Dy_0^2\eta_1 - Ey_0^3 - Fy_0(\xi_1^2 + \eta_1^2) - 2Fy_0\eta_1^2$$

Delle 5 aberrazioni, consideriamo le 3 che fanno perdere di stigmatismo al sistema: sferica (B), coma (F) e astigmatismo (C).

Chiamiamo y il raggio dello specchio primario del telescopio, mentre φ sia la distanza angolare della sorgente osservata dal centro del campo, che coincide con la direzione dell'asse ottico, quindi φ viene detto anche fuori-asse. In Fig. 7.4 sono rappresentate due sorgenti all'infinito: nel primo caso, la stella si trova sull'asse ottico, quindi il fascio di raggi proveniente dalla sorgente è parallelo all'asse ottico ($\varphi = 0$). Nel secondo caso, la stella è fuori asse ($\varphi \neq 0$) e la direzione del fascio di raggi paralleli emesso dalla sorgente all'infinito forma con l'asse ottico un angolo pari a $\varphi = \varphi_0$ che viene detto fuori-asse.

7.2. COEFFICIENTI DI ABERRAZIONE

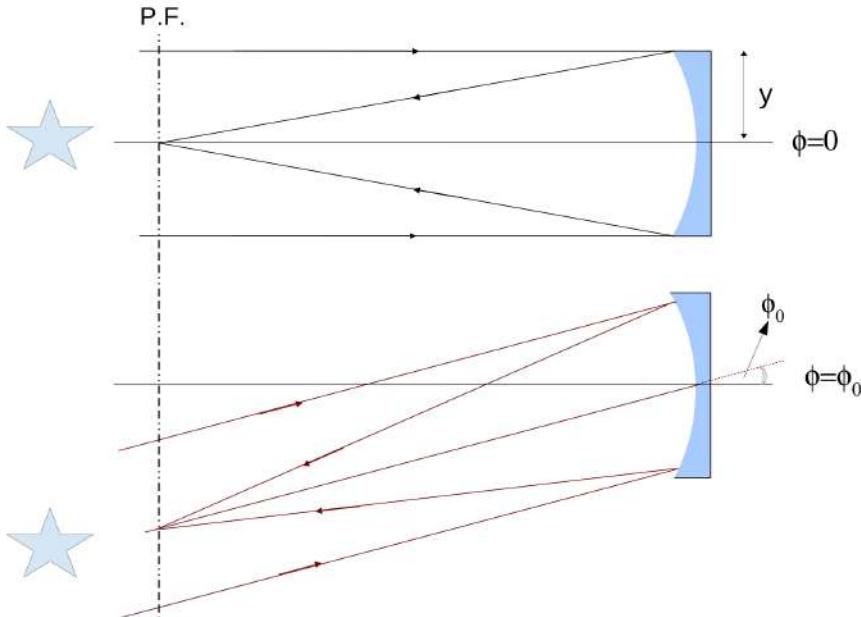


Figura 7.4: Consideriamo uno specchio sferico su cui incida la luce emessa da due sorgenti all'infinito. La sorgente nello schema in alto è posta all'infinito e sull'asse ottico ($\varphi = 0$): il fascio di raggi paralleli emesso è parallelo all'asse ottico. Nel secondo caso, la sorgente è sempre all'infinito, ma è distante dall'asse ottico ($\varphi = \varphi_0 \neq 0$): il fascio di raggi paralleli che viene emesso è inclinato di un angolo φ_0 rispetto all'asse ottico. La linea verticale indica il piano focale in entrambi i casi (P.F.).

Sappiamo che l'aberrazione sferica trasforma una sorgente puntiforme in un disco di raggio By^3 , la coma invece in una figura appuntita di lunghezza complessiva $3Fy^2\varphi$ (il fattore 3 è dovuta al fatto che consideriamo la circonferenza massima che ha raggio $r = Fy^2\varphi$ ed è posta ad una distanza dall'asse pari a $d = r = Fy^2\varphi$, per cui la dimensione totale è pari a $2r + d = 3Fy^2\varphi$), e infine l'astigmatismo in una figura allungata di dimensione $2Cy\varphi^2$.

I coefficienti di aberrazione B, F, C sono stati calcolati da Schwarzschild per un telescopio con due specchi:

$$B = \frac{1 + b_1}{8f_1^3} - \left[b_2 + \left(\frac{f + f_1}{f - f_1} \right)^2 \right] \frac{(f - f_1)^3(f_1 - d)}{8f^3f_1^4}$$

$$F = \frac{1}{4f^2} + \left[b_2 + \left(\frac{f + f_1}{f - f_1} \right)^2 \right] \frac{(f - f_1)^3d}{8f^3f_1^3}$$

$$C = \frac{f_1(f - d)}{2f^2(f_1 - d)} - \left[b_2 + \left(\frac{f + f_1}{f - f_1} \right)^2 \right] \frac{(f - f_1)^3d^2}{8f^3f_1^2(f_1 - d)}$$

CAPITOLO 7. TELESCOPI

In queste formule, f, f_1, f_2 sono la focale equivalente $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$, la focale dello specchio primario, la focale dello specchio secondario; d è la distanza fra primario e secondario; b_1, b_2 sono i coefficienti delle coniche dei due specchi. Vediamo adesso in sequenza i principali tipi di telescopi: Newton, Cassegrain, Ritchey-Chretien e Schmidt.

7.3 Telescopio Newton

Consideriamo un telescopio composto da un unico specchio. In questo caso assumiamo $f \equiv f_1$ e $b_2 = 0$. I coefficienti di aberrazione diventano:

$$B = \frac{1 + b_1}{8f^3} \quad C = \frac{1}{2f} \quad F = \frac{1}{4f^2}$$

Vediamo subito che l'unico coefficiente che è possibile eliminare, avendo un singolo specchio, è l'aberrazione sferica. Eliminare l'aberrazione sferica significa imporre $B = 0$. Questo significa che $b_1 = -1$, cioè lo specchio deve essere **parabolico**. Un telescopio in cui lo specchio primario è parabolico, mentre il secondario è uno specchio piano, si chiama telescopio Newton o newtoniano. Nel telescopio newtoniano, lo specchio secondario piano è inclinato di 45° rispetto all'asse ottico, e ha l'unica funzione di deviare i raggi di luce in direzione ortogonale a quella di arrivo (Fig. 7.5). Il bordo del secondario ha la forma ellittica, in modo da intercettare tutta la luce in arrivo e minimizzare l'ostruzione. Infatti, se consideriamo un piano che interseca un cono otteniamo come sezione una circonferenza, se il piano è parallelo alla base del cono, un'ellisse, una parabola e un'iperbole all'aumentare dell'angolo di inclinazione del piano rispetto alla base del cono. In questo caso, la superficie piana dello specchio intercetta il cono di luce proveniente dal primario formando una sezione ellittica.

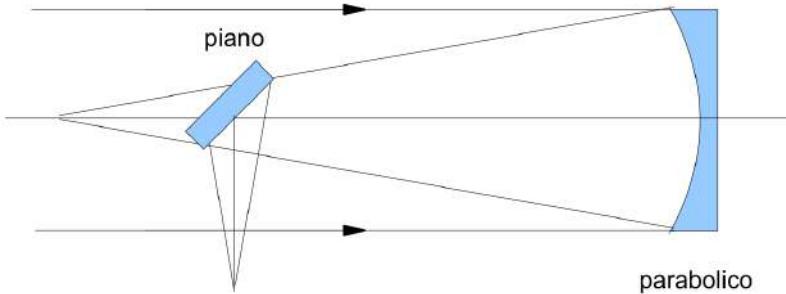


Figura 7.5: Il telescopio Newton è costituito da uno specchio primario parabolico, concavo, e un secondario piano, inclinato di 45° rispetto alla direzione dell'asse ottico.

Calcoliamo i valori delle aberrazioni per un telescopio Newton di diametro $D = 120$ cm e lunghezza focale $f = 600$ cm. Assumiamo solo per esercizio che il primario sia sferico, cioè che $b_1 = 0$. Ovviamente non possiamo parlare

7.4. TELESCOPIO CASSEGRAIN

di telescopio Newton in questo caso, ma può essere utile quantificare il valore dell'aberrazione sferica per confrontarlo con quelli di coma e astigmatismo. L'aberrazione sferica è data da:

$$By^3 = \frac{1}{8f^3} \left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{1}{64} \left(\frac{120}{600}\right)^3 = 1.25 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

Trasformando i radianti in secondi d'arco, cioè moltiplicando per $206265''/\text{rad}$ si ottiene un valore di circa $26''$. Possiamo notare, come abbiamo già visto, che il valore dell'aberrazione sferica è identico in tutto il campo, infatti dipende solo dall'apertura del fascio. Le aberrazioni di coma e astigmatismo sono date da:

$$3Fy^2\varphi = 3 \frac{1}{4f^2} y^2 \varphi = \frac{3}{4} \left(\frac{D}{2f}\right)^2 \varphi$$

$$2Cy\varphi^2 = 2 \frac{1}{2f} y\varphi^2 = \frac{D}{2f} \varphi^2$$

Supponiamo che $\varphi=10'$, cioè di osservare una sorgente a una distanza di $10'$ dal centro del campo. Convertendo in radianti, $\varphi= 2.91 \cdot 10^{-3}$ rad, e sostituendo:

$$\frac{3}{4} \left(\frac{120}{2 \cdot 600}\right)^2 \cdot 2.91 \cdot 10^{-3} = 2.18 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

che convertito in secondi d'arco corrisponde a circa $4.5''$.

$$\frac{120}{2 \cdot 600} (2.91 \cdot 10^{-3})^2 = 8.47 \cdot 10^{-7} \text{ rad}$$

che corrisponde a circa $0.17''$.

Calcolando ora la scala del telescopio: $S = \frac{206265}{6000} \cong 34.4''/\text{mm}$ e convertendo i valori delle aberrazioni da angolari a lineari si ottiene $760 \mu\text{m}$, $130 \mu\text{m}$ e $5 \mu\text{m}$ rispettivamente per aberrazione sferica, coma e astigmatismo. Infine se immaginiamo di porre sul piano focale del telescopio un sensore digitale avente pixel di dimensioni tra 13 e $15 \mu\text{m}$, è possibile calcolare l'estensione delle aberrazioni nell'immagine in pixel (~ 58 pixel per la sferica, 10 pixel per la coma e < 1 pixel per l'astigmatismo). Come si vede, l'astigmatismo produce un effetto trascurabile essendo inferiore alla dimensione del singolo pixel. Quindi, in definitiva, la principale aberrazione da cui è affetto un telescopio Newton è l'aberrazione di coma.

7.4 Telescopio Cassegrain

Come si nota dai calcoli precedenti, uno specchio parabolico è privo di aberrazione sferica, ma ha una forte aberrazione di coma. Per ridurre questa, bisogna intervenire allungando la focale del telescopio, infatti abbiamo visto che la coma è inversamente proporzionale al quadrato della focale ($F \propto f^{-2}$).

Il modo più pratico per farlo è introdurre un secondo specchio nel sistema. Prendiamo quindi in considerazione un sistema ottico formato da due specchi.

Per prima cosa, vogliamo eliminare l'aberrazione sferica che, come abbiamo visto

CAPITOLO 7. TELESCOPI

dal paragrafo precedente, rappresenta il contributo più significativo. Imporre la condizione che l'aberrazione sferica del sistema sia nulla, significa imporre che:

$$B = 0 \Rightarrow b_1 = -1 \text{ e } b_2 = -\left(\frac{f + f_1}{f - f_1}\right)^2$$

Quindi, il primario deve essere ancora **parabolico**. Consideriamo ora l'espressione per b_2 : la focale del primario non può essere negativa, perché i raggi che provengono dall'infinito devono convergere, la focale equivalente (f) deve essere maggiore della focale del primario, perché in questo modo riduciamo la coma, quindi $f + f_1 > |f - f_1|$, per cui si trova facilmente che $b_2 < -1$, cioè che lo specchio secondario deve essere **iperbolico**.

D'altra parte, con queste soluzioni, il coefficiente dell'aberrazione di coma vale $F = \frac{1}{4f^2}$ come prima. Stavolta però f è la focale equivalente del telescopio. Per ridurre la coma, la lunghezza focale deve aumentare. Partiamo allora dall'espressione della focale equivalente del sistema ottico:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

imporre che la focale equivalente sia maggiore della focale del primario comporta che:

$$f > f_1 \Rightarrow \frac{1}{f} < \frac{1}{f_1} \Rightarrow \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} < 0$$

Per quanto riguarda la focale f_2 del secondario, abbiamo due possibili casi:

- Primo caso: $f_2 < 0$ (secondario **convesso**)

$$-\frac{1}{|f_2|} + \frac{d}{f_1 |f_2|} < 0 \Rightarrow d < f_1$$

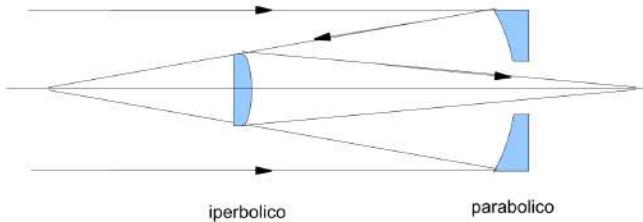


Figura 7.6: Schema ottico del telescopio Cassegrain: lo specchio primario, forato, è parabolico e concavo. Il secondario è iperbolico e convesso. Il piano focale è posto dietro lo specchio primario.

- Secondo caso: $f_2 > 0$ (secondario **concavo**)

$$\frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} < 0 \Rightarrow d > f_1$$

7.4. TELESCOPIO CASSEGRAIN

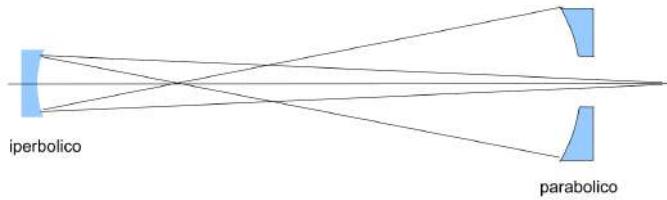


Figura 7.7: Schema ottico della configurazione gregoriana: lo specchio primario, forato, è parabolico e concavo. Il secondario è iperbolico e convesso. Il piano focale è posto dietro lo specchio primario.

Nel primo caso (Fig. 7.7, in alto) il telescopio è in configurazione **Cassegrain** (Guillaume Cassegrain, Francia, 1672), il secondario è posto prima del piano focale del primario, nel secondo (Fig. 7.7, in basso) si ha invece una specie di telescopio Gregoriano (James Gregory, Scozia, 1663), con il secondario posto oltre il piano focale del primario, anche se in realtà il Gregoriano utilizza un secondario concavo di superficie **ellissoidale**.

La configurazione Cassegrain consente quindi di ottenere telescopi con lunghezze focali lunghe mantenendo il telescopio di dimensioni relativamente compatte, infatti il secondario è posto a una distanza dal primario inferiore alla focale del primario. In entrambi i casi, il piano delle immagini è localizzato dietro lo specchio primario, che risulta quindi forato al centro.

Riprendiamo il caso del telescopio di Asiago che è un Cassegrain con lunghezza focale equivalente $F = 1200$ cm e con distanza $d = 372$ cm fra primario e secondario. Calcoliamo l'aberrazione di coma e di astigmatismo a $10'$ di distanza dal centro del campo (dove l'asse ottico principale incontra il piano delle immagini). Convertendo in radiant, $\varphi = 2.91 \cdot 10^{-3}$ rad, e sostituendo:

$$3Fy^2\varphi = \frac{3}{4} \left(\frac{60}{1200} \right)^2 \cdot 2.91 \cdot 10^{-3} = 5.46 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 1.125''$$

$$C = \frac{600 \cdot (1200 - 372)}{2 \cdot 1200^2 (600 - 372)} = 7.56 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$$

$$2Cy\varphi^2 = 2 \cdot 7.56 \cdot 10^{-4} \cdot 60 \cdot (2.91 \cdot 10^{-3})^2 = 7.68 \cdot 10^{-7} \text{ rad} \cong 0.16''$$

Usando la scala del telescopio, che ora vale $S = \frac{206265}{12000} \cong 17''/\text{mm}$. Una dimensione angolare in $10'$ si traduce sul piano focale in $66 \mu\text{m}$ di coma e $9.4 \mu\text{m}$ di astigmatismo, cioè circa 5 px e meno di 1 px assumendo di utilizzare un CCD con pixel da $13 \mu\text{m}$. In questo caso, l'astigmatismo è trascurabile e la coma è al di sotto delle condizioni tipiche di seeing dell'osservatorio, quindi entro $10'$ di raggio non si osserva.

Si noti infine che il valore della costante della superficie conica del secondario è:

$$b_2 = - \left(\frac{1200 + 600}{1200 - 600} \right)^2 = -9$$

Concludendo, nel telescopio Cassegrain si utilizza una combinazione di due specchi, un primario parabolico concavo e un secondario iperbolico convesso,

CAPITOLO 7. TELESCOPI

posto ad una distanza dal primario maggiore della sua focale. Il piano focale si trova dietro lo specchio primario, che risulta quindi forato. In questo modo, si elimina l'aberrazione sferica e si riduce l'aberrazione di coma, mantenendo compatte le dimensioni dello strumento.

7.5 Telescopio Ritchey-Chrétien

È possibile costruire un telescopio che sia privo di aberrazione sferica e di coma allo stesso tempo? Proviamo a ricavare le caratteristiche delle coniche che permettono di porre a zero sia il coefficiente B dell'aberrazione sferica, sia il coefficiente F della coma:

$$B(b_1, b_2) = 0 \quad F(b_2) = 0$$

$$B = 0 \Rightarrow \frac{1+b_1}{8f_1^3} - \left[b_2 + \left(\frac{f+f_1}{f-f_1} \right)^2 \right] \frac{(f-f_1)^3(f_1-d)}{8f^3f_1^4} = 0$$

$$F = 0 \Rightarrow \frac{1}{4f^2} + \left[b_2 + \left(\frac{f+f_1}{f-f_1} \right)^2 \right] \frac{(f-f_1)^3d}{8f^3f_1^3} = 0$$

Dalla seconda equazione ricaviamo che:

$$\left[b_2 + \left(\frac{f+f_1}{f-f_1} \right)^2 \right] \frac{(f-f_1)^3d}{8f^3f_1^3} = -\frac{1}{4f^2}$$

da cui:

$$b_2 + \left(\frac{f+f_1}{f-f_1} \right)^2 = -\frac{1}{4f^2} \frac{8f^3f_1^3}{(f-f_1)^3d}$$

$$b_2 = -\frac{2ff_1^3}{(f-f_1)^3d} - \left(\frac{f+f_1}{f-f_1} \right)^2$$

Sostituendo il valore di b_2 nell'espressione del coefficiente B , si ottiene:

$$\frac{1+b_1}{8f_1^3} + \frac{2ff_1^3}{(f-f_1)^3d} \frac{(f-f_1)^3(f_1-d)}{8f^3f_1^4} = 0$$

$$\frac{1+b_1}{2f_1^3} + \frac{f_1-d}{f^2f_1d} = 0$$

da cui si ricava l'espressione per il termine b_1 :

$$b_1 = -1 - 2 \frac{f_1-d}{d} \left(\frac{f_1}{f} \right)^2$$

Se $f_1 > d$, cioè se primario e secondario si trovano a distanza minore della focale del primario, così come avviene nel Cassegrain, si ottiene che $b < -1$, cioè il primario deve essere **iperbolico** e concavo, visto che $f_1 > d > 0$.

D'altra parte se consideriamo l'espressione di b_2 :

7.5. TELESCOPIO RITCHÉY-CHRÉTIEN

$$b_2 = -\frac{2ff_1^3}{(f-f_1)^3d} - \left(\frac{f+f_1}{f-f_1}\right)^2$$

vediamo che il primo termine è sicuramente negativo, perché f sarà maggiore di f_1 , come nel caso del Cassegrain, e $f_1 > 0$, quindi sono entrambe positive e il secondo è minore di -1 , perché $f+f_1 > f-f_1$ e quindi anche $b_2 < -1$, cioè anche il secondario è **iperbolico**. Con lo stesso procedimento applicato nel caso del Cassegrain, si ricava inoltre che il secondario è posto a $d < f_1$ ed è convesso. Il telescopio che unisce primario iperbolico e concavo a secondario iperbolico e convesso fu ideato da George Willis Ritchey e Henri Chrétien (Fig. 7.8). In questo caso, abbiamo un telescopio compatto, privo di aberrazione sferica e di aberrazione di coma. Nella maggior parte dei casi, i telescopi moderni sono Ritchey-Chrétien.

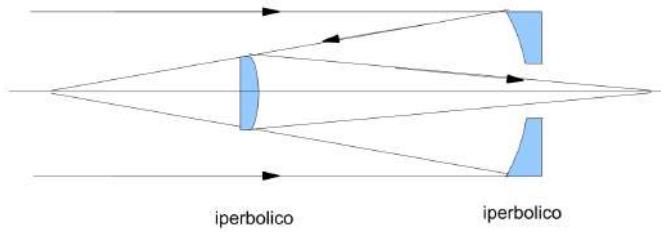


Figura 7.8: Schema ottico del telescopio Ritchey-Chrétien: lo specchio primario, forato, è iperbolico e concavo. Il secondario è iperbolico e convesso. Il piano focale è posto dietro lo specchio primario.

Ipotizziamo di avere un telescopio Ritchey-Chrétien con le caratteristiche del telescopio di Asiago e calcoliamo le costanti delle coniche relative ai due specchi:

$$b_1 = -1 - 2 \frac{600 - 372}{372} \left(\frac{600}{1200}\right)^2 = -1.30$$

$$b_2 = -\frac{2 \cdot 1200 \cdot 600^3}{372(1200 - 600)^3} - \left(\frac{1200 + 600}{1200 - 600}\right)^2 = -15.45$$

Si faccia attenzione al fatto che al fuoco primario questo telescopio non è esente da aberrazione sferica ($b_1 \neq -1 \rightarrow B \neq 0$)!

Calcoliamo adesso il valore dell'astigmatismo.

$$C = \frac{f_1(f-d)}{2f^2(f_1-d)} - \left[b_2 + \left(\frac{f+f_1}{f-f_1}\right)^2 \right] \frac{(f-f_1)^3d^2}{8f^3f_1^2(f_1-d)}$$

sostituendo il valore di b_2 :

$$b_2 = \frac{-2ff_1^3}{(f-f_1)^3d} - \left(\frac{f+f_1}{f-f_1}\right)^2$$

si ottiene:

CAPITOLO 7. TELESCOPI

$$\begin{aligned}
C &= \frac{f_1(f-d)}{2f^2(f_1-d)} + \frac{2ff_1^3}{(f-f_1)^3d} \frac{(f-f_1)^3d^2}{8f^3f_1^2(f_1-d)} = \\
&= \frac{f_1(f-d)}{2f^2(f_1-d)} + \frac{f_1d}{4f^2(f_1-d)} = \frac{2f_1f - 2f_1d + f_1d}{4f^2(f_1-d)} = \\
&= \frac{f_1(2f-d)}{4f^2(f_1-d)}
\end{aligned}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$C = \frac{600(2 \cdot 1200 - 372)}{4 \cdot 1200^2(600 - 372)} \cong 9.27 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$$

E infine possiamo calcolare il valore dell'astigmatismo a $10'$ dal centro del campo, ricordando che $\varphi = 10' = 2.91 \cdot 10^{-3}$ rad:

$$2Cy\varphi^2 = 2 \cdot 9.27 \cdot 10^{-4} \cdot 60 \cdot (2.91 \cdot 10^{-3})^2 = 9.42 \cdot 10^{-7} \cong 0.19''$$

Ancora una volta, l'astigmatismo ha valori analoghi a quelli trovati per il Newton e per il Cassegrain.

Concludendo, il telescopio Ritchey-Chrétien permette di eliminare l'aberrazione sferica e la coma, con uno strumento compatto, ottenuto da una combinazione di un primario iperbolico e concavo e di un secondario iperbolico e convesso, posto a una distanza dal primario inferiore alla focale di quest'ultimo. L'astigmatismo ha valori confrontabili con quelli del Newton e del Cassegrain.

7.6 Telescopio Schmidt

Bernhard Schmidt iniziò nel 1925 a sviluppare un sistema ottico caratterizzato da lunghezza focale corta e largo campo di vista corretto. Per ottenere un grande campo di vista, Schmidt sostituisce lo specchio parabolico, che produce immagini prive di coma solo per sorgenti in asse, implicando quindi un piccolo campo di vista corretto, con uno specchio sferico. Per ridurre l'aberrazione sferica introdotta, il fascio viene diaframmato. Si può dimostrare che esiste una posizione particolare in cui porre il diaframma che permette di azzerare la coma e l'astigmatismo.

Rispetto ai casi precedenti, in cui pupilla di entrata e di uscita coincidevano con lo specchio primario, qui la pupilla di entrata è il diaframma, che possiamo considerare come una superficie piana, quindi con curvatura pari a zero e raggio di curvatura infinito, di conseguenza $f_1 \propto R \rightarrow \infty$, mentre la focale del telescopio coincide con quella dello specchio sferico ($f \equiv f_2$) (Fig. 7.9).

Quindi, le equazioni di Schwarzschild si modificano e in particolare bisogna calcolarne il limite per $f_1 \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1+b_1}{8f_1^3} - \left[b_2 + \left(\frac{\frac{f}{f_1} + 1}{\frac{f}{f_1} - 1} \right)^2 \right] \frac{f_1^3 \left(\frac{f}{f_1} - 1 \right)^3 f_1 \left(1 - \frac{d}{f_1} \right)}{8f^3 f_1^4} \\
&\lim_{f_1 \rightarrow \infty} B = -[b_2 + 1] \frac{-1}{8f^3} = \frac{1+b_2}{8f^3} = B_0
\end{aligned}$$

7.6. TELESCOPIO SCHMIDT

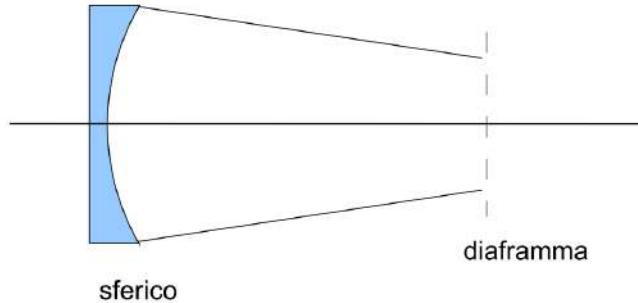


Figura 7.9: Schema ottico di un telescopio diaframmato con specchio sferico.

$$F = \frac{1}{4f^2} + \left[b_2 + \left(\frac{\frac{f}{f_1} + 1}{\frac{f}{f_1} - 1} \right)^2 \right] \frac{f_1^3 \left(\frac{f}{f_1} - 1 \right)^3 d}{8f^3 f_1^3}$$

$$\lim_{f_1 \rightarrow \infty} F = \frac{1}{4f^2} + [b_2 + 1] \frac{-d}{8f^3} = F_0 - dB_0$$

avendo indicato $F_0 = \frac{1}{4f^2}$.

$$C = \frac{f_1(f-d)}{2f^2 f_1 \left(1 - \frac{d}{f_1} \right)} - \left[b_2 + \left(\frac{\frac{f}{f_1} + 1}{\frac{f}{f_1} - 1} \right)^2 \right] \frac{f_1^3 \left(\frac{f}{f_1} - 1 \right)^3 d^2}{8f^3 f_1^3 \left(1 - \frac{d}{f_1} \right)}$$

$$\lim_{f_1 \rightarrow \infty} C = \frac{f-d}{2f^2} - [b_2 + 1] \frac{-d^2}{8f^3} = \frac{1}{2f} - \frac{d}{2f^2} + d^2 \frac{1+b_2}{8f^3} = C_0 - 2dF_0 + d^2B_0$$

avendo indicato $C_0 = \frac{1}{2f}$.

Quindi riassumendoabbiamo:

$$\begin{aligned} B &= B_0 \\ F &= F_0 - dB_0 \\ C &= C_0 - 2dF_0 + d^2B_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{con:} \\ B_0 &= \frac{1+b_2}{8f^3} \\ F_0 &= \frac{1}{4f^2} \\ C_0 &= \frac{1}{2f} \end{aligned}$$

Nel caso di uno specchio parabolico, $B_0 = 0$ e quindi $F = F_0 = \frac{1}{4f^2}$, cioè l'aberrazione di coma non dipende dalla distanza della pupilla di entrata rispetto allo specchio. La coma non può essere eliminata, ma solo ridotta aumentando la lunghezza focale.

CAPITOLO 7. TELESCOPI

In uno specchio sferico, invece, $b_2 = 0$ quindi $B_0 = \frac{1}{8f^3} \neq 0$, e possiamo cercare il valore di d che annulli sia F che C . Annullando l'aberrazione di coma si ha:

$$F = \frac{1}{4f^2} - d \frac{1}{8f^3} = 0 \Rightarrow d = 2f$$

e considerando che $f = \frac{R}{2}$, si ottiene $d = R$, con R raggio di curvatura dello specchio. Quindi, per annullare la coma, bisogna porre il diaframma in coincidenza con il centro di curvatura dello specchio, ad una distanza dallo specchio pari al doppio della distanza focale. Sostituiamo adesso questo valore di d , nell'espressione di C :

$$C = \frac{1}{2f} - \frac{2f}{2f^2} + \frac{1}{8f^3}(2f)^2 = \frac{1}{2f} - \frac{1}{f} + \frac{1}{2f} = 0$$

Quindi, la condizione $d = 2f$ annulla sia la coma che l'astigmatismo: il sistema ottico costituito da uno specchio sferico e da un diaframma posto nel centro di curvatura dello specchio risulta, quindi, privo di coma e di astigmatismo. Questa posizione particolare del diaframma fa sì che il fascio di raggi paralleli provenienti dalla sorgente, sia impennato nel centro di curvatura dello specchio: in tal modo, anche se il fascio è inclinato rispetto all'asse ottico principale, proprio per la sfericità della superficie riflettente, di volta in volta viene isolata una porzione dello specchio rispetto alla quale l'asse ottico secondario del fascio diventa asse ottico principale. In altre parole, il sistema ottico non è più in grado di avvertire che i fasci sono fuori-asse ed è quindi esente da tutte le aberrazioni dipendenti da φ .

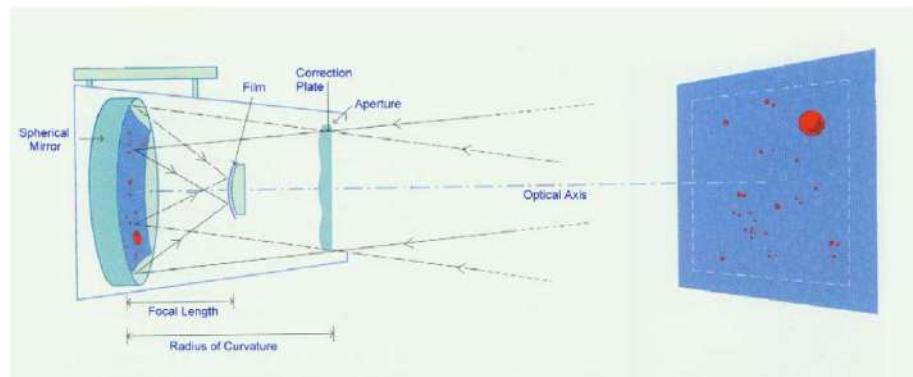


Figura 7.10: (Wolfschmidt 2009, AN 330, p. 555–561)

Resta il problema, non trascurabile, dell'aberrazione sferica. È chiaro che più il diaframma è chiuso e minore è la sferica perché si utilizzano raggi sempre più parassiali, d'altra parte è minore anche la quantità di luce che entra, e si finisce per non sfruttare la superficie dello specchio come collettore di luce. L'aberrazione sferica viene corretta utilizzando una **lente correttiva**, che diaframma il fascio, avendo sezione inferiore al diametro dello specchio e posta nel centro di curvatura dello specchio.

7.6. TELESCOPIO SCHMIDT

Il telescopio Schmidt è quindi ottenuto dalla combinazione di due elementi ottici, uno specchio sferico e una lente correttore, che permettono di avere uno strumento privo di aberrazione sferica, di coma e di astigmatismo.

La lente correttore è in grado di “trasformare” uno specchio sferico in parabolico, modificando il cammino ottico dei raggi in modo che sembrino provenire, una volta riflessi, da uno specchio parabolico e non da uno sferico. La lente ha una curvatura asferica molto leggera, calcolata in modo da dare al fronte d’onda incidente la deformazione necessaria per far sì che il fronte d’onda riflesso risulti sferico.

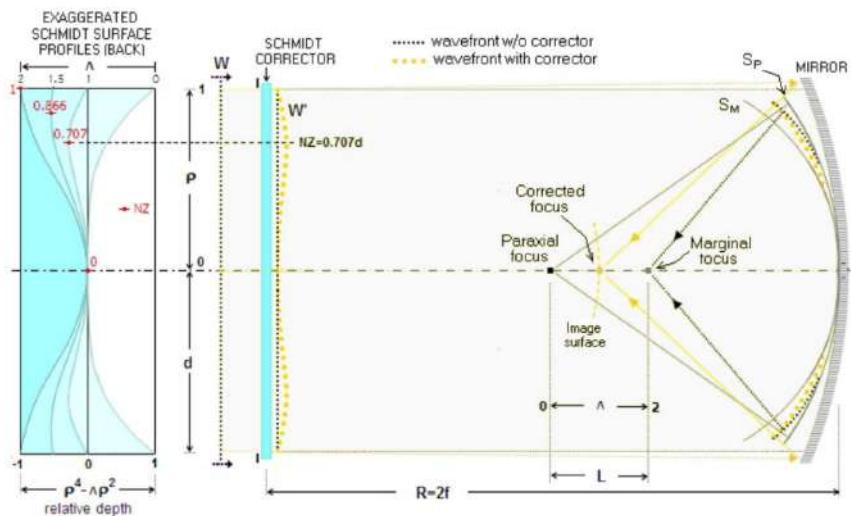


Figura 7.11:

L’aberrazione sferica deforma il fronte d’onda riflesso rendendolo maggiormente curvato ai bordi rispetto ad un fronte d’onda sferico. Un punto marginale del fronte d’onda appartiene ad una sfera centrata nel fuoco marginale (S_M in Fig. 7.11), mentre un punto parassiale appartiene ad una sfera centrata nel fuoco parassiale (S_P in Fig. 7.11) e punti intermedi a sfere centrate in posizioni intermedie. La separazione assiale tra i due fuochi determina l’aberrazione sferica longitudinale (L in Fig. 7.11). Il ruolo della lastra correttrice è quello di trasformare il fronte d’onda incidente piatto W in W' deformato in modo tale che dopo la riflessione da parte dello specchio, il fronte d’onda sia sferico e rifletta i raggi in un unico punto. Quindi, la lente compensa la differenza di cammino ottico creata alla superficie dello specchio.

Ricaviamo ora l’espressione matematica che ci dà la differenza di cammino ottico tra la superficie sferica e quella parabolica. Consideriamo l’equazione del profilo di una superficie sferica di raggio R , centrata in $(R, 0)$. Sia D il diametro dello specchio e $P(x, y)$ un punto sulla superficie definita dalla seguente formula (Fig. 7.12):

$$(R - x)^2 + y^2 = R^2$$

CAPITOLO 7. TELESCOPI

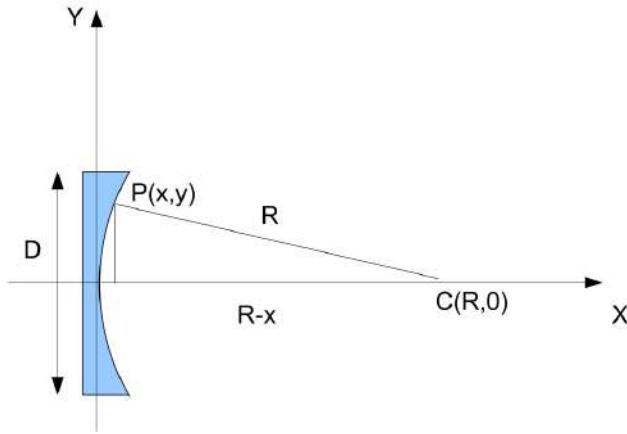


Figura 7.12:

Sviluppando il quadrato si ricava:

$$R^2 + x^2 - 2Rx + y^2 = R^2$$

da cui, esplicitando x e considerando solo la soluzione con il segno $-$, perché $x < R$:

$$x = R - \sqrt{R^2 - y^2} = R - R\sqrt{1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2}$$

Essendo $\frac{y}{R} < 1$, poniamo $u = -\left(\frac{y}{R}\right)^2$ e ricordando lo sviluppo della radice

$$\sqrt{1+u} \cong 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \dots$$

si ottiene:

$$x = R - R\sqrt{1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2} \cong \frac{y^2}{2R} + \frac{y^4}{8R^3} + \dots$$

Il termine $\frac{y^2}{2R}$ rappresenta il profilo parabolico, mentre il termine $\frac{y^4}{8R^3}$ è l'eccesso di convergenza dello specchio sferico rispetto al parabolico. Per cui, trascurando termini di ordine superiore, possiamo dire che la quantità $\Delta = \frac{y^4}{8R^3}$ è di fatto il cammino ottico da aggiungere ai raggi paralleli all'asse ottico principale che incidono sullo specchio sferico a distanza y dall'asse per ottenere l'equivalente parabolico.

Nel caso più generale, il profilo della lente correttrice sarà:

$$T(y) = T(0) + \beta \frac{y^4}{4(n-1)}$$

dove $T(0)$ è lo spessore della lastra al centro, β è la variabile legata alla forma della lente.

7.6. TELESCOPIO SCHMIDT

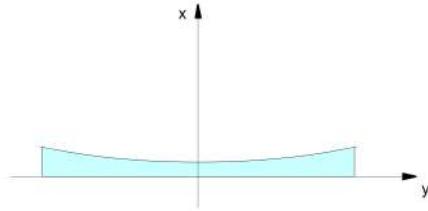


Figura 7.13: Lente correttore piano divergente ai bordi.

Si può dimostrare che i coefficienti di aberrazione in presenza di lastra correttore piano divergente ai bordi diventano:

$$B = \frac{1+b}{8f^3} - \beta = \frac{1}{8f^3} - \beta$$

$$F = \frac{1}{4f^2} - d\beta$$

$$C = \frac{1}{2f} - d^2\beta$$

Deriviamo la condizione che annulla l'aberrazione sferica, la coma e l'astigmatismo. Abbiamo così 3 equazioni nelle 3 incognite (b, d, β). Dal coefficiente dell'aberrazione sferica ricaviamo il valore di β :

$$B = 0 \Rightarrow \beta = \frac{1}{8f^3}$$

Ponendo a zero il coefficiente di coma, e sostituendo il valore di β appena trovato, otteniamo a che distanza dal primario si deve porre la lente:

$$F = 0 \Rightarrow \frac{1}{4f^2} - d\frac{1}{8f^3} = 0 \Rightarrow d = 2f$$

Sostituendo i valori trovati nell'espressione di C , si annulla anche l'aberrazione di astigmatismo:

$$C = \frac{1}{2f} - (2f)^2 \frac{1}{8f^3} = \frac{1}{2f} - \frac{1}{2f} = 0$$

Il sistema è quindi privo delle aberrazioni che gli fanno perdere di stigmatismo, se la lastra viene posta in corrispondenza del diaframma. Se trascuriamo la distorsione, resta solo la curvatura di campo, il cui coefficiente vale $|D| = \frac{1}{2f}$.

Una lente correttore del tipo descritto finora soffre di aberrazione cromatica. La lente correttore di Schmidt può cancellare l'aberrazione sferica dello specchio solo per una singola lambda, per la quale la forma della lastra correttore produce l'esatta quantità di ritardo del fronte d'onda, necessario per la cancellazione. Per le altre lambda, la quantità di ritardo del fronte d'onda, devierà sotto o sopra l'ottimo, risultando in aberrazione sferica. Bisogna trovare la posizione di fuoco che produce il circolo di minima confusione per l'insieme delle lunghezze d'onda.

CAPITOLO 7. TELESCOPI

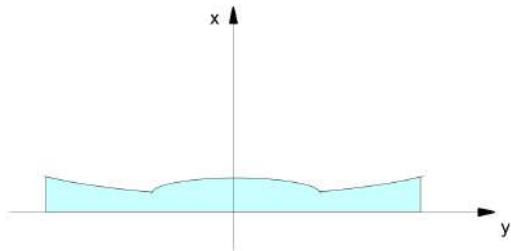


Figura 7.14: Lente correttore piano-convergente al centro e piano-divergente ai bordi.

La nuova forma della lente correttore (Fig. 7.14) avrà equazione:

$$T(y) = T(0) + \frac{y^4 - Ay^2}{32(n-1)f^3}$$

dove A è il termine che minimizza l'aberrazione cromatica e contiene il raggio di curvatura e un fattore di forma della lastra.

Se applichiamo il primo tipo di lastra otteniamo che i raggi parassiali la attraversano praticamente indisturbati, mentre i raggi marginali divergono dopo aver attraversato la lastra in modo tale da produrre una convergenza più lunga e far coincidere il loro fuoco con quello dei raggi parassiali (Fig. 7.15).

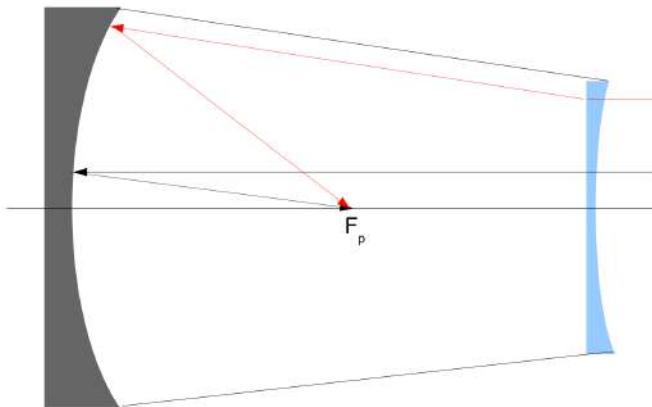


Figura 7.15:

Invece, utilizzando la seconda lastra correttore vengono deviati sia i parassiali, che convergono, che i marginali, che divergono, con il risultato che i parassiali anticipano la convergenza, mentre i marginali la ritardano e la posizione del fuoco è intermedia fra quella dei raggi parassiali e quella dei raggi marginali (in assenza di lastra correttore) (Fig. 7.16).

7.6. TELESCOPIO SCHMIDT

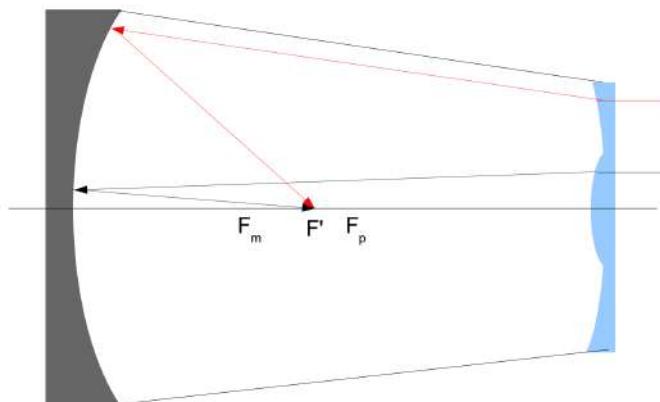


Figura 7.16:

Il primo telescopio Schmidt costruito aveva le seguenti caratteristiche tecniche: un primario sferico con diametro pari a 44 cm, una lastra correttrice di 36 cm di diametro, la lunghezza focale era di 625 cm, con un rapporto di apertura 1:1.75. Il campo di vista corretto era pari a 15° .

Questo tipo di telescopio presenta due problematiche: una è il piano focale curvo e l'altra sono le dimensioni elevate. Infatti, a differenza del Cassegrain, che è uno strumento compatto, lo Schmidt ha una lunghezza maggiore, perché la sua dimensione totale è pari a due volte la lunghezza focale, mentre nel Cassegrain è circa un terzo. Per risolvere il secondo problema, sono state costruite delle configurazioni più compatte come ad esempio lo Schmidt-Newton e lo Schmidt-Cassegrain.

CAPITOLO 7. TELESCOPI

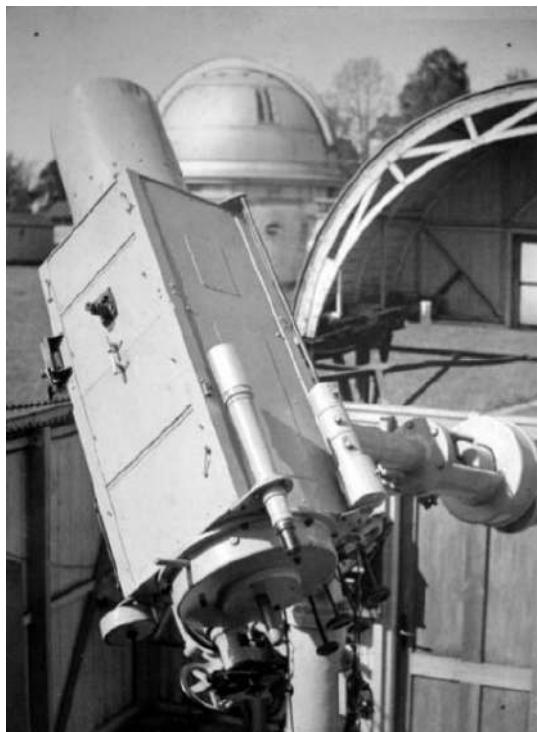


Figura 7.17:

8

Esperienze

8.1 Banco ottico

Per effettuare le esperienze di ottica del corso si utilizza il banco ottico schematizzato in Fig. 8.1.

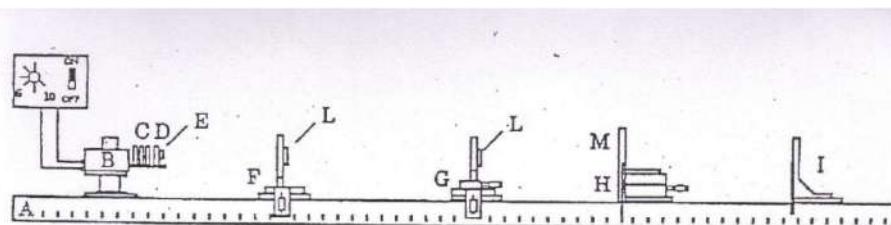


Fig.V.1.1. Schema del banco ottico. A: profilato guida con riga millimetrata; B: lampada; C: filtri interferenziali; D: porta-mascherine oggetto; E: mascherina oggetto; F: cavaliere portalenti fisso; G: cavaliere portalenti con movimento micrometrico lungo l'asse X; H: cavaliere portaschermo con movimenti micrometrici lungo gli assi X e Y; I: cavaliere con squadra per posizionamento mascherina oggetto; L: ghiere portalenti; M: schermo in vetro smerigliato; N: alimentatore della lampada con regolazione di intensità e interruttore.

Figura 8.1:

La rotaia su cui può scorrere il tutto è costituita da un profilato di alluminio (A) munito di una scala graduata che valuta il mezzo millimetro, cioè con una sensibilità di 0.5 mm. Sul suo asse orizzontale, che indicheremo con X, saranno posti con relativa posizione x:

- una lampada alogena (B) alimentata con corrente alternata variabile da 6 a 10 Volt da cui fuoriesce luce bianca che può attraversare
 - filtri (C) di tipo interferenziale e precisamente: a) un filtro blu centrato su $\lambda_F = 4861\text{\AA}$, lunghezza d'onda vicina alla riga F dello spettro di Fraunhofer; b) un filtro giallo centrato su $\lambda_D = 5893\text{\AA}$, lunghezza d'onda vicina alla riga D dello spettro di Fraunhofer e infine c) un filtro rosso centrato su $\lambda_C = 6563\text{\AA}$, lunghezza d'onda vicina alla riga C dello spettro di Fraunhofer, che corrispondono rispettivamente alla

CAPITOLO 8. ESPERIENZE

riga dell'idrogeno $H\beta$, alla riga del doppietto del sodio, e alla riga dell'idrogeno $H\alpha$;

- una mascherina (E) ad 1 foro di diametro $d = 0.5 \pm 0.01$ mm per ottenere una sorgente di luce puntiforme e una mascherina a 2 fori con lo stesso diametro d distanti 4 ± 0.01 mm per ottenere una sorgente estesa, entrambe da porre sul braccio della lanterna e poste in un porta mascherine (D);
- un cavaliere posizionatore (I) da far combaciare tramite due perni metallici da infilarsi negli appositi fori del cavaliere. La posizione della mascherina verrà letta a destra della molla del posizionatore;
- due cavalieri portalenti, uno fisso (F) e l'altro (G) dotato di movimento micrometrico lungo l'asse X;
- alla loro destra si avviterano con un nonio circolare di sensibilità 0.01 mm le ghiere portalenti ove sono poste le lenti che saranno utilizzate di volta in volta nelle esperienze;
- due tipi di diaframmi, uno indicato con D4, a 4 fori di 0.50 ± 0.01 mm di diametro, 2 parassiali a distanza $R_1 = 2.50 \pm 0.01$ mm dal centro e 2 marginali alla distanza $R = 14.00 \pm 0.01$ mm sempre dal centro. L'altro indicato con D1 e avente un foro centrale di diametro $d = 10.00 \pm 0.01$ mm;
- un cavaliere portaschermo (M) con movimento lungo gli assi X e Y, cioè ortogonalmente all'asse ottico per spostamenti perpendicolari al piano della rotaia;
- un alimentatore della lampada con regolazione d'intensità.

8.1.1 Cavalieri portalenti

Ogni banco ha in dotazione due cavalieri portalenti di tipo diverso, uno fisso e l'altro dotato di movimento micrometrico lungo l'asse X, come si può vedere in Fig. 8.2.

All'altezza dell'asse ottico c'è un foro filettato dove è possibile avvitare sia i diaframmi, a sinistra, che, a destra, le ghiere portalenti, che una volta posizionate avranno il loro spigolo sinistro, cioè la battuta, in corrispondenza della faccia destra del portalente stesso. Nel caso del portalente fisso la tacca che indica la lettura sulla scala graduata del banco passerà per il piano fisso indicato dalla freccia che attraverserà il centro della lente; per quanto riguarda il cavaliere mobile a movimento micrometrico, una volta azzerato il micrometro dopo aver avvitato la ghiera, bisognerà fare avanzare lo stesso micrometro del valore indicato su di esso e aggiungerci il valore $\frac{dr}{2}$ della lente utilizzata.

8.1.2 Cavaliere portaschermo

Tale cavaliere fisserà uno schermo traslucido costituito da un vetro smerigliato su cui è tracciato un reticolo con passo di $10 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$. La lettura della posizione dello schermo rispetto alla scala graduata del banco viene effettuata sempre sul filo destro dell'indice (Fig. 8.3).

8.1. BANCO OTTICO

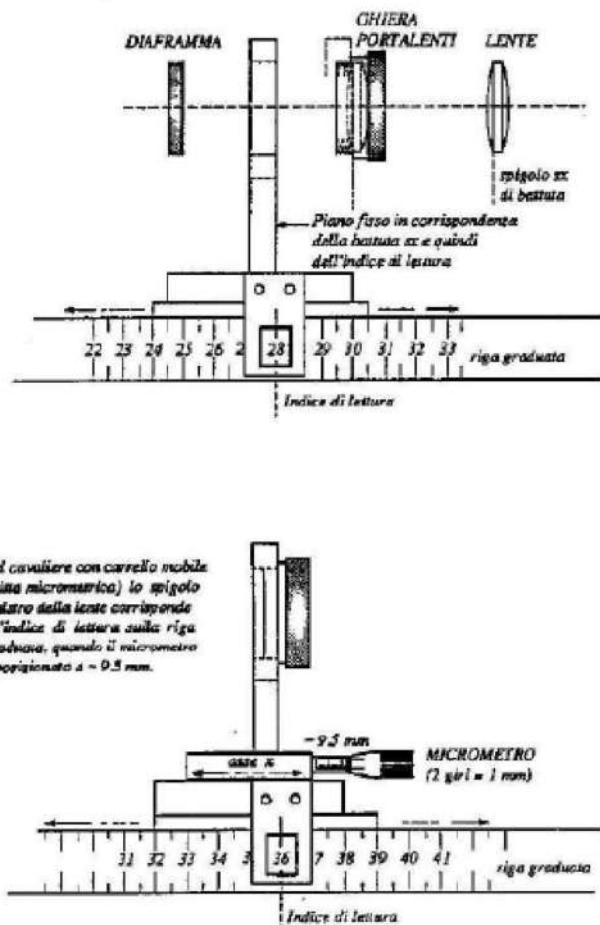


Figura 8.2:

8.1.3 Lenti e diaframmi

In Fig. 8.4 sono riportate le lenti usate nelle esperienze in laboratorio; la seconda da sinistra è la lente convergente, la terza, sempre da sinistra è quella divergente, mentre la prima a destra è il doppietto acromatico utilizzato come lente collimatrice. Sotto sono disegnati i due tipi di mascherina, a un foro per creare una sorgente puntiforme e a due fori per avere una sorgente estesa, e i due diaframmi che saranno usati, quello con un foro centrale D1 e il diaframma D4 a 4 fori per selezionare raggi parassiali e marginali.

Il vetro di cui sono costituite le lenti (BK7) ha indice di rifrazione:

$$n(\lambda_C) = 1.5143, \quad n(\lambda_F) = 1.5224, \quad n(\lambda_D) = 1.5168$$

CAPITOLO 8. ESPERIENZE

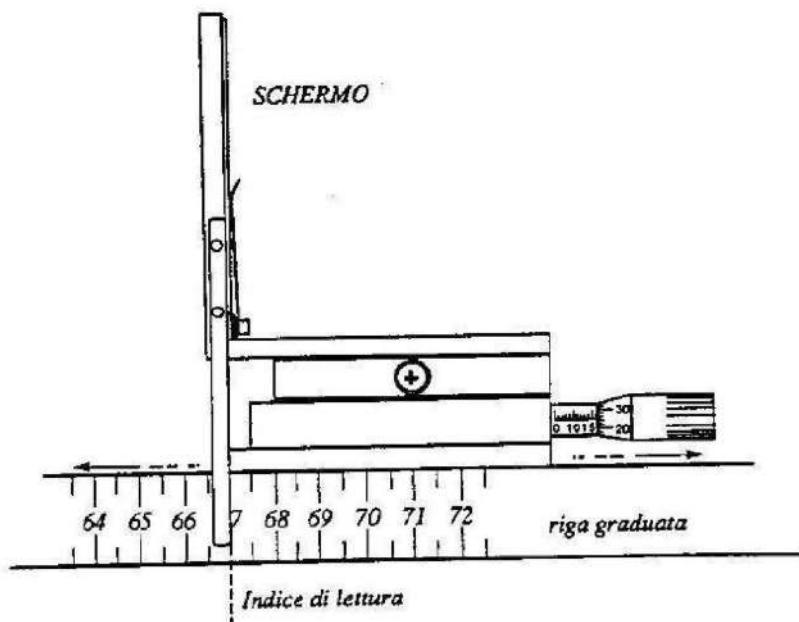


Figura 8.3:

In Fig. 8.5 sono riportate le caratteristiche geometriche delle lenti con i valori di VV' e dr che competono ad esse.

8.1. BANCO OTTICO

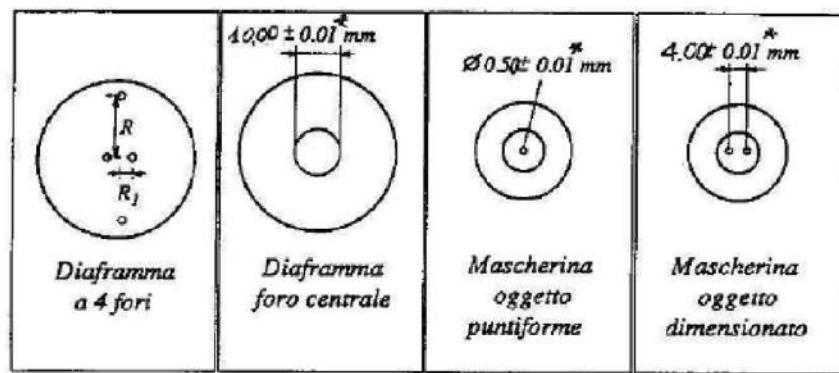
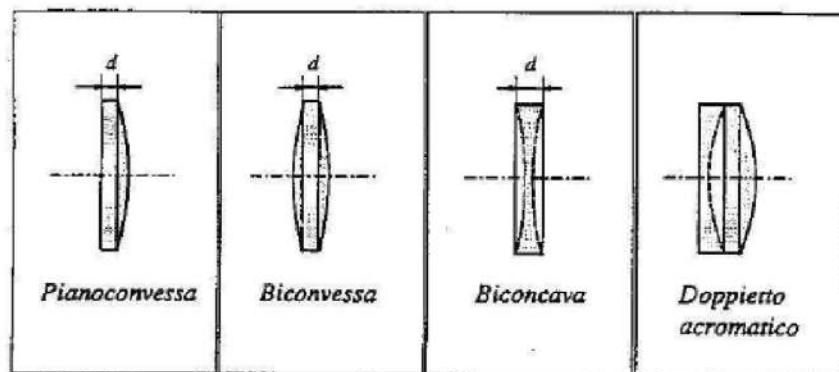


Figura 8.4:

CAPITOLO 8. ESPERIENZE

Lente n.	VV' (mm)	Dr (mm)
<i>Lenti convergenti</i>		
1	10.10	2.60
2	10.10	2.70
3	8.00	2.30
4	8.00	2.30
5	10.10	2.70
6	10.10	2.70
7	7.00	2.30
8	10.10	2.60
9	10.10	2.70
10	10.10	2.60
11	10.10	2.70
12	10.10	2.60
13	10.10	2.60
14	10.10	2.60
15	11.80	2.60
16	11.80	2.40
17	6.00	2.10
<i>Lenti divergenti</i>		
18		5.90
19		5.70
20		5.70
21		5.70
22		5.70
23		5.70
24		5.70
25		3.90
26		3.90
27		3.90
28		3.90
29		3.90
30		3.90
31		5.70

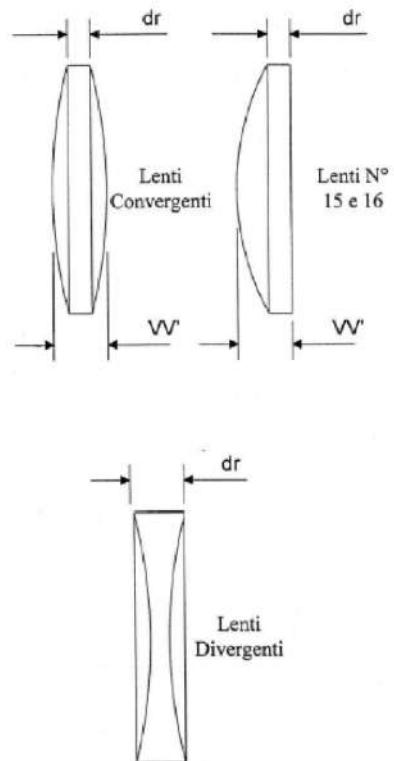


Figura 8.5:

8.2. MISURA DELLA FOCALE DI UNALENTE CONVERGENTE SOTTILE

8.2 Misura della focale di una lente convergente sottile

Dotazione: banco ottico e lente convergente.

Scopo dell'esperienza: determinazione della lunghezza focale f di una lente convergente biconvessa simmetrica.

Generalmente si possono utilizzare per la misura diversi metodi:

- metodo della collimazione;
- metodo dei punti coniugati;
- metodo di Bessel;
- variante di Silbermann.

8.2.1 Metodo della collimazione

Consideriamo una lente convergente e immaginiamo di porre una sorgente di luce a sinistra della lente e molto lontano da essa, tanto da poterla considerare all'infinito. Dalla teoria sappiamo che tale lente concentrerà un fascio di raggi paralleli al suo asse ottico in un punto detto fuoco secondario (F_2), che si trova a destra della lente stessa. La distanza tra F_2 ed il vertice della lente dalla parte del fuoco è detta distanza focale. Ma la lente è dotata di due fuochi, per cui se adesso poniamo una sorgente luminosa puntiforme nel fuoco primario (F_1) essa genera un fascio di raggi omocentrico che viene collimato dalla lente convergente in un fascio di raggi paralleli all'asse ottico, che emerge a destra della lente.

In generale le due distanze focali sono diverse ma per una lente simmetrica, come nel nostro caso, esse coincidono e nel limite di spessore nullo della lente sono uguali alla lunghezza focale della lente, che è quella per cui vale l'equazione dei punti coniugati. Tali ipotesi sono verificate per tutte le lenti che si trovano in laboratorio. Dunque, se si pone la lente a una distanza dalla sorgente puntiforme tale che il fascio emergente sia collimato, quella distanza è proprio la lunghezza focale della lente.

In pratica, si tratta di avvitare la lente nell'apposito supporto, cioè a destra del cavaliere portalenti con micrometro e provvedere a centrarla in modo che il centro della lente cada esattamente in corrispondenza della tacca bianca del supporto, tacca a cui ci si riferisce per le letture sulla scala graduata. Per il centraggio si regola la vite micrometrica del supporto nella posizione di azzeramento indicata sul supporto stesso ($\Delta_{micrometro}$), cui si aggiunge il semi-spessore minimo della lente $\frac{dr}{2}$. Si inserisce poi la mascherina puntiforme nel braccio della lanterna e si pone la lente a diverse distanze p dalla sorgente (cioè la mascherina), fino a trovare la distanza alla quale il fascio emergente è ben collimato. L'errore su p è dato dalla somma dell'errore di sensibilità sulla posizione della sorgente e dell'errore di sensibilità sulla posizione della lente. Per controllare la collimazione del fascio si fa scorrere lo schermo lungo la rotaia,

CAPITOLO 8. ESPERIENZE

controllando che la macchia luminosa che si forma su di esso mantenga sempre lo stesso diametro. La collimazione appare buona non per un unico valore di p , ma per un certo intervallo di valori di p . È possibile determinare il massimo e il minimo valore corretto di p , per ottenere una stima di f e di Δf .

Questo metodo è relativamente poco accurato, ma permette di ottenere rapidamente una stima della distanza focale della lente convergente.

8.2.2 Metodo dei punti coniugati

Questo metodo sfrutta l'equazione dei punti coniugati:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

Riscriviamo questa equazione esplicitando f e calcoliamo l'errore massimo associato Δf utilizzando la propagazione degli errori:

$$f = \frac{pq}{p+q}$$

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial p} \right| \Delta p + \left| \frac{\partial f}{\partial q} \right| \Delta q$$

$$\Delta f = \frac{q^2}{(p+q)^2} \Delta p + \frac{p^2}{(p+q)^2} \Delta q$$

Si utilizza la mascherina per la sorgente puntiforme e si applica il diaframma D4 per mettersi nella condizione di raggi parassiali (Fig. 8.6).

Operativamente, si posiziona la lente a una distanza p_k con $k = 1, 2, \dots, 10$, dalla sorgente puntiforme. L'errore associato Δp_k sarà dato dalla combinazione dell'errore di sensibilità della scala graduata agli estremi del segmento p_k . Si porta lo schermo vicino alla lente e si comincia ad allontanarlo, finché i due punti-immagine diventano uno solo. Si misura la posizione sulla scala graduata indicando questo valore come $q_{k,min}$. A causa della profondità di campo, esisterà un $q_{k,max}$ oltre il quale il punto si sfuoca di nuovo in due punti. Tra $q_{k,min}$ e $q_{k,max}$ l'immagine della sorgente puntiforme è ancora puntiforme. Si calcola il valore medio fra $q_{k,min}$ e $q_{k,max}$ e si prende quello come valore di q_k corrispondente al valore di p_k .

Conviene ripetere questa misura 10 volte, in modo da avere:

$$q_{kj} = \frac{q_{kj,max} + q_{kj,min}}{2} \quad j = 1, 2, \dots, 10$$

$$q_k = \frac{\sum_{j=1}^{10} q_{kj}}{10} \quad \sigma_{q_k} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{10} (q_{kj} - q_k)^2}{9}}$$

8.2. MISURA DELLA FOCALE DI UNA LENTE CONVERGENTE SOTTILE

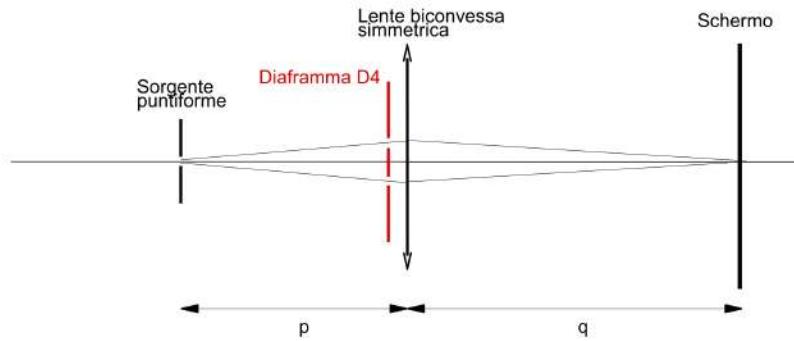


Figura 8.6:

A causa dell'effetto combinato di profondità di campo e errore di misura, è consigliabile utilizzare gli errori massimi, per cui $\Delta q_k = 3\sigma_{q_k}$.

Per ogni valore di k si calcola il corrispondente valore della lunghezza focale e del suo errore $f_k \pm \Delta f_k$. Infine si calcola la media pesata dei valori ottenuti per ricavare la lunghezza focale della lente:

$$f = \frac{\sum_{k=1}^{10} w_k f_k}{\sum_{k=1}^{10} w_k} \quad \sigma_f = \sqrt{\frac{1}{\sum_{k=1}^{10} w_k}} \quad w_k = \left(\frac{1}{\sigma_{f_k}} \right)^2$$

Si tenga conto che $\Delta f = 3\sigma_f$ e $\Delta f_k = 3\sigma_{f_k}$.

8.2.3 Metodo di Bessel

Il metodo di Bessel si basa sulla constatazione che partendo dalla legge dei punti coniugati e tenendo fissa la distanza fra sorgente e schermo su cui si forma l'immagine, si hanno due possibili posizioni della lente che consentono di mettere a fuoco l'immagine. Queste due posizioni saranno simmetriche rispetto al centro della distanza sorgente-schermo.

CAPITOLO 8. ESPERIENZE

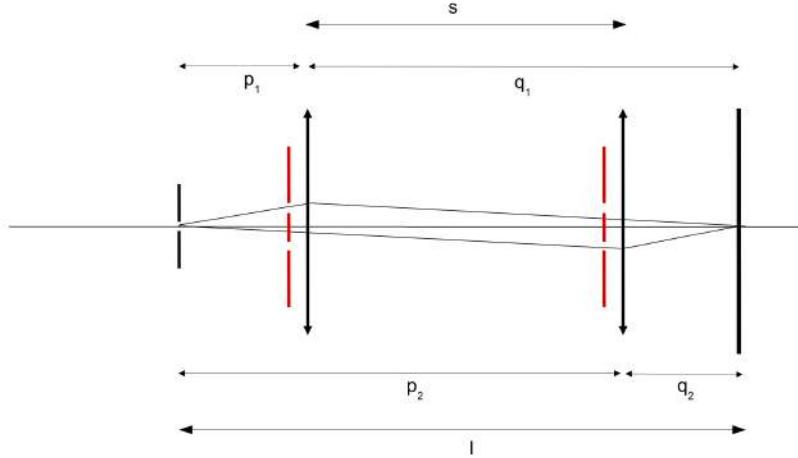


Figura 8.7:

Come si vede dalla figura (Fig. 8.7), $p_1 = q_2$ e $p_2 = q_1$. Chiamiamo l la distanza sorgente-schermo e s la distanza fra le due posizioni della lente per cui si ha un'immagine a fuoco sullo schermo.

$$f = \frac{pq}{p+q} \quad q = l - p$$

$$f = \frac{p(l-p)}{p+l-p} = \frac{pl-p^2}{l}$$

$$p^2 - pl + fl = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{1,2} = \frac{l \pm \sqrt{l^2 - 4lf}}{2}$$

Se $l = 4f$ si ha $p_1 = p_2 = q_1 = q_2$, cioè la lente è posizionata a metà della distanza sorgente-schermo.

Se $l > 4f$, si ha $p_1 \neq p_2$:

$$p_1 = \frac{l}{2} - \frac{s}{2} \quad q_1 = l - p_1 = l - \frac{l}{2} + \frac{s}{2} = \frac{l}{2} + \frac{s}{2}$$

$$f = \frac{p_1 q_1}{p_1 + q_1} = \frac{\left(\frac{l}{2} - \frac{s}{2}\right)\left(\frac{l}{2} + \frac{s}{2}\right)}{\frac{l}{2} - \frac{s}{2} + \frac{l}{2} + \frac{s}{2}} = \frac{l^2 - s^2}{4l}$$

8.2. MISURA DELLA FOCALE DI UNA LENTE CONVERGENTE SOTTILE

Quindi è possibile esprimere la lunghezza focale della lente in termini della distanza sorgente-schermo e della distanza fra le posizioni della lente per cui si ha un'immagine a fuoco.

Operativamente, si fissa lo schermo a una distanza l_1 maggiore di $4f$, si determinano le due posizioni $p_{1,1}$ e $p_{2,1}$, si calcola $s_1 = |p_{2,1} - p_{1,1}|$, si ripete questa operazione per un numero di volte $N=10$, in modo da avere $\bar{s}_1 \pm \sigma_{\bar{s}_1}$. Si ripete l'operazione ponendo lo schermo a una distanza $l_2 > l_1$ fino a l_{10} . Dalla propagazione degli errori, l'errore massimo su l sarà $\Delta l = 2\Delta x$, con Δx errore di sensibilità della scala graduata. Come per il metodo precedente si procede al calcolo della media pesata delle lunghezze focali e relativo errore, ottenendo $f \pm \Delta f$.

8.2.4 Variante di Silbermann

Questo metodo è una variante del metodo di Bessel ed è basato sull'utilizzo della soluzione $l = 4f$, che implica lente posizionata a metà distanza sorgente-schermo, ma implica anche ingrandimento $m = 1$. Quindi si procede per approssimazioni successive, utilizzando come sorgente quella estesa, ponendo lo schermo a una distanza $l > 4f$, la lente a metà percorso, e misurando la dimensione dell'immagine. Si sposta poi lo schermo e di conseguenza la lente fino a misurare ingrandimento pari a 1.

8.3 Misura della focale di una lente divergente sottile

Scopo di questa seconda esperienza è la determinazione della lunghezza focale f di una lente divergente biconcava simmetrica per cui vale:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

dove n è l'indice di rifrazione del vetro e r_1 (< 0), r_2 (> 0) sono i raggi di curvatura delle superfici della lente, per cui risulta $f < 0$. Una lente divergente fa divergere un fascio di raggi paralleli al suo asse ottico principale in modo che i prolungamenti dei raggi si incontrino nel punto focale F_1 , cioè in modo che i raggi emergenti, provengano virtualmente da F_1 , che si dice punto focale immagine. F_1 è appunto un fuoco virtuale, in quanto l'immagine del punto all'infinito che la lente divergente forma in F_1 non è reale ma virtuale. I raggi che incidono sulla lente divergente convergendo verso il punto F_2 vengono deviati dalla lente in un fascio di raggi paralleli al suo asse ottico principale. F_2 si dice punto focale oggetto e anch'esso è un fuoco virtuale, in quanto la sorgente puntiforme posta in F_2 che produce, attraverso la lente divergente, un'immagine all'infinito non è un oggetto reale ma virtuale. Per una lente simmetrica F_1 ed F_2 si trovano alla stessa distanza dalla lente. Tale distanza, presa col segno negativo, è la focale della lente divergente.

Per determinare la focale di una lente divergente si possono usare 3 metodi:

- il metodo della divergenza di un fascio collimato
- il metodo dei minimi quadrati
- il metodo dei punti coniugati

In questa esperienza useremo i primi due.

8.3.1 Metodo della divergenza di un fascio collimato

Consideriamo un fascio collimato, avente sezione circolare di diametro d , che incide sulla lente divergente parallelamente al suo asse ottico principale. La lente devia i raggi del fascio cosicché su uno schermo posto a distanza h dalla lente si forma una chiazza circolare di diametro k (Fig. 8.8).

In base alla proprietà di similitudine di due triangoli rettangoli ottenuti attraverso prolungamento all'indietro dei raggi divergenti verso il fuoco F_1 , si dimostra che vale la relazione:

$$f = \frac{d \cdot h}{k - d}$$

Conoscendo d e h , dalla misura di k si risale alla focale f .

8.3. MISURA DELLA FOCALE DI UNALENTE DIVERGENTE SOTTILE

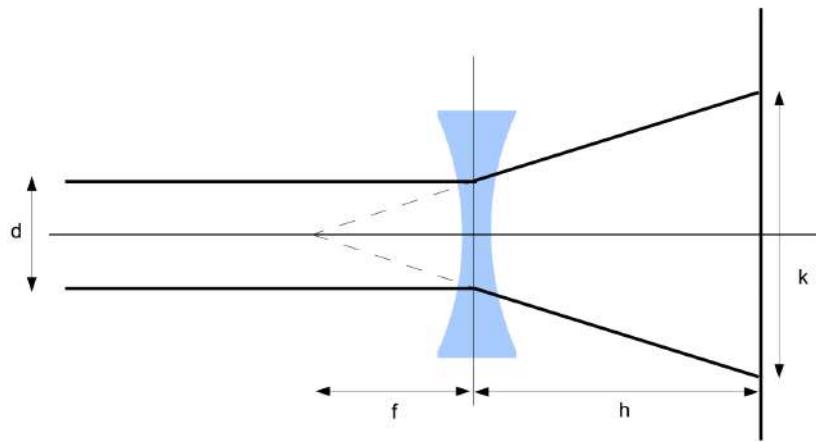


Figura 8.8:

In pratica:

- 1) si inserisce la lente nell'apposito supporto e si provvede a centralizzarla in modo che il centro della lente cada esattamente in corrispondenza della tacca bianca del supporto. Per il centraggio si regola, esattamente come è stato fatto nella prima esperienza, la vite micrometrica del supporto nella posizione di azzeramento indicata sul supporto stesso ($\Delta_{micrometro}$), cui si aggiunge il semispessore massimo della lente $\frac{dr}{2}$
- 2) si inserisce la mascherina puntiforme sul braccio della lanterna e si pone il doppietto acromatico fra la sorgente e la lente divergente, ad una distanza dalla sorgente stessa pari alla sua lunghezza focale, $f_d = 81.83 \pm 0.81$ mm, usando l'apposita sbarretta calibratrice. Il doppietto agisce allora come collimatore, fornendo un fascio di raggi paralleli all'asse ottico
- 3) si inserisce il diaframma con un foro circolare davanti alla lente divergente per lavorare solo con i raggi parassiali e ridurre quindi l'aberrazione sferica. Il diametro del fascio incidente viene allora a coincidere (a meno di difetti di parallelismo e di difetti di circolarità del diaframma) col diametro d del diaframma, che è noto: $d = 10.00 \pm 0.01$ mm
- 4) si pone poi il filtro giallo davanti alla lampada per ridurre l'aberrazione cromatica

CAPITOLO 8. ESPERIENZE

- 5) si pone la lente divergente a una distanza dal doppietto opportunamente piccola, dell'ordine di 10 cm, in modo da ridurre difetti di parallelismo del fascio collimato stesso
- 6) si pone lo schermo ad una certa distanza h dalla lente e si misura il diametro k dello chiazza luminosa che si forma sullo schermo, usando il micrometro per gli spostamenti laterali ed il reticolo tracciato sullo schermo.

Per ogni valore h_i , con $i = 1, \dots, 10$, si effettuano 10 misure ripetute k_{ij} , con $j = 1, \dots, 10$. Si calcola il valore medio e lo scarto quadratico medio di ogni k_i , l'errore massimo associato sarà $\Delta k_i = 3\sigma_{k_i}$. L'errore massimo Δh sarà dato dal doppio dell'errore di sensibilità dell'asta millimetrata e sarà uguale per ogni h_i . Si calcolano poi f_i e Δf_i :

$$f_i = \frac{d \cdot h_i}{k_i - d}$$

$$\Delta f_i = \left| \frac{\partial f_i}{\partial h_i} \right| \Delta h + \left| \frac{\partial f_i}{\partial d} \right| \Delta d + \left| \frac{\partial f_i}{\partial k_i} \right| \Delta k_i = \frac{d}{k_i - d} \Delta h + \frac{h_i k_i}{(k_i - d)^2} \Delta d + \frac{h_i d}{(k_i - d)^2} \Delta k_i$$

Si faccia attenzione di scegliere i valori h_i in modo che sia sempre verificato $k_i(h_i) > 2d$, così da evitare che la propagazione dell'errore sulla misura (indiretta) di f_i sia troppo elevato. Infatti se $k_i \cong d$, l'errore su f_i diverge molto rapidamente.

Si converte Δf_i in σ_{f_i} usando la solita formula $\Delta f_i = 3\sigma_{f_i}$. Si calcola infine la media pesata dei dieci valori della lunghezza focale e il suo errore associato:

$$f = \frac{\sum_{i=1}^{10} w_i f_i}{\sum_{i=1}^{10} w_i} \quad \sigma_f = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10} w_i}} \quad w_i = \left(\frac{1}{\sigma_{f_i}} \right)^2$$

8.3.2 Metodo dei minimi quadrati

Utilizziamo le stesse misure h_i e k_i ottenute col metodo precedente. Riscriviamo la formula della focale in questo modo:

$$k = \left(\frac{d}{f} \right) h + d$$

Abbiamo quindi una retta di pendenza $\frac{d}{f}$ e di intercetta d .

Mettiamo i valori (h_i, k_i) in grafico, con le barre d'errore associate. Utilizziamo il metodo dei minimi quadrati per ricavare pendenza e intercetta e relativi errori. Riportiamo la retta sul grafico e verifichiamo la compatibilità con gli errori delle misure. Infine riportiamo per confronto la retta ottenuta usando il valore noto di d e quello di f calcolato con il metodo precedente.

8.4. MISURA DELL'ABERRAZIONE SFERICA DI UNA LENTE CONVERGENTE SOTTILE

8.4 Misura dell'aberrazione sferica di una lente convergente sottile

L'equazione dei punti coniugati per una lente sottile:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

vale solo in approssimazione di raggi parassiali ossia per angoli di apertura φ piccoli. In tale approssimazione fissato un punto oggetto p sull'asse ottico, q risulta indipendente dall'angolo di apertura φ del raggio considerato e la lente risulta un sistema ottico stigmatico. Andando ad approssimazioni di ordine superiore, invece per un dato p , q dipende anche da φ , e la lente non è più un sistema ottico stigmatico. Per $p \rightarrow \infty$, cioè con un fascio di raggi incidenti paralleli all'asse ottico, raggi parassiali e marginali convergono in fuochi diversi: la distanza focale f_m per i raggi marginali è minore di quella per i raggi parassiali f_p . La distanza fra i due fuochi F_m e F_p , si dice aberrazione sferica principale longitudinale:

$$\overline{F_m F_p} = f_p - f_m = l$$

In approssimazione del terzo ordine, che vuol dire che nell'equazione di Snell i seni degli angoli coinvolti vengono sviluppati secondo la formula di Taylor fino al 3° ordine, l'espressione dell'aberrazione sferica principale longitudinale risulta:

$$l = c \frac{h^2}{f}$$

dove h è il raggio dell'apertura massima del fascio incidente, f la lunghezza focale della lente, c il coefficiente di aberrazione sferica principale:

$$c = \frac{4n^3 - 4n^2 - n + 2}{8n(n-1)^2}$$

Nell'esperienza si usa il filtro giallo, quindi $n = n(\lambda_D)$. A causa della diversa convergenza dei raggi parassiali e marginali, per una sorgente puntiforme all'infinito, sul piano focale corrispondente ai raggi parassiali, i raggi marginali non danno un'immagine puntiforme bensì una chiazza di dimensioni finite. Il diametro di tale spot si chiama aberrazione sferica principale trasversale.

Da considerazioni geometriche tale diametro sarà dato da:

$$t = l \cdot \left(\frac{2h}{f - l} \right)$$

sostituendo in quest'ultima l'espressione di l si ottiene:

CAPITOLO 8. ESPERIENZE

$$t = 2c \frac{h^3}{f(f-l)}$$

Ricordiamo che f che compare in questa formula, come in quella dell'aberrazione sferica principale longitudinale, è uguale alla focale misurata nella prima esperienza e sarà molto maggiore di l , per cui si può fare la seguente approssimazione:

$$f(f-l) \cong f^2$$

Per cui si ottiene una relazione per l'aberrazione sferica trasversale principale indipendente da l :

$$t = 2c \frac{h^3}{f^2}$$

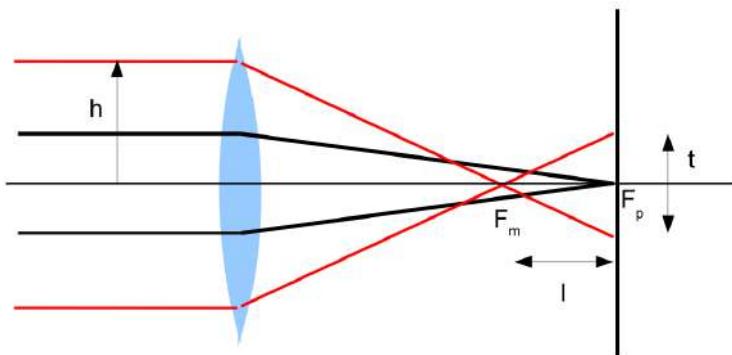


Figura 8.9:

Scopo dell'esperienza è la misura dell'aberrazione sferica principale longitudinale l e trasversale t della lente convergente, e ricavare da queste misure il coefficiente di aberrazione sferica c ottenuto tramite la misura longitudinale (c_l) e trasversale (c_t). Dal confronto si dovrà verificare che sono uguali entro gli errori di misura al valore teorico della costante di aberrazione sferica principale c .

In pratica:

- si avvita la lente nell'apposito cavaliere e la si centra, come per le esperienze precedenti
- si inserisce davanti alla lampada il filtro giallo per ridurre l'aberrazione cromatica
- si inserisce la mascherina puntiforme sul braccio della lanterna, nella solita posizione delle altre esperienze

8.4. MISURA DELL'ABERRAZIONE SFERICA DI UNA LENTE CONVERGENTE SOTTILE

- si pone il doppietto acromatico, avvitato sull'apposito supporto, ad una distanza dalla mascherina (sorgente puntiforme) pari alla sua focale $f = 81.83 \pm 0.81$ mm; tale distanza si può determinare con l'apposita sbarretta calibratrice. Il doppietto funge così da collimatore fornendo un fascio di raggi (in buona approssimazione) paralleli all'asse ottico
- si pone il diaframma D4 davanti alla lente, per poter isolare alternativamente i raggi parassiali e quelli marginali
- si chiudono i fori per i raggi parassiali e si trova, spostando lo schermo, il fuoco F_m dei raggi marginali; si annota la corrispondente lettura l_m del micrometro su nonio circolare per gli spostamenti longitudinali dello schermo
- si chiudono poi i fori per i raggi marginali e si aprono quelli per i parassiali. Spostando lo schermo col micrometro si trova il fuoco dei raggi parassiali F_p ; sia l_p il valore corrispondente sul nonio. La differenza fra l_p e l_m sarà uguale a t
- lasciando lo schermo su F_p si chiudono i fori per i raggi parassiali e si aprono quelli per i marginali. I raggi marginali, sul piano focale formano due punti luminosi distinti, la cui distanza è t . Si misurano le posizioni t_s e t_d dei due punti sfruttando il micrometro per gli spostamenti laterali ed il reticolato tracciato sullo schermo. La differenza tra questi due valori sarà uguale a t
- si sposta poi di nuovo lo schermo col micrometro per gli spostamenti longitudinali fino a ritrovare il fuoco dei marginali F_m

E così via si ripete il procedimento fino ad ottenere 10 determinazioni di l_m , l_p , t_s e t_d . Poiché ci interessano misure differenziali ($l = l_p - l_m$, $t = t_s - t_d$), non occorre dare le posizioni assolute di F_m e F_p (cioè le loro distanze dalla lente f_m ed f_p), ma sono sufficienti le letture relative sul micrometro. L'errore delle singole determinazioni di l_{m_i} , l_{p_i} , t_{s_i} , t_{d_i} , con ($i = 1, 2, \dots, 10$) è dato dall'errore di sensibilità dei due micrometri.

Se il fuoco dei raggi parassiali non è ben definito a causa della profondità di campo della lente stessa, opportuno ottenere l_{p_i} segnandosi la prima posizione del micrometro appena l'immagine sembra a fuoco (intrafocale) e l'ultima posizione poco prima di sfuocare (extrafocale) per poi fare la media aritmetica, in modo da evitare errori sistematici.

A questo punto per ogni i si calcola $l_i = l_{p_i} - l_{m_i}$, dove l_{p_i} è ottenuto come detto poco prima. E si calcola $t_i = |t_{d_i} - t_{s_i}|$. Si calcola poi la media e lo scarto quadratico medio di queste due quantità ottenendo $l \pm \sigma_l$ e $t \pm \sigma_t$.

Dalla teoria sappiamo che:

$$l = c \frac{h^2}{f}$$

CAPITOLO 8. ESPERIENZE

nel nostro caso h , raggio dell'apertura massima del fascio di raggi incidenti, corrisponde alla metà della distanza fra i fori per i raggi marginali del diaframma D_4 , che è nota, cioè $h = 14.00 \pm 0.01$ mm. La distanza focale $f \pm \Delta f$ della lente convergente è stata determinata nella prima esperienza. Dalla determinazione di l si può ricavare indirettamente il coefficiente di aberrazione sferica principale:

$$c_l = \frac{f \cdot l}{h^2}$$

con errore dato da:

$$\Delta c_l = \left| \frac{f}{h^2} \right| \Delta l + \left| \frac{l}{h^2} \right| \Delta f + \left| -\frac{2fl}{h^3} \right| \Delta h$$

dove $\Delta l = 3\sigma_l$ e $\Delta t = 3\sigma_t$.

Sempre dalla teoria sappiamo che:

$$t = 2c \frac{h^3}{f^2}$$

Conoscendo h ed f e misurato t si può ricavare indirettamente e con un'altra relazione, il coefficiente di aberrazione sferica principale:

$$c_t = \frac{t \cdot f^2}{2h^3}$$

con con errore dato da:

$$\Delta c_t = \left| \frac{f^2}{2h^3} \right| \Delta t + \left| \frac{tf}{h^3} \right| \Delta f + \left| -\frac{3tf^2}{2h^4} \right| \Delta h$$

Alla fine si ottengono valori che dovranno essere confrontati tra loro e con il valore teorico di c : $c_l \pm \Delta c_l$ e $c_t \pm \Delta c_t$.

8.5 Misura dell'aberrazione cromatica

Lo scopo di questa esperienza è la determinazione dell'aberrazione cromatica. Dalla teoria, sappiamo che l'indice di rifrazione (n) dipende dalla lunghezza d'onda della radiazione che attraversa il mezzo. In particolare, per mezzi trasparenti come il vetro, n decresce al crescere della lunghezza d'onda:

$$\frac{dn}{d\lambda} < 0 \quad (8.1)$$

Quindi, l'effetto della rifrazione sui raggi incidenti dipende dalla lunghezza d'onda e in particolare verranno deviati maggiormente i raggi a lunghezza d'onda inferiore, rispetto a quelli a lunghezza d'onda maggiore. Questo è alla base dell'effetto di aberrazione cromatica.

8.5. MISURA DELL'ABERRAZIONE CROMATICA

I set di filtri che useremo in laboratorio fanno passare la radiazione con lunghezza d'onda centrata a un certo valore e con un intervallo molto stretto ($< 50\text{\AA}$). I filtri sono:

- filtro blu $\lambda_F = 4861 \text{ \AA}$ (corrispondente alla riga H β dell'idrogeno);
- filtro giallo $\lambda_D = 5892 \text{ \AA}$ (corrispondente al doppietto del sodio);
- filtro rosso $\lambda_C = 6563 \text{ \AA}$ (corrispondente alla riga H α dell'idrogeno).

Definiamo aberrazione cromatica longitudinale (principale) la quantità:

$$A = f_C - f_F = f(\lambda_C) - f(\lambda_F) \quad (8.2)$$

l'errore associato sarà la somma degli errori sulle determinazioni delle due focali:

$$\Delta A = \Delta f_C + \Delta f_F \quad (8.3)$$

Definiamo aberrazione cromatica trasversa la quantità:

$$d = \frac{1}{2} \frac{f_C - f_F}{f_D} D = \frac{1}{2} \frac{A \times D}{f_D} \quad (8.4)$$

l'errore relativo associato sarà dato dalla somma degli errori relativi delle diverse quantità calcolate. Usiamo gli errori relativi perché d è calcolato come rapporto. D è la distanza tra i fori della mascherina che viene usata e vale $D = 5.00 \pm 0.01 \text{ mm}$. Per calcolare le focali si usa il metodo dei punti coniugati:

$$f = \frac{pq}{p+q} \quad (8.5)$$

Praticamente i passi da seguire sono i seguenti:

1. avvitare la lente sul cavaliere portalenti con il micrometro, avendo cura di avvitarla sul lato destro. Centrare la lente regolando la vite micrometrica del supporto nella posizione di azzeramento (segnata sul cavaliere stesso), aggiungendo il semi-spessore della lente ($dr/2$);
2. inserire la mascherina con la sorgente puntiforme;
3. avvitare al cavaliere portalenti il diaframma con i quattro fori, sul lato sinistro, per lavorare con i raggi parassiali;
4. inserire il filtro rosso;
5. posizionare la lente a distanze p_k (con $k = 1, 2, \dots, 10$) dalla sorgente. L'errore Δp_k sarà la somma degli errori di sensibilità della scala graduata agli estremi del segmento p_k . Non posizionare la lente troppo vicina alla sorgente, altrimenti la profondità di campo viene molto grande;
6. spostare lo schermo in modo da trovare il punto in cui i raggi vanno a fuoco, cioè quando i due punti diventano un punto solo. Per ottenere una misura precisa, andrà usato il micrometro per determinare la posizione in cui i raggi vanno a fuoco. A causa della profondità di campo, i raggi non vanno a fuoco in un solo punto, ma in un intervallo. Determinare q_{kj}^{\min} e q_{kj}^{\max} per 5 volte per ogni posizione della lente, sfocando e ritrovando il fuoco ogni volta;

CAPITOLO 8. ESPERIENZE

7. Per ogni posizione della lente, ripetere il procedimento trovando 5 q_{kj}^{\min} e q_{kj}^{\max} nel filtro rosso, giallo e blu;
8. spostare la lente nella posizione successiva e ripetere la procedura fino a ottenere 10 valori di p_k e, per ognuno di essi, i corrispondenti 5 q_{kj}^{\min} e 5 q_{kj}^{\max} per ogni filtro.

Alla fine otteremo 10 valori diversi di p_k . Per ogni valore di p_k , avremo 5 q_{kj}^{\min} e 5 q_{kj}^{\max} nei tre filtri. Calcoliamo ora la media di q_{kj}^{\min} e q_{kj}^{\max} e avremo:

$$\langle q_{kj} \rangle = \frac{q_{kj}^{\min} + q_{kj}^{\max}}{2} \quad (8.6)$$

Poi calcoliamo la media dei $\langle q_{kj} \rangle$:

$$\langle q_k \rangle = \frac{\sum_{j=1}^5 \langle q_{kj} \rangle}{5} \quad (8.7)$$

e gli scarti quadratici medi:

$$\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^5 (\langle q_{kj} \rangle - \langle q_k \rangle)^2}{4}} \quad (8.8)$$

Poi calcoliamo l'errore massimo $\Delta q_k = 3\sigma_k$ Calcoliamo ora la focale nei tre filtri e l'errore associato, per ogni posizione della lente:

$$f_k = \frac{p_k q_k}{p_k + q_k} \quad (8.9)$$

$$\Delta f_k = \left| \frac{\partial f_k}{\partial p_k} \right| \Delta p_k + \left| \frac{\partial f_k}{\partial q_k} \right| \Delta q_k \quad (8.10)$$

Per ricavare il valore della focale per ogni filtro, calcoliamo la media pesata delle focali:

$$f = \frac{\sum_{k=1}^{10} w_k f_k}{\sum_{k=1}^{10} w_k} \quad (8.11)$$

$$\sigma_k = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{10} w_k}} \quad (8.12)$$

con

$$w_k = \left(\frac{1}{\sigma_k} \right)^2$$