Elementos Finitos

Breno Bertone

RA: 250842

Todos os códigos de suporte desse trabalho podem ser encontrados nesse repositório

1 Exercício 1

1.1 Parte (a)

Dado $u_h(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i \phi_i(x)$, substituímos na forma fraca:

$$\int_0^1 [u_h' v_h' + u_h v_h] \, dx = \int_0^1 x v_h \, dx \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h.$$

Escolhendo $v_h = \phi_j$ para $j = 1, 2, \ldots, n$:

$$\int_0^1 \left[\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \phi_i' \right) \phi_j' + \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \phi_i \right) \phi_j \right] dx = \int_0^1 x \phi_j \, dx.$$

Separando as somas e integrando termo a termo:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \left(\int_0^1 \phi_i' \phi_j' \, dx + \int_0^1 \phi_i \phi_j \, dx \right) = \int_0^1 x \phi_j \, dx.$$

Definimos os elementos da matriz A e do vetor $\mathbf{f}$ como:

$$a_{ij} = \int_0^1 \left(\phi_i' \phi_j' + \phi_i \phi_j \right) dx,$$

$$f_j = \int_0^1 x \phi_j \, dx.$$

Assim, podemos escrever o sistema linear na forma matricial:

$$A\mathbf{w} = \mathbf{f},$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tem elementos a_{ij} e $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ tem elementos f_j.

1.2 Parte (B)

Para encontrar a solução aproximada do Problema V usando o Método de Galerkin, precisamos montar as matrizes A e os vetores $\mathbf{f}$ para cada valor de n.

Para $n = 1$:

Usamos $\phi_1(x) = x(x-1)$.

A matriz A e o vetor $\mathbf{f}$ são dados por:

$$A_{1\times 1} = \left[a_{11} \right],$$

$$\mathbf{f}_1 = \left[f_1 \right],$$

Para $n = 2$:
Usamos $\phi_1(x) = x(x-1)$ e $\phi_2(x) = x^2(x-1)$.
A matriz A e o vetor $\mathbf{f}$ são dados por:

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix},$$

Para $n = 3$:
Usamos $\phi_1(x) = x(x-1)$, $\phi_2(x) = x^2(x-1)$ e $\phi_3(x) = x^3(x-1)$.
A matriz A e o vetor $\mathbf{f}$ são dados por:

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix},$$

Para evitar repetição, vamos mostar só os termos de n=3:

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} \frac{11}{30} & \frac{11}{60} & \frac{23}{210} \\ \frac{11}{60} & \frac{1}{7} & \frac{89}{840} \\ \frac{23}{210} & \frac{89}{840} & \frac{113}{1260} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{20} \\ -\frac{1}{30} \end{bmatrix}$$

2 Exercício 2

Na mesma lógica do exercício anterior, vamos omitir as contas para n=1 e n=2

Para $n = 3$:
Usamos $\phi_1(x) = \sin(\pi x)$, $\phi_2(x) = \sin(2\pi x)$ e $\phi_3(x) = \sin(3\pi x)$.
A matriz A e o vetor $\mathbf{f}$ são dados por:

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix},$$

onde:

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2}, \\
a_{12} &= 0, \\
a_{13} &= 0, \\
a_{21} &= a_{12} = 0, \\
a_{22} &= 2\pi^2 + \frac{1}{2}, \\
a_{23} &= 0, \\
a_{31} &= a_{13} = 0, \\
a_{32} &= a_{23} = 0, \\
a_{33} &= 4.5\pi^2 + \frac{1}{2},
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
f_1 &= \int_0^1 x \sin(\pi x)\, dx, \\
f_2 &= \int_0^1 x \sin(2\pi x)\, dx, \\
f_3 &= \int_0^1 x \sin(3\pi x)\, dx.
\end{aligned}
$$

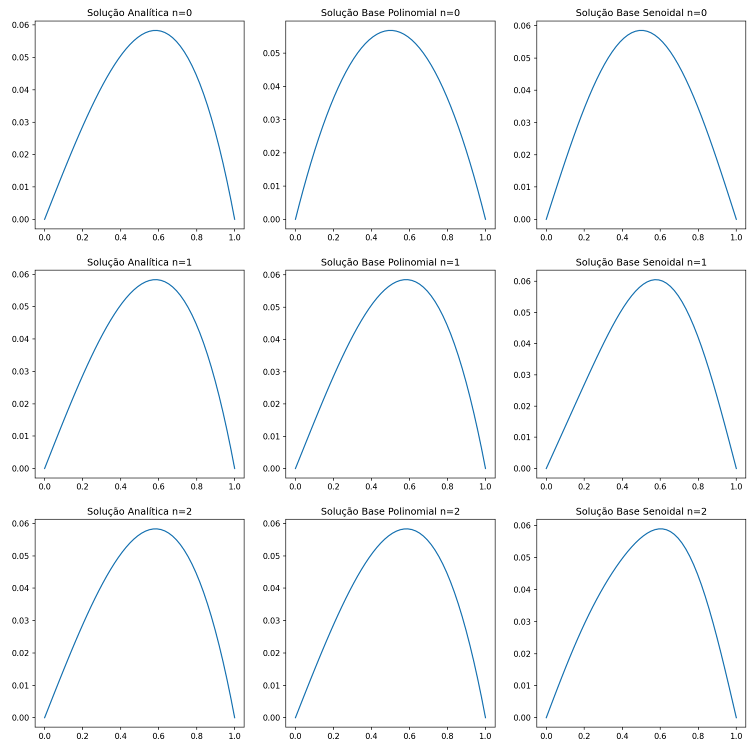
Assim, teremos:

$$
A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + 2\pi^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} + \frac{9\pi^2}{2} \end{bmatrix}
$$

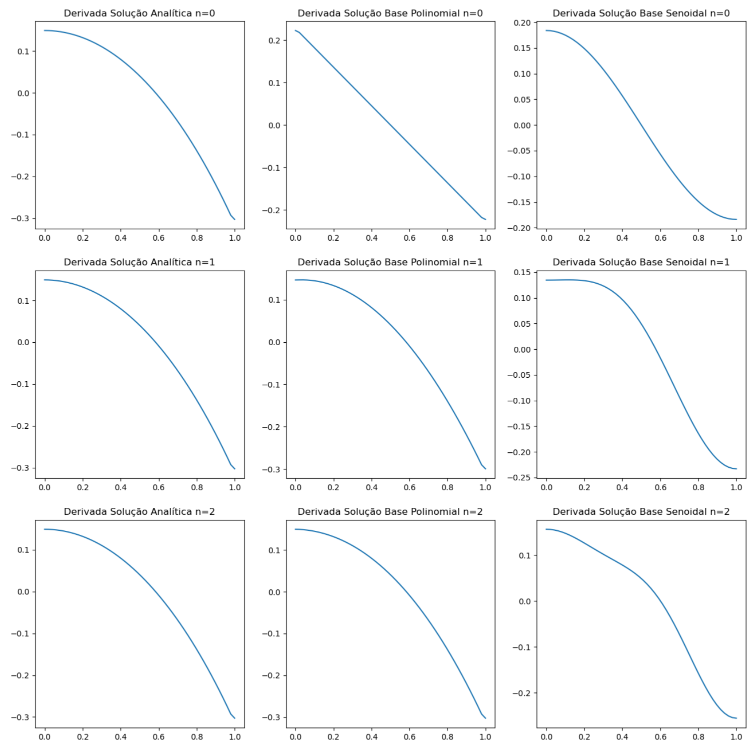
$$
\mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\pi} \\ -\frac{1}{2\pi} \\ \frac{1}{3\pi} \end{bmatrix}
$$

3 Exercício 3

Resolvendo os sistemas lineares definidos nos exercícios anteriores obtemos os seguintes gráficos:



E as derivadas:



4 Exercício 4

4.1 Parte (a)

4.1.1 Cálculo de a_{ij}

Para $\phi_i(x) = x^i(x-1)$ e $\phi_j(x) = x^j(x-1)$, temos:

$$\phi_i(x) = x^i(x-1), \quad \phi_i'(x) = ix^{i-1}(x-1) + x^i,$$

$$\phi_j(x) = x^j(x-1), \quad \phi_j'(x) = jx^{j-1}(x-1) + x^j.$$

O coeficiente a_{ij} é dado por:

$$a_{ij} = \int_0^1 (\phi_i'\phi_j' + \phi_i\phi_j)\, dx.$$

Expandindo $\phi_i'(x)\phi_j'(x)$:

$$\phi_i'(x)\phi_j'(x) = [ix^{i-1}(x-1) + x^i][jx^{j-1}(x-1) + x^j],$$

$$\phi_i'(x)\phi_j'(x) = ijx^{i+j-2}(x-1)^2 + ix^{i+j-1}(x-1) + jx^{i+j-1}(x-1) + x^{i+j}.$$

Calculamos a integral do primeiro termo:

$$\int_0^1 ijx^{i+j-2}(x-1)^2\,dx = ij\left(\frac{1}{i+j+1} - \frac{2}{i+j} + \frac{1}{i+j-1}\right),$$

e dos termos cruzados e constante:

$$(i+j)\left(\frac{1}{i+j+1} - \frac{1}{i+j}\right) + \frac{1}{i+j+1},$$

e da integral sem derivadas:

$$\frac{1}{i+j+3} - 2\frac{1}{i+j+2} + \frac{1}{i+j+1}.$$

Somando todos os termos, obtemos:

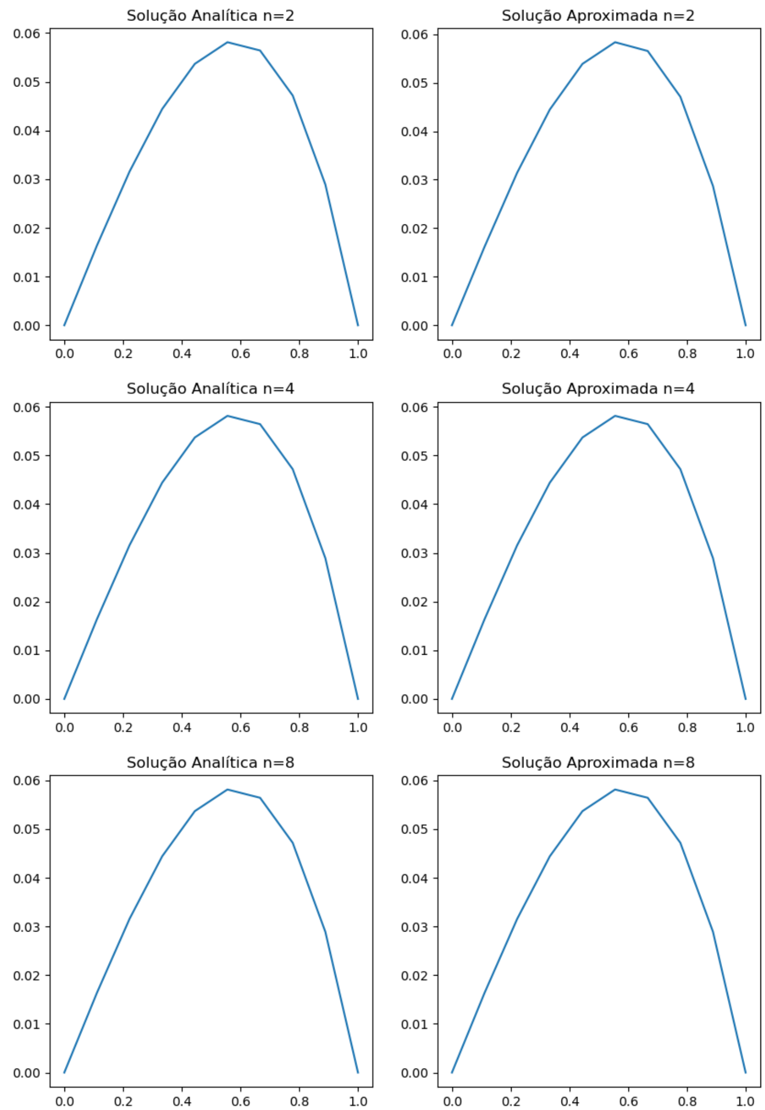
$$a_{ij} = \frac{ij}{i+j-1} - \frac{[(1+i)j + (1+j)i]}{i+j} + \frac{1 + (1+i)(1+j)}{i+j+1} - \frac{2}{i+j+2} + \frac{1}{i+j+3}.$$

4.1.2 Cálculo de f_i

Para f_i, temos:

$$f_i = \int_0^1 x\phi_i(x)\,dx = \int_0^1 x^{i+1}(x-1)\,dx = \frac{1}{i+3} - \frac{1}{i+2}.$$

Calculando esse problema, obtemos os seguintes gráficos:


Solução Analítica n=2
Solução Aproximada n=2
Solução Analítica n=4
Solução Aproximada n=4
Solução Analítica n=8
Solução Aproximada n=8
0.00
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

5 Exercício 5

5.1 Parte (a)

Seja $\phi_i(x) = \sin(i\pi x)$.
Os coeficientes a_{ij} da matriz A são dados por:

$$a_{ij} = \int_0^1 \left(\phi_i'\phi_j' + \phi_i\phi_j\right) dx.$$

Como $\phi_i(x) = \sin(i\pi x)$, temos $\phi_i'(x) = i\pi\cos(i\pi x)$. Então:

$$a_{ij} = \int_0^1 \left((i\pi\cos(i\pi x))(j\pi\cos(j\pi x)) + \sin(i\pi x)\sin(j\pi x)\right) dx.$$

Utilizando as propriedades:

$$\int_0^1 \cos(n\pi x)\cos(m\pi x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ \frac{1}{2}, & \text{se } n = m, \end{cases}$$

$$\int_0^1 \sin(n\pi x)\sin(m\pi x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ \frac{1}{2}, & \text{se } n = m, \end{cases}$$

Para $i = j$, temos:

$$a_{ii} = \int_0^1 \left((i\pi\cos(i\pi x))^2 + \sin^2(i\pi x)\right) dx = i^2\pi^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{i^2\pi^2}{2} + \frac{1}{2}.$$

Para $i \neq j$, temos:

$$a_{ij} = 0.$$

Portanto, a matriz A é diagonal com elementos:

$$a_{ii} = \frac{i^2\pi^2}{2} + \frac{1}{2}.$$

O vetor $\mathbf{f}$ é dado por:

$$f_i = \int_0^1 x\sin(i\pi x)\, dx.$$

Para encontrar a expressão analítica de f_i, integramos por partes:

$$f_i = \left[-\frac{x\cos(i\pi x)}{i\pi}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(i\pi x)}{i\pi}\, dx = 0 + \left[\frac{\sin(i\pi x)}{(i\pi)^2}\right]_0^1 = \frac{1}{(i\pi)^2}.$$

Portanto, temos:

$$f_i = \frac{1}{i^2\pi^2}.$$

Para encontrar w_i, resolvemos o sistema linear $A\mathbf{w} = \mathbf{f}$:

$$\left(\frac{i^2\pi^2}{2} + \frac{1}{2}\right) w_i = \frac{1}{i^2\pi^2},$$

$$w_i = \frac{\frac{1}{i^2\pi^2}}{\frac{i^2\pi^2}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{2}{i^4\pi^4 + i^2\pi^2}.$$

Simplificando:

$$w_i = \frac{2}{i^2\pi^2(i^2\pi^2 + 1)} = \frac{2}{i^2\pi^2(i^2\pi^2 + 1)}.$$

A solução $u_h(x)$ pode ser escrita como:

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i \sin(i\pi x).$$

Substituindo w_i:

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{i^2\pi^2(i^2\pi^2 + 1)} \sin(i\pi x).$$

5.2 Parte (b)

Agora, vamos mostrar que $|w_i| > |w_{i+1}|$ e que $\lim_{i\to\infty} w_i = 0$.
Primeiro, comparamos $|w_i|$ e $|w_{i+1}|$:

$$w_i = \frac{2}{i^2\pi^2(i^2\pi^2 + 1)},$$

$$w_{i+1} = \frac{2}{(i+1)^2\pi^2((i+1)^2\pi^2 + 1)}.$$

Queremos mostrar que:

$$\left|\frac{2}{i^2\pi^2(i^2\pi^2 + 1)}\right| > \left|\frac{2}{(i+1)^2\pi^2((i+1)^2\pi^2 + 1)}\right|.$$

Como $\frac{2}{\pi^2}$ é um fator constante, podemos simplificar a desigualdade para:

$$\frac{1}{i^2(i^2\pi^2 + 1)} > \frac{1}{(i+1)^2((i+1)^2\pi^2 + 1)}.$$

Observe que:

$$i^2 < (i+1)^2 \quad \text{e} \quad i^2\pi^2 + 1 < (i+1)^2\pi^2 + 1.$$

Portanto, temos:

$$i^2(i^2\pi^2 + 1) < (i+1)^2((i+1)^2\pi^2 + 1).$$

Tomando o recíproco de ambos os lados (preservando a desigualdade, já que ambos os lados são positivos):

$$\frac{1}{i^2(i^2\pi^2+1)} > \frac{1}{(i+1)^2((i+1)^2\pi^2+1)},$$

logo:

$$|w_i| > |w_{i+1}|.$$

Agora, mostramos que $\lim_{i\to\infty} w_i = 0$.
Quando i tende ao infinito, o termo dominante no denominador de w_i é $i^4\pi^4$:

$$w_i = \frac{2}{i^2\pi^2(i^2\pi^2+1)} \approx \frac{2}{i^4\pi^4} \quad \text{para } i \text{ grande.}$$

Portanto:

$$w_i \approx \frac{2}{i^4\pi^4}.$$

Como i^4 tende ao infinito quando $i \to \infty$, temos:

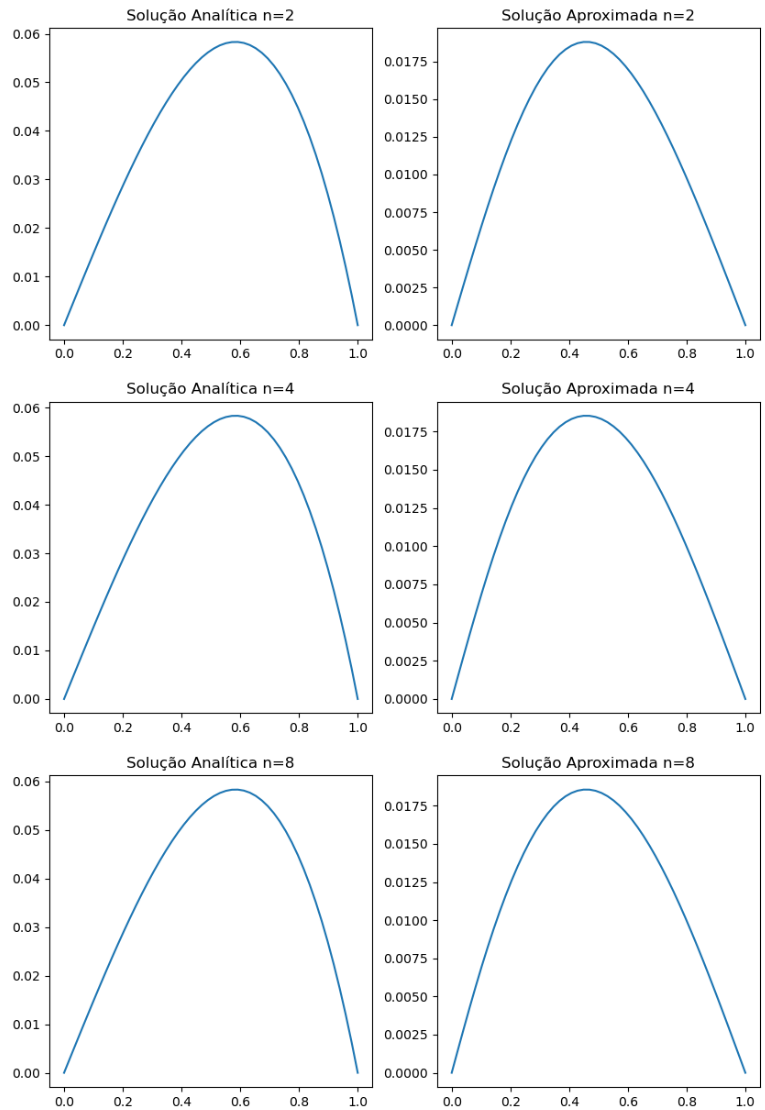
$$\lim_{i\to\infty} \frac{2}{i^4\pi^4} = 0.$$

Assim, mostramos que:

$$\lim_{i\to\infty} w_i = 0.$$

5.3 Parte (c)

Utilizando a expressão de u_h conseguimos calcular diretamente cada um dos casos e obtemos os seguintes gráficos:


Solução Analítica n=2
Solução Aproximada n=2
Solução Analítica n=4
Solução Aproximada n=4
Solução Analítica n=8
Solução Aproximada n=8
0.00
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
0.0000
0.0025
0.0050
0.0075
0.0100
0.0125
0.0150
0.0175
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

6 Exercício 6

6.1 Parte (a)

$$\begin{bmatrix} 1.9e-02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.3e-03 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5e-04 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8.0e-05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.3e-05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6e-05 \end{bmatrix}$$

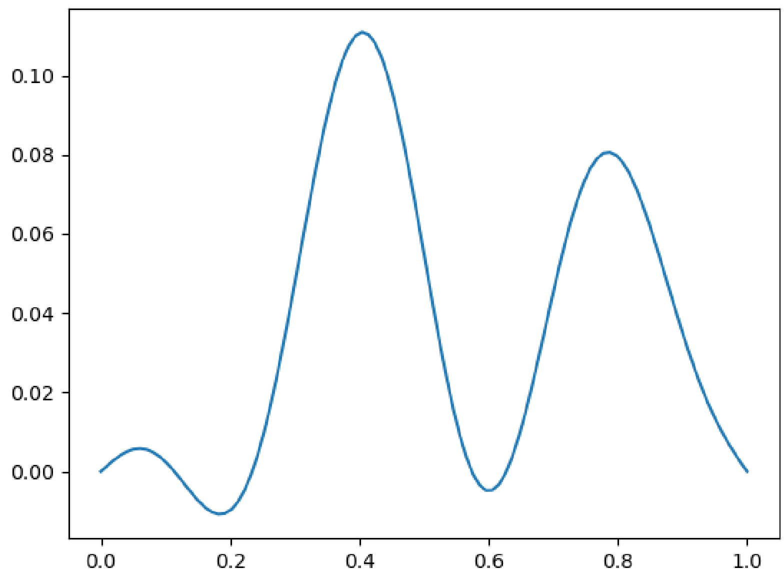
(a) Matriz esperada

$$\begin{bmatrix} 5.4e+00 & 1.4e-16 & -7.8e-16 & 9.9e-16 & -2.1e-16 & 8.5e-16 \\ 1.4e-16 & 2.0e+01 & 1.8e-15 & 1.7e-15 & 1.8e-15 & 4.3e-16 \\ -7.8e-16 & 1.8e-15 & 4.5e+01 & -3.6e-15 & -2.8e-16 & -5.7e-15 \\ 9.9e-16 & 1.7e-15 & -3.6e-15 & 7.9e+01 & 2.8e-16 & 1.7e-15 \\ -2.1e-16 & 1.8e-15 & -2.8e-16 & 2.8e-16 & 1.2e+02 & 8.5e-15 \\ 8.5e-16 & 4.3e-16 & -5.7e-15 & 1.7e-15 & 8.5e-15 & 1.8e+02 \end{bmatrix}$$

(b) Matriz obtida numericamente

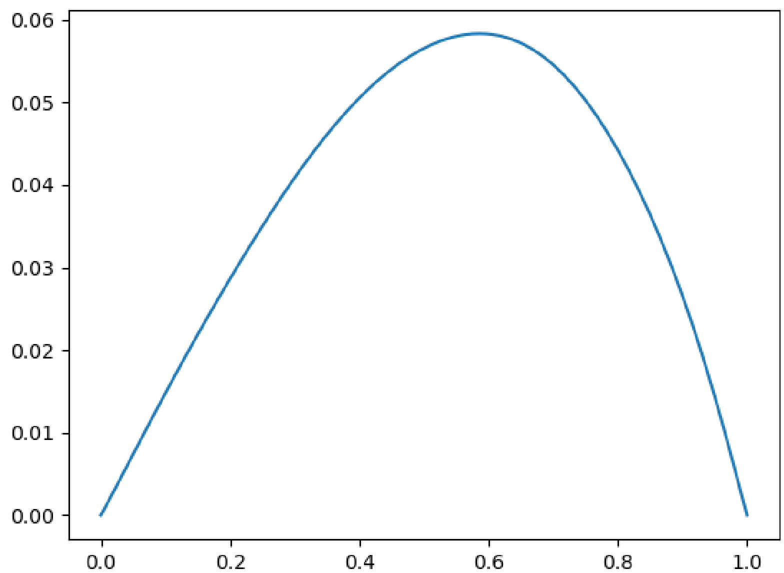
A matriz obtida não é diagonal, apesar da ordem de grandeza dos elementos fora da diagonal principal ser muito menor em comparação aos da diagonal principal. Comparando a diagonal principal das matrizes, podemos ver que a diagonal principal numérica tem ordem de grandeza maior, e ao invés de ser decrescente, é crescente.

E de fato, o gráfico obtido com essa solução não é adequado para esse problema



Função senoidal com integral trapezoidal com 5 pontos

6.2 Parte (b)



Função polinomial com integral trapezoidal com 100 pontos

Nesse caso, a função foi bem aproximada. Isso deve acontecer porque a aproximação da integral calculada com 100 pontos se aproxima muito melhor do valor analítico.

7 Exercício 7

7.1 Parte (a)

$$J[v] = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\alpha(v')^2 + \gamma v^2\right] dx - \int_0^1 v dx.$$

A condição de variação nula do funcional é obtida considerando uma perturbação $v + \epsilon\eta$, onde $\eta \in \mathcal{U}$ é uma função teste arbitrária e ϵ é um parâmetro pequeno. A condição de variação nula é que a derivada de $J[v+\epsilon\eta]$ com respeito a ϵ seja zero em $\epsilon = 0$.

Primeiro, calculamos $J[v + \epsilon\eta]$:

$$J[v + \epsilon\eta] = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\alpha((v + \epsilon\eta)')^2 + \gamma(v + \epsilon\eta)^2\right] dx - \int_0^1 (v + \epsilon\eta)dx.$$

Expandindo e simplificando:

$$J[v+\epsilon\eta] = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\alpha(v'+\epsilon\eta')^2 + \gamma(v+\epsilon\eta)^2\right] dx - \int_0^1 (v+\epsilon\eta)dx.$$

$$J[v+\epsilon\eta] = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\alpha(v'^2 + 2\epsilon v'\eta' + \epsilon^2\eta'^2) + \gamma(v^2 + 2\epsilon v\eta + \epsilon^2\eta^2)\right] dx - \int_0^1 (v+\epsilon\eta)dx.$$

A condição de variação nula é obtida ao tomar a derivada com respeito a ϵ e avaliar em $\epsilon = 0$:

$$\left.\frac{d}{d\epsilon}J[v+\epsilon\eta]\right|_{\epsilon=0} = 0.$$

Calculamos a derivada:

$$\left.\frac{d}{d\epsilon}J[v+\epsilon\eta]\right|_{\epsilon=0} = \int_0^1 \left[\alpha v'\eta' + \gamma v\eta\right] dx - \int_0^1 \eta dx.$$

Portanto, a formulação variacional é encontrar $u \in \mathcal{U}$ tal que:

$$\int_0^1 \left[\alpha u'\eta' + \gamma u\eta\right] dx = \int_0^1 \eta dx \quad \forall \eta \in \mathcal{U}.$$

7.2 Parte (b)

Primeiro, substituímos $v = u + w$ no funcional J:

$$J[u+w] = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\alpha((u+w)')^2 + \gamma(u+w)^2\right] dx - \int_0^1 (u+w)dx.$$

Expandimos os termos dentro da integral:

$$J[u+w] = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\alpha(u'+w')^2 + \gamma(u+w)^2\right] dx - \int_0^1 (u+w)dx.$$

Separando os termos, obtemos:

$$J[u+w] = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\alpha(u'^2 + 2u'w' + w'^2) + \gamma(u^2 + 2uw + w^2)\right] dx - \int_0^1 (u+w)dx.$$

Distribuindo a integral, obtemos:

$$J[u+w] = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\alpha u'^2 + 2\alpha u'w' + \alpha w'^2 + \gamma u^2 + 2\gamma uw + \gamma w^2\right] dx - \int_0^1 udx - \int_0^1 wdx.$$

Reorganizando os termos, temos:

$$J[u+w] = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\alpha u'^2 + \gamma u^2\right] dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\alpha w'^2 + \gamma w^2\right] dx + \int_0^1 \left[\alpha u'w' + \gamma uw\right] dx - \int_0^1 udx - \int_0^1 wdx.$$

Utilizando a formulação variacional que encontramos anteriormente, sabemos que u minimiza J, logo, a primeira variação é nula:

$$\int_0^1 [\alpha u'\eta' + \gamma u\eta]\, dx = \int_0^1 \eta dx \quad \forall \eta \in \mathcal{U}.$$

Escolhendo $\eta = w$, temos:

$$\int_0^1 [\alpha u'w' + \gamma uw]\, dx = \int_0^1 wdx.$$

Portanto, a expressão para $J[u+w]$ se simplifica para:

$$J[u+w] = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\alpha u'^2 + \gamma u^2\right] dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\alpha w'^2 + \gamma w^2\right] dx + \int_0^1 wdx - \int_0^1 udx - \int_0^1 wdx.$$

Os termos $\int_0^1 wdx$ se cancelam, restando:

$$J[u+w] = J[u] + \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\alpha w'^2 + \gamma w^2\right] dx.$$

Como $\alpha > 0$ e $\gamma \geq 0$, o termo $\frac{1}{2}\int_0^1 \left[\alpha w'^2 + \gamma w^2\right] dx \geq 0$.
Portanto:

$$J[u+w] \geq J[u].$$

7.3 Parte (c)

A equação de Euler-Lagrange para um funcional da forma:

$$J[v] = \int_a^b L(x, v, v')\, dx$$

é dada por:

$$\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial v'}\right) = 0.$$

Para o nosso problema, o lagrangiano L é:

$$L(x, v, v') = \frac{1}{2}\left[\alpha(v')^2 + \gamma v^2\right] - v.$$

Calculamos as derivadas parciais:

$$\frac{\partial L}{\partial v} = \gamma v - 1,$$

$$\frac{\partial L}{\partial v'} = \alpha v'.$$

Calculamos a derivada total com respeito a x:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial v'}\right) = \alpha v''.$$

Substituímos na equação de Euler-Lagrange:

$$\gamma v - 1 - \alpha v'' = 0,$$

ou seja,

$$\alpha v'' - \gamma v = -1.$$

Portanto, a equação de Euler-Lagrange para o Problema M é:

$$\alpha u'' - \gamma u = -1.$$

Para resolver esta equação diferencial, consideramos a equação homogênea associada:

$$\alpha u'' - \gamma u = 0.$$

A solução geral da equação homogênea é:

$$u_h(x) = C_1 e^{\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}x}.$$

Para a equação completa, procuramos uma solução particular u_p:

$$\alpha u_p'' - \gamma u_p = -1.$$

Tentamos uma solução particular constante $u_p = A$:

$$-\gamma A = -1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{\gamma}.$$

Portanto, a solução geral da equação diferencial é:

$$u(x) = C_1 e^{\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}x} + \frac{1}{\gamma}.$$

Aplicamos as condições de contorno $u(0) = 1$ e $u(1) = 0$:
1. Para $u(0) = 1$:

$$C_1 + C_2 + \frac{1}{\gamma} = 1.$$

2. Para $u(1) = 0$:

$$C_1 e^{\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}} + \frac{1}{\gamma} = 0.$$

Resolvendo este sistema de equações lineares para C_1 e C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 - \frac{1}{\gamma}, \\ C_1 e^{\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}} = -\frac{1}{\gamma}. \end{cases}$$

E assim determinamos as contantes:

$$C_1 = \frac{e^{-\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}}\left(-\frac{1}{\gamma}\right) - (1-\frac{1}{\gamma})e^{-\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}}}{e^{\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}} - e^{-\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}}},$$

$$C_2 = \frac{e^{\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}}\left(-\frac{1}{\gamma}\right) - (1-\frac{1}{\gamma})e^{\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}}}{e^{-\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}} - e^{\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}}}.$$

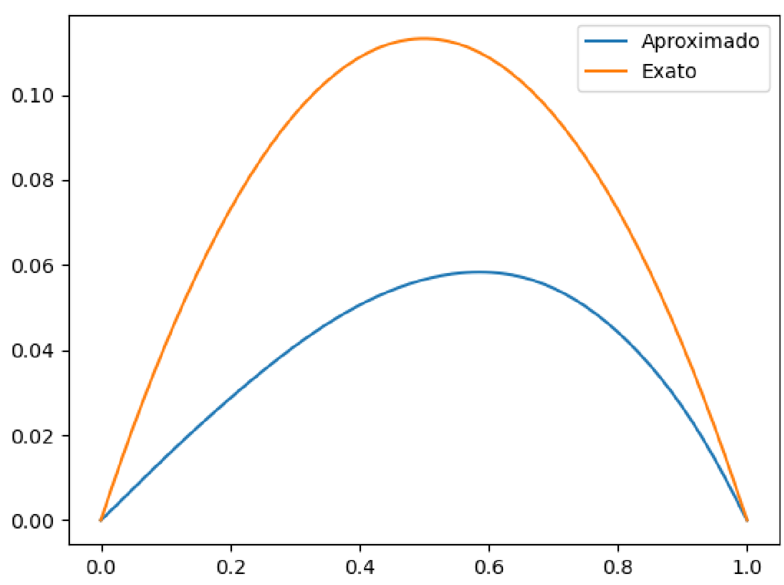
8 Exercício 8

Para resolver a equação de Euler-Lagrange para os casos dados:
1. $\alpha = 1$, $\gamma = 1$ 2. $\alpha = 1 \times 10^{-5}$, $\gamma = 1$
A equação de Euler-Lagrange é:

$$\alpha u'' - \gamma u = -1$$

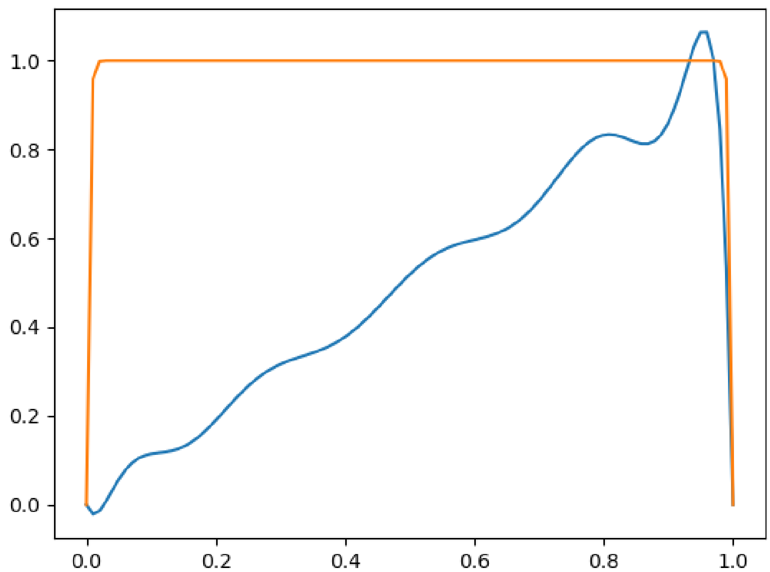
Caso (a): $\alpha = 1$, $\gamma = 1$

$$u(x) = \frac{-e^{1-x} - e^{x} + 1 + e}{1 + e}$$



Caso (b): $\alpha = 1 \times 10^{-5}$, $\gamma = 1$

$$u(x) = \frac{-e^{-100\sqrt{10}(x-1)} - e^{100\sqrt{10}x} + 1 + e^{100\sqrt{10}}}{1 + e^{100\sqrt{10}}}$$



9 Exercício 9

9.1 Parte (a)

Primeiro, calculamos $J[u + \epsilon\eta]$:

$$J[u+\epsilon\eta] = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\alpha|\nabla(u+\epsilon\eta)|^2 + \gamma(u+\epsilon\eta)^2\right] d\Omega - \int_\Omega f(u+\epsilon\eta)d\Omega - \int_{\Gamma_N} g(u+\epsilon\eta)d\Gamma.$$

Expandindo e simplificando:

$$J[u+\epsilon\eta] = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\alpha(|\nabla u|^2 + 2\epsilon\nabla u\cdot\nabla\eta + \epsilon^2|\nabla\eta|^2) + \gamma(u^2 + 2\epsilon u\eta + \epsilon^2\eta^2)\right] d\Omega - \int_\Omega f(u+\epsilon\eta)d\Omega - \int_{\Gamma_N} g(u+\epsilon\eta)d\Gamma.$$

A condição de variação nula é obtida ao tomar a derivada com respeito a ϵ e avaliar em $\epsilon = 0$:

$$\frac{d}{d\epsilon}J[u+\epsilon\eta]\bigg|_{\epsilon=0} = 0.$$

Calculamos a derivada:

$$\frac{d}{d\epsilon}J[u+\epsilon\eta]\bigg|_{\epsilon=0} = \int_\Omega \left[\alpha\nabla u\cdot\nabla\eta + \gamma u\eta\right] d\Omega - \int_\Omega f\eta d\Omega - \int_{\Gamma_N} g\eta d\Gamma.$$

Portanto, a formulação variacional é encontrar $u \in \mathcal{U}$ tal que:

$$\int_\Omega [\alpha \nabla u \cdot \nabla \eta + \gamma u \eta] \, d\Omega = \int_\Omega f \eta d\Omega + \int_{\Gamma_N} g \eta d\Gamma \quad \forall \eta \in \mathcal{U}.$$

9.2 Parte (b)

Para o nosso problema, o lagrangiano L é:

$$L(u, \nabla u) = \frac{1}{2} \left[\alpha |\nabla u|^2 + \gamma u^2 \right] - fu - gu \quad \text{em} \quad \Gamma_N.$$

Calculamos as derivadas parciais:

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \gamma u - f,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \nabla u} = \alpha \nabla u.$$

Calculamos a divergência:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial L}{\partial \nabla u} \right) = \nabla \cdot (\alpha \nabla u) = \alpha \Delta u \quad (\text{onde} \quad \Delta = \nabla \cdot \nabla \text{ é o operador Laplaciano}).$$

Substituímos na equação de Euler-Lagrange:

$$\gamma u - f - \alpha \Delta u = 0.$$

Portanto, a equação de Euler-Lagrange é:

$$\alpha \Delta u - \gamma u + f = 0.$$

Forma Forte

Para encontrar a forma forte equivalente, incluindo as condições de contorno, reescrevemos a equação diferencial juntamente com as condições de contorno. Consideramos a equação:

$$\alpha \Delta u - \gamma u + f = 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Condições de Contorno

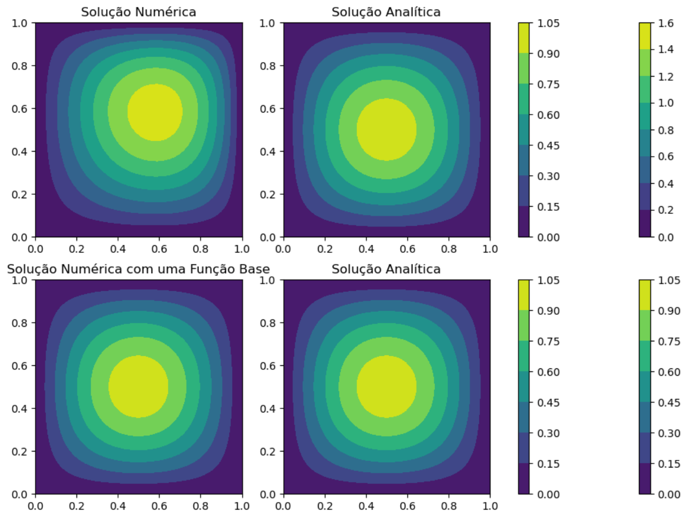
1. **Condição de Dirichlet**: $u = 0$ em Γ_D. 2. **Condição de Neumann**: $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ em Γ_N, onde $\frac{\partial u}{\partial n}$ representa a derivada normal de u na fronteira Γ_N.

Equação Completa

Portanto, a forma forte do problema é:

$$\begin{cases} \alpha \Delta u - \gamma u + f = 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{em} \quad \Gamma_D, \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{em} \quad \Gamma_N. \end{cases}$$

10 Exercício 10



Podemos observar que a base de uma função se aproximou melhor da solução analítica. Isso se deve ao fato de que essa função tem o formato da solução analítica, enquanto que as bases polinomiais não tem.

11 Exercício 11

11.1 Parte (b)

Para um elemento linear com dois nós, utilizamos as funções de forma padrão:

$$\phi_1(x) = 1 - x, \quad \phi_2(x) = x, \quad \text{para} \quad x \in [0,1].$$

A matriz de rigidez K é dada por:

$$K_{ij} = \int_0^1 (\alpha \phi_i' \phi_j' + \gamma \phi_i \phi_j)\, dx.$$

Calculamos os elementos de K:

1. K_{11}:

$$K_{11} = \int_0^1 (\alpha \phi_1' \phi_1' + \gamma \phi_1 \phi_1)\, dx = \int_0^1 (\alpha(-1)(-1) + \gamma(1-x)^2)\, dx = \alpha \int_0^1 1\, dx + \gamma \int_0^1 (1-2x+x^2)\, dx.$$

$$K_{11} = \alpha\, [x]_0^1 + \gamma \left[x - x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \alpha(1-0) + \gamma \left(1 - 1 + \frac{1}{3} \right) = \alpha + \frac{\gamma}{3}.$$

2. K_{12} e K_{21}:

$$K_{12} = \int_0^1 (\alpha\phi_1'\phi_2' + \gamma\phi_1\phi_2)\,dx = \int_0^1 (\alpha(-1)(1) + \gamma(1-x)x)\,dx = -\alpha\int_0^1 1\,dx + \gamma\int_0^1 (x-x^2)\,dx.$$

$$K_{12} = -\alpha\,[x]_0^1 + \gamma\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = -\alpha(1-0) + \gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = -\alpha + \frac{\gamma}{6}.$$

$$K_{21} = K_{12}.$$

3. K_{22}:

$$K_{22} = \int_0^1 (\alpha\phi_2'\phi_2' + \gamma\phi_2\phi_2)\,dx = \int_0^1 (\alpha(1)(1) + \gamma x^2)\,dx = \alpha\int_0^1 1\,dx + \gamma\int_0^1 x^2\,dx.$$

$$K_{22} = \alpha\,[x]_0^1 + \gamma\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \alpha(1-0) + \gamma\frac{1}{3} = \alpha + \frac{\gamma}{3}.$$

Portanto, a matriz de rigidez K é:

$$K = \begin{bmatrix} \alpha + \frac{\gamma}{3} & -\alpha + \frac{\gamma}{6} \\ -\alpha + \frac{\gamma}{6} & \alpha + \frac{\gamma}{3} \end{bmatrix}.$$

O vetor de carga F é dado por:

$$F_i = \int_0^1 \phi_i\,dx.$$

Calculamos os elementos de F:

1. F_1:

$$F_1 = \int_0^1 (1-x)\,dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

2. F_2:

$$F_2 = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Portanto, o vetor de carga F é:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

11.2 Parte (b)

Para um elemento quadrático com três nós, utilizamos as funções de forma padrão:

$$\phi_1(x) = 2(x-0.5)(x-1), \quad \phi_2(x) = -4x(x-1), \quad \phi_3(x) = 2x(x-0.5), \quad \text{para} \quad x \in [0,1].$$

A matriz de rigidez K é dada por:

$$K_{ij} = \int_0^1 (\alpha \phi_i' \phi_j' + \gamma \phi_i \phi_j)\, dx.$$

Para simplificar, podemos calcular os elementos de K e F utilizando uma abordagem numérica (por exemplo, quadratura de Gauss). Aqui eu utilizei uma biblioteca de matemática simbólica, o sympy, para calcular essa matriz, e obtive:

$$K = \begin{bmatrix} 2.3 * alpha + 0.13 * gamma & -2.7 * alpha + 0.067 * gamma & 0.33 * alpha - 0.033 * gamma \\ -2.7 * alpha + 0.067 * gamma & 5.3 * alpha + 0.53 * gamma & -2.7 * alpha + 0.067 * gamma \\ 0.33 * alpha - 0.033 * gamma & -2.7 * alpha + 0.067 * gamma & 2.3 * alpha + 0.13 * gamma \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0.17 \\ 0.67 \\ 0.17 \end{bmatrix}$$

12 Exercício 12

Para uma partição uniforme do domínio $\Omega = (0, 1)$ em n elementos finitos lineares, temos $x_i = \frac{i}{n}$, para $i = 0, 1, \ldots, n$.

Funções de forma lineares

Para cada elemento $\Omega_i = (x_i, x_{i+1})$, as funções de forma lineares são:

$$\phi_i(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, \quad \phi_{i+1}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}.$$

Matriz de rigidez local

Para calcular a matriz de rigidez local K^e em cada elemento Ω_i, utilizamos:

$$K_{ij}^e = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\alpha \phi_i' \phi_j' + \gamma \phi_i \phi_j)\, dx.$$

As derivadas das funções de forma são constantes em cada elemento:

$$\phi_i' = -\frac{1}{h}, \quad \phi_{i+1}' = \frac{1}{h}, \quad \text{onde} \quad h = \frac{1}{n}.$$

Portanto, temos:

$$K^e = \begin{bmatrix} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\alpha \left(-\frac{1}{h}\right) \left(-\frac{1}{h}\right) + \gamma \left(\frac{x_{i+1}-x}{h}\right) \left(\frac{x_{i+1}-x}{h}\right) \right) dx & \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\alpha \left(-\frac{1}{h}\right) \left(\frac{1}{h}\right) + \gamma \left(\frac{x_{i+1}-x}{h}\right) \left(\frac{x-x_i}{h}\right) \right) dx \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\alpha \left(\frac{1}{h}\right) \left(-\frac{1}{h}\right) + \gamma \left(\frac{x-x_i}{h}\right) \left(\frac{x_{i+1}-x}{h}\right) \right) dx & \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\alpha \left(\frac{1}{h}\right) \left(\frac{1}{h}\right) + \gamma \left(\frac{x-x_i}{h}\right) \left(\frac{x-x_i}{h}\right) \right) dx \end{bmatrix}.$$

Após simplificação, obtemos:

$$K^e = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{h} + \frac{\gamma h}{3} & -\frac{\alpha}{h} + \frac{\gamma h}{6} \\ -\frac{\alpha}{h} + \frac{\gamma h}{6} & \frac{\alpha}{h} + \frac{\gamma h}{3} \end{bmatrix}.$$

Vetor de carga local

Para o vetor de carga local F^e, temos:

$$F_i^e = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i \, dx.$$

Calculamos os elementos de F^e:

$$F^e = \begin{bmatrix} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x_{i+1}-x}{h} \, dx \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x-x_i}{h} \, dx \end{bmatrix}.$$

Após simplificação, obtemos:

$$F^e = \begin{bmatrix} \frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} \end{bmatrix}.$$

Montagem da matriz global

A matriz de rigidez global K é montada somando as contribuições dos elementos locais K^e nos graus de liberdade correspondentes:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{h} + \frac{\gamma h}{3} & -\frac{\alpha}{h} + \frac{\gamma h}{6} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\alpha}{h} + \frac{\gamma h}{6} & 2\left(\frac{\alpha}{h} + \frac{\gamma h}{3}\right) & -\frac{\alpha}{h} + \frac{\gamma h}{6} & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha}{h} + \frac{\gamma h}{6} & 2\left(\frac{\alpha}{h} + \frac{\gamma h}{3}\right) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\frac{\alpha}{h} + \frac{\gamma h}{6} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha}{h} + \frac{\gamma h}{6} & \frac{\alpha}{h} + \frac{\gamma h}{3} \end{bmatrix}.$$

Vetor de carga global

O vetor de carga global F é montado somando as contribuições dos elementos locais F^e:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{h}{2} \\ h \\ h \\ \vdots \\ h \\ \frac{h}{2} \end{bmatrix}.$$

Conclusão

A matriz de rigidez resultante é tridiagonal, com os seguintes coeficientes:

$$K_{ii} = 2\left(\frac{\alpha}{h} + \frac{\gamma h}{3}\right) \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

$$K_{i,i+1} = K_{i+1,i} = -\frac{\alpha}{h} + \frac{\gamma h}{6} \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

O vetor de carga tem os seguintes coeficientes:

$$F_1 = F_n = \frac{h}{2}, \quad F_i = h \quad \text{para} \quad i = 2, \ldots, n-1.$$

13 Exercício 13

Para encontrar a equação de Euler-Lagrange do Problema V, consideramos a formulação variacional:

$$\int_0^1 (\alpha u' v' + uv)\, dx = \int_0^1 v\, dx \quad \forall v \in \mathcal{U},$$

onde $\mathcal{U} = H_0^1(0,1)$.

A equação de Euler-Lagrange associada a este problema é obtida aplicando o método das variações. O funcional associado é:

$$J[u] = \frac{1}{2}\int_0^1 (\alpha u'^2 + u^2)\, dx - \int_0^1 u\, dx.$$

A equação de Euler-Lagrange para um funcional da forma:

$$J[u] = \int_a^b L(x, u, u')\, dx$$

é dada por:

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial u'}\right) = 0.$$

Para o nosso problema, o Lagrangiano L é:

$$L(u, u') = \frac{1}{2}(\alpha u'^2 + u^2) - u.$$

Calculamos as derivadas parciais:

$$\frac{\partial L}{\partial u} = u - 1,$$

$$\frac{\partial L}{\partial u'} = \alpha u'.$$

Calculamos a derivada total com respeito a x:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial u'}\right) = \alpha u''.$$

Substituímos na equação de Euler-Lagrange:

$$u - 1 - \alpha u'' = 0,$$

ou seja,

$$\alpha u'' - u = -1.$$

Portanto, a equação de Euler-Lagrange é:

$$\alpha u'' - u = -1.$$

Que tem como solução:

$$u(x) = -\frac{1}{e^{\sqrt{\frac{1}{\alpha}}} - e^{-\sqrt{\frac{1}{\alpha}}}} e^{\sqrt{\frac{1}{\alpha}}x} + \left(-1 + \frac{1}{e^{\sqrt{\frac{1}{\alpha}}} - e^{-\sqrt{\frac{1}{\alpha}}}}\right) e^{-\sqrt{\frac{1}{\alpha}}x} + 1.$$