(a) Encontre a equação de Euler-Lagrange do Problema V e determine sua solução analítica considerando $\gamma = 1$.

Resposta:

Para encontrar a equação de Euler-Lagrange do Problema V, consideramos a formulação variacional:

$$\int_0^1 (\alpha u' v' + uv)\, dx = \int_0^1 v\, dx \quad \forall v \in \mathcal{U},$$

onde $\mathcal{U} = H_0^1(0,1)$.

A equação de Euler-Lagrange associada a este problema é obtida aplicando o método das variações. O funcional associado é:

$$J[u] = \frac{1}{2}\int_0^1 (\alpha u'^2 + u^2)\, dx - \int_0^1 u\, dx.$$

A equação de Euler-Lagrange para um funcional da forma:

$$J[u] = \int_a^b L(x, u, u')\, dx$$

é dada por:

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial u'}\right) = 0.$$

Para o nosso problema, o Lagrangiano L é:

$$L(u, u') = \frac{1}{2}(\alpha u'^2 + u^2) - u.$$

Calculamos as derivadas parciais:

$$\frac{\partial L}{\partial u} = u - 1,$$

$$\frac{\partial L}{\partial u'} = \alpha u'.$$

Calculamos a derivada total com respeito a x:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial u'}\right) = \alpha u''.$$

Substituímos na equação de Euler-Lagrange:

$$u - 1 - \alpha u'' = 0,$$

ou seja,

$$\alpha u'' - u = -1.$$

Portanto, a equação de Euler-Lagrange é:

$$\alpha u'' - u = -1.$$

Solução Analítica

Para resolver esta equação diferencial, consideramos a equação homogênea associada:

$$\alpha u'' - u = 0.$$

A solução geral da equação homogênea é:

$$u_h(x) = C_1 e^{\sqrt{\frac{1}{\alpha}}x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{1}{\alpha}}x}.$$

Para a equação completa, procuramos uma solução particular u_p:

$$\alpha u_p'' - u_p = -1.$$

Tentamos uma solução particular constante $u_p = A$:

$$-A = -1 \quad \Rightarrow \quad A = 1.$$

Portanto, a solução geral da equação diferencial é:

$$u(x) = C_1 e^{\sqrt{\frac{1}{\alpha}}x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{1}{\alpha}}x} + 1.$$

Aplicamos as condições de contorno $u(0) = 0$ e $u(1) = 0$:

1. Para $u(0) = 0$:

$$C_1 + C_2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = -1.$$

2. Para $u(1) = 0$:

$$C_1 e^{\sqrt{\frac{1}{\alpha}}} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{1}{\alpha}}} + 1 = 0.$$

Resolvendo este sistema de equações lineares para C_1 e C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -1, \\ C_1 e^{\sqrt{\frac{1}{\alpha}}} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{1}{\alpha}}} = -1. \end{cases}$$

Vamos resolver este sistema:

$$C_1 = \frac{-1 - e^{-\sqrt{\frac{1}{\alpha}}}(-1)}{e^{\sqrt{\frac{1}{\alpha}}} - e^{-\sqrt{\frac{1}{\alpha}}}} = -\frac{1}{e^{\sqrt{\frac{1}{\alpha}}} - e^{-\sqrt{\frac{1}{\alpha}}}},$$

$$C_2 = -1 - C_1 = -1 + \frac{1}{e^{\sqrt{\frac{1}{\alpha}}} - e^{-\sqrt{\frac{1}{\alpha}}}}.$$

Portanto, a solução é:

$$u(x) = -\frac{1}{e^{\sqrt{\frac{1}{\alpha}}} - e^{-\sqrt{\frac{1}{\alpha}}}} e^{\sqrt{\frac{1}{\alpha}}x} + \left(-1 + \frac{1}{e^{\sqrt{\frac{1}{\alpha}}} - e^{-\sqrt{\frac{1}{\alpha}}}}\right) e^{-\sqrt{\frac{1}{\alpha}}x} + 1.$$