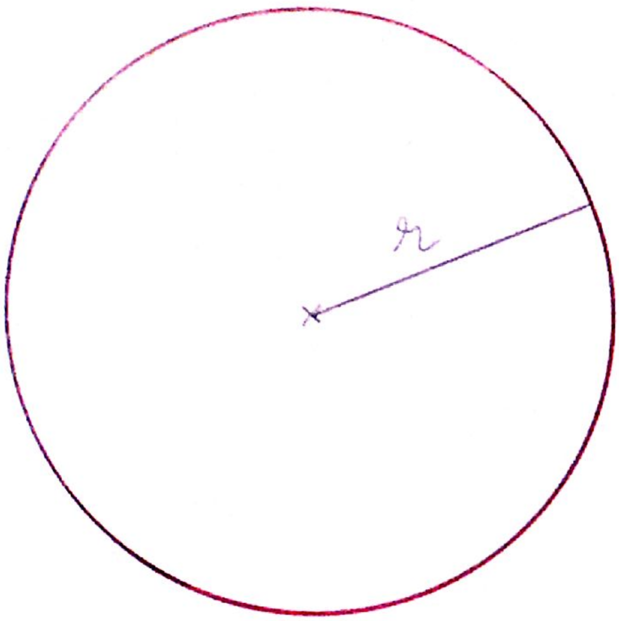
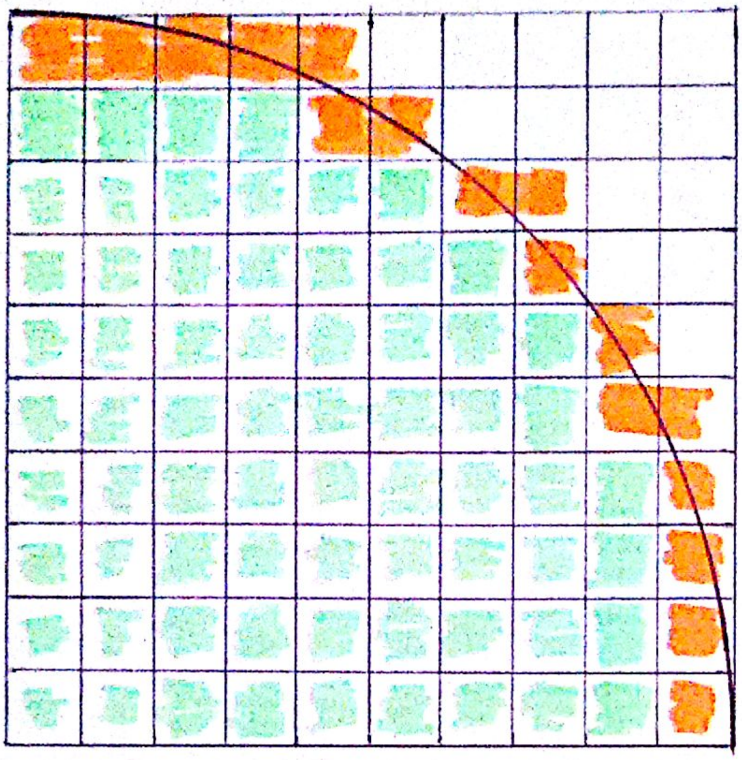
On note Π_D la valeur de Pi servant à calculer l'aire d'un disque $\Pi_D r^2$, où r désigne le rayon du disque.



Puis, on considère un quart de disque de rayon $r = n$, où n est un nombre entier. Sur la figure qui suit $n = 10$.



Alors, on colorie en vert les carrés qui sont à l'intérieur du quart de disque, et en orange ceux qui sont traversés par le quart de cercle.

Le quart de disque est évidemment plus vaste que l'ensemble des carrés verts, mais moins vaste que la surface couverte par les carrés verts et oranges. On note $\mathcal{A}_v$ l'aire totale des carrés verts, et $\mathcal{A}_o$ l'aire totale des carrés oranges. On a donc

$$\mathcal{A}_v \leqslant \frac{1}{4} \pi_\mathcal{D} r^2 \leqslant \mathcal{A}_v + \mathcal{A}_o$$

Nous cherchons maintenant à majorer $\mathcal{A}_6$. Tous les petits carrés sont de côté 1, donc leur aire vaut à chaque fois $1^2 = 1$. Donc $\mathcal{A}_6$ n'est autre que le nombre de carrés oranges.

Mais à chaque fois que le quart de cercle traverse un carré cela veut dire qu'il traverse un de ses côtés, vertical ou horizontal. Or le quart de cercle ne peut rencontrer plus de n lignes horizontales et n lignes verticales. Donc

$$\mathcal{A}_6 \leq 2n$$

Sur le dessin par exemple on a $n = 10$ et $\mathcal{A}_b = 17$.

Donc

$$\mathcal{A}_v \leq \frac{1}{4} \pi_D n^2 \leq \mathcal{A}_v + 2n$$

La multiplication par quatre maintient les inégalités donc

$$4\mathcal{A}_v \leq \pi_D n^2 \leq 4\mathcal{A}_v + 8n$$

Puis on divise partout par n^2 d'où

$$\boxed{\frac{4\mathcal{A}_v}{n^2} \leq \pi_D \leq \frac{4\mathcal{A}_v}{n^2} + \frac{8}{n}}$$

Scanned by CamScanner

Le résultat précédent est très important. Il signifie que si je sais calculer $\frac{4\, ctb_n}{n^2}$ alors je sais calculer π_D à $\frac{8}{n}$ près.

Pour le dessin de la figure précédente cela donne (pour $n = 10$)

$$\frac{4 \times 69}{10^2} \leq \pi_D \leq \frac{4 \times 69}{10^2} + \frac{8}{10}$$

$$2,76 \leq \pi_D \leq 2,76 + 0,8$$

$$2,76 \leq \pi_D \leq 3,56$$

Scanned by CamScanner

Pour $n = 800\,000$

on obtient

$$3{,}14159 \leq \frac{\pi}{2} \leq 3{,}14160$$